Matemáticas financieras

Armando Mora Zambrano

Ayudas adicionales en el

3ª edición

Alfaomega

Find your solutions manual here!

Matemáticas financieras

3ª edición

Matemáticas financieras

Armando Mora Zambrano

3ª edición

Alfaomega

Editor:
Luis Javier Buitrago D.

Diseño de cubierta y finalización:
Juan Carlos Vera Garzón

Corrección de estilo:
Gonzalo de Jesús Franco

Datos catalográficos

Mora, Armando
Matemáticas financieras
Tercera Edición
Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-958-682-746-1

Formato: 17 x 23 cm — Páginas: 280

Matemáticas financieras
Armando Mora Zambrano

Tercera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, septiembre 2009

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-958-682-746-1

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5089-7740 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Carrera 15 No. 64 A 29 – PBX (57-1) 2100122, Bogotá, Colombia,
Fax: (57-1) 6068648 – E-mail: scliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – General del Canto 370-Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 – Fax: (56-2) 235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. “11”, Buenos Aires, Argentina,
C.P. 1057 – Tel.: (54-11) 4811-7183 / 8352, E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar

Agradecimientos

En esta tercera edición internacional, reitero mi dedicatoria a mi esposa Anita, a mis hijos Santiago y Francisco, a mis compañeros docentes y estudiantes de la Universidad Central del Ecuador, Escuela Politécnica del Ejército, Escuela Politécnica Nacional, Escuela Politécnica del Litoral, Universidad Técnica Particular de Loja, Pontificia Universidad Católica, Universidades de Ambato, Cuenca, Machala, Universidad Eloy Alfaro de Manabí, Universidad Espíritu Santo de Guayaquil y todas las demás Universidades e Institutos Superiores del Ecuador, así como también a los colegios que tienen formación en Administración, Comercio y Contabilidad. Es necesario destacar un agradecimiento especial a las Universidades de Latinoamérica que han acogido esta obra, elaborada con amor, paciencia, constancia, iniciativa y creatividad.

Una especial mención merecen en esta dedicatoria la Corporación para el Desarrollo de la Educación Universitaria (programa RTACII*), el Banco Central del Ecuador, la Bolsa de Valores, el Colegio Luis Napoleón Dillon y demás instituciones y personas que de alguna manera me motivaron y apoyaron para escribir esta nueva edición.*

El autor

Armando Mora Zambrano es Ingeniero Comercial, Master en Administración de Empresas, MBA., ecuatoriano, profesor universitario en Universidades de prestigio, con más de treinta años de experiencia como docente y profesional. Consultor, asesor y conferencista sobre temas relacionados con las Matemáticas Financieras. Investigador permanente de asuntos relacionados con el contenido del texto, por lo que cada nueva edición trae innovaciones en el cálculo financiero.
Es una persona que se realiza al compartir conocimientos, a sus lectores y estudiantes, tanto en el texto como en sus clases.
Usted puede comunicarse con él al correo electrónico: armoraz@hoy.net

Mensaje del editor

Los conocimientos son esenciales para el buen desempeño de los profesionales. Éstos les permiten adquirir habilidades indispensables para competir laboralmente. Durante el paso por la universidad o por las instituciones de formación para el trabajo, se tiene una gran oportunidad de adquirir conocimientos, que debe ser aprovechada para más tarde cosechar en beneficio propio y en el de quienes nos rodean.

El avance de la ciencia y de la técnica hace necesario mantener conocimientos actualizados, a riesgo de perder competitividad laboral y, eventualmente, bienestar. Cuando se toma la decisión de capacitarse para actuar como trabajadores profesionales, se firma un compromiso de por vida con los conocimientos que conforman un oficio específico.

Alfaomega se ocupa de presentarles a los lectores los conocimientos dentro de lineamientos pedagógicos, que faciliten su utilización y les ayuden a aprender y a desarrollar las competencias requeridas por una profesión determinada. Así mismo, combina las diferentes tecnologías de la información y las comunicaciones (IT) para facilitar su aprendizaje. **Alfaomega** espera ser su compañera de por vida en este viaje por el **conocimiento**.

Nuestros libros están complementados por una página Web, en donde el alumno y su profesor encontrarán materiales adicionales, información actualizada, tests de autoevaluación, diapositivas y vínculos con otros sitios Web relacionados. Visualmente, las obras contienen numerosos gráficos, tablas y párrafos cortos bien desarrollados, para que el estudiante "navegue" durante su estudio, facilitándole la comprensión y la apropiación del **conocimiento**.

Los libros de **Alfaomega** están diseñados para ser utilizados dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje, y pueden ser usados como textos guía del curso o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional. Cada capítulo tiene objetivos y metas cognitivas concretas, la estructura de relato es fácilmente comprensible, al final de cada capítulo se encuentran actividades pedagógicas, además de extensa bibliografía, palabras clave y resumen.

Alfaomega desea que cuando el acervo cognitivo conjuntamente con el desarrollo de las destrezas le permitan ser profesional exitoso(a), no olvide su responsabilidad social y así lograr conjuntamente construir un país mejor.

Cómo es este libro

Este libro está diseñado especialmente para que el lector pueda abordar sin ayuda los conceptos básicos de las Matemáticas financieras, ejercitarse y evaluar su propio aprendizaje. A tal fin, los capítulos se encuentran organizados del siguiente modo: Inicia con el desarrollo de los conceptos del capítulo. Éstos van acompañados por problemas y situaciones –denominados justamente "Ejemplos"– que están destinados a ilustrar las nociones explicadas. A continuación, se proponen Actividades de ejercitación y Actividades de autoevaluación con sus respectivas respuestas para mejor control del aprendizaje. El capítulo termina con una sección de Actividades de repaso, donde se revisan los conceptos aprendidos para que el lector pueda avanzar al siguiente capítulo.

Se incorporan algunos conceptos y explicaciones fundamentales sobre el tema de Seguros.

Al final del libro un Anexo presenta las tablas fundamentales para facilitar el cálculo de los problemas de las Matemáticas financieras.

Finalmente, el lector puede completar su preparación y manejar con fluidez las operaciones a través de la página Web diseñada específicamente para esta obra. Cabe destacar la incorporación de la capitalización continua, como forma de cálculo y su respectivo manejo mediante las tasas de interés, en el interés compuesto y anualidades.

CD de apoyo

El CD que acompaña este libro, cuenta con importantes ayudas que le permitirán trabajar simultáneamente los ejercicios y ejemplos planteados en el libro.

www.alfaomega.com.co

Este libro fue hecho gracias al esfuerzo de muchas personas que sacrificaron su tiempo, su autoría y su capital para que fuera posible como una obra que enriquecerá el conocimiento de muchos estudiosos del tema. Igualmente, Usted ha invertido en la compra de este ejemplar, porque es conciente de la inmensa riqueza intelectual que aporta un libro original, no lo facilite para la fotocopia.

Contenido

Lista de fórmulas

I Generalidades

Presentación

Antes de desarrollar los temas de este libro, es conveniente y aconsejable realizar un breve repaso de conocimientos de matemáticas básicas, en especial de aquellos que se utilizarán con más frecuencia en el texto: el porcentaje, la depreciación, los logaritmos, las progresiones y sus correspondientes aplicaciones. Este breve repaso conceptual y práctico facilitará la comprensión del resto de esta obra.

Objetivo general

- Lograr que el estudiante esté en condiciones apropiadas de asimilar el contenido de las matemáticas financieras.

Objetivos específicos

- Conocer y aplicar el concepto de porcentaje.
- Efectuar aplicaciones reales de porcentaje en descuentos.
- Aplicar conceptos básicos de depreciación.
- Aplicar logaritmos a las variables *n* e *i*.
- Revisar conceptos de progresiones.
- Repasar ecuaciones básicas.

CONTENIDO

Porcentaje

Con el término *porcentaje* o *tanto por ciento* se conoce la proporcionalidad que se establece en relación con cada cien unidades. Consiste en relacionar una cantidad con respecto a 100 y se expresa con el símbolo %.
Cualquier número expresado en forma decimal puede ser escrito como porcentaje, colocando simplemente el punto decimal dos lugares a la derecha y agregando el símbolo %.[1]
Entonces:

- 5% significa 5 unidades de cada 100. Se expresa $\frac{5}{100} = 0{,}05$
- 50% significa 50 unidades de cada 100
- 0,5% significa tomar 0,5 unidades de cada 100
- $\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$; $\frac{50}{100} = 0{,}5 = 50\%$; $\frac{0{,}5}{100} = 0{,}005 = 0{,}5\%$

El 100% de una cantidad es la misma cantidad, pues se toma su totalidad. Es decir, el 100% de 50 es 50.
Existe también el *tanto por ciento fraccionario* que se utiliza con frecuencia en las tasas de interés. Veamos:

- $3\frac{1}{5} = 3{,}2\% = 0{,}032$
- $1\frac{1}{8} = 1{,}125\% = 0{,}01125$
- $10\frac{1}{4}\% = 10{,}25\% = 0{,}1025$
- $11\frac{1}{16}\% = 11{,}0625\% = 0{,}110625$
- $9\frac{5}{16}\% = 9{,}3125\% = 0{,}093125$

Cómo calcular porcentajes

Se estudiarán los dos procedimientos más utilizados:

1) Dado un porcentaje respecto de una cantidad, se trata de encontrar el valor resultante. En este caso se utiliza la regla de tres simple o se multiplica directamente la cantidad por el porcentaje, expresado en forma decimal: así

[1] Ayres, Frank Jr., *Matemáticas financieras*. Teoría y 500 problemas resueltos, México, McGraw-Hill, 1971, p. 8.

el 10% de 900 por regla de 3 simple, será:

900 —— 100%
x —— 10%

$$x = \frac{(900)(10)}{100} = 90$$

Directamente: (900)(0,10) = 90

2) Dada la cantidad resultante, ahora es necesario encontrar el porcentaje respecto de una cantidad. En este caso también se utiliza la regla de tres simple, o se divide la cantidad dada entre la resultante multiplicada por cien, como podemos apreciar a continuación:

¿Qué porcentaje de 500 en 60?

a) 500 - 100%
60 - x%

$$x = \frac{(60)(100)}{500} = 12\%$$

¿De qué cantidad es 60 el 12%?

b) 60 - 12%
x - 100%

$$x = \frac{60\ (100)}{12} = 500$$

Aplicaciones

Las aplicaciones más comunes del porcentaje se dan en los siguientes casos: el descuento por compra al contado, el descuento por compra al contado con aplicación de impuestos, el cálculo de porcentaje del precio de costo y el cálculo del porcentaje sobre el precio de venta.

Descuento por compra al contado

Si queremos calcular el valor de la factura de venta de una cocina cuyo precio de lista es de \$ 350, sobre el cual se está ofreciendo el 12% de descuento por venta al contado, llevamos a cabo el siguiente procedimiento

Primero:

\$ 350	precio de lista
– 42	12% descuento (350)(0,12)
\$ 308	valor de la factura

Segundo:

\$ 350(1 – 0,12) = \$ 308

Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos

Para calcular el valor de la factura de venta de un refrigerador cuyo precio de lista es de \$ 480, sobre el aval se ofrece el 15% de descuento por compra al contado y, además, se le debe aplicar el 10% de impuestos a las ventas, el procedimiento es el siguiente:

Primero:

$ 480,00	precio de lista
– 72,00	15% descuento (480)(0,15)
$ 408,00	precio con descuento
+ 40,80	10% impuesto a las ventas (408)(0,10)
$ 448,80	

Segundo:

480,00(1 – 0,15) = $ 408,00

408,00(1 + 0,10) = $ 448,80

Cálculo del porcentaje del precio de costo

Si un comerciante desea calcular el precio de venta de un producto cuyo precio de costo es de $ 25,00 y del cual desea obtener un beneficio del 20%, debe realizar el siguiente procedimiento:

Primero:

Precio de venta = Precio de costo + utilidad

Precio de venta = 25,00 + 25,00(0,20)

Precio de venta = 25,00 + 5,00

Precio de venta = $ 30,00

Segundo:

Precio de venta = 25,00(1 + 0,20) = $ 30,00

Ahora para expresar la utilidad hallada en el problema anterior como porcentaje del precio de costo y del precio de venta, tenemos:

Porcentaje sobre el precio de costo:

25,00 —— 100%

5,00 —— x%

$$x = \frac{(5)(100)}{25} = 20\%$$

Porcentaje sobre el precio de venta:

30,00 —— 100%

5,00 —— x %

$$x = \frac{(5)(100)}{30} = 16,67\%$$

Cálculo del porcentaje sobre el precio de venta

Con frecuencia, los comerciantes utilizan este procedimiento para calcular el precio de venta al cliente.

Por ejemplo, si se quiere calcular el precio de un par de zapatos que tiene un costo de $ 12,00 y se busca una utilidad del 25% sobre el precio de venta, se realiza el siguiente procedimiento:

Precio de venta (PV) = Precio de costo (PC) + Utilidad

PV – Utilidad = PC
PV – [0,25(PV)] = 12,00
PV(1 – 0,25) = 12,00
PV(0,75) = 12,00

$$PV = \frac{12,00}{0,75} = \$16,00$$

Utilidad = PV – PC = 16,00 – 12,00 = $ 4,00

Depreciación

"Es la pérdida de valor de un bien o activo (maquinaria, edificio, equipos, etc.), que sufren debido al uso, desgaste u otros factores."[2]
"La depreciación es el proceso por el cual un activo disminuye su valor y utilidad con el uso y/o con el tiempo."[3]
Para reemplazar el activo al fin de su vida útil, se establece un fondo, separando periódicamente cierta cantidad que debe ser igual al costo del reemplazo. Para comprender mejor qué es la depreciación, se presentan algunas definiciones de los elementos que intervienen en ella.
Vida útil*:* Es la duración probable de un bien o activo; se estima con base en la experiencia e informes de expertos o fabricantes.
Costo inicial*:* Valor del bien o activo en la fecha de compra.
Valor de salvamento o valor residual: Valor que conserva el bien cuando ha dejado de ser útil.
Cargo por depreciación*:* Depósitos periódicos que se realizan en el fondo para depreciación.

Métodos de depreciación

Existen diferentes métodos de depreciación, clasificados en *métodos de depreciación contables* y *métodos de depreciación económica*.

Métodos de depreciación contables
Se ajustan a la legislación vigente del país en que se apliquen: disposiciones normativas, leyes, reglamentos y otras, referidas a la depreciación y a las declaraciones de impuestos. Son fáciles de aplicar, no toman en cuenta los costos financieros ni la inflación, y son en moneda corriente. Entre ellos tenemos los siguentes:

- Método uniforme o de línea recta.
- Método de depreciación por unidad de producción.
- Método fondo de amortización.

[2] Lincoyán Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, pp. 190-196.
[3] Celio Vega, *Ingeniería económica*, Quito, Mediavilla, 1983, p. 10.

www.elsolucionario.net

- Método de la suma de los enteros que corresponden a los años de duración del bien o de la suma de dígitos decreciente.
- Método de depreciación por porcentaje fijo.
- Método de depreciación con intereses sobre la inversión.
- Agotamiento por unidad de producción.

Métodos de depreciación económica

Tratan de determinar el valor de la depreciación que recupere el capital invertido en los activos y genere los fondos suficientes para reponerlos, cuando sea conveniente, a los precios vigentes en el mercado.
Sus características principales son:

- Relativamente complicados de aplicar.
- Toman en cuenta los costos de capital de la empresa, la inflación y el precio de reposición de los equipos.
- Reflejan la realidad económica de la empresa.
- Aconsejables para la toma de decisiones de la empresa.[4]

Estos métodos de depreciación económica, a pesar de ser más complicados, presentan valores más reales y permiten tomar previsiones justas para el reemplazo de los equipos o bienes. Para efectuar los cálculos utilizan la tasa de inflación, los valores reales, las tasas de impuestos, la tasa de interés, el costo del activo y el valor residual, entre las principales variables. En este texto no se estudiarán los métodos de depreciación económica, puesto que corresponden al contenido de otras materias afines.
Sin restar mérito a ninguno de ellos, pues todos son importantes y aplicables a diferentes tipos de análisis, *se estudiarán los métodos de depreciación contables,* en especial el método de depreciación en línea recta por ser el de mayor uso.

Método de depreciación en línea recta

"Este método consiste en tomar cada año, para el activo considerado, un valor de depreciación constante."[5]
Supone que la depreciación anual es la misma para toda la vida útil y, en consecuencia, cada año se reservan valores iguales, de manera que, al finalizar la vida útil, se tenga un fondo de reserva que, sumado al valor de salvamento del bien, alcance para su reposición.
El valor del depósito anual o cargo por depreciación puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (VS)}}{\text{Número de años de vida útil (N)}}$$

Ésta se utiliza en el caso de que la depreciación esté dada en función del número de años.

[4] Ibíd., p. 15.
[5] Ibíd., p. 16.

Cuando la depreciación se calcula en función de las horas de operación, puede utilizarse la fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (VS)}}{\text{Número de horas de vida útil (N)}}$$

Cuando la depreciación se calcula en función del número de unidades producidas, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (VS)}}{\text{Número de unidades de vida útil (N)}}$$

Es decir, que únicamente cambia el denominador N, según la depreciación esté dada en función de los años, el número de horas o las unidades producidas.

Ejemplo de depreciación uniforme o línea recta

Para conocer el cargo por depreciación anual de una máquina que costó $ 25.000, si su vida útil se estima en 10 años y su valor de salvamento en 10% de su valor original. Se realiza el siguiente cálculo:

$$(25.000)(0,10) = \$\ 2.500 \text{ (valor de salvamento)}$$

$$CD = \frac{25.000 - 2.500}{10} = \$\ 2.250$$

Podemos elaborar una tabla donde se exprese el valor en libros contables.

Tiempo	Cargo por depreciación $	Fondo para depreciación $	Valor en libros al final del año $
			25.000
1	2.250	2.250	22.750
2	2.250	4.500	20.500
3	2.250	6.750	18.250
4	2.250	9.000	16.000
5	2.250	11.250	13.750
6	2.250	13.500	11.500
7	2.250	15.750	9.250
8	2.250	18.000	7.000
9	2.250	20.250	4.750
10	2.250	22.500	2.500

Tabla 1.1. *Valor en libros contables para este ejemplo*

En la tabla se observa que el fondo para depreciación se incrementa anualmente hasta alcanzar el valor requerido para reemplazar la maquinaria. En cambio, el valor en libros va disminuyendo hasta llegar al valor de salvamento residual.

Ejemplo de depreciación por unidades

Una maquinaria industrial tuvo un costo inicial de $ 1.400.000 y el valor de salvamento se calcula en $ 200.000 después de producir 6.000.000 de unidades, Se quiere calcular el cargo por depreciación anual y elaborar la tabla de depreciación, si la producción anual se estima en 750.000 unidades, entonces:

$$CD = \frac{1.400.000 - 200.000}{6.000.000} = 0,20$$

$ 0,20 por unidad

Anualmente se tiene: (0,20)(750.000) = $ 150.000

Tiempo	Unidades producidas $	Cargo por depreciación $	Fondo para depreciación $	Valor en libros $
				1.400.000
1	750.000	150.000	150.000	1.250.000
2	750.000	150.000	300.000	1.100.000
3	750.000	150.000	450.000	950.000
4	750.000	150.000	600.000	800.000
5	750.000	150.000	750.000	650.000
6	750.000	150.000	900.000	500.000
7	750.000	150.000	1.050.000	350.000
8	750.000	150.000	1.200.000	200.000

Tabla 1.2. *Valor en libros contables para este ejemplo*

En la práctica, puede variar el número de unidades producidas en el año; en ese caso se debe multiplicar el número de unidades por el cargo por depreciación unitaria y efectuar las sumas y restas en las columnas “Fondo para depreciación” y “Valor en libros” respectivamente.

Ejemplo de depreciación por número de horas

Se quiere calcular el cargo por depreciación anual y así mismo elaborar la respectiva tabla, para una maquinaria con un costo de $ 240.000 y un valor estimado de salvamento de $ 20.000, luego de $ 50.000 horas de operación. Entonces:

$$CD = \frac{240.000 - 20.000}{50.000} = \$\ 4,40$$

5.000 horas al año por \$ 4,48 = \$ 22.000 anuales

Años	Horas de operación	Cargo por depreciación \$	Fondo para depreciación \$	Valor en libros \$
				240.000
1	5.000	22.000	22.000	218.000
2	4.000	17.600	39.600	200.400
3	6.000	26.400	66.000	174.000
4	5.000	22.000	88.000	152.000
5	3.000	13.200	101.200	138.800
6	5.000	22.000	123.200	116.800
7	6.000	26.400	149.600	90.400
8	5.000	22.000	171.600	68.400
9	6.000	26.400	198.000	42.000
10	5.000	22.000	220.000	20.000

Tabla 1.3. *Valor en libros contables para este ejemplo*

Agotamiento

Es la pérdida progresiva de un activo o bien debido a la reducción de su cantidad aprovechable (petróleo, minerales).
“El agotamiento, básicamente, tiene el mismo objetivo que la depreciación, con la diferencia de que se aplica a los yacimientos de recursos naturales no renovables.”[6]

La *caída en desuso* u *obsolescencia* se produce cuando, en razón de los avances de la técnica, se inventan nuevos equipos más económicos, rápidos y productivos, y quedan obsoletos los que estaban en uso, por lo que el tiempo de depreciación se puede disminuir. Ejemplo: equipos de computación.
La *depreciación acelerada,* que se da claramente en el ejemplo de los equipos de computación, sucede cuando se requiere reemplazar un bien en menor tiempo del normal (aunque para esto se necesita una autorización del organismo fiscal o autoridad competente).

Logaritmos

De los logaritmos se estudiará la parte que tiene aplicación en la resolución de problemas de matemáticas financieras y, de ella, sólo se analizarán aquellos que no pueden resolverse directamente y requieren explicación, aunque se utilicen para tal fin calculadoras electrónicas de bolsillo.
Abordamos el tema de los logaritmos de este modo en razón de la disponibilidad actual de calculadoras y lo extendido de su utilización. Se presupone, del mismo modo, el conocimiento de los conceptos básicos por parte del lector.

[6] Ibíd., p. 14.

www.elsolucionario.net

Cálculo de n e *i*

Así, el cálculo de $(1 + i)^n$ –que contiene dos variables *i* y *n*– exige la aplicación de logaritmos, puesto que de otra manera puede ser difícil obtenerlo. Más adelante se estudiará que la variable *i* significa tasa de interés y *n* número de períodos. Es importante saber cuándo aplicar los logaritmos y cuándo utilizar las calculadoras electrónicas.

Dentro de la metodología de los logaritmos es bueno explicar la esencia de sus elementos, así: el logaritmo en base b de un número positivo N ($\log_b N$) es el exponente L, de modo que $b^L = N$.

Todo logaritmo tiene una parte entera llamada *característica* y una parte decimal llamada *mantisa*.

Entonces, tenemos:

El logaritmo de 100 en base 10 es igual a 2.

$\log_{10} 100 = 2$, porque $10^2 = 100$

El logaritmo de 32 en el sistema de base 2 es 5.

$\log_2 32 = 5$, porque $2^5 = 32$

Un logaritmo en base 10.

$\log 225 = 2{,}352183$, en el que 2 es la característica y 0,352183, la mantisa.

En el texto se utilizarán los logaritmos *vulgares* o de base 10.

Una vez analizados los ejemplos anteriores, veamos algunos conceptos elementales que es necesario tener presentes:

- El logaritmo de un producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números. $\log (A)(B) = \log A + \log B$
- El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. $\log A/B = \log A - \log B$
- El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.
  $\log A^n = n \log A$
- El cologaritmo de un número es igual al logaritmo de su recíproco; se expresa como "colog". Se utiliza para calcular el logaritmo de un número decimal menor que 1, o cuando el signo menos aparece delante de un logaritmo.

Calculemos *i:*

$$(1 + i)^{18} = 3{,}379932$$

Se aplican logaritmos a los dos miembros:

$$\log (1 + i)^{18} = \log 3{,}379932$$

El logaritmo de la potencia de una cantidad es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad:

$$18 \log (1 + i) = \log 3{,}379932$$

$$\log (1 + i) = \frac{\log 3{,}379932}{18}$$

$$\log (1 + i) = \frac{0{,}528907962}{18}$$

$$\log (1 + i) = 0{,}0293837$$

$$(1 + i) = \text{antilog } 0{,}0293837$$

Se obtiene el antilogaritmo para encontrar el número.

$$(1 + i) = 1{,}07$$

$$i = 1{,}07 - 1$$

$$i = 0{,}07$$

Respuesta: $i = 7\%$

Igualmente mediante calculadora, sin utilizar logaritmos, elevando a la potencia 1/18 ambos miembros, se puede obtener la respuesta:

$$(1 + i)^{18/18} = 3{,}379932^{1/18}$$

$$1 + i = 1{,}07$$

$$i = 1{,}07 - 1$$

$$i = 7\%$$

Calculemos *i* para:

$$48{,}25(1 + i)^{-20} = \frac{478{,}48473}{42{,}15} - 1$$

$$8{,}25(1 + i)^{-20} = 11{,}351951 - 1$$

$$(1 + i)^{-20} = \frac{10{,}351951}{48{,}25}$$

$$(1 + i)^{-20} = 0{,}214548$$

Al aplicar logaritmos:

$$\log (1 + i)^{-20} = \log 0{,}214548$$

$$-20 \log (1 + i) = \log 0{,}214548$$

$$\log(1+i) = \frac{\log 0{,}214548}{-20}$$

$$\log(1+i) = \frac{-0{,}668475}{-20}$$

$\log(1+i) = 0{,}033423$

$1 + i = \text{antilog } 0{,}033423$

$1 + i = 1{,}08$

$i = 1{,}08 - 1$

$i = 0{,}08$

$i = 8\%$

Utilizando la calculadora:

$(1+i)^{-20/20} = (0{,}214548)^{1/20}$

$(1+i)^{-1} = 0{,}925925$

$$\frac{1}{1+i} = 0{,}925925$$

$$1 + i = \frac{1}{0{,}925925}$$

$i = 0{,}08$

$i = 8\%$

Ejemplo para calcular n

Ahora calculemos *n:*

$(1 + 0{,}05)^{-n} = 0{,}014339$

Al aplicar logaritmos:

$\log(1{,}05)^{-n} = \log 0{,}014339$

$-n \log(1{,}05) = \log 0{,}014339$

$$-n = \frac{\log 0{,}014339}{\log(1{,}05)}$$

$$-n = \frac{-1{,}843469}{0{,}021189}$$

Multiplicamos por (–1):

$$n = \frac{1{,}843469}{0{,}021189} = 87$$

$n = 87$ períodos; no es necesario hallar antilogaritmo ya que n es el exponente.

