2.3 Método de Newton y sus extensiones

Isaac Newton (1641–1727) fue uno de los científicos más brillantes de todos los tiempos. El final del siglo XVII fue un periodo vibrante para la ciencia y las matemáticas, y el trabajo de Newton tocó casi todos los aspectos de esta última ciencia. Se presentó su método de resolución para encontrar la raíz de la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$. A pesar de que demostró el método sólo para polinomios, es claro que conocía sus aplicaciones más amplias.

El **método de Newton** (o de *Newton-Raphson*) es uno de los métodos numéricos más poderosos y reconocidos para resolver un problema de encontrar la raíz. Existen muchas formas de presentar el método de Newton.

Método de Newton

Si sólo queremos un algoritmo, podemos considerar la técnica de manera gráfica, como a menudo se hace en cálculo. Otra posibilidad es derivar el método de Newton como una técnica para obtener convergencia más rápida de lo que ofrecen otros tipos de iteración funcional, como hacemos en la sección 2.4. Una tercera forma para presentar el método de Newton, que se analiza a continuación, está basada en los polinomios de Taylor. Ahí observaremos que esta forma particular no sólo produce el método, sino también una cota para el error de aproximación.

Joseph Raphson (1648–1715) proporcionó una descripción del método atribuido a Isaac Newton en 1690 y reconoció a Newton como la fuente del descubrimiento. Ni Newton ni Raphson utilizaron explícitamente la derivada en su descripción ya que ambos sólo consideraron polinomios. Otros matemáticos, en especial James Gregory (1636–1675), estaban conscientes del proceso subyacente en esa época o antes.

Suponga que $f \in C^2[a, b]$. Si $p_0 \in [a, b]$ es una aproximación para p, de tal forma que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ es "pequeño". Considere que el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de p_0 y evaluado en $x = p$:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p)),$$

donde $\xi(p)$ se encuentra entre p y p_0. Puesto que $f(p) = 0$, esta ecuación nos da

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p)).$$

El método de Newton se deriva al suponer que como $|p - p_0|$ es pequeño, el término relacionado con $(p - p_0)^2$ es mucho más pequeño, entonces

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0).$$

Al resolver para p obtenemos

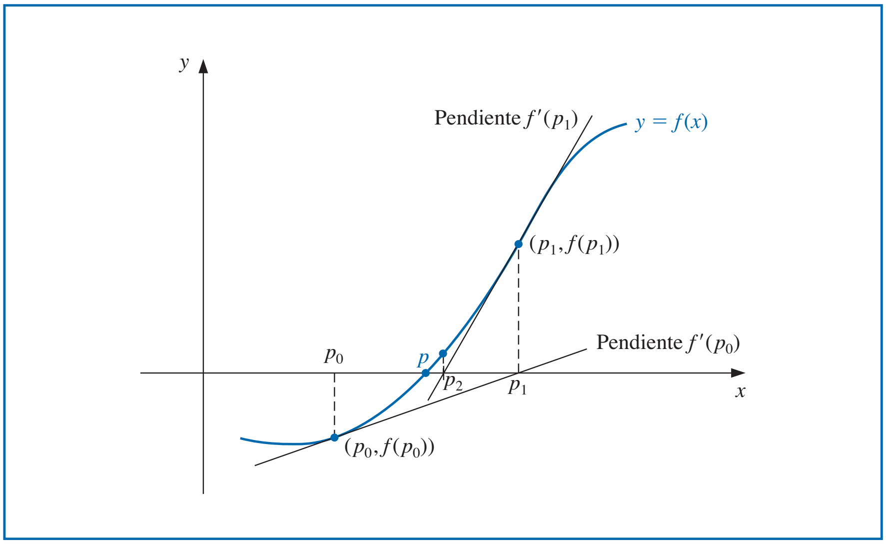
$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

Esto constituye la base para el método de Newton, que empieza con una aproximación inicial p_0 y genera la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, mediante

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \geq 1. \tag{2.7}$$

La figura 2.7 ilustra cómo se obtienen las aproximaciones usando tangentes sucesivas. (Además observe el ejercicio 31.) Al empezar con la aproximación inicial p_0, la aproximación p_1 es la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de f en $(p_0, f(p_0))$. La aproximación p_2 es la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica f en $(p_1, f(p_1))$ y así sucesivamente. El algoritmo 2.3 implementa este procedimiento.