Cálculo de *n para*:

$$\frac{(1{,}02)^{n} - 0{,}897096}{0{,}11} = 91{,}909667 - 2{,}20$$

$$(1{,}02)^n - 0{,}897096 = (91{,}90667 - 2{,}20)(0{,}11)$$
$$(1{,}02)^n = (89{,}709667)\ 0{,}11 + 0{,}897096$$
$$(1{,}02)^n = 9{,}868063 + 0{,}897096$$
$$(1{,}02)^n = 10{,}76516$$

Obtenemos logaritmos:

$$\log (1{,}02)^n = \log 10{,}76516$$
$$n \log (1{,}02) = \log 10{,}76516$$

$$n = \frac{\log 10{,}76516}{\log 1{,}02}$$

$$n = \frac{1{,}0320204}{0{,}00860017} = 120 \text{ períodos}$$

Calculemos *n:*

$$(1{,}017)^n = 5{,}20$$
$$n \log (1{,}017) = \log 5{,}20$$

$$n = \frac{\log 5{,}20}{\log 1{,}017}$$

$$n = \frac{0{,}716003}{0{,}007320} = 97{,}8 \text{ períodos}$$

Progresiones 2,4.

Son una serie de números o términos algebraicos en la que cada término posterior al primero puede obtenerse del anterior, sumándolo, multiplicándolo o dividiéndolo por una diferencia o razón común.
Con un criterio similar al expuesto sobre logaritmos, se estudiarán brevemente las progresiones y su aplicación en las matemáticas financieras.
En este texto las progresiones se agrupan en 3 categorías:

- Aritméticas
- Geométricas
- Geométricas infinitas

Progresión aritmética

Es una sucesión de números, llamados *términos,* en la que cualquier término posterior al primero puede obtenerse del anterior, sumándole (o restándole) un número constante llamado *diferencia común (d)*. Así, por ejemplo:

4; 8; 12; 16; 20; ... la diferencia común es 4
80; 74; 68; 62; ... la diferencia común es –6

Obsérvese la progresión:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots a + (n - 1)d$$

En la que a es el primer término, d la diferencia común y n el número de términos.
Cada término se forma sumando al primero la diferencia común, tantas veces como el número de términos "menos uno" se busque.
El último término buscado está en función del número de términos n.

$u = a + (n - 1)d$ **Fórmula 1.1.** Fórmula del último término de una progresión aritmética

Donde: u = último término
a = primer término
n = número de términos
d = diferencia común

Así para encontrar el vigésimo término de la progresión aritmética, se tiene:

115; 112; 109; 106; ...

Utilizamos la fórmula $u = a + (n - 1)d$
En donde $a = 115$; $n = 20$; $d = -3$

$$u = 115 + (20 - 1)(-3)$$
$$u = 115 + (19)(-3)$$
$$u = 115 - 57 = 58$$

Suma de una progresión aritmética

La suma de una progresión aritmética puede hallarse mediante una fórmula, cuya deducción se presenta a continuación.

Sea la progresión aritmética:

$$a;\ a + d;\ a + 2d;\ a + 3d;\ \ldots\ a + (n - 2)d,\ a + (n - 1)d$$

Totalizando, se puede escribir:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) \ldots + (u - 2d) + (u - d) + u \qquad (1)$$

Reordenando:

$$S = u + (u - d) + (u - 2d) \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$2S = (a + u) + (a + u) + (a + u) + \ldots (a + u) + (a + u) + (a + u)$$

En consecuencia, la suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la mitad del número de términos multiplicada por la suma del primero más el último término.

$$2S = n(a + u)$$

$S = \frac{n}{2}(a + u)$	**Fórmula 1.2.** Fórmula de la suma de términos de una progresión aritmética

Por ejemplo para encontrar la suma de los treinta primeros términos de la progresión aritmética 15; 21; 27; 33; ...

$$S = \frac{n}{2}(a + u)$$

Es necesario calcular el último término.

$a = 15$; $n = 30$; $d = 6$

$u = a + (n - 1)d$

$u = 15 + (30 - 1)(6)$

$u = 15 + 174$

$u = 189$

$$S = \frac{30}{2}(15 + 189)$$

$S = 15(15 + 189)$

$S = 15(204)$

$S = 3.060$

Ejemplo

Apliquemos lo anterior a un problema:

Por la compra de una maquinaria, una empresa paga al final del primer año $ 50.000, al final del segundo año $ 45.000; al final del tercer año $ 40.000. ¿cuánto pagará por la maquinaria si hace 10 pagos?

50.000; 45.000; 40.000; ... es una progresión aritmética cuya razón es –5.000

$u = 1 + (n - 1)d$

$u = 50.000 + (9)(-5.000) = 5.000$

$$S = \frac{n}{2}(a + u)$$

$$S = \frac{10}{2}(50.000 + 5.000) = \$\ 275.000$$

Progresión geométrica

"Es una sucesión de números tales que cada uno de ellos se deduce del anterior multiplicándolo o dividiéndolo por una cantidad constante llamada *razón*."[7]
Así:

–980; 490; 245; 122,5; 61,25; ... es una progresión geométrica descendente cuya razón es 0,5.

–3; 9; 27; 81; ... es una progresión geométrica ascendente cuya razón es 3.

Último término de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica:

$$a;\ ar;\ ar^2;\ ar^3;\ ar^4;\ ar^5;\ ar^6;\ \ldots$$

el último término, cualquiera que éste fuere, será igual *a*: ar^{n-1}

Si se quiere encontrar el término 10, será:

$$u = ar^{10-1} = ar^9$$

Si se quiere hallar el último término, será:

$u = ar^{n-1}$ **Fórmula 1.3.** Cálculo del último término de una progresión geométrica

Donde: u = último término
a = primer término
r = razón común
n = número de términos

Calculemos entonces la suma de una progresión geométrica.
Sea la progresión:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad (1)$$

Al multiplicar por (r) ambos miembros:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ ar^{n-1} + ar^n \qquad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$S - Sr = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + (ar^3 - ar^3) + \ldots\ (ar^{n-2} - ar^{n-2}) + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n$$

[7] *Gran diccionario enciclopédico universal*, Valencia, Ortells, 1980.

Simplificando:

$$S(1 - r) = a - ar^{n}$$

$S = \dfrac{a - ar^{n}}{1 - r}$	$r < 1$	**Fórmula 1.4.** Suma de una progresión geométrica cuya razón es menor que 1

Multiplicando por –1 se obtiene la siguiente fórmula:

$S = \dfrac{ar^{n} - a}{r - 1}$	$r > 1$	**Fórmula 1.5.** Suma de una progresión geométrica cuya razón es mayor que 1

Entonces, para encontrar el término 10 y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 1.000; 1.500; 2.250; 3.375; ...

$r = 1{,}5$

$u = ar^{n-1}$

$u = 1.000(1{,}5)^{10-1}$

$u = 1.000(1{,}5)^{9} = 1.000(38{,}443359)$

$u = 38.443{,}359$ es el término de 10 de la progresión

Se aplica la fórmula cuya razón es mayor que 1:

$$S = \frac{ar^{n} - a}{r - 1} = \frac{1.000(1{,}5)^{10} - 1.000}{1{,}5 - 1}$$

$$S = \frac{57.665{,}039 - 1.000}{0{,}5} = 113.330{,}08$$

De otra parte,
Para calcular la suma de los 10 primeros dígitos se aplica la fórmula:

$r = 0{,}50$

$u = ar^{n-1}$

$u = 100(0{,}50)^{9} = 0{,}195312$

$$S = \frac{a - ar^{n}}{1 - r}$$

Utilizamos esta fórmula puesto que la razón es menor que 1.

$$S = \frac{100 - 100(0{,}50)^{10}}{1 - 0{,}50} = \frac{100 - 0{,}097656}{0{,}50}$$

$$S = \frac{99{,}902344}{0{,}50} = 199{,}80469$$

Ejemplo

Apliquemos:
Cierta maquinaria tiene un valor actual de $ 90.000. Al final de cada año se deprecia un 12%. Si se desea calcular su valor después de 10 años, se tiene:
Valor inicial: $ 90.000

Final del primer año:

$$90.000 - 90.000(0,12) = 90.000(1 - 0,12)$$

Final del segundo año:

$$90.000(1 - 0,12)\ (1 - 0,12) = 90.000(1 - 0,12)^2$$

Final del tercer año:

$$90.000(1 - 0,12)^2\ (1 - 0,12) = 90.000(1 - 0,12)^3$$

Se puede escribir la progresión geométrica:

$$90.000 + 90.000(1 - 0,12) + 90.000(1 - 0,12)^2 + 90.000(1 - 0,12)^3 + \ldots$$

Siendo 90.000 el primer término

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 90.000(1 - 0,12)^{10-1} = 90.000(0,88)^9$$

$$u = \$\ 28.483,05436 \quad \text{Valor al inicio del décimo año}$$

Progresión geométrica infinita

Es aquel tipo de progresión geométrica cuya razón es menor que 1, el número de términos es ilimitado, pero la suma de sus términos es cuantificable.

Por ejemplo, sea la progresión:

$$1;\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{25};\ \frac{1}{125};\ \ldots$$

Su razón es 1/5 y el número de sus términos es ilimitado. Consecuentemente, no hay último término; pero sí puede calcularse la suma de sus términos. A continuación se presenta la demostración.
Utilizamos la fórmula de la suma de una progresión geométrica cuya razón es menor que 1:

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Separando en dos quebrados con el mismo denominador:

$$S = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{ar^n}{1 - r} = 0$$

Se puede dar valores a n:

Cuando $n = 10$

$$\frac{1(0{,}20)^{10}}{1-0{,}20} = 0{,}000000128 = (1{,}28)(10^{-7})$$

Cuando $n = 150$

$$\frac{1(0{,}20)^{50}}{1-0{,}20} = (1{,}40737)(10^{-35})$$

Cuando $n = 100$

$$\frac{1(0{,}20)^{100}}{1-0{,}20} = (1{,}58456)(10^{-70})$$

Podemos apreciar, entonces, que cuando mayor es n, $\frac{ar^n}{1-r}$ tiende a cero; puede decirse que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} = 0$$

Luego, la suma de una progresión geométrica infinita puede calcularse con la siguiente fórmula:

$S = \frac{a}{1-r}$	**Fórmula 1.6.** Fórmula de la progresión geométrica infinita

Al aplicar esta fórmula en la progresión 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$

cuya razón es 1/5 y el número de términos, ilimitado,

$$S = \frac{1}{1-0{,}20} = \frac{1}{0{,}80} = 1{,}25$$

Entonces, para encontrar la suma de todos los términos de la progresión

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$$

$$a = \frac{1}{2};\ r = 0{,}5;\ n = \infty$$

$$S = \frac{1}{1-0{,}50} = \frac{1}{0{,}50} = 2$$

Ecuaciones xy

Se sugiere al lector que revise en matemáticas básicas el tema referente a ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones con 1, 2 o 3 incógnitas y ecuaciones de segundo grado. De todos modos se realizará a continuación una breve revisión de las principales ecuaciones que podrían utilizarse en el presente texto:

Ecuaciones de primer grado:

$$8x + \frac{2}{3} \quad x = 24 + \frac{2}{3}x$$

$$8x + \frac{2}{3} \quad x - \frac{2}{3}x = 24$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8} \quad x = 3$$

Sistemas de ecuaciones:

$$(1)\quad 3x - 2y = 60$$
$$(2)\quad 6x + 4y = 24$$

Se multiplica por dos la primera ecuación para igualar los términos. Efectuando la suma, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} 6x - 4y & = & 120 \\ 6x + 4y & = & 24 \\ \hline 12x & = & 144 \\ x & = & 12 \end{array}$$

Reemplazando en (1):

$$3(12) - 2(y) = 60$$
$$36 - 2y = 60$$
$$-2y = 60 - 36$$
$$-2y = 24$$

$$y = \frac{24}{12} = -12$$

Comprobación:

$$3(12) - 2(-12) = 60$$
$$36 + 24 = 60$$
$$60 = 60$$

Ecuaciones de segundo grado:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

Primera solución:

$$x = \frac{-1 + 5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Segunda solución:

$$x = \frac{-1 - 5}{-4} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$$

Actividades de ejercitación

1. Resolver

a) 3% de 200

b) $7\frac{1}{2}$ % de 800

c) $8\frac{1}{8}$% de 1.000

d) $6\frac{1}{16}$ % de 20.000

e) $15\frac{1}{4}$ % de 25.000

f) $25\frac{1}{3}$% de 90.000

g) 300% de 3.000

h) $41\frac{1}{4}$ % de 5.000

i) 0,25 $\frac{1}{8}$% de 10.000

j) 0,05% de 3.000.000

2. ¿Qué porcentaje de

a) 1.000 es 250?

b) 10.000 es 85?

c) 40 es 0,50?

d) 4.000.000 es 500?

e) 0,90 es 0,0045?

f) 1,75 es 0,4375?

3. ¿De qué cantidad es

a) 8 el 25%?

b) 0,54 el 1,2%?

c) 217,50 el $7\frac{1}{4}$%?

d) 3.712,50 el $4\frac{1}{8}$%?

e) 44 el $3\frac{1}{8}$%?

f) 2.450 el 0,05%?

4. Una empresa ofrece a la venta refrigeradoras cuyo precio de lista es de $600,00, con un descuento del 20% por venta al contado y con el 12% de impuesto a las ventas. Calcule los siguientes ítems: a) el valor de la factura a pagar; b) el descuento efectivo; y, c) el porcentaje efectivo que beneficia al cliente.

5. Una distribuidora comercial ofrece cocinas en promoción cuyo precio de lista es de $ 450,00, con un descuento del 15 1/8 % por venta al contado, pero aplica el 12% de impuesto a las ventas sobre el precio con descuento. Calcule: a) el valor de la factura a pagar; b) el descuento efectivo, y el porcentaje real que se aplica al cliente.

6. Un comerciante compra mercadería por un valor de $ 25.000,00 y la vende en $ 30.000,00. Calcule los siguientes ítems: a) la utilidad, b) el porcentaje de ésta en relación con el precio de costo, y c) el porcentaje en relación con el precio de venta.

7. Una empresa compra 30 millones de barriles de petróleo a $ 45,00 el barril y los puede vender con las siguientes opciones:
a) con una utilidad del 11% del precio de costo, calcular el precio de venta,
b) con una utilidad del 10% del precio de venta, calcular el precio de venta,
c) ¿cuál opción le produce mayor utilidad?

8. Una empresa distribuidora de gas compra este producto a $ 0,85 el kilogramo, y lo vende con una utilidad del 25% del precio de costo. Calcule a) el precio de venta del kilogramo de gas, b) la utilidad.

9. Una distribuidora de gasolina compra este producto a $ 1,50 el galón y los vende con una utilidad del 20% del precio de venta. Calcule a) el precio de venta y b) la utilidad.

10. Calcule el cargo por depreciación anual de un equipo cuyo costo de compra fue de $ 45.000,00, si su vida útil se estima en 12 años y su valor de salvamento en el 10% de su valor de compra. Elabore una tabla en la que se exprese el valor en los libros contables.

11. Una maquinaria industrial tiene un costo inicial de $ 36.000,00 y un valor estimado de rescate de $ 2.000,00, después de producir 1.700.000 unidades. Calcule a) el cargo por depreciación por unidad, b) calcule el cargo por depreciación anual y c) elabore la tabla de depreciación. La producción promedio se considera en 170.000 unidades por año.

12. Una máquina cuyo costo inicial fue de $ 150.000,00, tiene un valor de rescate estimado del 10% luego de 80.000 horas de operación. Calcule: a) el cargo por depreciación por hora, b) el cargo por depreciación anual; y c) elabore la tabla de depreciación. Se considera un promedio de 8.000 horas de operación al año.

13. Calcule i:

a) $(1 + i)^{180} = 5{,}99580$
b) $(1 + i)^{90} = 1{,}95909$
c) $(1 + i)^{-120} = 0{,}092892$
d) $8{,}35 + (1+ i)^{-180} = 12{,}50 - 3{,}88945$
e) $(1 + i)^{35} = 28{,}666723$

14. Calcule n:

a) $(1 + 0{,}05)^{n} = 63{,}254353$
b) $(1 + 0{,}0125)^{n} = 2{,}107181$
c) $(1 + 0{,}09125)^{n} = 158{,}345924$
d) $(1 + 0{,}015)^{-n} = 0{,}1675232$
e) $(1 + 0{,}025)^{-n} = 0{,}1174098$
f) $(1 + 0{,}005)^{-n} = 0{,}4732501$

15. Encuentre el término número 20 y la suma de los 20 primeros términos de las progresiones:

a) 3; 5; 7; 9; ...
b) 0; 1/2; 1; 1 1/2 ; ...
c) –75; –60; –45; ...
d) –2; –2 3/4; –3 2/4; ...
e) 3; –1; –5; ...
f) 0; –3; –6; ...
g) –3; 2; 7; 12; ...
h) 0; 3x; 6x; ...
i) x; –6x; –13x

16. Una empresa desea la estabilidad de sus empleados y mantiene una política de incremento de salarios. Si el salario inicial de un nuevo empleado es de $ 360,00 y se considera un incremento anual del 10%, ¿cuál será el sueldo del empleado después de 20 años?

17. Una comercializadora tiene 12.750 clientes. Con un nuevo programa de ventas espera incrementar este número en 250 cada año. ¿Cuántos clientes tendrá después de 10 años?

18. Una persona se compromete a pagar en forma ascendente durante 36 meses una deuda por la compra de un automóvil; el primer pago es de $ 500,00; el segundo de $ 510,00, el tercero de $ 520,00 y así sucesivamente. ¿Cuánto habrá pagado en total durante los 36 meses?

19. Encuentre el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 2; 4; 8; 16; ...
b) –2; –6; –18; ...
c) –2; 4; -8; 16; ...
d) 3; 15; 75; ...
e) 1; 3; 9; ...

20. Una empresa tiene ventas de $ 110.000 anuales y desea incrementar el 12% anualmente. ¿Cuánto venderá al inicio del año 12?

21. Encuentre la suma de las siguientes progresiones infinitas:

a) 2; 1; 0,5; ...
b) 1; 1/5; 1/25; 1/125; ...
c) 1; 1/4; 1/16; 1/64; ...
d) 2.000; 400; 80; ...

22. El monto de un depósito después de *n* años, cuando el interés es compuesto, está dado por la fórmula M = C $(1 + i)^n$. Si *i* es la tasa de interés y C es el capital inicial depositado: a) encuentre los tres primeros términos de la progresión y b) determine la razón.

23. Si una persona deposita $ 5.000,00 al 9% de interés compuesto, acumulable anualmente, ¿cuánto habrá acumulado al finalizar el año 12?

24. Suponiendo que un documento paga el 8% de interés compuesto anual; si se invierten $ 25.000,00 ahora y luego de un tiempo se obtienen $ 92.500,45, ¿cuánto tiempo ha transcurrido?

Respuestas

1. a) 6,00 b) 60,00 c) 81,25 d) 181,875 e) 3.050,00
f) 22.800,00 g) 9.000,00 h) 2.062,50 i) 25,125 j) 1.500,00

2. a) 25% b) 0,85% c) 1,25%
d) 0,0125% e) 0,50% f) 25%

3. a) 32,00 b) 45,00 c) 3.000,00
d) 90.000,00 e) 1.408,00 f) 4.900.000,00

4. a) 537,60 b) 62,40 c) 10,40%

5. a) 427,77 b) 22,23 c) 4,94%

6. a) 5.000,00 b) 20% c)16,67%

7. a) $ 49,95 b) $ 50,00 c) la opción b)

8. Precio de venta $ 1,0625 Utilidad = $ 0,2125

9. Precio = $ 1,875 Utilidad = $ 0,375

10. $ 3.375,00

11. a) $ 0,02 por unidad b) $ 3.400,00 anual

12. $ 1,6875 por hora; b) $ 13.500,00 anual

13. a) i = 1% b) i = 0,75% c) i = 2%
d) i = 0,75% e) i = 10 1/16%

14. a) $n = 85$ b) $n = 60$ c) $n = 58$
d) $n = -120$ e) $n = -180$ f) $n = -150$

15. a) 41 y 440 b) $9\frac{1}{2}$ y 95 c) 210 y 1.350
d) $16\frac{1}{4}$ y $182\frac{1}{2}$ e) –73 y 700 f) –57 y –570
g) 92 y 890 h) 57x y 570x i) –132x y 1.310x

16. $ 2.201,73

17. 15.000 clientes

18. $ 24.300,00

19. a) 1.024 y 2.046 b) –39.366 y –59.048 c) 1.024 y 682
d) 5.859.375 y 7.324.218 e) 10.683 y 29.524,50

20. $ 382.640,50

21. a) 4 b) 1,25 c) 1,3333333 d) 2.500

22. a) C; $C(1 + i)$; $C(1+ i)^2$… b) $(1 + i)$

23. $ 14.063,32

24. 17 años

Actividades de autoevaluación

1. Halle el 25% de 2.000.

2. ¿De qué cantidad es 900 el 30%?

3. ¿Qué porcentaje de 8.000 es 50?

4. Un comerciante compra libros a $ 25 y desea venderlos con una utilidad del 35% del precio de costo. Calcule el precio de venta.

5. Un comerciante compra cuadernos a $ 0,80 y desea venderlos con una utilidad del 20% del precio de venta. Calcule el precio de venta y la utilidad.

6. Calcule i: $(1 + i)^{60} = 10{,}519627$

7. Calcule n: $(1 + 0{,}03)^n = 34{,}710987$

8. Calcule el término 15 y la suma de los 15 primeros términos de la progresión 8; 15; 22; 29; ...

9. Calcule el término 10 y la suma de los diez primeros términos de la siguiente progresión 9; 27; 81; 243; ...

10. Despeje x en la ecuación:
$(5 + 0{,}5x) + 8{,}5x - 2{,}5x - 48 = 12{,}5 + 4{,}5 + 1{,}5x$

Respuestas

1. $(2.000)(0{,}25) = 500$

2. 900 —— 30%
x —— 100%

$$x = \frac{(100)(900)}{30} = 3.000$$

3. 8.000 —— 100%
50 —— x%

$$x = \frac{(50)(100)}{8.000} = 0{,}625\%$$

4. PV = PC + Utilidad
PV = 25 + (0,35)(25)
PV = 25 + 8,75
PV = \$ 33,75

5. PC = PV – %PV
0,80 = PV – 0,20(PV)
0,80 = PV(1 – 0,20)
0,80 = PV(0,80)

$$PV = \frac{0{,}80}{0{,}80} = \$\ 1{,}00$$

Utilidad = 1,00 – 0,80 = \$ 0,20

6. $(1 + i)^{60} = 10{,}519627$

$(1 + i)^{60/60} = (10{,}519627)^{1/60}$

$1 + i = 1{,}04$

$i = 1{,}04 - 1$

$i = 0{,}04 = 4\%$

7. $(1 + 0{,}03)^n = 34{,}710987$

$n \log (1{,}03) = \log 34{,}710987$

$n\,(0{,}012837) = 1{,}540467$

$$n = \frac{1{,}540467}{0{,}012837} = 120$$

8. $u = a + (n - 1)d$

$u = 8 + (15 - 1)(7)$

$u = 106$

$$S = \frac{n}{2}(a + u)$$

$$S = \frac{15}{2}(8 + 106)$$

$S = 7{,}5(114) = 855$

9. $u = ar^{n-1}$

$u = 9(3)^9 = 177.147$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$$S = \frac{9(3)^{10} - 9}{3 - 1} = 265.716$$

10. $5 + 0{,}5x + 8{,}5x - 2{,}5x - 48 = 12{,}50 + 4{,}5 + 1{,}5x$

$9x - 4x = 17 + 43$

$5x = 60$

$$x = \frac{60}{5} = 12$$

Actividades de repaso

1. ¿Qué es porcentaje?

2. ¿Cómo se expresa el porcentaje en forma decimal?

3. ¿En qué se diferencia el cálculo del precio como porcentaje del precio de costo y como porcentaje del precio de venta?

4. ¿Qué es la depreciación?

5. ¿Cómo se calcula el cargo por depreciación por unidad de producción?

6. ¿Para calcular n en la ecuación $(1 + 0,1)^n = 100$, deben utilizarse logaritmos y antilogaritmos?

7. ¿Qué es una progresión aritmética descendente?

8. ¿Qué es una progresión geométrica ascendente?

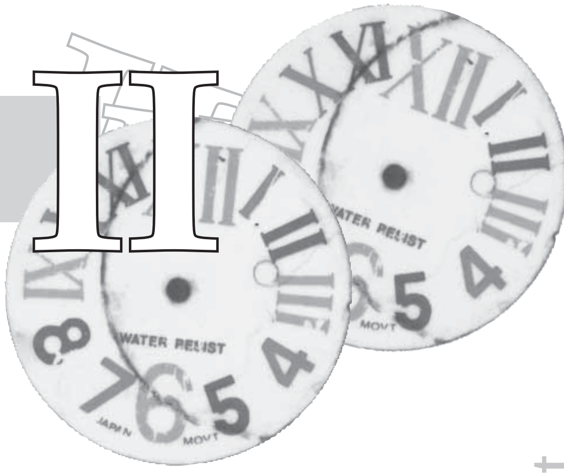
9. ¿Cuál es la fórmula de la suma de una progresión aritmética?

10. ¿Cuál es la fórmula de la suma de una progresión geométrica cuya razón es mayor que 1?

Complete su aprendizaje con el CD que acompaña a este libro

Interés simple

II



Presentación

En este capítulo se analizarán algunos conceptos o bases conceptuales de lo que significa el interés simple, con sus diferentes variables: capital, tasa de interés, tiempo, valor actual, monto y sus aplicaciones en el ámbito financiero y comercial.

Es necesario que el lector se familiarice con dichos conceptos y con las respectivas fórmulas para su cálculo, ya que en el medio financiero la aplicación del cálculo de interés simple es permanente en operaciones de crédito, ahorros, inversiones de corto plazo, préstamos, etcétera.

Objetivo general

- Conocer el cálculo del interés simple en sus diferentes modalidades y aplicaciones en el ámbito comercial y financiero.

Objetivos específicos

- Estudiar el cálculo del interés simple.
- Analizar el cálculo de sus variables: capital, tasa de interés, tiempo.
- Distinguir el cálculo del monto y el valor actual.
- Realizar ejercicios prácticos de aplicación.
- Realizar cálculos de compras a plazo con diferentes modalidades.

CONTENIDO

Interés

"Es la cantidad pagada por el uso del dinero obtenido en préstamo o la cantidad producida por la inversión del capital."[1]
"El dinero se invierte siempre en forma productiva; es decir, siempre está ganando interés".[2]
"Es el alquiler o crédito que se conviene pagar por un dinero tomado en préstamo".[3]
"Precio del servicio proporcionado por el prestamista al prestatario, pagado por este último, para conseguir la utilización de cierta suma de dinero durante un período determinado".[4]

De estas definiciones puede concluirse que el interés está directamente relacionado con la utilización del dinero, que está siempre produciendo más dinero, en función del tipo de interés y del tiempo. En consecuencia, se puede decir que interés es el valor que se paga por el uso del dinero. Por ejemplo: si por invertir $ 100 se obtienen $ 15, se dice que se está ganando el 15% de interés.

Tasa de interés

"Es la razón del interés devengado al capital en la unidad de tiempo."[5]
Está dada como un porcentaje o su equivalente; generalmente se toma el año como unidad de tiempo. Se representa con la letra i.

Veamos:

$$i = \frac{\text{Interés}}{\text{Capital}} = \frac{15}{100} = 15\% = 0{,}15$$

Interés simple

Cuando un capital genera intereses por un determinado tiempo, el interés producido que se reconoce se denomina interés simple.

Formas de calcular el interés simple

El interés simple (I) está en función directa del capital (C), la tasa de interés (i) y el tiempo (t). Según esta premisa, el interés simple puede calcularse mediante la siguiente fórmula:

$$I = Cit$$ **Fórmula 2.1.** Fórmula de interés simple

[1] F. Ayres Jr., *Teoría y 500 problemas resueltos,* México, McGraw-Hill, 1971, pp. 40-41.
[2] *Ídem*.
[3] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 15.
[4] J. C. Y. Bernard y D. Lewandowski Colli, *Diccionario económico y financiero,* Madrid, Asociación para el Progreso de la Dirección, 1981.
[5] F. Ayres, ob. cit.

Calculemos, entonces
El interés simple que gana un capital de $ 5.000 al 12% anual, desde el 15 de marzo hasta el 15 de agosto del mismo año. Para tal fin, lo primero que tenemos que hacer es calcular el tiempo que transcurre entre las dos fechas,tomando una de las dos fechas extremas.

Tiempo exacto		Tiempo aproximado	
Marzo	16	15	
Abril	30	30	
Mayo	31	30	
Junio	30	30	
Julio	31	30	
Agosto	15	15	
Total	153	150	días

El problema propuesto puede resolverse de cuatro formas:

- Con el tiempo aproximado y el año comercial:

$$I = (5.000)(0,12)\,\frac{150}{360} = \$\ 250,00$$

- Con el tiempo exacto y el año comercial:

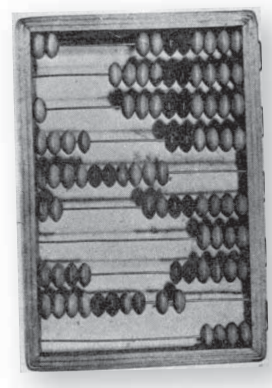
$$I = (5.000)(0,12)\,\frac{153}{360} = \$\ 255,00$$

- Con el tiempo aproximado y el año calendario:

$$I = (5.000)(0,12)\,\frac{150}{365} = \$\ 246,5753$$

- Con el tiempo exacto y el año calendario:

$$I = (5.000)(0,12)\,\frac{153}{365} = \$\ 251,5068$$



Como podemos apreciar, el interés más alto se da en el segundo caso, con el tiempo exacto y el año comercial y equivale a 255, mientras que el más bajo está dado en el tercer caso, con el tiempo aproximado y el año calendario, y es igual a 246,5753. Para operaciones bancarias, es el segundo caso en el que más se utiliza.

Cálculo del número de días

El número de días en el año también puede variar:
— año comercial: 360 días — año calendario: 365 días — año bisiesto: 366 días

Con esta premisa, el cálculo de días para encontrar el interés ganado puede realizarse en forma aproximada o en forma exacta.

En forma aproximada: con el objeto de facilitar los cálculos de tiempo, se acostumbra suponer el año de 360 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno; esto se denomina cálculo aproximado del tiempo.

Del 15 de marzo al 15 de junio hay 90 días:

Marzo	15 días
Abril	30 días
Mayo	30 días
Junio	15 días
Total	90 días

En forma exacta: Se toma como referencia el número de días calendario, es decir, meses de 30 y 31 días, año de 365 o 366 días, según corresponda. Como puede observarse, tomando el ejemplo anterior y considerando una de las dos fechas extremas, son 92 días.

Marzo	16 días
Abril	30 días
Mayo	31 días
Junio	15 días
Total	92 días

Variación del cálculo del interés

El cálculo del interés varía igualmente si tomamos el año de 360, 365 o 366 días.

Interés exacto

Cuando se divide el tiempo para 365 o 366 días, si la tasa de interés es anual.

Interés ordinario

Si dividimos el tiempo para 360 días en iguales condiciones, calculamos:

El interés exacto y ordinario de un capital de $ 20.000 al 9% de interés anual, desde el 10 de abril hasta el 15 de septiembre del mismo año, se calcula así:

Interés exacto, con tiempo exacto:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{158}{365} = \$\ 779,18$$

Interés exacto, con tiempo aproximado:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{155}{365} = \$\ 764,38$$

Interés ordinario con tiempo exacto:*

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{158}{360} = \$\ 790$$

Interés ordinario con tiempo aproximado:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{155}{360} = \$\ 775$$

* Como puede observarse, el mayor interés se obtiene con el tiempo exacto y el año comercial de 360 días.

Variación de la tasa de interés en función del tiempo

Entre las tasas de interés más empleadas se hallan la anual, semestral, quimestral, cuatrimestral, trimestral, bimestral, mensual o diaria.

a) **La tasa de interés anual** se utiliza para el tiempo exacto o aproximado: 365 o 360 días, respectivamente:
Calculemos el interés que gana un capital de $ 100.000 al 12% de interés anual durante 180 días:

$$I = (100.000)(0,12)\,\frac{180}{360} = \$\ 6.000$$

b) **La tasa de interés semestral** se utiliza para el tiempo de 180, 181, 182 o 184 días del semestre (primer o segundo semestre del año):
Calculemos el interés que gana un capital de $ 100.000 al 6% de interés semestral durante 180 días:

$$I = (100.000)(0,06)\,\frac{180}{180} = \$\ 6.000$$

c) **La tasa de interés trimestral** se utiliza para el tiempo de 90, 91 o 92 días. De esta manera, el interés que gana un capital de $ 100.000 al 3% de interés trimestral durante 180 días, en:

$$I = (100.000)(0,03)\,\frac{180}{90} = \$\ 6.000$$

d) **La tasa de interés mensual** se utiliza para el tiempo de 30 o 31 días del mes. Así, el interés que gana un capital de $ 100.000 al 1% de interés mensual durante 180 días, es:

$$I = (100.000)(0{,}01)\,\frac{180}{30} = \$\ 6.000$$

e) **La tasa de interés diaria** se utiliza directamente.
Calculemos el interés que gana un capital de $ 100.000 al 0,0333333% de interés diario durante 180 días.

$$I = (100.000)(0{,}000333) = \$\ 6.000$$

Como puede notarse, la tasa de interés siempre debe estar en relación con el tiempo; generalmente, si la tasa es anual, el tiempo estará dividido en 360 días; si es semestral, 180 días; si es trimestral, 90 días; si es mensual, 30 días, y si es diario, un día. Es necesario hacer esta relación tasa de interés/tiempo para evitar errores de cálculo.

Procedimientos abreviados de cálculo

Existen también procedimientos abreviados de cálculo para estimar el interés de acuerdo con la fórmula básica y se conocen como multiplicadores y divisores fijos.

Multiplicadores fijos

Utilizan la tasa de interés dividida para 36.000 o 36.500, 18.000 o 3.000 si es anual, semestral o mensual.
Se toma como referencia la fórmula básica del interés simple:

$$I = (C)(i)(t) = C\left(\frac{i}{(100)(360)}\right)(t)$$

$$I = (C)(t)\,\frac{i}{36.000}$$

El factor de interés será: $\frac{i}{36.000}$ por día;

Si i = 12%, se tiene: $\frac{12}{36.000} = \$\ 0{,}000333$

Ejemplo

Aplicando lo anterior, calculamos el interés que ganó en: a) 1 día, b) 2 días, c) 10 días d) 180 días, un capital de $ 1 al 12% de interés anual:

$$a)\ I = (1)(12)\,\frac{1}{36.000} = \$\ 0{,}000333$$

$$b)\ I = (1)(12)\,\frac{2}{36.000} = \$\ 0{,}000666$$

$$c)\ I = (1)(12)\,\frac{10}{36.000} = \$\ 0{,}00333$$

$$d)\ I = (1)(12)\,\frac{180}{36.000} = \$\ 0{,}06$$

Los números 0,000333; 0,000666; 0,003333 y 0,06 son factores fijos (multiplicadores fijos), para 1, 2, 10 ó 180 días, respectivamente, con una tasa de interés del 12% anual. Esos factores se multiplican por cualquier capital.
Lincoyán Portus Govinden, en su obra de *Matemáticas financieras*, cita el factor de interés simple como el tanto por ciento en un día y recomienda su utilización en la elaboración de tablas, así:

Para calcular el interés que gana un capital de $ 120.000 al 12% anual durante 180 días:

$$I = (120.000)(0{,}12)\,\frac{180}{360} = \$\ 7.200$$

Por multiplicadores fijos:

$$I = (120.000)(0{,}000333)(180) = \$\ 7.200$$

Divisores fijos
Divisor fijo es el cociente de la división de 36.500, 36.000, 18.000 o 3.000 (según sea la tasa de interés: anual, semestral o mensual), entre la tasa de interés correspondiente, como se expresa a continuación:

$$I = \frac{(C)(t)}{Df};\ Df = \frac{36.500}{i};\ \frac{36.000}{i};\ \frac{18.000}{i};\ \frac{9.000}{i};\ \frac{3.000}{i}$$

Entonces:
1. Para calcular el interés de $ 10.000 al 12% mensual durante 180 días, se realiza el siguiente procedimiento:

$$I = \frac{(10.000)(180)}{\frac{3.000}{12}} = \frac{(10.000)(180)}{250} = \$\ 7.200$$

2. Para conocer que interés gana un capital de $ 1 al 12% de interés anual, se tiene:

Planteamiento	Divisor fijo	Resultado
a) En 1 día	$1 = (1)\dfrac{1}{\dfrac{36.000}{12}} = (1)\dfrac{1}{3,000}$	= 0,000333
b) En 2 días	$1 = (1)\dfrac{2}{\dfrac{36.000}{12}} = (1)\dfrac{2}{3,000}$	= 0,000666
c) En 10 días	$1 = (1)\dfrac{10}{\dfrac{36.000}{12}} = (1)\dfrac{10}{3,000}$	= 0,003333
d) En 180 días	$1 = (1)\dfrac{180}{\dfrac{36.000}{12}} = (1)\dfrac{180}{3,000}$	= 0,06
e) En 360 días	$1 = (1)\dfrac{360}{\dfrac{36.000}{12}} = (1)\dfrac{360}{3,000}$	= 0,12

Tabla 2.1. *Tabla de interés generado por $ 1 a una tasa del 12% anual*

3. Cálculo del interés de $ 12.000 en 180 días al 12% anual, se realiza así:

$$I = (12.000)\,\frac{180}{3.000} = \$\ 720{,}00$$

4. Calcular el interés de $ 90.000 en 240 días al 9% semestral, se obtiene de la siguiente forma:

$$I = (90.000)\,\frac{240}{\dfrac{18.000}{9}} = (90.000)\,\frac{240}{2.000} = \$\ 10.800$$

Cálculo del capital

Para el cálculo del capital inicial (C), se toma como base la fórmula del interés simple (fórmula 2.1), I = Cit, y se despeja C:

$$C = \frac{I}{it}$$

Fórmula 2.2. Cálculo del capital cuando la tasa es anual y el tiempo en años.

Cuando i es anual y el tiempo en días:

$$C = \frac{I}{(i)\frac{t}{360}}$$

Fórmula 2.3. Cálculo del capital cuando la tasa es anual y el tiempo en días.

Cuando i es semestral

$$C = \frac{I}{(i)\frac{t}{180}}$$

Fórmula 2.4. Cálculo del capital cuando la tasa es semestral y el tiempo en días.

Cuando i es trimestral:

$$C = \frac{I}{(i)\frac{t}{90}}$$

Fórmula 2.5. Cálculo del capital cuando la tasa es trimestral y el tiempo en días.

Cuando i es mensual:

$$C = \frac{I}{(i)\frac{t}{30}}$$

Fórmula 2.6. Cálculo del capital cuando la tasa es mensual y el tiempo en días.

Cuando i es diario:

$$C = \frac{I}{(i)\,t}$$

Fórmula 2.7. Cálculo del capital cuando la tasa es diaria y el tiempo en días.

Una vez evaluadas estas fórmulas tomemos la 2.3 para calcular qué capital produjo un interés de $ 18.000 a una tasa de interés del 20% anual en 180 días

$$C = \frac{18.000}{0{,}20\,\frac{180}{360}} \qquad C = \$\ 180.000$$

Cálculo de la tasa de interés

Para el cálculo de la tasa de interés se toma como base la fórmula I = Cit y se despeja i:

Cuando la tasa de interés es anual, el tiempo se expresa en años:

$$i = \frac{I}{(C)t}$$

Fórmula 2.8. Cálculo de la tasa de interés anual y el tiempo en años.

Cuando la tasa de interés es anual, el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C)\frac{t}{360}}$$

Fórmula 2.9. Cálculo de la tasa de interés anual y el tiempo en días.

Cuando la tasa de interés es semestral, el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C)\frac{t}{180}}$$

Fórmula 2.10. Cálculo de la tasa de interés semestral y el tiempo en días.

Cuando la tasa de interés es trimestral, el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C)\frac{t}{90}}$$

Fórmula 2.11. Cálculo de la tasa de interés trimestral y el tiempo en días.

Cuando la tasa de interés es mensual, el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C)\frac{t}{30}}$$

Fórmula 2.12. Cálculo de la tasa de interés mensual y el tiempo en días.

Cuando la tasa de interés es diaria, el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C)\,t}$$

Fórmula 2.13. Cálculo de la tasa de interés diaria y el tiempo en días.

Tomando como referencia la fórmula 2.9.
¿A qué tasa de interés anual se coloca un capital de $ 180.000 para que produzca $ 18.000 en 180 días?

$$i = \frac{18.000}{180.000\,\frac{180}{360}} = 0{,}2$$

i = 20% anual

Comprobación:

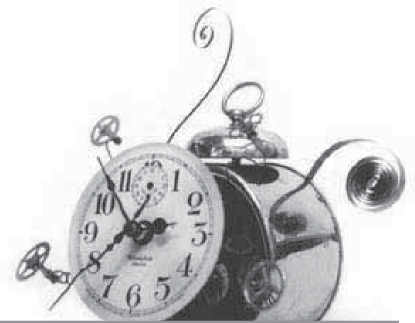
$$I = Cit = (180.000)(0{,}20)\,\frac{180}{360}$$

I = $ 18.000

Y con la fórmula **2.12.** calculamos
¿A qué tasa de interés mensual se coloca un capital de \$ 50.000 para que produzca \$ 9.000 en 240 días?

$$i = \frac{9.000}{50.000 \, \frac{240}{30}} = 0{,}0225$$

$$i = 2\ 1/4\% \text{ mensual}$$



Cálculo del tiempo

Despejamos t de la fórmula básica I = Cit.

$t = \dfrac{I}{(C)i}$	**Fórmula 2.14.** Cálculo del tiempo.

Cuando la tasa de interés es anual y se quiere expresar el tiempo en días:

$I = (C)(i)\,\dfrac{t}{360}$	$t = \dfrac{(I)360}{(C)(i)}$	**Fórmula 2.15.** Cálculo del tiempo en días y la tasa de interés anual.

Cuando la tasa de interés es semestral y se quiere expresar el tiempo en días:

$I = (C)(i)\,\dfrac{t}{180}$	$t = \dfrac{(I)180}{(C)(i)}$	**Fórmula 2.16.** Cálculo del tiempo en días y la tasa de interés semestral.

Cuando la tasa de interés es trimestral y se quiere expresar el tiempo en días:

$I = (C)(i)\,\dfrac{t}{90}$	$t = \dfrac{(I)90}{(C)(i)}$	**Fórmula 2.17.** Cálculo del tiempo en días y la tasa de interés trimestral.

Cuando la tasa de interés es mensual y se quiere expresar el tiempo en días:

$I = (C)(i)\,\dfrac{t}{30}$	$t = \dfrac{(I)30}{(C)(i)}$	**Fórmula 2.18.** Cálculo del tiempo en días y la tasa de interés mensual.

Cuando la tasa de interés es anual, semestral o mensual y se desea expresar el tiempo en años o meses, elaboramos la siguiente tabla:

Fórmula básica	Tiempo			
	Anual	Semestral	Trimestral	Mensual
I = C*it*	$t = \dfrac{I}{(C)\ (i)}$	$t = \dfrac{(I)(2)}{(C)(i)}$	$t = \dfrac{(I)(4)}{(C)(i)}$	$t = \dfrac{(I)(12)}{(C)(i)}$

Tabla 2.2. *Tabla de cálculo del tiempo con variación de la tasa de interés*

Apliquemos entonces la fómula 2.15. para calcular:
¿En qué tiempo un capital de \$ 85.000 ganará un interés de \$ 2.550 al 9% anual?

$$t = \frac{(2.550)(360)}{(85.000)(0,09)} = 120 \text{ días}$$

$$t = 120 \text{ días}$$

Y la fórmula 2.18 para conocer:
¿En qué tiempo un capital de \$ 45.000 ganará un interés de \$ 1.350 al 0,5% mensual?

$$\text{t} = \frac{(1.350)(30)}{(45.000)(0,005)} = 180 \text{ días}$$

$$\text{t} = 180 \text{ días}$$

Cálculo del monto a interés simple

El monto a interés simple es la suma del capital original más los intereses generados en el transcurso del tiempo. Se representa con la letra M.
Por definición: M = C + I; en la fórmula del interés simple: I = Cit
Reemplazando el valor de I:

$$M = C + Cit$$

Al obtener el factor común C, se tiene:

$$M = C\ (1 + it)$$ **Fórmula 2.19.** Fórmula del monto

Obtenida la fómula calculemos el monto de un capital de \$ 1.500,00 al 1,8% mensual durante 180 días.

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 1.500,00\left(1 + 0,018\,\frac{180}{30}\right)$$

$$M = \$\ 1.662,00$$

Se calcula primero el interés:

$$I = (1.500,00)(0,018)\ \frac{180}{30} = \$\ 162,00$$

Sumando el capital, se obtiene el monto:

$$M = 1.500,00 + 162,00 = \$\ 1.662,00$$

Apliquemos la fórmula 2.19 para calcular el monto de un capital de \$ 210 al 12% anual, desde el 15 de marzo 15 de agosto del mismo año.

$$M = 210\left(1 + 0{,}12\ \frac{153}{360}\right) = \$\ 220{,}71$$

Cálculo del valor actual a interés simple

Valor actual o valor presente de un documento o deuda es el capital calculado en una fecha anterior a la del vencimiento del documento, deuda o pago. Se representa con la letra C.

Valor actual o presente de una suma, con vencimiento en una fecha futura, es aquel que, a una tasa dada y en un período de tiempo determinado hasta la fecha de vencimiento, alcanzará un valor igual a la suma debida.

Estas definiciones resumen el concepto de valor actual y establecen que el tiempo faltante para el vencimiento de un documento financiero o deuda es el que interesa, y el que debe tomarse en cuenta para el cálculo.

Deducción de la fórmula del valor actual

Se deduce de la fórmula del monto a interés simple, $M = C(1 + it)$, de la cual se despeja C.

$$C = \frac{M}{1 + it}$$ **Fórmula 2.20.** Fórmula del valor actual a interés simple

El valor actual puede calcularse con tasa de interés anual, semestral, mensual, etc., y con el tiempo expresado en días, meses o años. En el cálculo, se determina siempre el tiempo que falta para el vencimiento del documento, deuda o pago por cuanto se considera el monto final.

Por lo anterior, si se desea conocer el valor actual de un documento de \$ 100, con vencimiento en 180 días, 60 días antes de su vencimiento, considerando una tasa de interés del 18% anual, se tiene:

$$C = \frac{100}{1 + 0{,}18\left(\frac{60}{360}\right)} = \$\ 97{,}08738$$

Comprobación:

$$M = 97{,}08738\left[1 + 0{,}18\left(\frac{60}{360}\right)\right] = \$\ 100$$

Gráfica de tiempos y valores

Antes de explicar los dos casos de valor actual en interés simple, es necesario conocer la *gráfica de tiempos y valores*, que consiste en una línea recta en la cual se colocan los siguientes datos:

En la parte de abajo de la línea: fecha de suscripción, fecha de negociación o de descuento y fecha de vencimiento del documento u obligación. En la gráfica se puede observar y calcular con facilidad el tiempo comprendido entre la fecha de negociación y la de vencimiento, tiempo pertinente para el cálculo del valor actual.

En la parte superior de la línea: valor nominal, valor actual o precio y valor al vencimiento o monto (gráfico **2.1**)

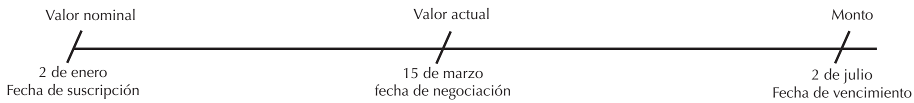


Gráfico 2.1 Tiempos y valores

Esta gráfica es muy útil para el planteamiento y resolución de problemas de valor actual y otros tipos de problemas en matemática financiera, como se verá en los ejemplos que se presentan a continuación.

Existen dos casos en el cálculo del valor actual:

a) Cuando se conoce el valor al vencimiento o monto.
b) Cuando hay necesidad de calcular el monto.

Caso A

Vamos a calcular el valor actual, al día de hoy, de un documento de \$ 150.000 que vence en 210 días de plazo, considerando una tasa de interés del 18% anual.

$$C = \frac{M}{1 + it} \qquad C = \frac{150.000}{1 + (0,18)\,\frac{210}{360}} = \$\ 135.746,61$$

$$C_1 = \$\ 135.746,61$$

En el mismo ejercicio, consideremos el cálculo del valor actual, 90 días antes del vencimiento.

$$C_2 = \frac{150.000}{1 + 0,18\left(\frac{90}{360}\right)} = \$\ 143.540,67$$

El planteamiento y la solución gráfica son:

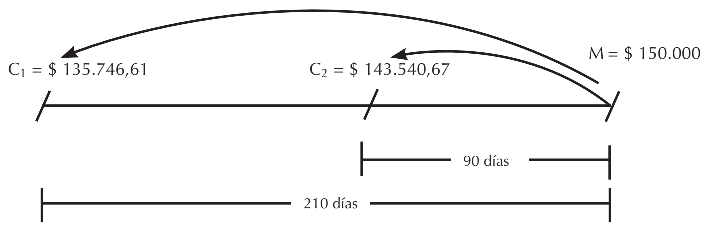


Gráfico 2.2. Solución gráfica del caso **A**

Caso B

El 15 de marzo se suscribió un documento de $ 1.800,00 con vencimiento en 180 días plazo al 1% mensual. Debemos calcular su valor actual al 12 de agosto del mismo año, considerando una tasa de interés del 18% anual.
Se plantea el problema en forma gráfica y se sitúan los datos para la resolución.

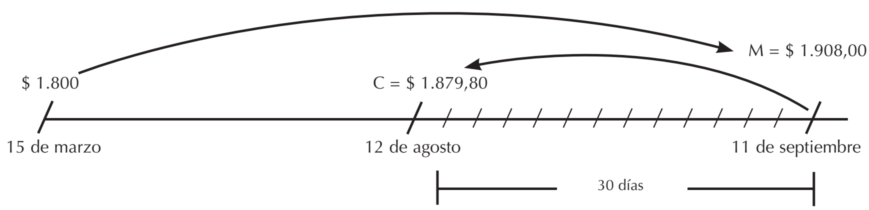


Gráfico 2.3. Solución gráfica del problema del caso **B**

Se determina la fecha de vencimiento, 11 de septiembre, y se calcula el monto:

$$M = 1.800{,}00\left[1 + 0{,}01\left(\frac{180}{30}\right)\right] = \$\ 1.908{,}00$$

Se determina el tiempo que falta, a partir del 12 de agosto, para el vencimiento:

Agosto	19 días
Septiembre	11 días
Total	30 días

Se calcula el valor actual:

$$C = \frac{1.908{,}00}{1 + (0{,}18)\,\dfrac{30}{360}} = \frac{1.908{,}00}{1{,}015} = \$\ 1.879{,}80$$

Como puede observarse, para el cálculo del valor actual se toma el tiempo que falta desde la fecha dada hasta el vencimiento, 30 días, y la tasa de interés del 18% anual, así como el monto de $ 1.908,00 de acuerdo con las condiciones del problema del ejemplo.

El interés sobre saldos deudores

En muchas instituciones financieras y casas comerciales que operan con crédito a clientes, se acostumbra utilizar el mecanismo de calcular el interés sobre los saldos deudores; es decir, sobre los saldos que van quedando después de deducir cada cuota que se paga. Otros establecimientos comerciales utilizan el método de acumulación de intereses o método "lagarto",* denominado así por el excesivo interés que se cobra, ya que en este método se acumulan los intereses durante todo el período de la deuda; es decir, se calcula un monto y luego se divide entre el número de pagos o cuotas. En los ejemplos que se exponen a continuación se utilizan los dos métodos para establecer comparaciones.

Calculemos las cuotas mensuales que debe pagar el cliente.
Una cooperativa de ahorro y crédito otorga un préstamo por \$ 6.000 a 12 meses de plazo, al 1% mensual sobre saldos deudores.

a) Método "lagarto":

$$M = (6.000)\left[1 + 0,01\left(\frac{360}{30}\right)\right] = \$\ 6.720$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{6.720}{12} = \$\ 560$$

$$\text{Intereses} = 6.720 - 6.000 = \$\ 720$$

b) Método de saldos deudores:
Valor de la cuota sin intereses:

$$\frac{6.000}{12} = \$\ 500$$

Interés pagadero en la primera cuota:

$$I = (6.000)(0,01)(1) = \$\ 60$$

Valor de la primera cuota = cuota de capital + interés:

500 + 60 = \$ 560 (Coincide con la del método "lagarto".)

Segunda cuota: se reduce el capital en \$ 500 y queda un saldo de \$ 5.500; en consecuencia, el interés será:

$$I = (5.500)(0,01)(1) = \$\ 55,00$$

Valor de la segunda cuota:

$$500 + 55 = \$\ 555$$

* En algunos países de América también se conoce a este animal como "cocodrilo".

Tercera cuota: se reduce la deuda en \$ 500 y queda un saldo de \$ 5.000; por tanto, el interés pagadero en la tercera cuota será:

$$I = (5.000)(0,01)(1) = \$ 50,00$$

Valor de la tercera cuota:

500 + 50 = \$ 550; y así sucesivamente.

Como puede notarse, las cuotas disminuyen en progresión aritmética en \$ –5.
Al calcular el valor de la última cuota (cuota 12) se obtiene:
Saldo de la deuda: \$ 500
Intereses:

$$I = (500)(0,01)(1) = \$ 5$$

Valor de la última cuota:

500 + 5 = \$ 505

Se puede elaborar, así, una tabla financiera de las cuotas:

Período	Deuda	Interés	Capital	Cuota
1	6.000	60	500	560
2	5.500	55	500	555
3	5.000	50	500	550
4	4.500	45	500	545
5	4.000	40	500	540
6	3.500	35	500	535
7	3.000	30	500	530
8	2.500	25	500	525
9	2.000	20	500	520
10	1.500	15	500	515
11	1.000	10	500	510
12	500	5	500	501
Total		\$ 390	\$ 6.000	\$6.390

Tabla 2.3. *Tabla de cuotas o pagos mensuales*

La cuota fija mensual puede calcularse dividiendo el total de cuotas entre el número de pagos o cuotas:

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{Valor total de pagos o cuotas}}{\text{Número de pagos o cuotas}}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{6.390}{12} = \$\ 532,50$$

En total, por capital e intereses, se paga el monto de $ 6.390. Si los intereses generados son de $ 390 durante los 12 meses, se puede calcular la tasa de interés anual:

$$i = \frac{I}{(C)(t)} = \frac{390}{(6.000)(1)} = 0{,}065 = 6{,}5\% \text{ anual}$$

$$i = 0{,}54\% \text{ mensual}$$

Los intereses son: $ 6.390 – $ 6.000 = $ 390 que, comparados con el primer método, presentan una diferencia notable: $ 720 – 390 = $ 330.
Es decir, la tasa de interés real que se paga en el segundo método es casi la mitad de la del primero.