Figura 2.7



ALGORITMO
2.3

Método de Newton

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial p_0:

ENTRADA aproximación inicial p_0 tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0

SALIDA solución aproximada p o mensaje de falla.

Paso 1 Determine $i = 1$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga los pasos 3–6.

Paso 3 Determine $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (*Calcule* p_i.)

Paso 4 Si $|p - p_0| < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*El procedimiento fue exitoso*.)
PARE.

Paso 5 Determine $i = i + 1$.

Paso 6 Determine $p_0 = p$. (*Actualizce* p_0.)

Paso 7 SALIDA (‘El método falló después de N_0 iteraciones, N_0 =’, N_0);
(*El procedimiento no fue exitoso*.)
PARE.

Las desigualdades de la técnica de parada determinadas con el método de bisección son aplicables al método de Newton. Es decir, seleccione una tolerancia $\varepsilon > 0$ y construya p_1, …, p_N hasta que

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon, \tag{2.8}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0, \tag{2.9}$$

o

$$|f(p_N)| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Una forma de la desigualdad (2.8) se usa en el paso 4 del algoritmo 2.3. Observe que ninguna de las desigualdades (2.8), (2.9) o (2.10) dan información precisa sobre el error real $|p_N - p|$. (Consulte los ejercicios 19 y 20 en la sección 2.1).

El método de Newton es una técnica de iteración funcional con $p_n = g(p_{n-1})$, para la que

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \geq 1. \tag{2.11}$$

De hecho, esta es la técnica de iteración funcional que se usó para proporcionar la convergencia rápida que vimos en la columna e) de la tabla 2.2 en la sección 2.2.

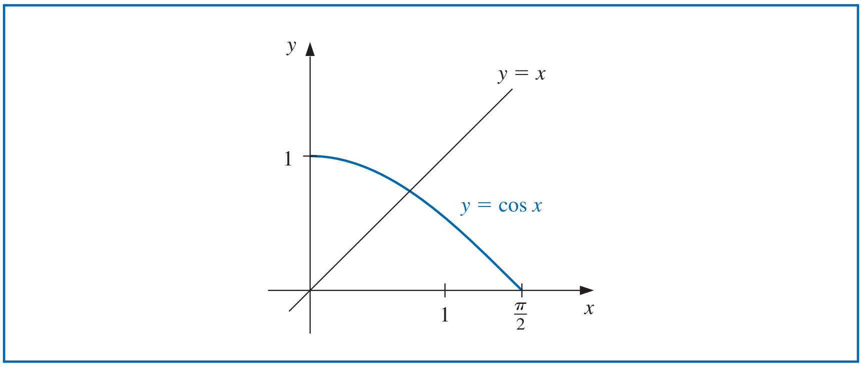
A partir de la ecuación (2.7) es claro que el método de Newton no se puede continuar si $f'(p_{n-1}) = 0$ para alguna n. De hecho, observaremos que el método es más eficaz cuando f' está acotada lejos de cero y cerca de p.

Ejemplo 1 Considere la función $f(x) = \cos x - x = 0$. Aproxime una raíz de f usando **a)** el método de punto fijo y **b)** el método de Newton.

Solución **a)** Una solución para este problema de encontrar la raíz también es una solución para el problema de punto fijo $x = \cos x$, y la gráfica en la figura 2.8 implica que un solo punto fijo p se encuentra en $[0, \pi/2]$.

Observe que la variable en la función trigonométrica está medida en radianes, no grados. Éste siempre será el caso a menos que se especifique lo contrario.

Figura 2.8



La tabla 2.3 muestra los resultados de la iteración de punto fijo con $p_0 = \pi/4$. Lo mejor que podríamos concluir a partir de estos resultados es que $p \approx 0.74$.

b) Para aplicar el método de Newton a este problema, necesitamos $f'(x) = -\text{sen}\, x - 1$. Al iniciar de nuevo en $p_0 = \pi/4$, tenemos

Tabla 2.3

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 - \frac{p_0}{f'(p_0)} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\cos(\pi/4) - \pi/4}{-\,\text{sen}(\pi/4) - 1} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}/2 - \pi/4}{-\sqrt{2}/2 - 1} \\
&= 0.7395361337 \\
p_2 &= p_1 - \frac{\cos(p_1) - p_1}{-\,\text{sen}(p_1) - 1} \\
&= 0.7390851781
\end{aligned}$$