Igualmente, si se compara la cuota fija mensual,
por el primer método: $ 560
por el segundo método: $ 532,50

El problema también puede resolverse utilizando una progresión aritmética:
560; 555; 550; ... cuya razón o diferencia común es: –5

$$u = a + (n - 1)(d) = 560 + (12 - 1)(-5) = 505$$

$$u = \$\ 505$$

También u = 500(1 + 0,01) = $ 505

$$S = \frac{n}{2}(a + u)$$

$$S = \frac{12}{2}(560 + 505) = \$\ 6.390$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{6.390}{12} = \$\ 532{,}50$$

Cuota mensual fija = $ 532,50

La cuota fija puede calcularse en forma simplificada:

$$\text{Cuota fija} = \frac{\frac{n(a + u)}{2}}{n} = \frac{a + u}{2} \quad \text{(fórmula simplificada)}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{560 + 505}{2} = \$\ 532{,}50$$

Si existiese mora en el pago, deberá pagarse una tasa de interés mayor; en este ejemplo, puede ser del 4% mensual sobre el valor de la cuota.

De manera que si se demora diez días en el pago, a la cuota de \$ 532,50 se deberá adicionar:

$$I = (532{,}50)(0{,}04)\,\frac{10}{30} = \$\,7{,}10$$

Ejemplo

Una empresa comercial vende automóviles cuyo precio de lista es de \$ 6.000, con una cuota inicial del 20%, y el saldo a 30 meses de plazo. Tenemos que calcular la cuota fija mensual si se considera una tasa del 24% de interés anual.

Cuota inicial = (6.000)(0,20) = \$ 1.200
Saldo a pagar en 30 meses = 6.000 – 1.200 = \$ 4.800

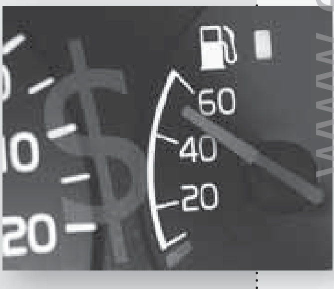
Al calcular la cuota fija mediante el método de acumulación de intereses o método "lagarto" se obtiene:

$$M = 4.800\left(1 + 0{,}24\,\frac{900}{360}\right) = \$\,7.680$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{7.680}{30} = \$\,256$$

Al calcularla por el método de saldos deudores; es decir, calculando sobre los saldos que quedan luego de haber realizado el respectivo pago:

$$\text{Cuota de capital} = \frac{4.800}{30} = \$\,160$$



Primera cuota: capital + interés

$$I = 160 + 96 = \$\,256$$

$$I = Cit;\ I = (4.800)(0{,}24)\,\frac{30}{360} = \$\,96$$

Segunda cuota: 160 + 92,80 = \$ 252,80

$$I = (4.640)(0{,}24)\,\frac{30}{360} = \$\,92{,}80$$

Tercera cuota: 160 + 89,60 = \$ 249,60

$$I = (4.480)(0{,}24)\,\frac{30}{360} = \$\,89{,}60$$

Última cuota: 160 + 3,20 = $ 163,20

$$I = (160)(0{,}24)\,\frac{30}{360} = \$\ 3{,}20$$

Por lo tanto, puede calcularse la cuota fija:

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{256{,}00 + 163{,}20}{2} = \$\ 209{,}60$$

Período	Capital	Interés	Cuota	Capital reducido o deuda	Período	Capital	Interés	Cuota	Capital reducido o deuda
1	160,00	96,00	256,00	4.640,00	17	160,00	44,80	204,80	2.080,00
2	160,00	92,80	252,80	4.480,00	18	160,00	41,60	201,60	1.920,00
3	160,00	89,60	249,60	4.320,00	19	160,00	38,40	198,40	1.760,00
4	160,00	86,40	246,40	4.160,00	20	160,00	35,20	195,20	1.600,00
5	160,00	83,20	243,20	4.000,00	21	160,00	32,00	192,00	1.440,00
6	160,00	80,00	240,00	3.840,00	22	160,00	28,80	188,80	1.280,00
7	160,00	76,80	236,80	3.680,00	23	160,00	25,60	185,60	1.120,00
8	160,00	73,60	233,60	3.520,00	24	160,00	22,40	182,40	960,00
9	160,00	70,40	230,40	3.360,00	25	160,00	19,20	179,20	800,00
10	160,00	67,20	227,20	3.200,00	26	160,00	16,00	176,00	640,00
11	160,00	64,00	224,00	3.040,00	27	160,00	12,80	172,80	480,00
12	160,00	60,80	220,80	2.880,00	28	160,00	9,60	169,60	320,00
13	160,00	57,60	217,60	2.720,00	29	160,00	6,40	166,40	160,00
14	160,00	54,40	214,40	2.560,00	30	160,00	3,20	163,20	0,00
15	160,00	51,20	211,20	2.400,00					
16	160,00	48,00	208,00	2.240,00	Total	$ 4.800,00	$ 1.488,00		$ 6.288,00

Tabla 2.4. *Tabla de reducción de la deuda*

También puede calcularse la cuota mensual fija para todos los meses sin elaborar la tabla, puesto que se trata de una progresión aritmética:

256,00; 252,80; 249,60; ...

$u = 256{,}00 + (30 - 1)(-3{,}20)$

$u = 256{,}00 - 92{,}80 = \$\ 163{,}20$

$$S = \frac{n}{2}\,(a + u)$$

$$S = \frac{30}{2}(256,00 + 163,20) = 15(419,20) = \$\ 6.288,00$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{Valor de todos los pagos}}{\text{Número de cuotas}}$$

$$\text{Cuota mensual} = \frac{6.288,00}{30} = \$\ 209,60$$

Interés: I = 6.288,00 – 4.800 = $ 1.488

$$\text{Tasa de interés real } i = \frac{1.488,00}{4.800,00\left(\frac{900}{360}\right)} = \frac{1.480,00}{12.000,00}$$

i = 0,124 = 12,4% anual

Ejemplo

Una cooperativa otorga préstamos por $12.000 a 36 meses de plazo con una tasa de interés del 1,7% mensual. Calculemos la cuota mensual que debe cobrar a sus clientes.
Entonces:

$$\text{Cuota de capital} = \frac{12.000}{36} = \$\ 333,33$$

Primera cuota:

$$I = (12.000)(0,017)\left(\frac{30}{30}\right) = \$\ 204$$

Interés + Capital = Cuota
204 + 333,33 = $ 537,33

Segunda cuota:

$$I = (11.666,67)(0,017)\left(\frac{30}{30}\right) = \$\ 198,33$$

Interés + Capital = Cuota
198,333 + 333,33 = $ 531,667

Tercera cuota:

$$I = (11.333,33)(0,017)\left(\frac{30}{30}\right) = \$\ 192,67$$

Interés + Capital = Cuota
192,67 + 333,33 = $ 526,00

Se trata de una progresión aritmética cuya razón es –5,67

$$u = 537{,}33 + (36 - 1)(-5{,}67) = \$\ 339$$

$$S = \frac{36}{2}(537{,}33 + 339) = \$\ 15.773{,}94$$

Al dividir entre el número de cuotas se obtiene la cuota fija mensual:

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{15.773{,}94}{36} = \$\ 438{,}165$$

Comprobación:

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2} = \frac{537{,}33 + 339}{2} = \$\ 438{,}165$$

Ejemplo de pesos parciales

Una empresa solicita un préstamo a un banco por $ 10.000 a 12 meses de plazo con una tasa de interés del 8% anual, pudiendo hacer pagos trimestrales de capital e intereses. Si queremos conocer el valor de las cuotas o pagos al final de cada trimestre, no es necesario calcular la cuota o pago fijo; por lo tanto, se procede a calcular cada cuota en particular.

$$\text{Cuotas de capital} = \frac{10.000}{4} = \$\ 2.500$$

Primera cuota:

$$I = (10.000)(0{,}08)\frac{90}{360} = \$\ 200$$

$$\text{Pago} = 2.500 + 20{,}0 = \$\ 2.700$$

Segunda cuota:

$$I = (7.500)(0{,}08)\frac{90}{360} = \$\ 150$$

$$\text{Pago} = 2.500 + 150 = \$\ 2.650$$

Tercera cuota:

$$I = (5.000)(0{,}08)\frac{90}{360} = \$\ 100$$

$$\text{Pago} = 2.500 + 100 = \$\ 2.600$$

Cuarta cuota:

$$I = (2.500)(0{,}08)\,\frac{90}{360} = \$\ 50$$

Pago = 2.500 + 50 = $ 2.550

Actividades de ejercitación

1. Calcule el Interés que gana un capital de $ 7.500,00 a una tasa de interés del 12% anual durante 180 días.

2. Calcule el interés que gana un capital de $ 10.000,00 a una tasa de interés del 4,5% anual desde el 15 de junio hasta el 15 de diciembre del mismo año, según las siguientes opciones y luego comente los diferentes resultados: a) con el tiempo aproximado y el año comercial, b) con el tiempo exacto y el año comercial, c) con el tiempo aproximado y el año calendario, d) con el tiempo exacto y el año calendario.

3. Calcule el interés que gana un capital de $ 20.500,00, a una tasa de interés del 15% anual, desde el 1º de marzo al 1º de septiembre del mismo año, siguiendo los 4 métodos.

4. Calcule el interés simple y el monto con tiempo exacto y año comercial, en cada uno de los siguientes casos: a) $ 1.500,00 al 18% anual a 180 días plazo, b) $ 280,00 al 1,7% mensual a 120 días plazo, c) $ 50,00 al 9% anual del 15 de marzo al 31 de agosto del mismo año, d) $ 85,00 al 14,4% anual del 10 de agosto al 15 de diciembre del mismo año, e) $ 4.500,00 al 1,7% mensual del 10 de abril al 22 de octubre del mismo año, f) $ 2.500,00 al 1,5% mensual, del 12 de mayo al 15 de septiembre del mismo año, y g) $ 3.000,00 al 0,15% diario del 15 de marzo al 14 de abril del mismo año.

5. ¿En qué tiempo se incrementará en $ 205,00 un capital de $ 50.000,00 colocado al 10 ¼% anual?

6. ¿En qué tiempo se convertirá en $ 54.500,00 un capital de $ 50.000,00, colocado a una tasa de interés del 1,5% mensual?

7. ¿A qué tasa de interés anual se colocó un capital de $ 4.000,00 para que se convierta en 4.315,00 en 210 días?

8. ¿A qué tasa de interés mensual un capital de $ 1.850,00 se incrementará una cuarta parte más en 300 días?

9. ¿Cuál fue el capital que colocado a una tasa de interés del 9% anual, durante 180 días, produjo un interés de $ 1.125,00?

10. Calcule el valor actual de un pagaré de $ 540,00, con vencimiento en 270 días y con una tasa de interés del 12% anual:
a) el día de hoy, b) dentro de 30 días, c) dentro de 90 días, d) dentro de 180 días, y e) antes de 60 días del vencimiento.

11. Un documento de $ 900,00 suscrito el 19 de abril, con vencimiento en 180 días a una tasa de interés del 1% mensual desde su suscripción, es negociado el 15 de julio del mismo año a una tasa de interés del 18% anual, se desea conocer: a) la fecha de vencimiento, b) el monto o valor al vencimiento, c) el número de días comprendidos entre la fecha de negociación y la de vencimiento, d) el valor actual al 15 de julio.

12. María otorga a Pedro un préstamo por $ 1.500,00, con vencimiento en 300 días, a una tasa de interés del 18% anual desde su suscripción. Si Pedro paga su deuda 90 días antes de la fecha de vencimiento, a la misma tasa de interés, calcule cuál sería el valor del pago.

13. Se necesita conocer cuál fue la suma de dinero que, colocada a una tasa de interés del 7% semestral, produjo $ 95 en 11 meses.

14. Una empresa pagó $ 780,00 en intereses por un pagaré de $ 6.500,00 a una tasa de interés del 18% anual. Calcule el tiempo transcurrido y el monto.

15. Una persona invierte $ 1.500,00 durante 9 meses, por lo que obtiene un interés de $135. Calcule la tasa de interés que se le reconoció.

16. El 15 de junio una persona recibe una letra de cambio por $ 220,00, a 240 días de plazo y a una tasa de interés del 1,7% mensual desde la suscripción. Calcule cuál será su valor actual al 30 de septiembre del mismo año, si se reconoce una tasa de interés del 1,8% mensual.

17. Calcule el valor actual de un documento de $ 95.000,00, treinta días antes de su vencimiento, si se considera una tasa de interés del 12% anual.

18. Una empresa comercial ofrece en venta refrigeradoras cuyo precio de lista es de $ 600,00, con el 10% de cuota inicial y el saldo a 30 meses plazo, con una tasa de interés del 2% mensual. Calcule la cuota mensual fija que debe pagar el cliente: a) por el Método de Acumulación de Intereses o "Método LAGARTO", b) por el Método de SALDOS DEUDORES. Analice los resultados y saque conclusiones.

19. Una cooperativa de ahorro y crédito otorga préstamos de \$ 3.600 a 36 meses de plazo, con una tasa de interés del 1,5% mensual. Calcule la cuota fija que debe pagar el socio o cliente de la cooperativa: a) por el método de acumulación de intereses o método "lagarto", b) por el método de saldos deudores, c) la tasa de interés que realmente paga el cliente.

20. Una persona pide un préstamo de \$ 14.500,00 a 90 días de plazo, a una tasa de interés del 1,8% mensual. Calcule cuánto deberá pagar por el préstamo si se demora en pagar 60 días más y le cobran el 2% mensual por mora.

21. Una persona adquiere un vehículo cuyo precio es de \$ 24.000,00 y paga el 50% de contado y el saldo a 30 meses de plazo, con una tasa de interés del 1,5% mensual sobre saldos deudores. Calcule la cuota mensual fija que debe pagar.

Respuestas

1. \$ 450,00

2. a) \$ 225,00 b) \$ 228,75 c) \$ 221,9178 d) \$ 225,6164

3. a) \$ 1.537,50 b) \$ 1.571,67 c) \$ 1.516,4384 d) \$ 1.550,1370

4. a) \$ 135,00 y \$ 1.635 b) \$ 19,40 y \$ 299,04 c) \$ 2,11 y 52,11
d) \$ 4,318 y 89,318 e) \$ 497,25 y \$ 4.997,25 f) \$ 157,50 y \$ 2.657,50
g) \$ 135,00 y \$ 3.135,00

5. 240 días

6. 180 días

7. 13,50 % anual

8. 2,5% mensual

9. C = \$ 25.000,00

10. a) \$ 495,4128 b) \$ 500,00 c) \$ 509,4340
d) \$ 524,2718 e) \$ 529,4118

11. a) 16 de octubre b) \$ 954,00 c) \$ 911,61

12. \$ 1.650,7177

13. $ 740,26

14. tiempo: 240 días; M = $ 7.280,00

15. i = 12%

16. $ 231,45

17. $ 94.059,4059

18. a) $ 28,80 b) $ 23,58

19. a) $ 127,75 b) $ 154,00 c) tasa: 9,24% anual

20. $ 15.894,30

21. $ 493,00

Actividades de autoevaluación

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el interés simple?

2. Calcule el interés simple que genera un capital de $ 3.000 colocado a una tasa de interés del 30% anual durante 90 días.

3. ¿De cuántas maneras puede calcularse el interés simple cuando la tasa de interés es anual y se da el tiempo exacto y aproximado entre dos fechas?

4. ¿Cuál es la fórmula para calcular el monto a interés simple?

5. Calcule el interés simple que producirá un capital de $ 20.000 colocado a una tasa de interés del 9% anual durante el tiempo comprendido entre el 5 de mayo y el 5 de noviembre del mismo año, mediante las cuatro formas de cálculo.

6. Calcule el monto en los ejercicios 2 y 5 .

7. Determine la fórmula para calcular: a) la tasa de interés; b) el tiempo y c) el capital inicial.

8. ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor actual en cualquier tiempo comprendido entre la fecha de negociación y la de vencimiento?

9. Un pagaré de \$ 5.000, suscrito el 14 de marzo a 180 días de plazo con una tasa de interés del 21% anual desde la suscripción, es vendido el 13 de mayo del mismo año a una tasa de interés del 18% anual. Calcule: a) la fecha de vencimiento; b) la gráfica de tiempos y valores; c) el valor al vencimiento o monto; d) el número de días comprendidos entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento y e) el valor actual o precio del pagaré a la fecha de negociación.

10. Una empresa vende automóviles a un precio de lista de \$ 60.000, con el 25% de cuota inicial y el saldo a 36 meses de plazo y a una tasa de interés del 3% mensual. Calcular la cuota fija mensual que debe pagar el cliente: a) por el método de acumulación de intereses "lagarto" y b) por el método de saldos deudores.

Respuestas

1. La fórmula para calcular el interés simple es:

$$I = Cit$$

en donde I es el interés generado; C, el capital inicial; i, la tasa de interés (que puede ser anual, semestral, trimestral, bimestral, mensual, diaria o expresada en cualquier otra unidad de tiempo y ***t*** el tiempo, que generalmente está dado en días).

2. Se aplica la fórmula para calcular el interés simple:

$$I = Cit$$

$$I = (3.000)(0{,}30)\,\frac{90}{360} = \$\ 225{,}00$$

Se dividió 90 entre 360 pues se trata de una tasa de interés anual, y el tiempo se expresa en días.

3. El interés simple puede calcularse de las siguientes maneras:

a) El tiempo aproximado y el año comercial.
b) El tiempo aproximado y el año calendario.
c) El tiempo exacto y el año comercial.
d) El tiempo exacto y el año calendario.

4. La fórmula para calcular el monto es:

$$M = \text{Capital} + \text{Interés};\ M = C + I$$

También

$$M = C + Cit$$

$$M = C(1 + it)$$

5. Se calcula el tiempo:

Mes	Exacto	Aproximado
Mayo	26	25
Junio	30	30
Julio	31	30
Agosto	31	30
Septiembre	30	30
Octubre	31	30
Noviembre	5	5
Total	**184 días**	**180 días**

Tabla 2.5. *Tabla de cálculo del tiempo*

El año puede ser comercial (360 días) o calendario (365 días). Entonces tenemos 4 formas de cálculo:

a) Con el tiempo aproximado y el año comercial:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{180}{360} = \$\ 900,00$$

b) Con el tiempo aproximado y el año calendario:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{180}{365} = \$\ 887,67$$

c) Con el tiempo exacto y el año comercial:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{184}{360} = \$\ 920,00$$

d) Con el tiempo exacto y el año calendario:

$$I = (20.000)(0,09)\,\frac{184}{365} = \$\ 907,40$$

6. Se calcula el monto en el ejercicio 2:

$$M = C + I; \qquad M = 3.000 + 225 = \$\ 3.225$$

o también:

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 3.000[1 + (0,30)\,\frac{90}{360}] = \$\ 3.225$$

Así mismo el monto en el ejercicio 5:

a) M = 20.000 + 900 = $ 20.900

b) M = 20.000 + 887,17= $ 20.887,17

c) M = 20.000 + 920 = \$ 20.920,00
d) M = 20.000 + 907,401 = \$ 20.907,40

7. Las tres fórmulas solicitadas pueden deducirse de la fórmula principal: I = Cit

a) $i = \dfrac{I}{Ct}$ b) $t = \dfrac{I}{Ci}$ c) $C = \dfrac{I}{it}$

8. La fórmula para calcular el valor actual puede deducirse de la fórmula del monto,

$$M = C(1 + it)$$

$$C = \frac{M}{1 + it}; \quad C = M(1 + it)^{-1}$$

9. a) Se calcula la fecha de vencimiento:

Marzo	17
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	10
Total	180 días

Tabla 2.6. *Tabla de cálculo del tiempo*

b) La gráfica de tiempos y valores:

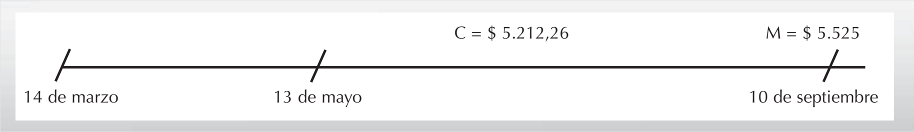


Gráfico 2.4. Solución gráfica del problema

c) El monto:

$$M = 5.000\left(1 + 0{,}21\,\frac{180}{360}\right) = \$\ 5.525$$

d) Número de días comprendidos entre la fecha de negociación y vencimiento:

Mayo	18
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	10
Total	**120 días**

Tabla 2.7. *Tabla de cálculo del numero de días*

e) Valor actual:

$$C = \frac{5.525}{1 + 0{,}18\,\frac{120}{360}} = \$\ 5.212{,}26$$

10. Calculemos el saldo:

Saldo deuda = 60.000 – 0,25(60.000) = $ 45.000

a) Por el método de acumulación de intereses:

$$M = 45.000\left(1 + 0{,}03\,\frac{1.080}{30}\right) = \$\ 93.600$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{93.600}{36} = \$\ 2.600 \text{ cada mes}$$

b) Por el método de saldos deudores:

$$\text{Cuota de capital} = \frac{45.000}{36} = \$\ 1.250$$

Interés de la primera cuota

$$I = (45.000)(0{,}03)\,\frac{30}{30} = \$\ 1.350$$

Primera cuota = 1.250 + 1.350 = $ 2.600

Interés de la última cuota:

$$I = (1.250)(0{,}03)\,\frac{30}{30} = \$\ 37{,}50$$

Última cuota = 1.250 + 37,50 = $ 1.287,50

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2} = \frac{2.600 + 1.287,50}{2} = \$\ 1.943,75$$

Actividades de repaso

1. ¿Cuál es la diferencia entre tasa de interés e interés?

2. ¿Cuál es la diferencia entre tiempo exacto y tiempo aproximado?

3. Cuando se calcula el interés simple de un determinado capital con una tasa de interés semestral y el tiempo en días, ¿entre cuánto debe dividirse el tiempo en la fórmula del interés simple?

4. Dibujar una gráfica de tiempos y valores.

5. En el cálculo del valor actual, cuando el documento genera intereses desde la suscripción, ¿es necesario calcular previamente el monto?¿Por qué?

6. En las compras o ventas a plazo, ¿cuál procedimiento o método da como resultado una cuota fija más elevada?

7. ¿Cómo se calcula la última cuota en el procedimiento o método de saldos deudores?

8. ¿Se aplican la fórmula del último término y la suma de los términos de una progresión aritmética para calcular la cuota fija en el método de saldos deudores? ¿Por qué?

9. En la venta de un refrigerador a plazos, ¿cuál de los dos métodos de cálculo preferiría el cliente de una empresa vendedora? ¿Saldos deudores o método "lagarto"? ¿Por qué? ¿Y si fuera el dueño de la empresa?

Complete su aprendizaje con el CD que acompaña a este libro

Descuentos III

Presentación

El sistema financiero utiliza con frecuencia el descuento simple en operaciones de corto plazo, en las instituciones financieras públicas y privadas. Cuando una persona natural o jurídica desea obtener liquidez o dinero efectivo respaldado por un documento cuyo vencimiento ocurrirá en un futuro cercano, realiza una operación de descuento.

Igualmente se explica el descuento bancario o bursátil, y el valor efectivo; por su aplicación en el precio de los documentos financieros que se negocian en las bolsas de valores.

El descuento puede darse en cualquier fecha antes del vencimiento de un documento financiero, y puede ser negociado a una determinada tasa de interés que se acuerde entre las partes.

Objetivo general

- Conocer el concepto de descuento y conocer cómo se practican las operaciones de descuento de documentos financieros.

Objetivos específicos

- Comprender el concepto de descuento simple.
- Conocer el descuento racional y sus fórmulas de cálculo.
- Conocer el descuento bancario o bursátil y sus fórmulas de cálculo.
- Diferenciar las tasas de interés, de las tasas de descuento.
- Conocer el redescuento y sus operaciones.
- Desarrollar ejercicios prácticos sobre descuentos.

CONTENIDO

Descuento

"Es la operación de adquirir, antes del vencimiento, valores generalmente endosables."[1]

"Operación por la que un banco entrega al tenedor de un efecto de comercio, antes de su vencimiento, el importe del mismo con ciertas deducciones."[2]

Es la operación que consiste en adquirir letras, pagarés o documentos financieros por un importe efectivo menor al valor en la fecha de vencimiento. Es decir, es la diferencia entre el valor del documento antes de la fecha en que vence y su valor al vencimiento.

Es la acción de recibir o pagar un dinero hoy, a cambio de una suma mayor comprometida para fecha futura, según las condiciones convenidas en el pagaré.

Redescuento

Operación mediante la cual el Banco Central, o un banco privado, le descuenta a otros bancos comerciales documentos, letras de cambio o pagarés, descontados por ellos con anterioridad a una determinada tasa de interés, mayor o menor, dependiendo de la política de restricción o aumento de operaciones crediticias y el dinero circulante.

Documentos de crédito

Únicamente se mencionarán la letra de cambio y el pagaré como documentos de crédito por ser los más conocidos y utilizados. Se utilizan para respaldar obligaciones en dinero con vencimiento futuro. Detallan a la persona acreedora y a la deudora, el valor de la deuda, la fecha de suscripción, el plazo, el interés. En algunos casos, pueden ser endosables a terceras personas, negociables, descontados o redescontados en bancos antes de la fecha de vencimiento.

Letra de cambio

"Documento de crédito consistente en una orden escrita por la que una persona, denominada **'girador'**, encarga a otra, llamada **'girado'** o **'aceptante'**, que pague a una tercera persona **'tenedor'**, una determinada cantidad de dinero a cierta fecha."[3]

Es común que sólo haya dos personas involucradas pues el **"girador"** puede coincidir con el **"tenedor"**.

El **"tenedor"** o beneficiario es la persona a cuyo favor se emite la letra de cambio.

La letra es susceptible de transferirse, mediante el endoso correspondiente.

---

[1] *Gran diccionario enciclopédico universal*, Valencia, Ortells, 1980.

[2] J. C. Colli Bernard y D. Lewandowski, *Diccionario Económico Financiero*, Madrid, Asociación para el Progreso de la Dirección, 1981, p. 398.

[3] N. Dávalos Arcentales, *Enciclopedia Básica de Administración, Contabilidad y Auditoría*, Quito, 1981.

La letra de cambio en la que no se especifica un plazo para el pago se considera como cancelable a la vista.

Pagaré

Título que da al tenedor del documento el derecho incondicional de recibir una cantidad de dinero en determinada fecha. Se emite y negocia con descuento, según el tipo de interés y la fecha de su vencimiento.
Los siguientes datos son fundamentales para el manejo de estos documentos y para comprender los ejemplos y ejercicios de este capítulo:

- Valor nominal: valor del documento, sin intereses, a la fecha de suscripción.
- Valor al vencimiento o monto: valor del documento, con intereses, a la fecha de vencimiento; si no se consideran intereses, coincide con el valor nominal.
- Fecha de suscripción: fecha en la cual se suscribe el documento.
- Fecha de vencimiento: fecha en la que vence el plazo del documento.
- Fecha de negociación o descuento: fecha en la que se descuenta, compra o vende el documento.
- Plazo: duración, en días, del documento.
- Valor de negociación: valor actual a la fecha del descuento, compra o venta del documento.
- Interés: suma de dinero que se obtiene o se paga sobre el capital.

Otros documentos financieros

Existen otros documentos financieros de corto plazo, generalmente de renta fija; es decir, que tienen establecidos la fecha de suscripción, de vencimiento, la tasa de interés que ganan, la tasa de negociación, su valor nominal y, algunas veces, su valor al vencimiento o monto. En ellos es relativamente fácil calcular su valor actual o precio de negociación o de descuento.
Entre los más conocidos, además de la letra de cambio y el pagaré, se hallan las pólizas de acumulación, los certificados de inversión, los certificados de ahorro, los certificados financieros, los bonos de estabilización monetaria, las notas de crédito. Además, existen los documentos de renta variable, que son las acciones emitidas por las empresas.

Descuento racional

Descuento racional o descuento simple, a una tasa de interés, es la diferencia entre monto o valor a la fecha de vencimiento de un documento o deuda y el valor presente. Se representa con la sigla “Dr”. Se interpreta también como el interés simple del valor actual.

Para calcular el descuento racional se debe conocer primero el valor actual y luego restarlo del monto, formulando:

$$Dr = \text{Monto} - \text{Valor Actual}$$
$$Dr = M - C$$
$$C = \frac{M}{1 + it}$$

$$Dr = M - \frac{M}{1 + it}$$ **Fórmula 3.1.** Fórmula de descuento racional

En el descuento racional, al igual que para el cálculo del valor actual, pueden darse dos tipos de problemas: cuando el documento no gana intereses desde la emisión, esto es, cuando el valor nominal coincide con el monto; y cuando es necesario calcular el monto, pues el documento genera intereses desde la emisión. A continuación se presentan dos ejemplos que sirven para analizar estos casos.

Para calcular el descuento racional de un documento de $ 250 suscrito el 30 de junio a 180 días de plazo, si se descontó el 30 de noviembre del mismo año con una tasa de interés del 24% anual, realizamos el siguiente procedimiento

En este caso el valor nominal es igual al monto, puesto que no gana intereses.

$M = \$\ 250$
Fecha de vencimiento: 27 de diciembre
Fecha de descuento: 30 de noviembre
Días que faltan para el vencimiento: del 30 de noviembre al 27 de diciembre = 27 días

$$C = \frac{250}{1 + 0{,}24\,\frac{27}{360}} = \$\ 245{,}58$$

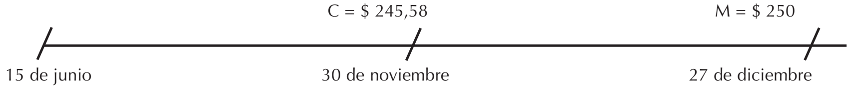


Gráfico 3.1. Solución gráfica del problema

$Dr = 250 - 245{,}58 = \$\ 4{,}42$ (aplicación de la fórmula 3.1)

Ahora calculemos el valor actual y el descuento racional de una letra de cambio de $ 100,00 a 180 días de plazo, suscrita el 31 de marzo de 2003 al 18% anual desde su suscripción, si se descuenta el 29 de julio del mismo año al 21% anual.

$$M = 100\left[1 + (0{,}18)\,\frac{180}{360}\right] = \$\ 109{,}00$$

Fecha de vencimiento: 27 de septiembre
Fecha de descuento: 29 de julio
Días que faltan para el vencimiento de la letra de cambio: 60 días

$$C = \frac{109}{1 + (0{,}21)\,\dfrac{60}{360}} = \$\ 105{,}314 \text{ (valor actual con descuento racional)}$$

Aplicando la fórmula 3.1:

Dr = 109 – 105,314 = \$ 3.686 (descuento racional)

La solución del problema se puede expresar gráficamente.

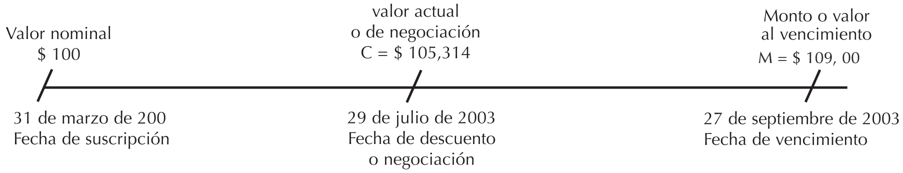


Gráfico 3.2. Solución gráfica del problema

Esto puede comprobarse calculando el interés simple del valor actual:

$$I = (105{,}314)(0{,}21)\,\frac{60}{360} = \$\ 3{,}686 = Dr$$

"El descuento racional o matemático es igual a los intereses simples del capital que en fecha futura dará el monto de la deuda."[4]

Descuento bancario, comercial o bursátil

Se utiliza en las operaciones comerciales y consiste en cobrar los intereses por anticipado.
Su cálculo se realiza sobre el monto o valor al vencimiento. Se emplea una tasa de descuento para diferenciarla de la tasa de interés que se aplica al cálculo del valor actual, se expresa como Db y se conoce como tasa de descuento al interés porcentual

[4] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 27.

que se aplica al valor nominal del documento a la fecha de su vencimiento. Se expresa como un porcentaje.

Al descontar una letra se recibe una suma inferior al valor nominal, si ésta no genera intereses desde la fecha de suscripción. Si se establece lo contrario; es decir, si gana intereses desde la fecha de suscripción, se debe proceder a calcular los montos al vencimiento del descuento.

Para descontar una letra en un banco, ésta debe contener una promesa de pago en una fecha posterior a la cual se va a descontar el documento.

Fórmula del descuento bancario o bursátil

Este tipo de descuento es común en las operaciones, transacciones y préstamos bancarios y bursátiles (aquellas que se realizan en las bolsas de valores).

Como es un interés sobre el valor del documento o deuda a la fecha de vencimiento o monto, se expresa en forma similar a la fórmula de interés simple.

$$Db = Mdt$$ **Fórmula 3.2.** Fórmula del descuento bancario

En donde

Db = descuento bancario o descuento bursátil
M = valor del documento a la fecha de vencimiento
d = tasa de descuento
t = tiempo en días, comprendido entre la fecha del descuento y la fecha de vencimiento.

Ejemplo

De esta manera para calcular el descuento bancario que un banco aplica a un cliente que descuenta un pagaré de $ 800,00 en el día de hoy, a 120 días de plazo, considerando una tasa de descuento del 12% anual, tenemos:

Monto: $ 800,00

Para calcular el descuento bancario se aplica la fórmula 3.2.

$$Db = Mdt$$

$$Db = 800\left(0{,}12\ \frac{120}{360}\right) = 32{,}00$$

$$Db = \$\ 32{,}00$$

El descuento que aplica el banco es de $ 32,00

Queremos conocer ahora el descuento bancario de un documento de $ 350,00, suscrito el 15 de marzo a 180 días de plazo, si éste se descuenta el 15 de junio del mismo año a una tasa del 18% anual.

Primero se representa el problema gráficamente:

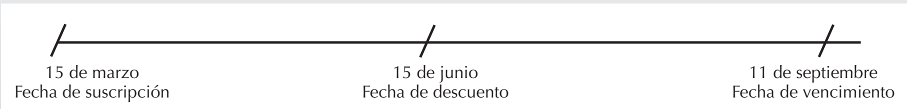


Gráfico 3.3. Solución gráfica del problema

Cálculo del tiempo: el número de días entre la fecha de descuento, 15 de junio, y la fecha de vencimiento, 11 de septiembre.

Plazo	
Marzo	16
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	180 días

Tiempo de descuento	
Junio	15
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	88 días

Tabla 3.1. *Cálculo de tiempos del problema*

Aplicando la fórmula 3.2, se tiene:

$$Db = 350{,}00\ (0{,}18)\ \frac{88}{360} = \$\ 15{,}40$$

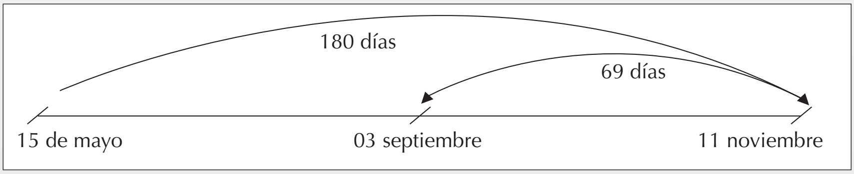
Ejemplo de descuento racional

Una póliza de $ 4.000,00 suscrita el 15 de mayo a 180 días de plazo, con una tasa de interés del 6% anual desde su suscripción, es descontada el 03 de septiembre del mismo año a una tasa del 9% anual. Calcular:

a) el gráfico; b) la fecha de vencimiento; c) el monto; d) el número de días comprendidos entre la fecha de negociación o descuento y la fecha de vencimiento; e) el valor actual a la fecha del descuento; f) el descuento racional.

Resolución:

a) Gráfico:



b) Fecha de vencimiento: 11 de noviembre (180 días a partir del 15 de mayo)

c) Monto: $M = C\,(1 + it)$

$$M = 4.000{,}00\left(1 + 0{,}06x\ \frac{180}{360}\right) = 4.120{,}00$$

d) Número de días exactos entre el 03 de septiembre y el 11 de noviembre = 69 días

e) Valor Actual:

$$C = \frac{M}{1 + it} \qquad C = \frac{4.120{,}00}{1 + 0{,}09\left(\frac{69}{360}\right)} = \frac{4.120{,}00}{1{,}01725} = 4.050{,}1352$$

f) Descuento Racional: $M - C = 4.120{,}00 - 4.050{,}1352 = 69{,}8648$

Valor actual con descuento bancario, valor efectivo o bursátil

Valor efectivo que se recibe en el momento del descuento bancario de un documento, antes de la fecha de vencimiento, a una determinada tasa de descuento.

El valor actual o presente con descuento bancario se identifica como la diferencia entre el valor al vencimiento del documento y el descuento bancario. Se expresa como Cb.

$Cb = M - Db$ **Fórmula 3.3.** Fórmula del valor actual con descuento bancario

Reemplazando el valor de Db, según la fórmula 3.2:

$$Cb = M - Mdt$$

Factorizando: $Cb = M(1 - dt)$

También se le conoce como fórmula del precio de un documento con descuento o precio bursátil. De donde puede deducirse:

www.elsolucionario.net

$$M = \frac{Cb}{1 - dt}$$

Fórmula 3.4. Monto en función del valor actual como descuento bancario

Calculemos el valor efectivo o precio que recibe una persona que realiza un descuento de una letra de cambio de $ 120, suscrita el 15 de marzo sin intereses a 180 días de plazo, si se descontó el 21 de junio del mismo año a una tasa de descuento del 18% anual.

Gráficamente:

Gráfico 3.4. Solución gráfica del problema

Ejemplos

Se calculan la fecha de vencimiento y los días comprendidos entre la fecha de descuento y la de vencimiento:

Plazo	
Marzo	16
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	**180 días**

Tiempo de descuento	
Junio	9
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	82 días

Tabla 3.2. *Cálculo de tiempo del problema*

$$Cb = M(1 - dt);\ \ Cb = 120\left[1 - 0{,}18\ \frac{82}{360}\right] = \$\ 115{,}08$$

$$Cb = \$\ 115{,}08$$

Si un cliente de un banco solicita un préstamo de $ 10.000 a 180 días de plazo, ¿qué valor efectivo recibe si le aplican una tasa de descuento del 18% anual? ¿Cuál será el descuento bancario?

En este caso, el banco calcula por anticipado el interés. En consecuencia, se trata de un descuento bancario y puede aplicarse la fórmula 3.3.

$$Cb = 10.000\left[1 - 0{,}18\ \frac{180}{360}\right]$$

$$Cb = \$\ 9.100{,}00$$

Valor efectivo: descuento bancario o comercial

$$Db = M - Cb = 10.000 - 9.100 = \$\ 900$$

¿Cuánto dinero debe solicitar un cliente de un banco si requiere $ 15.000 pagaderos en 150 días con una tasa de descuento del 12% anual?

$$M = \frac{Cb}{1 - dt}$$

$$Cb = \$\ 15.000$$
$$d = 0{,}12$$
$$t = 150$$

$$M = \frac{15.000}{1 - 0{,}12\,\frac{150}{360}} = \frac{15.000}{0{,}95} = \$\ 15.789{,}47$$

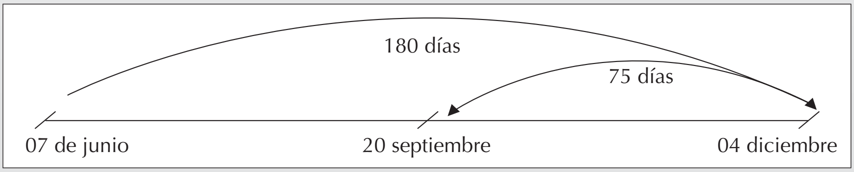
Ejemplo de descuento racional y descuento bancario

Un documento financiero de $ 10.000,00, suscrito el 07 de junio a 180 días de plazo, con una tasa del 6% anual desde su suscripción, es descontado el 20 de septiembre del mismo año a una tasa del 12% anual. Calcular:

a) el gráfico; b) la fecha de vencimiento; c) el monto; d) el número de días comprendidos entre la fecha de negociación o descuento y la fecha de vencimiento; e) el valor actual a la fecha del descuento; f) el descuento racional; g) el descuento bancario o bursátil; y, h) el valor efectivo.

Resolución:

a) Gráfico:



b) Fecha de vencimiento: 04 de diciembre (180 días a partir del 07 de junio)

Monto: $M = C\,(1 + it)$

$$M = 10.300{,}00\left(1 + 0{,}06x\frac{180}{360}\right) = 10.300{,}00$$

d) Número de días exactos entre el 20 de septiembre y el 04 de diciembre = 75 días

e) Valor Actual:

$$C = \frac{M}{1 + it} \qquad C = \frac{10.300,00}{1 + 0,12\left(\frac{75}{360}\right)} = \frac{10.300,00}{1,025} = 10.048,78$$

f) Descuento Racional: M – C = 10.300,00 – 10.048,78 = 251,22

g) Descuento Bancario o Bursátil: Db = Mdt

$$Db = 10.300,00(0,12)\left(\frac{75}{360}\right) = 257,50$$

h) Valor Efectivo: Cb = M (1 – dt)

$$Cb = 10.300,00\left(1 - 0,12x\,\frac{75}{360}\right) = 10.042,50$$

Análisis de la relación descuento racional/descuento bancario y comparación entre tasa de interés y tasa de descuento

Relación tasa de interés y tasa de descuento

La tasa de interés se utiliza para calcular el descuento racional o matemático y se aplica sobre el valor actual de un documento. Se representa por la letra ***i***.
La tasa de descuento se utiliza para calcular el descuento bancario, comercial o bursátil. Se aplica sobre el valor al vencimiento del documento o monto y se representa por la letra ***d***.
Calculemos el descuento racional y bancario de una letra de cambio de $ 240 a 210 días de plazo, si se descuenta 60 días antes de su vencimiento a una tasa del 1,8% mensual.

Gráficamente:
a) Descuento racional:

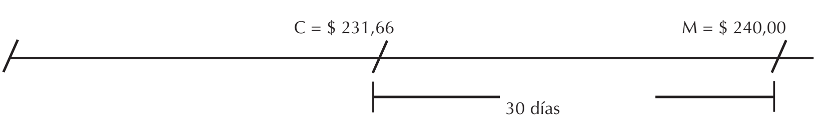


Gráfico 3.5. Solución gráfica del ejemplo

$$C = \frac{240}{1 + 0,018\,\frac{60}{30}} = \frac{240}{1,036} = \$\ 231,66$$

$$Dr = M - C \qquad Dr = 240 - 231{,}66 = \$\ 8{,}34$$

Se comprueba que corresponde al interés simple del valor actual:

$$I = Dr = Cit = 231{,}66(0{,}018)\,\frac{60}{30} = \$\ 8{,}34$$

b) Descuento bancario:

$$Db = Mdt;\ Db = 240(0{,}018)\,\frac{60}{30} = \$\ 8{,}64$$

En el descuento bancario o bursátil, el interés se calcula sobre el monto o valor al vencimiento.
Como puede notarse, el descuento bancario es siempre mayor que el descuento racional aplicado antes de la fecha de vencimiento de un documento financiero.
La relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento puede hallarse de la siguiente manera:
Se toma la relación entre las dos tasas:

$$i = \frac{d}{1 - dt} \quad (1) \qquad\qquad d = \frac{i}{1 + it} \quad (2)$$

Al reemplazar en (1) la tasa de descuento del ejemplo anterior, tenemos:

$$i = \frac{0{,}018}{1 - 0{,}018\,\frac{60}{30}} = \frac{0{,}018}{1 - 0{,}036} = \frac{0{,}018}{0{,}964} = 0{,}018672$$

En el ejemplo se comprueba que

$$C = \frac{240}{1 + 0{,}018672\,\frac{60}{30}} = \$\ 231{,}360$$

$$Db = 240 - 231{,}36 = \$\ 8{,}64$$

Al reemplazar en (2) la tasa de interés i :

$$d = \frac{0{,}018}{1 + 0{,}018\,\frac{60}{30}} = 0{,}017375$$

En el ejemplo se comprueba que

$$Dr = (240)(0{,}017375)\,\frac{60}{30} = \$\ 8{,}34$$

Esta relación puede demostrarse así puesto que

$$C = M(1 - dt)$$

$$M = \frac{C}{1 - dt} = C + I$$

Al reemplazar por sus respectivos valores:

$$\frac{C}{1 - dt} = C + Cit$$

$$\frac{C}{1 - dt} - C = Cit$$

$$Cit = \frac{C - C(1 - dt)}{1 - dt}$$

$$Cit = C\left[\frac{1 - (1 - dt)}{1 - dt}\right]$$

$$it = \frac{dt}{1 - dt}$$

Por lo tanto,

$$i = \frac{d}{1 - dt}$$

Fórmula 3.5. Fórmula para calcular la tasa de interés en función de la tasa de descuento

Puesto que:

$$M = I + C$$

$$\frac{C}{1 - dt} = Cit + C$$

$$\frac{C}{1 - dt} = C(it + 1)$$

Simplificando C y despejando 1 – dt:

$$1 - dt = \frac{1}{1 + it}$$

$$-dt = -1 + \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = 1 - \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = \frac{1 + it - 1}{1 + it}$$

$$dt = \frac{it}{1 + it}$$

$$d = \frac{i}{1 + it}$$

Fórmula 3.6. Fórmula para calcular la tasa de descuento en función de la tasa de interés

Aplicando lo anterior:
Calculemos qué tasa de interés equivale a una tasa de descuento del 21% anual durante 90 días.

$$i = \frac{d}{1 - dt}$$

$$i = \frac{0{,}21}{1 - 0{,}21\frac{90}{360}} = 0{,}221636$$

$$i = 22{,}16\%\ \text{anual}$$

Ahora calculemos qué tasa de descuento equivale a una tasa de interés del 22,1636% anual durante 90 días.

$$d = \frac{i}{1 + it}$$

$$d = \frac{0{,}221636}{1 + 0{,}221636\ \frac{90}{360}} = 0{,}21$$

$$d = 21\%\ \text{anual}$$

Ejemplo

Una persona realiza un descuento bancario de una letra de cambio, suscrita a 210 días de plazo por un valor de $ 100; 60 días antes de la fecha de

vencimiento, con una tasa de descuento del 12% anual. El mismo día el banco redescuenta el documento en el Banco Central a una tasa del 9%.
¿Cuánto recibe el deudor y cuánto, el banco que redescuenta?

$$Cb = M(1 - dt); \quad Cb = 100\left[1 - (0{,}12)\,\frac{60}{360}\right] = \$\ 98$$

El deudor recibe $ 98

$$Cb = 100\left[1 - (0{,}09)\,\frac{60}{360}\right] = \$\ 98{,}50$$

El banco que redescuenta recibe $ 98,50

Ejemplo

Una persona solicita un préstamo de $ 3.000 a 180 días de plazo en una institución financiera que cobra una tasa de interés del 24% anual. ¿Qué valor debe pagar al vencimiento?
Se calcula el monto al vencimiento:

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 3.000\left[1 + 0{,}24\,\frac{180}{360}\right] = \$\ 3.360$$

Debe pagar al vencimiento: $ 3.360.
Es decir, por intereses paga $ 360 y por capital $ 3.000.
En este caso el cliente recibe $ 3.000.
Puede aplicarse otra modalidad: que el cliente desee pagar $ 3.000 al vencimiento; por lo tanto, habrá que calcular el valor que la institución financiera daría como préstamo de capital al cliente:

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

$$C = \frac{3.000}{1 + 0{,}24\,\frac{180}{360}} = \$\ 2.678{,}57$$

El cliente recibe $ 2.678,57.
Y de intereses paga un descuento racional:

$$Dr = 3.000 - 2.678{,}57 = \$\ 321{,}43$$

En caso de que se cobraran intereses por adelantado, el problema se resolvería de la siguiente manera:

$$Db = Mdt; \qquad Db = 3.000\left[0{,}24\,\frac{180}{360}\right] = \$\ 360$$

Es decir, que el cliente pagaría de intereses un descuento bancario de $ 360 y recibiría un valor efectivo de:

$$Cb = M(1 - dt)$$

$$Cb = 3.000\left[1 - 0{,}24\,\frac{180}{360}\right] = \$\ 2.640$$

Como puede notarse, las dos formas de cálculo presentan una diferencia entre

$$360 - 321{,}43 = \$\ 38{,}57 \text{ a favor del banco}$$

Actividades de ejercitación

1. Calcule el valor actual de una letra de cambio suscrita por $ 2.500,00 a 180 días de plazo, si se descontó 60 días antes de su vencimiento, a una tasa de interés del 18% anual.

2. Calcule el descuento racional en el problema anterior.

3. Calcule el descuento racional de una letra de cambio, suscrita por $ 1.800,00, el 2 de mayo, a 180 días de plazo, si se descontó el 2 de agosto del mismo año a una tasa de interés del 2% mensual.

4. Calcular el descuento racional de una letra de cambio de $ 7.500,00, suscrita el día de hoy a 210 días de plazo con una tasa de interés del 1,8% mensual desde su suscripción, si es descontada 60 días antes de su vencimiento, a una tasa del 1,9% mensual.

5. ¿Cuál es el descuento racional de una letra de cambio de $ 2.000,00 suscrita el 20 de mayo a 240 días de plazo, con una tasa del 1,2% mensual, desde su suscripción, si se descontó el 02 de agosto del mismo año a una tasa del 20,4% anual?

6. Calcule el descuento bancario de un pagaré de $850,00, suscrita a 180 días de plazo, si fue descontado 30 días antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 12% anual.

7. ¿Cuál es el descuento bancario o bursátil de una letra de cambio de $ 250,00, suscrita el 21 de marzo a 120 días de plazo, si fue descontada el 03 de junio del mismo año?

8. Calcule el valor efectivo de un pagaré de $ 800,00, suscrito a 120 días de plazo, si se descuenta el día de hoy (tiempo cero), a una tasa de descuento del 18% anual.

9. Un pagaré de $ 2.700,00, suscrito el 18 de abril a 150 días de plazo, con una tasa de interés del 4,5% anual desde su suscripción, es descontado el 05 de junio del mismo año a una tasa de descuento del 12% anual; calcular el descuento bancario y el valor efectivo, a la fecha del descuento.

10. Una empresa solicita un préstamo de $ 10.000 en un banco a 180 días de plazo. Calcule el valor efectivo que recibe y el descuento bancario que le hacen, si el banco aplica una tasa de descuento del 16% anual.

11. En el problema anterior, considere que el préstamo se realiza con descuento racional y calcule el valor que recibiría el cliente, así como el descuento.

12. Una letra de cambio de $ 6.000 suscrita el 1° de junio a 180 días de plazo, al 1% de interés mensual desde su suscripción, se descuenta en un banco al 1,5% mensual; 90 días antes de su vencimiento. Calcule el descuento bancario y el valor efectivo.

13. Calcule el valor actual con descuento racional y con descuento bancario de una letra de cambio de $ 180 a 210 días de plazo con una tasa de interés del 1% mensual desde su suscripción, si se descontó 90 días antes de su vencimiento al 18% anual.

14. Demuestre que una tasa de descuento del 2% mensual equivale a una tasa de interés del 2,2727% mensual durante 180 días.

15. Una persona descuenta en un banco una letra de cambio de $ 900, suscrita a 240 días de plazo, 90 días antes de su vencimiento, a una tasa de descuento del 18% anual. Después de un mes, el banco la redescuenta al 15% en el Banco Central. Calcule el valor que reciben el deudor y el banco que redescuenta.

16. Un documento financiero cuyo valor nominal es de $18.000,00, con vencimiento en 210 días al 6% de interés anual, desde su suscripción, se descuenta 60 días antes de la fecha de vencimiento a la tasa de descuento del 1,5 % mensual, calcule el descuento bancario y el valor efectivo.

17. El cliente de un banco solicita un préstamo de $ 3.000,00 a 180 días de plazo, con una tasa de descuento del 18% anual. ¿Cuál es el valor efectivo que el banco acredita en la cuenta del cliente?

18. Una letra de cambio de $ 2.400,00 suscrita sin intereses el 10 de enero, con vencimiento en 270 días, se descuenta el 8 de abril a una tasa del 1,5% mensual. Calcule: a) la fecha de vencimiento, b) el valor actual, c) el descuento racional, d) el descuento bancario y e) el valor efectivo.

19. ¿Cuánto dinero debe solicitar el cliente de un banco, a una tasa de descuento del 12% anual, si requiere $ 1.500,00, pagaderos en 210 días de plazo?

20. ¿Cuánto dinero debe solicitar el cliente de un banco, a una tasa de interés del 18% anual, si hoy requiere $2.500,00 pagaderos en 120 días de plazo?