Nosotros generamos continuamente la sucesión mediante

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\,\text{sen}\, p_{n-1} - 1}.$$

Esto nos da las aproximaciones en la tabla 2.4. Se obtiene una excelente aproximación con $n = 3$. Debido a la cercanía de p_3 y p_4, podríamos esperar razonablemente que este resultado sea preciso con los decimales enumerados. ■

Tabla 2.4

Método de Newton

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Convergencia con el método de Newton

El ejemplo 1 muestra que el método de Newton puede dar aproximaciones en extremo precisas con muy pocas iteraciones. Para ese ejemplo, sólo se necesitó una iteración del método de Newton para dar una precisión mayor que las siete iteraciones del método de punto fijo. Ahora es momento de examinar el método de Newton para descubrir porqué es tan eficaz.

La derivación del método de Newton por medio de la serie de Taylor al inicio de la sección señala la importancia de una aproximación inicial precisa. La suposición crucial es que el término relacionado con $(p - p_0)^2$ es, en comparación con $|p - p_0|$, tan pequeño que se puede eliminar. Claramente esto será falso a menos que p_0 sea una buena aproximación para p. Si p_0 no está suficientemente cerca de la raíz real, existen pocas razones para sospechar que el método de Newton convergerá en la raíz. Sin embargo, en algunos casos, incluso las malas aproximaciones iniciales producirán convergencia. (Los ejercicios 15 y 16 ilustran algunas de las posibilidades.)

El siguiente teorema de convergencia para el método de Newton ilustra la importancia teórica de la selección de p_0.

Teorema 2.6 Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $p \in (a, b)$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe una $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demostración La prueba se basa en el análisis del método de Newton como un esquema de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$, con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Sea k un número entre $(0, 1)$. Primero encontramos un intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ que g mapea en sí mismo y para el cual $|g'(x)| \le k$ para todas las $x \in (p-\delta, p+\delta)$.

Ya que f' es continua y $f'(p) \neq 0$, la parte a) del ejercicio 30 en la sección 1.1 implica que existe una $\delta_1 > 0$, tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1] \subseteq [a, b]$. Por lo tanto, g está definida y es continua en $[p-\delta_1, p+\delta_1]$. Además,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

para $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$ y, puesto que $f \in C^2[a, b]$, tenemos $g \in C^1[p-\delta_1, p+\delta_1]$.

Por hipótesis, $f(p) = 0$ por lo que

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0.$$

Puesto que g' es continua y $0 < k < 1$, la parte b) del ejercicio 30 en la sección 1.1 implica que existe δ, con $0 < \delta < \delta_1$, para el cual

$$|g'(x)| \le k, \qquad \text{para todas las } x \in [p-\delta, p+\delta].$$

Falta probar que g mapea $[p-\delta, p+\delta]$ en $[p-\delta, p+\delta]$. Si $x \in [p-\delta, p+\delta]$, el teorema de valor medio implica que para algún número ξ entre x y p, $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p|$. Por lo tanto,

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \le k|x-p| < |x-p|.$$

Puesto que $x \in [p-\delta, p+\delta]$, se sigue que $|x-p| < \delta$ y que $|g(x) - p| < \delta$. Por lo tanto, g mapea $[p-\delta, p+\delta]$ en $[p-\delta, p+\delta]$.

Ahora, se satisfacen todas las hipótesis del teorema de punto fijo 2.4, por lo que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \ge 1,$$

converge a p para cualquier $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$. ■

El teorema 2.6 establece que, de acuerdo con suposiciones razonables, el método de Newton converge, siempre que se seleccione una aproximación inicial suficientemente exacta. También implica que la constante k que acota la derivada de g y, por consiguiente, indica que la velocidad de convergencia del método disminuye a 0, conforme el procedimiento continúa. Este resultado es importante para la teoría del método de Newton, pero casi nunca se aplica en la práctica porque no nos dice cómo determinar δ.

En una aplicación práctica, se selecciona una aproximación inicial y se generan aproximaciones sucesivas con el método de Newton. Ya sea que éstos converjan rápidamente a la raíz o será claro que la convergencia es poco probable.