Respuestas

1. $ 2.427,184466

2. $ 72,81553398

3. Dr. = $ 108,27

4. Dr. = $ 309,1618

5. Dr. = $ 130,83

6. Db. = $ 7,67

7. Db = $ 10,00

8. Cb = $ 752,00

9. Db = $ 93,8655 Cb. = $ 2.666,8845

10. Cb. = $ 9.200,00 Cb. = $ 800,00

11. C = $ 9.259,26 Dr. = $ 740,74

12. Db. = $ 286,20 Cb. = $ 6.073,80

13. C = $ 184,306 Cb. = $ 183,933

14. $$d = \frac{0{,}022727}{1 + 0{,}022727\left(\frac{180}{30}\right)} = 0{,}02$$

15. Cb. = $ 859,50 Cb. = $ 877,50 (banco que redescuenta)

16. Db. = $ 558,90 Cb. = $ 18.071,10

17. $ 2.730,00

18. a) 07 de octubre b) C = $ 2.199,82 c) Dr = $ 200,18
d) Db = $ 218,40 e) $ 2.181,60

19. $ 1.612,90

20. $ 2.650,00

Actividades de autoevaluación

1. Un pagaré de $ 1.000,00, suscrito el 4 de marzo a 90 días de plazo, se descuenta el 3 de abril del mismo año a una tasa de interés del 24% anual. Calcule el descuento racional.

2. En el ejercicio anterior, calcule el descuento bancario si se considera una tasa de descuento del 24% anual.

3. Un documento financiero de $ 3.000, suscrito el 22 de marzo a 90 días de plazo, se descuenta el 21 de abril del mismo año a una tasa de interés del 24% anual. Calcule el descuento racional.

4. En el ejercicio anterior, calcule el descuento bancario si se considerara una tasa de descuento del 24% anual.

5. En el mismo ejercicio, calcule el precio o valor efectivo del documento.

6. Un documento financiero de $ 5.000, suscrito el 17 de mayo a 150 días de plazo, y una tasa de interés del 21% anual desde la suscripción, se descuenta el 16 de julio del mismo año a una tasa de interés del 20% anual. Calcule el descuento racional.

7. En el ejercicio anterior, calcule el descuento bancario, suponiendo una tasa de descuento del 20% anual.

8. En el mismo ejercicio, calcule el precio o valor efectivo del documento.

9. Un documento financiero de $ 10.000, suscrito el 15 de agosto a 90 días de plazo, se descuenta en la bolsa de valores el 14 de septiembre del mismo año a una tasa de descuento del 36% anual. Calcule el precio o valor efectivo del documento.

10. En el ejercicio anterior, calcule el precio racional si se aplica una tasa de interés del 36% anual.

Respuestas

1. Solución del problema mediante un gráfico:

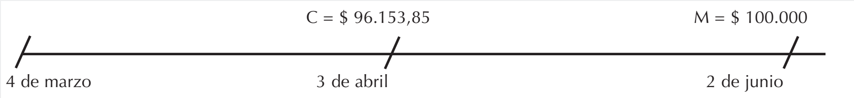


Gráfico 3.6. Solución gráfica del problema 1

Plazo		Tiempo de descuento
Marzo	27	
Abril	30	27 días
Mayo	31	31 días
Junio	2	2 días
Total	90 días	60 días

Tabla 3.3. *Cálculo de número de días del problema 1*

Dr = M – C (fórmula 3.1)

$$Dr = 1.000 - \frac{1.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{60}{360}\right)} = \$\ 961{,}54$$

$$Dr = 1.000 - 961{,}54 = \$\ 38{,}46$$

$$Dr = \$\ 38{,}46$$

2. Db = Mdt (fórmula 3.2)

$$Db = 1.000(0{,}24)\frac{60}{360} = \$\ 40{,}00$$

$$Db = \$\ 40{,}00$$

3. Solución del problema mediante un gráfico:

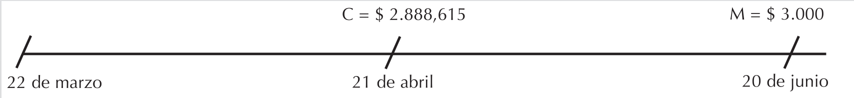


Gráfico 3.7. Solución gráfica del problema 3

Plazo		
Marzo	9	
Abril	30	
Mayo	31	
Junio	20	
Total	90	días

Tiempo de descuento
9 días
31 días
20 días
60 días

Tabla 3.4. *Cálculo de número de días del problema 3*

Utilizamos la fórmula 3.1:

$$Dr = 3.000 - \frac{3.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{60}{360}\right)} = \$\ 2.884{,}61$$

$$Dr = 3.000 - 2.884{,}61 = \$\ 115{,}39$$

$$Dr = \$\ 115{,}39$$

4. Se utiliza la fórmula 3.2:

$$Db = Mdt$$

$$Db = 3.000(0{,}24)\frac{60}{360} = \$\ 120{,}00$$

$$Db = \$\ 120{,}00$$

5. Se emplea la fórmula 3.3:

$$Cb = M(1 - dt)$$

$$Cb = 3.000\left[1 - 0{,}24\ \frac{60}{360}\right] = \$\ 2.880{,}00$$

$$Cb = \$\ 2.880{,}00$$

6. Solución del problema mediante un gráfico:

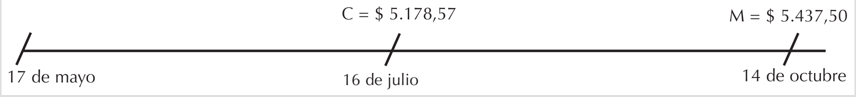


Gráfico 3.8. Solución gráfica del problema 6

Plazo		Tiempo de descuento
Mayo	14	
Junio	30	
Julio	31	15 días
Agosto	31	31 días
Septiembre	30	30 días
Octubre	14	14 días
Total	150 días	90 días

Tabla 3.5. *Cálculo de número de días del problema 6*

$$M = 5.000\left[1 + 0{,}21\left(\frac{150}{360}\right)\right] = \$\ 5.437{,}50$$

Se aplica la fórmula 3.1:

$$Dr = 5.437{,}50 - \frac{5.437{,}50}{1 + 0{,}20\left(\frac{90}{360}\right)}$$

$$Dr = 5.437{,}50 - 5.178{,}571 = \$\ 258{,}93$$
$$Dr = \$\ 258{,}93$$

7. Se aplica la fórmula 3.2:

$$Db = Mdt$$

$$Db = 5.437{,}50(0{,}20)\frac{90}{360} = \$\ 271{,}875$$

$$Db = \$\ 271{,}875$$

8. Se utiliza la fórmula 3.3

$$Cb = M(1 - dt)$$

$$Cb = 5.437{,}50\left[1 - 0{,}20\ \frac{90}{360}\right] = \$\ 5.165{,}625$$

También $Cb = 5.437{,}50 - 271{,}875 = \$\ 5.165{,}625$

$$Cb = \$\ 5.165{,}625$$

9. Solución del problema mediante un gráfico:

Gráfico 3.9. Solución gráfica del problema 9

Plazo		Tiempo de descuento
Agosto	16	
Septiembre	30	16 días
Octubre	31	31 días
Noviembre	13	13 días
Total	90 días	60 días

Tabla 3.6. *Tabla de cálculo de número de días del problema 9*

Se aplica la fórmula 3.3:

$$Cb = M(1 - dt)$$

$$Cb = 10.000\left[1 - 0,36\left(\frac{60}{360}\right)\right] = \$\ 9.400,00$$

$$Cb = \$\ 9.400,00$$

10. Se aplica la fórmula del valor actual:

$$C = \frac{10.000}{1 + 0,36\left(\frac{60}{360}\right)} = \$\ 9.433,93$$

Precio racional = $ 9.433,93

Actividades de repaso

1. ¿Qué es un descuento?

2. ¿Qué es un descuento racional?

3. ¿Qué es un descuento bancario, comercial o bursátil?

4. ¿Qué es valor efectivo o precio de un documento financiero?

5. ¿Cuál es la fórmula del descuento racional?

6. ¿Cuál es la fórmula del descuento bancario o bursátil?

7. ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor efectivo o precio?

8. ¿Para calcular el descuento racional se necesita calcular primero el valor actual? ¿Por qué?

9. Cuando un documento financiero gana intereses desde la suscripción, ¿es necesario calcular el monto antes de calcular el descuento? ¿Por qué?

10. ¿Qué es el redescuento?

11. ¿Cómo se calcula el precio de un documento con una tasa de descuento?

12. ¿Cómo se calcula el precio racional de un documento con una tasa de interés?

13. ¿En qué se diferencia una tasa de interés de una tasa de descuento?

Complete su aprendizaje con el CD
que acompaña a este libro

Ecuaciones de valor y cuentas de ahorro

IV

Presentación

En los problemas de matemáticas financieras, muchas veces se necesita canjear, cambiar o negociar un conjunto de obligaciones de corto plazo, por uno o más pagos, con tasa de interés y tiempo acordado entre acreedor y deudor. En este caso se utilizan las ecuaciones de valor, que facilitan el planteo y la solución de estos problemas en forma gráfica y matemática.

Cuando una persona, natural o jurídica, tiene varias obligaciones o deudas, puede plantear a su acreedor formas de pago que, sin dejar de reconocer sus obligaciones, le permitan realizar la cancelación de sus deudas por un solo pago, utilizando para el cálculo las ecuaciones de valor.

También se utilizan estas ecuaciones para conocer el monto acumulado de varios depósitos sucesivos o el valor actual o presente de varios pagos sucesivos, todo esto a corto plazo, utilizando el interés simple.

De la misma manera, para comprender el interés compuesto, es necesario tener conocimiento de lo que son las cuentas de ahorro y los mecanismos de cálculo y liquidación.

Objetivo general

- Conocer la utilidad de las ecuaciones de valor como un mecanismo de cálculo lógico, ágil y fácil para reemplazar un conjunto de obligaciones por uno o más pagos, así como calcular el monto de una serie de depósitos y el valor actual o presente de una serie de pagos, y el manejo de los procedimientos de cálculo de liquidación de intereses de las cuentas de ahorro.

Objetivos específicos

- Plantear una ecuación de valor.
- Establecer la fecha focal.
- Resolver una ecuación de valor.
- Consolidar deudas.
- Aplicar las ecuaciones de valor en problemas prácticos.
- Resolver una comparación de ofertas para comprar o para vender.
- Realizar los cálculos de intereses en una cuenta de ahorros.

CONTENIDO

Ecuaciones de valor xy$

Son aquellas que se utilizan para la resolución de problemas de matemáticas financieras en las cuales se reemplaza un conjunto de obligaciones, con diferentes fechas de vencimiento, por uno o varios valores con otra(s) fecha(s) de referencia, previo acuerdo entre el acreedor y el deudor.

Se emplean para consolidar o reemplazar dos o más deudas por una sola y también para el cálculo del monto de una serie de depósitos y para calcular el valor actual de una serie de pagos.

Para la resolución de los problemas, las ecuaciones de valor relacionan las diferentes fechas de vencimiento con una denominada fecha focal.

"En las operaciones comerciales, frecuentemente es necesario cambiar un paquete de obligaciones por otro conjunto de diferentes capitales disponibles en distintos tiempos. Para hacer esto es necesario trasladar todas la obligaciones a una fecha común, llamada fecha o momento de referencia; obtendremos entonces una ecuación de valor."[1]

"Todo problema de matemáticas financieras puede ser resuelto mediante una ecuación de valor. Es simplemente una igualdad entre entradas y salidas (prestaciones y contraprestaciones) de capitales financieros, una vez que sus vencimientos han sido homogeneizados por un tiempo común (es decir, una vez que los capitales han sido trasladados a un instante temporal común)."[2]

Recordemos que en los "gráficos de tiempos y valores", que contienen diferentes valores y fechas, podemos aplicar la solución de problemas de matemática financiera y definir una fecha focal, para trasladar todos los valores a esa fecha y, una vez relacionados con ella, plantear el problema.

Aplicaciones de las ecuaciones de valor

Las aplicaciones de las ecuaciones de valor se organizan en cuatro tipos:

- Reemplazo de un conjunto de obligaciones o deudas por un solo pago (consolidación de deudas).
- Comparación de ofertas para comprar o vender.
- Cálculo del monto de una serie de depósitos sucesivos a corto plazo.
- Cálculo del valor actual o presente de una serie de pagos sucesivos a corto plazo.

Reemplazo de un conjunto de obligaciones o deudas por un solo pago

Entonces:
Una empresa tiene las siguientes obligaciones o deudas:

M_1 = $ 5.000 a 60 días de plazo
M_2 = $ 7.000 a 120 días de plazo
M_3 = $ 10.000 a 240 días de plazo
M_4 = $ 12.000 a 300 días de plazo

[1] R. Cissell y H. Cissell, *Matemáticas financieras*, México, Compañía Editorial Continental, 1978. p. 1.
[2] *Ídem*.

La empresa desea reemplazar sus obligaciones por un solo pago a 180 días de plazo, considerando una tasa de interés del 18% anual. Calcular el valor del pago único.

El problema puede expresarse en forma gráfica:

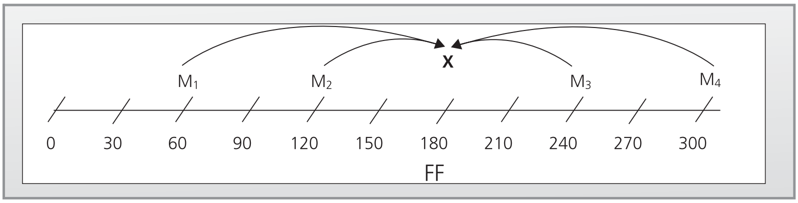


Gráfico 4.1. Solución gráfica del ejemplo

Como se aprecia en el gráfico, se han tomado como fecha focal los 180 días, que es la fecha de pago consolidado de todas las deudas. Las dos primeras deudas, a los 60 y 120 días, ya han vencido, por lo tanto, deben calcularse como monto; mientras que las otras dos deudas, a los 240 y 300 días, se pagan por anticipado, por lo que deben calcularse como valor actual o como valor presente.

Primero se calculan los tiempos en días:

$t_1 = 180 - 60 = 120$
$t_2 = 180 - 120 = 60$
$t_3 = 180 - 240 = /-60/$
$t_4 = 180 - 300 = /-120/$

Luego se plantea la ecuación de valor:

$$x = M_1(1 + it_1) + M_2(1 + it_2) + \frac{M_3}{1 + it_3} + \frac{M_4}{1 + it_4}$$

$$x = 5.000\left[1 + 0{,}18\left(\frac{120}{360}\right)\right] + 7.000\left[1 + 0{,}18\left(\frac{60}{360}\right)\right] + \frac{10.000}{1 + 0{,}18\left(\frac{60}{360}\right)} + \frac{12.000}{1 + 0{,}18\left(\frac{120}{360}\right)}$$

$x = 5.300 + 7.210 + 9.708{,}74 + 11.320{,}75$
$x = \$\ 33.539{,}49$

También puede resolverse con una tasa de descuento y con valores efectivos:

$$x = 5.300 + 7.210 + 10.000\left[1 - 0{,}18\left(\frac{60}{360}\right)\right] + 12.000\left[1 - 0{,}18\left(\frac{120}{360}\right)\right]$$

$x = 5.300 + 7.210 + 9.700 + 11.280$
$x = \$\ 33.490$

Aplicando una tasa de interés del 18% anual, calculemos el valor del nuevo pagaré para una empresa que debe tres y desea quedarse con uno solo, con vencimiento en 210 días de plazo. El valor de cada uno de los pagarés es: uno de \$ 8.000 a 90 días de plazo; otro de \$ 10.000 a 120 días de plazo y un tercero por \$ 15.000 a 180 días de plazo.

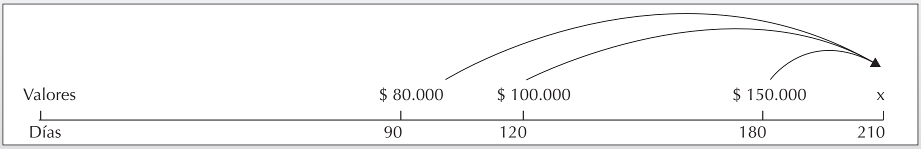


Gráfico 4.2. Solución gráfica del ejemplo

Sea ***x*** el valor del nuevo pagaré y 210 días la fecha focal, por ser la nueva fecha de pago convenida. En consecuencia, como todos los valores tienen fecha de vencimiento posterior a la fecha focal, deberán pagar interés hasta los 210 días:

M_1 = primera deuda; M_2 = segunda deuda; M_3 = tercera deuda
$t_1 = 210 - 90 = 120$ días
$t_2 = 210 - 120 = 90$ días
$t_3 = 210 - 180 = 30$ días

Entonces se tiene:

$$x = 8.000\left[1 + 0{,}18\left(\frac{120}{360}\right)\right] + 10.000\left[1 + 0{,}18\left(\frac{90}{360}\right)\right] + 15.000\left[1 + 0{,}18\left(\frac{30}{360}\right)\right]$$

$$x = 8.480 + 10.450 + 15.225 = \$\ 34.155$$

Ahora calculemos el valor único que debe pagar una empresa que desea quedarse con una sola deuda, con vencimiento en 180 días y una tasa de interés del 1,5 % mensual. La empresa debe: \$ 500 con vencimiento en 90 días; al 1% mensual desde su suscripción; \$ 700 con vencimiento en 120 días y \$ 900 con vencimiento en 210 días al 15% anual, desde su suscripción.

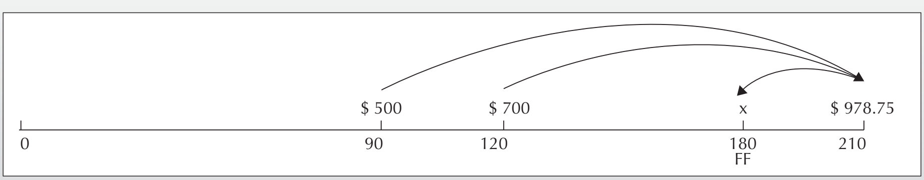


Gráfico 4.3. Solución gráfica del ejemplo. Primera deuda

$$M = 500\left[1 + 0{,}01\left(\frac{90}{30}\right)\right] = \$\ 515{,}00$$

Segunda deuda

$$M = \$\ 700$$

Tercera deuda

$$M = 900\left[1 + 0{,}15\left(\frac{210}{360}\right)\right] = \$\ 978{,}75$$

La fecha focal es 180 días, por ser la nueva fecha de pago convenida; en consecuencia, las dos primeras deudas se calculan como montos y la tercera deuda como valor actual.

$$x = 515\left[1 + 0{,}015\left(\frac{90}{30}\right)\right] + 700\left[1 + 0{,}015\left(\frac{60}{30}\right)\right] + \frac{978{,}75}{1 + 0{,}015\left(\frac{30}{30}\right)}$$

$$x = 515(1{,}045) + 700(1{,}03) + \frac{978{,}75}{1{,}015}$$

$$x = 538{,}175 + 721{,}00 + 964{,}285$$
$$x = \$\ 2.223{,}46$$

Las ecuaciones de valor se utilizan, como se expresó anteriormente, en la solución de problemas en los que se consolidan varias deudas, que pueden ser anteriores o posteriores a las fechas de pago inicialmente convenidas. Si son anteriores a la fecha focal, deben calcularse como monto; si su vencimiento es posterior, deben calcularse como valor actual, sea éste con tasa de interés o tasa de descuento.

Calculemos el valor de la deuda el día de hoy de una empresa que tiene las siguientes deudas: \$ 8.000 a 90 días de plazo; \$ 15.000 a 150 días de plazo; \$ 30.000 a 210 días de plazo y \$ 50.000 a 270 días de plazo; la empresa desea reemplazar sus deudas por una sola de vencimiento el día de hoy con una tasa de descuento del 12% anual.

Para encontrar la solución, se elabora una gráfica de tiempos y valores.

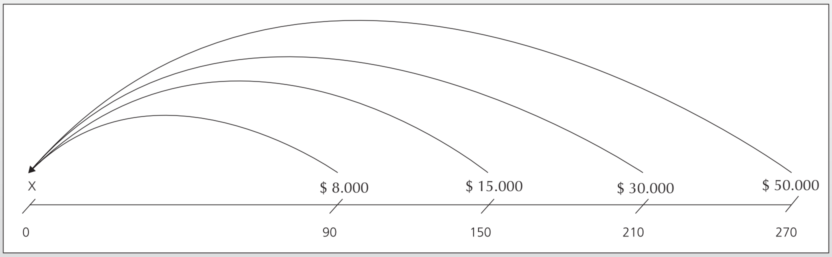


Gráfico 4.4. Solución gráfica del ejemplo

Como puede notarse, la fecha focal está en el día de hoy; a ella se traen los diferentes valores, como valores presentes a una tasa de descuento, según las condiciones del problema.

$$x = 8.000\left[1 - 0{,}12\ \frac{90}{360}\right] + 15.000\left[1 - 0{,}12\ \frac{150}{360}\right] + 30.000\left[1 - 0{,}12\ \frac{210}{360}\right] +$$

$$+\ 50.000\left[1 - 0{,}12\frac{270}{360}\right]$$

$$x = 8.000(0{,}97) + 15.000(0{,}95) + 30.000(0{,}93) + 50.000(0{,}91)$$
$$x = 7.760{,}00 + 14.250{,}00 + 27.900{,}00 + 45.500{,}00$$
$$x = \$\ 95.410 \text{ (valor del nuevo documento)}$$

Comparación de ofertas para comprar o vender

Para seleccionar la mejor oferta, ya sea para comprar o para vender, se toma como fecha focal el tiempo cero o valor actual de todas las ofertas.

Así el propietario de un terreno en venta recibe tres ofertas: la primera es de \$ 100.000 al contado y \$ 100.000 a un año de plazo; la segunda, \$ 80.000 al contado y dos letras de \$ 60.000 a cinco y seis meses de plazo, respectivamente; la tercera, \$ 20.000 al contado, una letra de \$ 80.000 a tres meses de plazo y otra letra de \$ 100.000 a nueve meses de plazo. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar, si se considera una tasa de interés del 2% mensual?

Cálculo de la primera oferta:

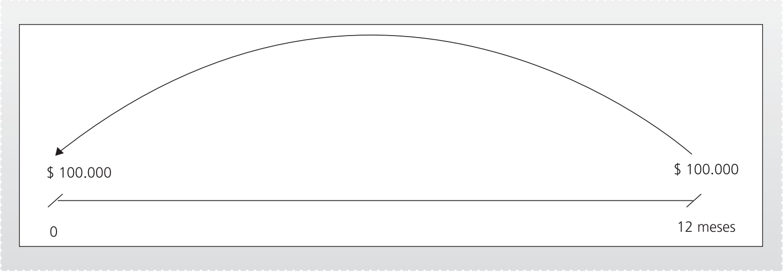


Gráfico 4.5. Primera solución gráfica del problema

Como puede notarse en el gráfico, la fecha focal debe ser el día de hoy para poder relacionar cada oferta, puesto que se calcularán como valores actuales.

$$x = 100.000 + \frac{100.000}{1 + 0{,}02(12)}$$

$$x = 100.000 + 80.645{,}16 = \$\ 180.645{,}16$$

Cálculo de la segunda oferta:

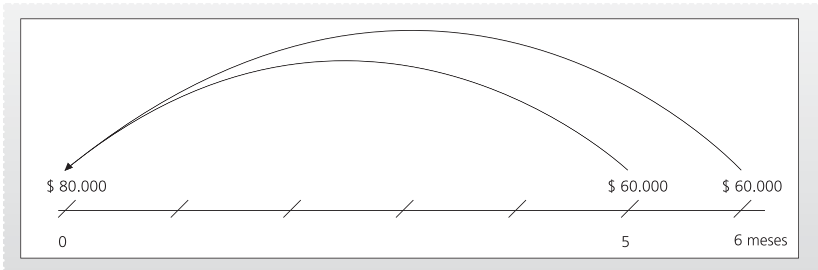


Gráfico 4.6. Segunda solución gráfica del problema

$$x = 80.000 + \frac{60.000}{1 + (0{,}02)(5)} + \frac{60.000}{1 + (0{,}02)(6)}$$

$$x = 80.000 + 54.545{,}45 + 53.571{,}43 = \$\ 188.116{,}88$$

Cálculo de la tercera oferta:

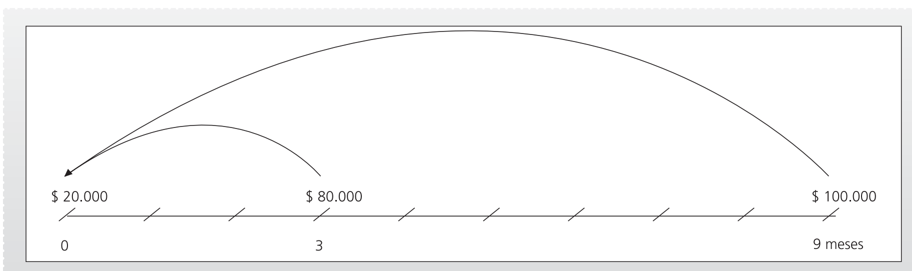


Gráfico 4.7. Tercera solución gráfica del problema

$$x = 20.000 + \frac{80.000}{1 + (0{,}02)(3)} + \frac{100.000}{1 + (0{,}02)(9)}$$

$$x = 20.000 + 75.471{,}70 + 84.745{,}76 = \$\ 180.217{,}46$$

Conviene aceptar la segunda oferta, por ser la de mayor valor.

Cálculo del monto de una serie de depósitos sucesivos a corto plazo

Cuando se da el caso de una serie de depósitos sucesivos de igual valor a corto plazo, se utiliza la fecha focal al término de los depósitos.

Entonces si una empresa realiza depósitos de $ 500 mensuales durante tres meses, en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 2% mensual, calculemos el monto que acumulará al final de los tres meses, de la siguiente manera:

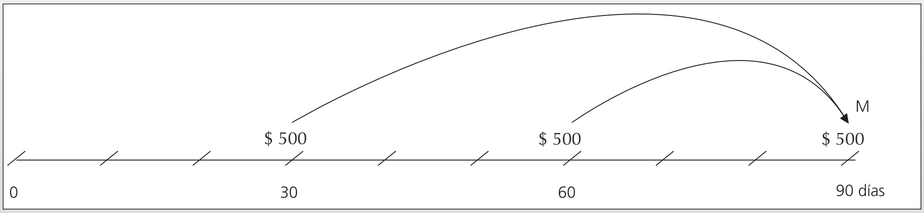


Gráfico 4.8. Solución gráfica del problema

$$M = 500\left[1 + 0{,}02\left(\frac{60}{60}\right)\right] + 500\left[1 + 0{,}02\left(\frac{30}{30}\right)\right] + 500$$

$$M = 520 + 510 + 500 = \$\ 1.530{,}00$$

Ejemplo

Calculemos ahora el monto que acumulará al final de los tres meses una empresa que realiza depósitos de $ 500 mensuales durante tres meses en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 2% mensual, liquidados en forma anticipada. Teniendo en cuenta que los intereses se liquidan por anticipado, el proceso de cálculo cambia, como puede verse en el siguiente gráfico:

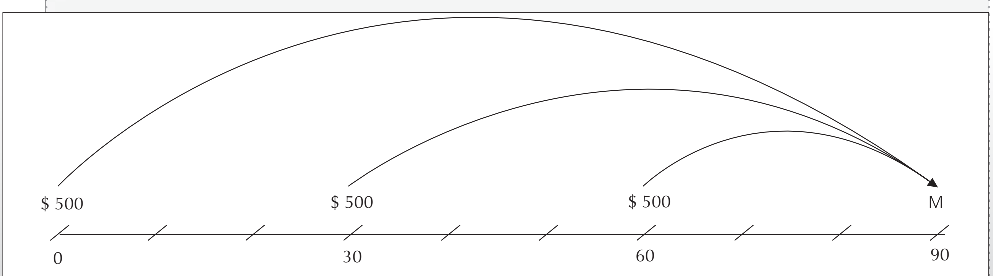


Gráfico 4.9. Solución gráfica del ejemplo

$$M = 500\left[1 + 0{,}02\left(\frac{90}{30}\right)\right] + 500\left[1 + 0{,}02\left(\frac{60}{30}\right)\right] + 500\left[1 + 0{,}02\left(\frac{30}{30}\right)\right]$$

$$M = 530 + 520 + 510 = \$\ 1.560{,}00$$

Como puede notarse, los intereses son mayores en este ejemplo.

Cálculo del valor actual o presente de una serie de pagos sucesivos a corto plazo

Para calcular el valor actual o presente de una serie de pagos a corto plazo, generalmente iguales, se toma como fecha focal el tiempo cero o fecha de origen de la deuda, como veremos a continuación:

Para realizar el cálculo del valor original de la deuda de una empresa que realiza una serie de tres pagos mensuales de \$ 500 para cancelar dicha deuda, con una tasa de interés del 3% mensual, tenemos que:

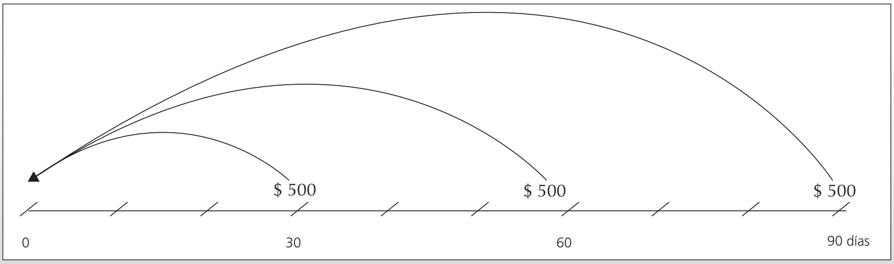


Gráfico 4.10. Solución gráfica del ejemplo

$$x = \frac{500}{1 + 0{,}03\left(\frac{30}{30}\right)} + \frac{500}{1 + 0{,}03\left(\frac{60}{30}\right)} + \frac{500}{1 + 0{,}03\left(\frac{90}{30}\right)}$$

$$x = 485{,}44 + 471{,}70 + 458{,}72 = \$\ 1.415{,}86$$

Analicemos otro problema:

Una empresa realiza pagos mensuales de \$ 500,00 en forma adelantada durante tres meses, para cubrir una deuda. Calculemos el valor pagado de la deuda, si se aplica una tasa de interés del 3% mensual por adelantado.

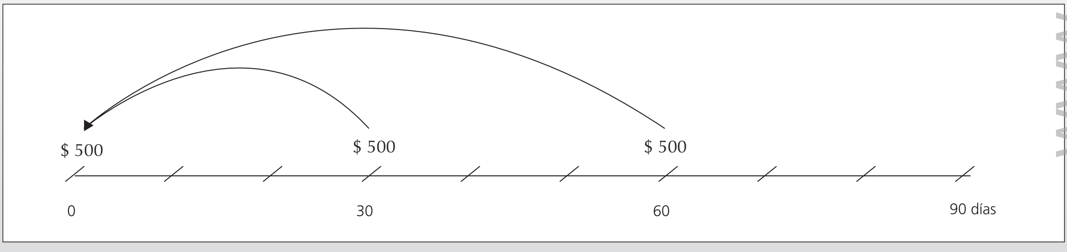


Gráfico 4.11. Solución gráfica del problema

$$x = 500 + \frac{500}{1 + 0{,}03\left(\frac{30}{30}\right)} + \frac{500}{1 + 0{,}03\left(\frac{60}{30}\right)}$$

$$X = 500 + 485{,}44 + 471{,}70 = \$\ 1.457{,}14$$

Cuentas de ahorro

Es un servicio bancario mediante el cual una institución recibe dinero a título de ahorro y paga un interés comercial anual que es regido por disposiciones gubernamentales.
Es necesario tener en cuenta algunos conceptos asociados con este tema para su mejor comprensión.

Ahorro: Es la parte de la renta disponible no consumida; es el acto de previsión económica que consiste en reservar un dinero separándolo del gasto ordinario para utilizarlo en una fecha futura.

Depósitos de ahorro: Dinero colocado, con propósitos de ahorro en instituciones financieras. Los depósitos constituyen obligaciones bancarias exigibles en los términos especiales convenidos entre el depositante y el depositario, de acuerdo con las disposiciones que regulan el ahorro bancario, y cuya condición especial radica en que gana interés y éste pasa a sumarse al capital depositado, lo que constituye un nuevo capital que gana interés por otros períodos.

Depositario: Institución financiera que recibe el depósito.

Interés: Dinero que el depositante gana en el transcurso del tiempo durante el cual el capital permanece en la institución bancaria.

Tasa de interés: Tanto por ciento (%) legal establecido que se calcula sobre el capital depositado.

Período de liquidación de intereses: Momento del año o del mes en el que los intereses ganados se acumulan al capital ahorrado.

Monto: Capital depositado más el interés ganado. Las cuentas de ahorros ganan un interés legal, establecido por las autoridades correspondientes, sobre el capital depositado. Este interés puede ser liquidado o capitalizado en diferentes períodos.

Sistema de cálculo de los intereses

Para el cálculo de los intereses en las cuentas de ahorro se utiliza la fórmula del interés simple en cada período de capitalización; es decir, cuando el interés se suma al capital.
Las instituciones bancarias que tienen el servicio de cuentas de ahorro utilizan tablas de interés simplificadas día por día. Por ejemplo:

Si el día 1˚ de julio se depositan $ 100, a una tasa del 12% anual liquidable cada semestre, sería:

$$I = Cit$$

$$I = 100\left(0{,}12\,\frac{184}{365}\right) = (100)(0{,}060493)$$

$$I = \$\ 6{,}049315 \text{ en el semestre}$$

Monto acumulado = 100 + 6,05 = $ 106,05

Regularmente, para el cálculo se emplea el número de días exactos y el año comercial de 360 días o el de 365 días o 366 días si fuere bisiesto, si la liquidación es anual; o el número de días de cada semestre: 181, para el primer semestre, y 184, para el segundo. Algunas veces, también se contabiliza desde el día que se deposita o retira el dinero.

Liquidación de intereses en cuentas de ahorro

Para la liquidación de los intereses se utiliza la fórmula del interés simple, con dos modalidades de cálculo: la primera toma en cuenta el valor de la transacción, sea depósito o retiro; y la segunda, los saldos. A continuación se mostrarán ejemplos de cómo se realizan las liquidaciones semestrales de cuentas de ahorro.

Una persona propietaria de una cuenta de ahorro realiza una serie de depósitos y retiros con los valores y fechas que se detallan a continuación: el 15 de enero depositó $ 1.000 para abrir la cuenta; el 10 de febrero depositó $ 500; el 2 de marzo retiró $ 600; el 3 de abril retiró $ 200; el 30 de abril depositó $ 1.100; el 1° de junio retiró $ 300. Si la cuenta de ahorro gana una tasa de interés del 14% anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta al 30 de junio?

Se elabora un cuadro demostrativo de las fechas, depósitos, retiros, saldos e intereses a favor y en contra:

Fecha día-mes	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses +	Intereses −
15-01	1.000		1.000	63,67	
10-02	500		1.500	26,85	
02-03		600	900		27,62
03-04		200	700		6,75
30-04	1.100		1.800	25,74	
01-06		300	1.500		3,34
Intereses a favor y en contra				$ 116,26	$ 37,71
Intereses			$ 78,55		
Saldo al 30 de junio			$ 1.578,55		

Tabla 4.1 *Tabla del movimiento de la cuenta de ahorros del problema*

Saldo de la cuenta al 30 de junio = $ 1.578,55

Para este caso se tomó únicamente una de las dos fechas extremas:

Enero	16					
Febrero	28	18				
Marzo	31	31	29			
Abril	30	30	30	27		
Mayo	31	31	31	31	31	
Junio	30	30	30	30	30	29
Total días	166	140	120	88	61	29

Primer depósito

$$I = 1.000(0{,}14)\,\frac{166}{365} = \quad 63{,}67$$

Segundo depósito

$$I = 500(0{,}14)\,\frac{140}{365} = \quad 26{,}85$$

Primer retiro

$$I = 600(0{,}14)\,\frac{120}{365} = \quad -27{,}62$$

Segundo retiro

$$I = 200(0{,}14)\,\frac{88}{365} = \quad -6{,}75$$

Tercer depósito

$$I = 1.100(0{,}14)\,\frac{61}{365} = \quad 25{,}74$$

Tercer retiro

$$I = 300(0{,}14)\,\frac{29}{365} = \quad -3{,}34$$

TOTAL INTERESES $ 78,55

Se puede hacer el mismo cálculo por factores fijos o multiplicadores fijos:

a) 1.000(0,063671) = 63,67
b) 500(0,053698) = 26,85
c) 600(0,046027) = –27,62
d) 200(0,033753) = –6,75
e) 1.100(0,023397) = 25,74
f) 300(0,011123) = 3,34

TOTAL $ 78,55

También se puede hacer el cálculo tomando los saldos de la cuenta, para lo cual se debe calcular el número de días comprendidos entre cada transacción:

Primera:	Enero	16	
	Febrero	10	
Suman		26	días
Segunda:	Febrero	18	
	Marzo	2	
Suman		20	días
Tercera:	Marzo	29	
	Abril	3	
Suman		32	días
Cuarta:	Abril	27	días
Quinta:	Mayo	31	
	Junio	1	
Suman		32	días
Sexta:	Junio	29	días
TOTAL		166	días

a) $I = 1.000(0{,}14)\dfrac{26}{365} =$ 9,97

b) $I = 1.500(0{,}14)\dfrac{20}{365} =$ 11,5

c) $I = 900(0{,}14)\dfrac{32}{365} =$ 11,05

d) $I = 700(0{,}14)\dfrac{27}{365} =$ 7,25

e) $I = 1.800(0{,}14)\dfrac{32}{365} =$ 22,09

f) $I = 1.500(0{,}14)\dfrac{29}{365} =$ 16,64

TOTAL INTERESES $ 78,55

Ejemplos

El señor N.N., poseedor de una cuenta de ahorros en una institución bancaria, tiene un saldo en su cuenta de $ 4.000 al 30 de junio. En el segundo semestre del mismo año realizó los siguientes movimientos: un retiro de $ 250 el 25 de agosto; un depósito de $ 300 el 18 de septiembre y un retiro de $ 600 el 4 de noviembre. Si la tasa de interés fue del 7% anual, ¿cuánto interés ganará la cuenta al 31 de diciembre?

Forma de cálculo

Tiempo:

Julio	31			
Agosto	31	6		
Septiembre	30	30	12	
Octubre	31	31	31	
Noviembre	30	30	30	26
Diciembre	31	31	31	31
Total	184	128	104	57

Interés del saldo

$$I = 4.000(0,07)\frac{184}{365} = 141,15$$

Primer retiro

$$I = 250(0,07)\frac{128}{365} = -6,14$$

Primer depósito

$$I = 300(0,07)\frac{104}{365} = 5,98$$

Segundo retiro

$$I = 600(0,07)\frac{57}{365} = -6,56$$

TOTAL INTERESES $ 134,43

Con multiplicadores fijos o factores:

$$I = 4.000(0,035287) = 141,15$$
$$I = 250(0,024547) = -6,14$$
$$I = 300(0,019945) = 59,84$$
$$I = 600(0,010931) = -6,56$$

TOTAL INTERESES $ 134,43

Se puede calcular tomando los saldos de la cuenta:

$$4.000(0{,}07)\,\frac{56}{365} = \qquad 42{,}96$$

$$3.750(0{,}07)\,\frac{24}{365} = \qquad 17{,}26$$

$$4.050(0{,}07)\,\frac{47}{365} = \qquad 36{,}50$$

$$3.450(0{,}07)\,\frac{57}{365} = \qquad 37{,}71$$

TOTAL INTERESES $ 134,43

Ahora se elabora el formato de la cuenta de ahorros:

Fecha día-mes	Depósito	Retiro	Saldo	Intereses +	Intereses –
15-07			4.000	141,15	
25-08		250	3.750		6,14
18-09	300		4.050	5,98	
04-11		600	3.450		6,56
Intereses a favor y en contra				$ 147,13	$12,70
Intereses			$ 134,43		
Saldo final + intereses			$ 3.584,43		

Tabla 4.2. *Tabla del movimiento de la cuenta de ahorros del problema*

El 1° de enero se abre una cuenta de ahorros con un valor de $ 1.000. El 15 de febrero se depositan $ 500; el 1° de abril se retiran $ 200; el 15 de mayo se depositan $ 800 y el 1° de junio se retiran $ 500. Durante el segundo semestre, el 10 de julio se depositan $ 1.500; el 8 de agosto se retiran $ 2.000; el 25 de septiembre se depositan $ 2.500; el 2 de octubre se retiran $ 1.000; el 2 de noviembre se retiran $ 200; el 28 de noviembre se depositan $ 1.800 y el 15 de diciembre se retiran $ 500. ¿Cuál será el saldo de la cuenta, con intereses incluidos, al 31 de diciembre, si se considera una tasa de interés del 12% anual hasta el 30 de junio, y del 13% anual a partir del 1° de julio? La cuenta es liquidable semestralmente, el 30 de junio y el 31 de diciembre. Para este ejercicio se tomará el año comercial.

Primer semestre:					
Enero	30				
Febrero	28	13			
Marzo	31	31			
Abril	30	30	29		
Mayo	30	30	30	30	
Junio	31	31	31	31	29
TOTAL DÍAS	180	135	90	46	29

Primer depósito

$$I = 1.000(0,12)\frac{180}{360} = \quad 60,00$$

Segundo depósito

$$I = 500(0,12)\frac{135}{360} = \quad 22,5$$

Primer retiro

$$I = -200\ (0,12)\frac{90}{360} = \quad -600$$

Tercer depósito

$$I = 800(0,12)\frac{46}{360} = \quad 12,27$$

Segundo retiro

$$I = 500(0,12)\frac{29}{360} = \quad -4,83$$

TOTAL INTERESES $ 83,94

Fecha día-mes	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses +	Intereses –
01-01	1.000		1.000	60,00	
15-02	500		1.500	22,50	
01-04		200	1.300		6,00
15-05	800		2.100	12,27	
01-06		500	1.600		4,83
Intereses a favor y en contra				$ 94,77	$ 10,83
Intereses			$ 83,94		
Saldo al 30 de junio			$ 1.683,94		

Tabla 4.3. *Tabla del movimiento de la cuenta de ahorros del primer semestre del ejemplo.*

Segundo semestre: I = 13%

Julio	31	21						
Agosto	31	31	23					
Septiembre	30	30	30	15				
Octubre	31	31	31	31	29			
Noviembre	30	30	30	30	30	28	2	
Diciembre	31	31	31	31	31	31	31	16
TOTAL DÍAS	184	174	145	107	90	59	33	16

Interés del saldo anterior

$$I = 1.683,94(0,13)\frac{184}{360} = 111,89$$

Primer depósito

$$I = 150(0,13)\frac{174}{360} = \qquad 9,425$$

Primer retiro

$$I = 200(0,13)\frac{145}{360} = \qquad -10,47$$

Segundo depósito

$$I = 250(0,13)\frac{107}{360} = \qquad 9,66$$

Segundo retiro

$$I = 100(0,13)\frac{90}{360} = \qquad -3,25$$

Tercer retiro

$$I = 200(0,13)\frac{59}{360} = \qquad -4,26$$

Tercer depósito

$$I = 180(0,13)\frac{33}{360} = \qquad 2,145$$

Cuarto retiro

$$I = 500(0,13)\frac{16}{360} = \qquad -2,89$$

TOTAL INTERESES $ 112,25

Fecha día-mes	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses +	Intereses –
30-06			1.683,94	111,89	
10-07	150		1.833,94	9,425	
08-08		200	1.633,94		10,47
15-09	250		1.833,94	9,66	
02-10		100	1.783,94		3,25
02-11		200	1.583,94		4,26
28-11	180		1.763,94	2,145	
15-12		500	1.263,94		2,89
Intereses a favor y en contra				$ 133,12	$ 20,87
Intereses			$ 112,25		
Saldo al 31 de diciembre			$ 1.376,19		

Tabla 4.4. *Tabla del movimiento de la cuenta de ahorros del segundo semestre del ejemplo.*

Variación de la tasa de interés

Como puede observarse en el ejemplo anterior, la tasa de interés puede variar dentro de un período de liquidación de intereses; cuando esto sucede, el cálculo deberá hacerse tomando como base el número de días que estuvo vigente la respectiva tasa de interés, así:

Un capital de \$ 10.000 estuvo depositado desde el 1° de enero hasta el 31 de marzo, a una tasa del 18% anual y desde el 1° de abril hasta el 30 de junio, a una tasa del 21%.
El cálculo deberá hacerse por el número de días que estuvo vigente cada una de las tasas de interés y luego sumar los intereses en el período.

$$I = 10.000(0,18)\frac{90}{360} = 450,00$$

$$I = 10.000(0,21)\frac{91}{360} = 530,083$$

TOTAL INTERESES \$ 980,83

Actividades de ejercitación

1. Una empresa tiene 4 deudas u obligaciones: la primera es de \$ 7.000,00 con vencimiento en 90 días, a una tasa de interés del 1% mensual desde su suscripción; la segunda de \$ 12.000,00 con vencimiento en 150 días sin intereses; la tercera de \$ 15.000,00 con vencimiento a 210 días de plazo y con una tasa de interés del 2% mensual desde su suscripción; y la cuarta de \$ 20.000,00 a 300 días sin intereses. La empresa desea reemplazar las 4 deudas por una sola con vencimiento en 180 días, con una tasa de interés del 18% anual. Calcule el valor del nuevo documento que consolidaría las 4 deudas.

2. En el problema anterior considera la tasa de descuento del 1,75% mensual para el cálculo del nuevo documento.

3. Una persona ha firmado tres documentos: el primero, de \$ 5.000, a tres meses de plazo con una tasa de interés del 1% mensual; el segundo, de \$ 9.000, a 120 días de plazo, a una tasa del 1,5% mensual y el tercero, de \$ 12.000, a 180 días de plazo, a una tasa del 18% anual. La persona desea reemplazar los tres documentos por uno solo, pagadero al final del año. ¿Cuál será el valor de ese documento, si se considera una tasa de interés del 2% mensual?

4. Si en el problema anterior se considera el pago el día de hoy y se descuentan los tres documentos en un banco, ¿cuál será el valor de reemplazo? Emplee la tasa de descuento del 2% mensual.

5. El propietario de un edificio en venta, recibe 3 ofertas a) $500.000,00 de contado y $ 1.000.000,00 a un año plazo; b) $ 400.000,00 al contado y dos letras de $ 600.000,00 y $ 500.000,00, con vencimiento en 6 y 9 meses, respectivamente; c) $ 300.000,00 de contado, una letra de $ 700.000,00 en 3 meses y otra letra de $ 500.000,00 en 9 meses. Calcular cuál oferta le conviene al propietario y cuál al comprador. Considerar una tasa de interés del 18% anual.

6. Juan tiene las siguientes deudas: $ 5.000,00 con vencimiento en 90 días; $ 10.000,00 con vencimiento en 150 días; $ 15.000,00 con vencimiento en 9 meses y $ 20.000,00 a 11 meses, sin intereses. Desea saldar sus deudas con dos pagos iguales a los 7 y a los 12 meses, respectivamente, con una tasa de interés del 9% anual. Realice los siguientes cálculos: a) el gráfico; b) el valor de los dos pagos iguales, considere la fecha focal a los 12 y a los 7 meses.

7. Leonor tiene un terreno en venta y le ofrecen tres alternativas: a) $ 5.000 al contado y $ 6.000 después de 11 meses; b) $ 2.000 al contado y $ 9.000 a 7 meses y c) $ 1.000 al contado, $ 3.000 en 3 meses, $ 3.200 en 6 meses y $ 3.800 en 9 meses. Si se considera una tasa de descuento del 18% anual y el día de hoy como fecha focal, ¿cuál de las tres ofertas le conviene más? Calcule cada una de ellas y realice los cálculos con descuentos bancarios.

8. El señor Merchán es poseedor de una cuenta de ahorros que tiene un saldo de $ 123 al 31 de diciembre y ha registrado durante el primer semestre del siguiente año las siguientes operaciones: el 3 de enero depositó $ 155; el 15 de febrero retiró $ 30; el 7 de abril depositó $ 120 y el 30 de mayo retiró $ 55. Si la tasa de interés es del 24% anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta al 30 de junio? Tome una de las dos fechas extremas y el año comercial para el cálculo de los intereses.

9. El señor Rueda es poseedor de una cuenta de ahorros cuyo saldo al 30 de junio fue de $ 300. Durante el segundo semestre del mismo año realizó los siguientes movimientos: un depósito de $ 50 el 30 de septiembre y otro de $ 100 el 4 de diciembre. ¿Cuál será el saldo de la cuenta, con una tasa del 36% anual, al 31 de diciembre? Considere una sola fecha extrema.

10. Una persona tiene una cuenta de ahorros cuyo saldo al 31 de diciembre fue $ 49.000. En el semestre enero/junio ha realizado las siguientes operaciones: retiró $ 3.600 el 21 de febrero; depositó $ 2.800 el 9 de abril; depositó $ 4.700 el 2 de mayo; depositó $ 1.100 el 24 de junio. ¿Cuál será el saldo de la cuenta a 30 de junio, si se consideran una tasa de interés del 24% anual y las dos fechas extremas?

11. Reemplace tres deudas de $ 5.000, $ 10.000 y $ 20.000, a 3, 6 y 12 meses, respectivamente, por un solo pago en 12 meses, considerando una tasa de interés del 16% anual.

12. En el ejemplo anterior, reemplace las tres deudas por una sola al día de hoy, con la misma tasa. Calcular: a) con valor actual y b) con valor efectivo. Analice los resultados.

13. Pedro deposita \$ 6.000 cada mes durante 4 meses consecutivos en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 2% mensual. Calcule el monto que acumulará al final de los 4 meses.

14. En el problema anterior, considere que los depósitos se realizan por adelantado y la tasa de interés es del 2% mensual.

15. María deposita \$ 4.000 cada mes, durante 3 meses consecutivos, en una institución financiera. Calcule el monto que acumulará al final de los 3 meses, si se considera una tasa de interés del 3,6% anual.

16. En el problema anterior, calcule el valor del monto si los depósitos se realizan por adelantado.

17. José paga \$ 700 cada mes, durante 3 meses, para cubrir una deuda, con una tasa de interés del 0,5% mensual. Calcule el valor original de la deuda.

18. En el problema anterior, considere que los pagos se realizan por adelantado.

19. En el problema 17, realice los cálculos con descuento bancario.

20. En el problema 18, realice los cálculos con descuento bancario.

Respuestas

1. \$ 55.429,66

2. \$ 55.199,275

3. \$ 317.930,00

4. \$ 251.282,00

5. a) \$ 1.347.457,627 b) \$ 1.390.987,35 c) \$ 1.410.385,094
La tercera oferta es la más conveniente para el vendedor.

6. a) x = \$25.202,45 cada pago, considerando la fecha focal a los 12 meses
b) x = \$25.203,38 cada pago, considerando la fecha focal a los 7 meses.

7. a) \$ 10.010,00 b) \$ 10.055,00 c) \$ 10.064,00
La tercera oferta es la más conveniente.

8. \$ 349,19

9. \$ 51,25

10. $ 59.942,27

11. $ 36.400

12. a) $ 31.308,33 b) $ 30.800

13. $ 24.720

14. $ 25.200

15. $ 12.036,00

16. $ 12.072,00

17. $ 2.098,26

18. $ 2.099,13

19. $ 2.098,25

20. $ 2.099,12

Actividades de autoevaluación

1. Una empresa tiene las siguientes obligaciones a corto plazo: $ 3.000 a 60 días; $ 6.000 a 120 días; $ 9.000 a 180 días. La empresa acuerda con su acreedor reemplazar sus deudas por un solo pago a los 90 días, con una tasa de interés del 21% anual. Calcule el valor de ese pago único.

2. En el problema anterior, considere la fecha del pago único a los 180 días.

3. En el problema 1, considere la fecha de pago en el tiempo cero o el día de hoy.

4. En el problema 1, haga los cálculos con una tasa de descuento del 21% anual.

5. Una empresa, para comprar ropa de trabajo para su personal, tiene un presupuesto de $ 10.000. La empresa pide cotizaciones y recibe las siguientes propuestas: a) pagar $ 5.000 al contado y $ 5.000 en 90 días; b) pagar $ 3.000 al contado; $ 3.000 en 30 días y $ 4.000 en 90 días; c) pagar $ 2.000 al contado, $ 4.000 en 30 días y $ 4.000 en 84 días. Si la tasa de interés es del 24% anual, ¿cuál oferta le conviene aceptar?

6. Sofía pone en venta un terreno avaluado en $ 60.000 y recibe las siguientes propuestas: a) $ 30.000 al contado y $ 30.000 en 123 días; b) $ 20.000 al contado, $ 20.000 en 60 días y $ 20.000 en 120 días; c) $ 15.000 al contado; $ 35.000 en 30 días y $ 10.000 en 150 días. ¿Cuál oferta le conviene aceptar si la tasa de interés es del 48% anual?

7. En el problema anterior, considere una tasa de interés del 4% anual.

8. Una empresa cuenta con un presupuesto de \$ 120.000 para comprar maquinaria. Al consultar con varios proveedores, recibe las siguientes propuestas; a) pagar \$ 60.000 al contado y \$ 60.000 a 150 días; b) pagar \$ 30.000 al contado y 90.000 a 120 días; c) pagar \$ 10.000 al contado y \$ 110.000 a 90 días. ¿Cuál oferta le conviene, si se considera una tasa de interés del 18% anual?

9. Gabriela abre una cuenta de ahorro el 30 de junio de 2003 con \$ 100 y realiza las siguientes operaciones: el 14 de julio deposita \$ 20; el 15 de septiembre retira \$ 30; el 15 de octubre deposita \$ 150. Liquidar la cuenta de ahorros al 31 de diciembre de 2003, si la tasa de interés fue del 18% anual. Considerar el año comercial, el tiempo exacto (una de las dos fechas extremas) y la forma de cálculo relacionada con cada depósito o retiro.

10. En el problema anterior, considerar la forma de cálculo relacionada con los saldos y el número de días comprendidos entre cada operación.

Respuestas

1. Primero se plantea el problema gráficamente.

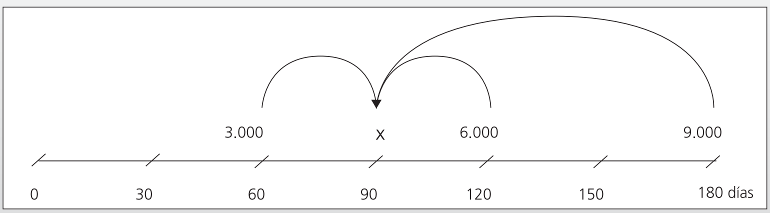


Gráfico 4.12. Solución gráfica del problema 1

Luego, se calcula el tiempo

$t_1 = 90 - 60 = 30$

$t_2 = 90 - 120 = -30$

$t_3 = 90 - 180 = -90$

Podemos expresar la ecuación de valor.

$$x = 3.000\left[1 + 0{,}21\frac{30}{360}\right] + \frac{6.000}{1 + 0{,}21\left(\frac{30}{360}\right)} + \frac{9.000}{1 + 0{,}21\left(\frac{90}{360}\right)}$$

$x = 3.052{,}50 + 5.896{,}85 + 8.551{,}07 = 17.500{,}37$

\$ 17.500,37

2. Se plantea el problema gráficamente, con la nueva fecha focal a 180 días.

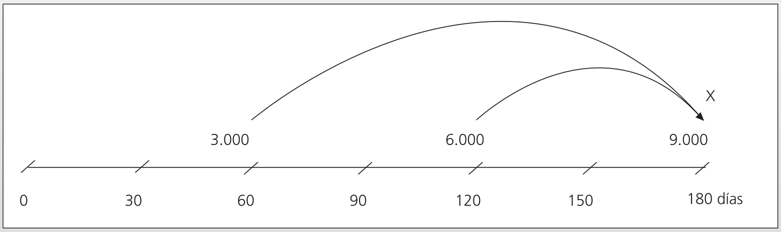


Gráfico 4.13. Solución gráfica del problema 2

$$t_1 = 180 - 60 = 120$$
$$t_2 = 180 - 120 = 60$$
$$t_3 = 180 - 180 = 0$$

$$x = 3.000\left[1 + 0{,}21\left(\frac{120}{360}\right)\right] + 6.000\left[1 + 0{,}21\left(\frac{60}{360}\right)\right] + 9.000\left[1 + 0{,}21\left(\frac{0}{360}\right)\right]$$

$$x = 3.210{,}00 + 6.210{,}00 + 9.000{,}00 = 18.420{,}00$$

$$x = \$\ 18.420{,}00$$

3. Se toma la fecha focal en el tiempo cero o referenciada al criterio del valor actual.

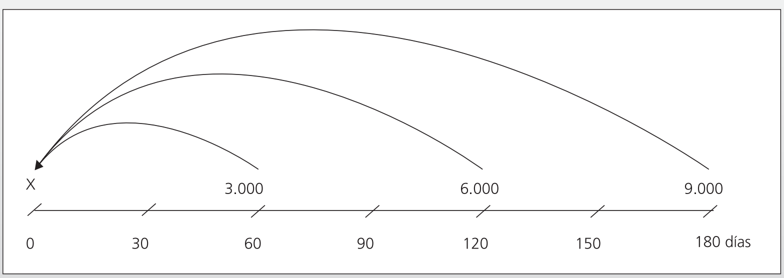


Gráfico 4.14. Solución gráfica del problema 3

$$t_1 = 0 - 60 = /-60/$$
$$t_2 = 0 - 120 = /-120/$$
$$t_3 = 0 - 180 = /-180/$$

$$x = 1 + 0{,}21\ \frac{60}{360} + \frac{6.000}{1 + 0{,}21\left(\frac{120}{360}\right)} + \frac{9.000}{1 + 0{,}21\left(\frac{180}{360}\right)}$$

$$x = 2.898.550{,}72 + 5.607.476{,}63 + 8.144.796{,}38 = 16.650.823{,}74$$

$$x = \$\ 16.650{,}82$$

4. Los cálculos se realizan con descuento bancario o bursátil.

$$x = 3.000\left[1 - 0{,}21\left(\frac{60}{360}\right)\right] + 6.000\left[1 - 0{,}21\left(\frac{120}{360}\right)\right] + 9.000\left[1 - 0{,}21\left(\frac{180}{360}\right)\right]$$

$$x = 2.895{,}00 + 5.580{,}00 + 8.055{,}00 = 16.530{,}00$$

$$x = \$\ 16.530{,}00$$

5. Se elabora un gráfico de tiempos y valores para cada propuesta y se toma como fecha focal el tiempo cero.

a)

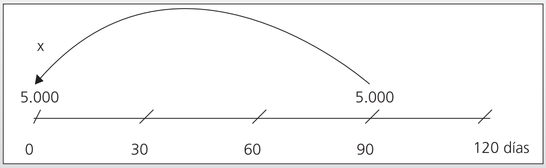


Gráfico 4.15. Solución gráfica de la primera propuesta

$$x_1 = 5.000 + \frac{5.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{90}{360}\right)} = \$\ 9.716{,}98$$

b)

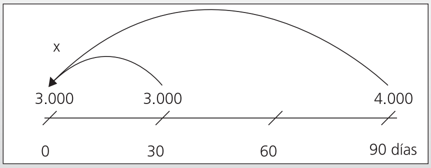


Gráfico 4.16. Solución gráfica de la segunda propuesta

$$x_2 = 3.000 + \frac{3.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{30}{360}\right)} + \frac{4.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{90}{360}\right)}$$

$$x_2 = 3.000 + 2.941{,}18 + 3.773{,}58 = \$\ 9.714{,}76$$

c)

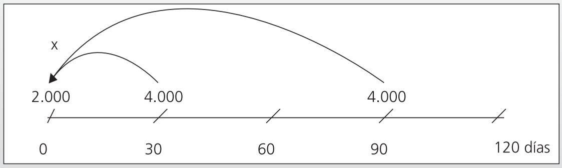


Gráfico 4.17. Solución gráfica de la tercera propuesta

$$x_3 = 2.000 + \frac{4.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{30}{360}\right)} + \frac{4.000}{1 + 0{,}24\left(\frac{84}{360}\right)}$$

$$x_3 = 2.000 + 3.921{,}57 + 3.787{,}88 = \$\ 9.709{,}45$$

La tercera propuesta, $ 9.709,45, es la que conviene aceptar.

6. Para este problema, se toma el valor actual de cada propuesta o fecha focal tiempo cero. Se sugiere elaborar el gráfico respectivo para cada propuesta.

a)

$$x_1 = 30.000 + \frac{30.000}{1 + 0{,}48\left(\frac{123}{360}\right)}$$

$$x_1 = 30.000 + 25.773{,}19 = \$\ 55.773{,}19$$

b)

$$x_2 = 20.000 + \frac{20.000}{1 + 0{,}48\left(\frac{60}{360}\right)} + \frac{20.000}{1 + 0{,}48\left(\frac{120}{360}\right)}$$

$$x_2 = 20.000 + 18.518{,}52 + 17.182{,}13 = \$\ 55.700{,}65$$

c)

$$x_3 = 15.000 + \frac{35.000}{1 + 0{,}48\left(\frac{30}{360}\right)} + \frac{10.000}{1 + 0{,}48\left(\frac{150}{360}\right)}$$

$$x_3 = 15.000 + 32.407{,}41 + 8.333{,}33 = \$\ 55.740{,}74$$

La primera propuesta, $ 55.773,19, es la que le conviene aceptar.

7. Aunque en este problema se consideran los mismos criterios que en el anterior, notará que la respuesta cambia debido a la gran diferencia entre las tasas de interés, del 48% al 4% anual.

a)

$$x_1 = 30.000 + \frac{30.000}{1 + 0{,}04\left(\frac{123}{360}\right)}$$

$$x_1 = 30.000 + 29.595{,}53 = \$\ 59.595{,}53$$

b)

$$x_2 = 20.000 + \frac{20.000}{1 + 0{,}04\left(\frac{60}{360}\right)} + \frac{20.000}{1 + 0{,}04\left(\frac{120}{360}\right)}$$

$$x_2 = 20.000 + 19.867{,}55 + 19.736{,}84 = \$\ 59.604{,}39$$

c)

$$x_3 = 15.000 + \frac{35.000}{1 + 0{,}04\left(\frac{30}{360}\right)} + \frac{10.000}{1 + 0{,}04\left(\frac{150}{360}\right)}$$

$$x_3 = 15.000 + 34.768{,}21 + 9.836{,}07 = \$\ 59.604{,}28$$

La segunda propuesta, $ 59.604,39, es la que conviene aceptar.

8. En este problema, a la empresa le interesa la propuesta más baja. Para los cálculos se utiliza el criterio del valor actual.

a)

$$x_1 = 60.000 + \frac{60.000}{1 + 0{,}18\left(\frac{150}{360}\right)}$$

$$x_1 = 60.000 + 55.813.953{,}45 = \$\ 115.813{,}95$$

b)

$$x_2 = 30.000 + \frac{90.000}{1 + 0{,}18\left(\frac{120}{360}\right)}$$

$$x_2 = 30.000 + 84.905{,}66 = \$\ 114.905{,}66$$

c)

$$x_3 = 10.000 + \frac{110.000}{1 + 0{,}18\left(\frac{90}{360}\right)}$$

$$x_3 = 10.000 + 105.263{,}16 = \$\ 115.623{,}16$$

La propuesta b) $ 114.905.66 es la que conviene aceptar.

9. Primero se calcula el tiempo en días:

Julio	31	17		
Agosto	31	31		
Septiembre	30	30	15	
Octubre	31	31	31	16
Noviembre	30	30	30	30
Diciembre	31	31	31	31
TOTAL DÍAS	184	170	107	77

Luego se calcula el interés simple en cada transacción:

a) Interés del depósito de apertura:

$$I = 100(0{,}18)\,\frac{184}{360} = \$\ 9{,}2$$

b) Interés del depósito del 14 de julio:

$$I = 20(0{,}18)\,\frac{170}{360} = \$\ 1{,}70$$

c) Interés en contra del retiro del 15 de septiembre:

$$I = 30(0{,}18)\,\frac{107}{360} = -\$\ 1{,}605$$

d) Interés del depósito del 15 de octubre:

$$I = 150(0{,}18)\,\frac{77}{360} = \$\ 5{,}775$$

Total intereses: $ 16,675 a favor y $ 1,605 en contra; lo cual da un neto de $ 15,070 para acreditarse en la cuenta.
El saldo al 31 de diciembre, sin intereses, es de $ 240
En consecuencia la cuenta tendrá un acumulado, al 31 de diciembre, de 240 + 15,07 = $ 255,07

10. Para esta segunda forma de liquidación se calcula el tiempo que transcurre entre cada transacción:

a)	Hasta el 14 de julio	14 días
b)	Del 15 de julio al 15 de septiembre	63 días
c)	Del 15 de septiembre al 15 de octubre	30 días
d)	Del 15 de octubre al 31 de diciembre	77 días
	Total	184 días

Luego se calcula el interés simple sobre el valor de los saldos:

a) Con el valor de apertura de la cuenta de ahorros:

$$I = 100(0{,}18)\,\frac{14}{360} = \$\ 7{,}00$$

b) Con el saldo al 14 de julio (depósito de $ 20):

$$I = 120(0{,}18)\,\frac{63}{360} = \$\ 3{,}78$$

c) Con el saldo al 15 de septiembre (retiro de $ 30):

$$I = 90(0{,}18)\,\frac{30}{360} = \$\ 1{,}35$$

d) Con el saldo al 15 de octubre (depósito de $ 150):

$$I = 240(0{,}18)\,\frac{77}{360} = \$\ 9{,}24$$

Total intereses: $ 15,07
Saldo de la cuenta con intereses: 240,00 + 15,07 = $ 255,07

Actividades de repaso

1. ¿Qué es una ecuación de valor?

2. ¿Qué utilidad tienen las ecuaciones de valor?

3. En la comparación de ofertas para comprar o para vender, ¿qué fecha focal se debe utilizar? ¿Por qué?

4. ¿Cómo se calcula el tiempo para plantear una ecuación de valor?

5. En una comparación de ofertas en las que hay cinco propuestas diferentes, ¿se debe hacer una ecuación por cada oferta o una sola para todas? ¿Por qué?

6. En una serie de depósitos mensuales durante 5 meses, ¿cuál debe ser la fecha focal para calcular el monto?

7. En una serie de depósitos efectuados durante 5 meses para cancelar una deuda, ¿cuál debe ser la fecha focal?

8. ¿Qué es una cuenta de ahorros?

9. ¿Cómo se pueden liquidar los intereses en una cuenta de ahorros?

10. ¿Se pueden liquidar los intereses en las cuentas de ahorros tomando los saldos? ¿Por qué?

11. En una cuenta de ahorros, los intereses se acumulan al capital y se forma un monto. Explique.

Complete su aprendizaje con el CD que acompaña a este libro

Interés compuesto

V

Presentación

El conocimiento y el manejo del interés compuesto son necesarios en las operaciones financieras a largo plazo, en operaciones de inversiones de capital, en los cálculos del monto, del interés y del tiempo. Este tipo de interés se va capitalizando de acuerdo con el tiempo, medido en períodos de capitalización o de conversión. Igualmente, el concepto y aplicación del valor actual es básico en el interés compuesto para manejar en documentos e inversiones financieras en el largo plazo.

Se incluyen el tema de la capitalización continua, en plazos menores de un año, las fórmulas de las tasas equivalentes al monto y el valor actual, con capitalización continua.

Objetivo general

- Conocer el concepto de interés compuesto y sus aplicaciones en la liquidación de documentos financieros, endeudamiento e inversiones a cualquier plazo.

Objetivos específicos

- Conocer y manejar los conceptos período de capitalización y tasa de interés por período de capitalización.
- Manejar la fórmula del monto en interés compuesto.
- Conocer y aplicar el concepto de valor actual a largo plazo.
- Aplicar en inversiones las tasas de interés nominal y efectiva, anticipada y vencida.
- Resolver problemas de interés compuesto aplicando ecuaciones de valor.
- Conocer y manejar la capitalización continua.
- Manejar la fórmula del Monto y la del Valor Actual en interés compuesto con diferentes periodos de capitalización.
- Conocer y aplicar la capitalización continua, en el Monto y en el Valor Actual
- Conocer y aplicar las tasas de interés equivalentes, incluyendo la capitalización continua.
- Conocer y aplicar la capitalización continua en plazos menores a un año y compararla con el interés simple.

CONTENIDO

Interés compuesto

"Es el interés de un capital al que se van acumulando los réditos para que produzcan otros."[1]

"Cuando se calcula interés compuesto, el capital aumenta por la adición de los intereses vencidos al final de cada uno de los períodos a que se refiere la tasa. Siempre que no se pague efectivamente el interés al final de un período, sino que se adicione al capital, se dice que los intereses se capitalizan."[2]

El interés compuesto se caracteriza porque el interés generado, en una unidad de tiempo, se suma al capital y este valor nuevamente gana intereses y se acumula al nuevo capital, y así sucesivamente, tantas veces como períodos de capitalización se hayan establecido.

Comparación interés simple/interés compuesto

El interés compuesto se diferencia del interés simple en que éste calcula los intereses por una sola vez, mientras que en aquél el interés se va acumulando al capital periódicamente; es decir, los intereses se capitalizan. Generalmente, el interés simple se utiliza a corto plazo, hasta un año, y el interés compuesto a largo plazo, más de un año.

Calculemos el monto, el interés simple y el interés compuesto de un capital de $ 4.000.000 a una tasa de interés del 10% durante 6 períodos.

Cálculo a interés simple:

$I = Cit$; $I = 4.000.000(0,10)(6) = \$\ 2.400.000$
$M = C(1 + it) = 4.000.000[1 + 0,10(6)] = \$\ 6.400.000$

Cálculo a interés compuesto:

(Para el primer período)
$M = 4.000.000[1 + 0,10(1)] = \$\ 4.400.000$

(Para el segundo período)
$M = 4.400.000[1 + 0,10(1)] = \$\ 4.840.000$

(Para el tercer período)
$M = 4.840.000[1 + 0,10(1)] = \$\ 5.324.000$

(Para el cuarto período)
$M = 5.324.000[1 + 0,10(1)] = \$\ 5.856.400$

(Para el quinto período)
$M = 5.856.400[1 + 0,10(1)] = \$\ 6.442.040$

[1] *Gran diccionario enciclopédico universal,* Valencia, Ortells, 1980.
[2] J. H. Moore, *Manual de matemáticas financieras*, México, Uteha, 1973, p. 68.

(Para el sexto período)
M = 6.442.040[1 + 0,10(1)] = $ 7.086.244

Puede notarse la diferencia, en el mismo tiempo y con la misma tasa de interés, del monto total que producen.

Monto con interés simple: $ 6.400.000
Monto con interés compuesto: $ 7.086.244

En el siguiente cuadro (y en los gráficos adjuntos) se demuestran el comportamiento del interés simple y el interés compuesto y sus respectivos montos:

Período	Monto interés simple	Interés	Monto interés compuesto	Interés	Diferencia
1	4.400.000	400.000	4.400.000	400.000	
2	4.800.000	800.000	4.840.000	840.000	40.000
3	5.200.000	1.200.000	5.324.000	1.324.000	124.000
4	5.600.000	1.600.000	5.856.400	1.856.400	256.400
5	6.000.000	2.000.000	6.442.040	2.442.040	442.040
6	6.400.000	2.400.000	7.086.244	3.086.244	686.244

Tabla 5.1. *Tabla comparativa interés simple interés compuesto (en $)*

Como se observa, la diferencia entre el monto a interés simple y el monto a interés compuesto radica en que este último se va acrecentando en función del tiempo, debido a la acumulación de los intereses al capital por período de capitalización.

El interés compuesto crece en función del nuevo capital por período, mientras que el interés simple es constante durante todos los períodos. Mientras más períodos se capitalice, mayor será la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto.

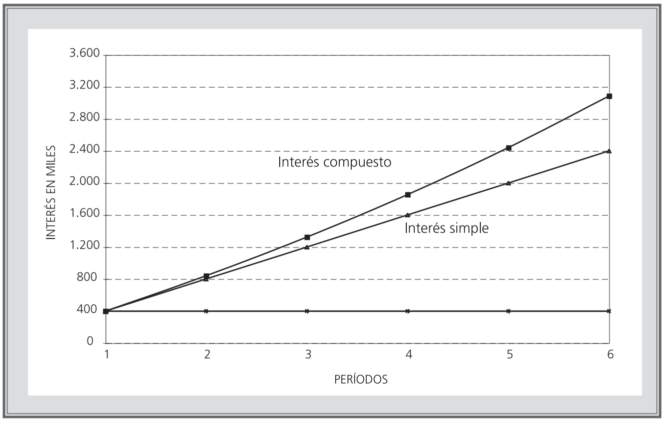


Gráfico 5.1. Comparación gráfica interés simple/interés compuesto

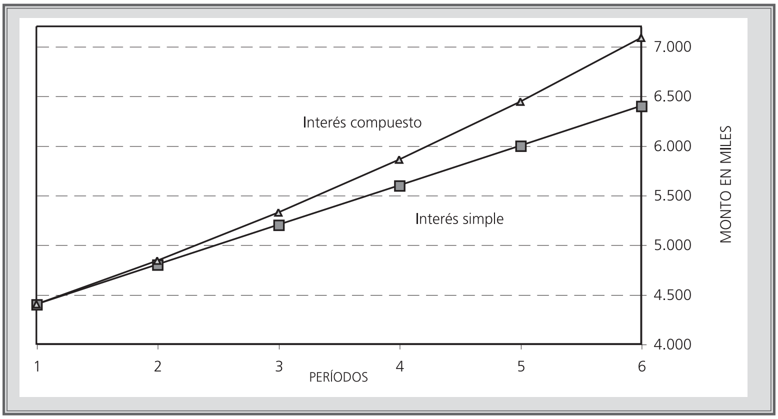


Gráfico 5.2. Comparación gráfica monto interés simple/interés compuesto

Variables del interés compuesto

En el cálculo del interés compuesto se debe tomar en cuenta previamente el cálculo de las variables *i* y *n*, correspondientes a la tasa de interés por período de capitalización *(i)* y el número de períodos de capitalización (*n*).

Período de capitalización (n): Espacio de tiempo en el que el interés se adiciona o acumula al capital. Este período puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, etcétera. Se identifica con la letra (*n*).

Tasa de interés (i): La tasa de interés por período de capitalización significa la tasa diaria, mensual, bimestral, trimestral, semestral, anual, etc., según sea la capitalización por día, por mes, por bimestre, por trimestre, por semestre o por año. Se identifica con la letra *i*.

Número de capitalizaciones en el año (*m*): Se obtiene dividiendo 360 para el número de días del período de capitalización.

Para calcular el número de períodos de capitalización y la tasa de interés por período de capitalización de un capital colocado a interés compuesto durante 7 años, con una tasa de interés del 15% anual capitalizable semestralmente, se realiza el siguiente procedimiento:

$t = 7$ años. Entonces, $n = 7(12)/6 = 14$

$$n = \frac{\text{Número total de meses}}{\text{Número de meses del período de capitalización}}$$

Es decir, que se capitaliza 14 veces o que existen 14 semestres en 7 años.

$$i = \frac{0,15}{2} = 0,075$$

$$i = \frac{\text{Tasa anual}}{\text{Número de capitalizaciones al año}} = \frac{\text{Tasa anual}}{m}$$

$$m = \frac{360}{\text{\# días del período}} \qquad m = \frac{360}{180} = 2$$

Ahora calculemos el número de períodos de capitalización (n) y la tasa de interés por período de capitalización (i) de un capital colocado a interés compuesto durante 9 años, con una tasa de interés del 6%, capitalizable semestralmente.

$t = 9$ años; tasa nominal anual $i = 6\%$

$$n = \frac{(9)(12)}{6} = 18$$

$$m = \frac{360}{180} = 2$$

$$i = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$$

$i = 3\%$ semestral

Por último calculemos el número de períodos de capitalización (n) y la tasa de interés por período de capitalización (i); de un capital colocado a interés compuesto durante 5 años, a una tasa de interés del 9% anual, capitalizable trimestralmente.

$t = 5$ años
$i = 9\%$

$n = 5\,\frac{12}{3} = 20$; se divide entre el número de meses del período

$m = \frac{360}{90} = 4$; se capitaliza 4 veces al año

$i = \frac{0{,}09}{4} = 0{,}0225 = 2{,}25\%$ trimestral

Fórmula del monto a interés compuesto

"El monto de un capital a interés compuesto, o monto compuesto, es el valor del capital final o capital acumulado después de sucesivas adiciones de los intereses."[3]
"A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como interés compuesto."[4]

[3] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 70
[4] F. Ayres Jr., *Teoría y 500 problemas resueltos*, México, McGraw-Hill, 1971, p. 63.

Para deducir la fórmula del monto de interés compuesto, se parte de un ejemplo en el que se conocen el capital, la tasa de interés y el número de períodos de capitalización.
De esta manera, para realizar el cálculo del monto a interés compuesto de un capital de $ 100.000 a cuatro años de plazo, a una tasa de interés del 12% anual, se elabora un cuadro en el que se expresan los períodos, los intereses y el monto.

Período	Capital al inicio del período	Interés	Monto al final del período
1	100.000,00	12.000,00	112.000,00
2	112.000,00	13.440,00	125.440,00
3	125.440,00	15.052,80	140.492,80
4	140.492,80	16.859,14	157.351,94

Tabla 5.2. *Forma del cálculo de interés y monto compuesto*

Fórmula del cálculo: I = C*it*

Primer año
I = 100.000(0,12)1 = $ 12.000
M = 100.000 + 12.000 = $ 112.000

Segundo año
I = 112.000(0,12)1 = $ 13.440
M = 112.000 + 13.440 = $ 125.440

Tercer año
I = 125.440(0,12)1 = $ 15.052,80
M = 125.440 + 15.052,80 = $ 140.492,80

Cuarto año
I = 140.492,80(0,12)1 = $ 16.859,14
M = 140.492,80 + 16.859,14 = $ 157.351,94

En este ejemplo, C es el capital; *i* la tasa de interés por período de capitalización y *n*, el número de períodos de capitalización. Así, se tiene el cuadro siguiente:

Período	Capital inicio período	Interés	Monto
1	C	Ci	$C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 i = C(1+i)^3$
4			
	Podemos continuar hasta la enésima potencia:		
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1} i = C(1+i)^n$

Tabla 5.3. *Tabla para deducir la fórmula del monto en interés compuesto*

Para cualquier período de capitalización y tasa de interés por período, se obtiene la fórmula del monto en interés compuesto:

$M = C(1 + i)^n$	**Fórmula 5.1.** Fórmula del monto en interés compuesto

Entonces,

$I = M - C$	**Fórmula 5.2.** Fórmula de interés compuesto

El factor $(1 + i)^n$ puede hallarse mediante calculadoras electrónicas, variando i y n; o buscarse en tablas matemáticas en función de las referidas variables.

La fórmula del monto también puede expresarse tomando en cuenta los períodos de capitalización menores de un año: semestral, trimestral, bimestral, mensual, diaria o continua.

$M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$	**Fórmula 5.3.** Fórmula del monto en interés compuesto en función de m y t

M = monto.
C = capital inicial.
j = tasa de interés nominal capitalizable varias veces.
m = número de capitalizaciones en el año.
t = número de años.

Variaciones de la fórmula del Monto en función de la tasa de interés y las capitalizaciones: $M = C\ (1 + j/m)^{mt}$

Tomemos a i = tasa efectiva, anual; j = tasa nominal capitalizable varias veces en el año; m = 360/número de días del período de capitalización; t = número de años; n = número de capitalizaciones en el año.

a) Si la tasa de interés es efectiva (se capitaliza una sola vez al año)

$$M = C\ (1 + i)^{nt}$$

b) Si la tasa de interés se capitaliza semestralmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2t}$$

c) Si la tasa de interés se capitaliza quimestralmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{2,4}\right)^{2,4(t)}$$

d) Si la tasa de interés se capitaliza cuatrimestralmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{3}\right)^{3t}$$

e) Si la tasa de interés se capitaliza trimestralmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4t}$$

f) Si la tasa de interés se capitaliza bimestralmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{6}\right)^{6t}$$

g) Si la tasa de interés se capitaliza mensualmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12t}$$

h) Si la tasa de interés se capitaliza quincenalmente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{24}\right)^{24t}$$

i) Si la tasa de interés se capitaliza diariamente:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{360}\right)^{360t} \quad \text{o} \quad M = C\left(1 + \frac{j}{365}\right)^{365t}$$

j) Si la tasa de interés se capitaliza en forma continua:

$$M = C\,e^{jt}$$

Fórmula 5.3.1. Fórmula de la capitalización continua.

En la cual el número

$$e = \frac{\text{lím}(1 + 1/x)^{x}}{n \to \infty} = 2{,}718281829$$

j = tasa nominal
t = número de años

Ejemplo

Calculemos el monto de un capital de $ 20.000,00 a interés compuesto durante 25 años y 9 meses, si la tasa de interés es del 9% anual capitalizable de la siguiente forma:

a) Tasa del 9% efectiva:

$$M = 20.000(1 + 0,09)^{25,75} = 183.976,4852$$

b) Tasa del 9% anual capitalizable semestral:

$$M = 20.000\left(1+ \frac{0,09}{2}\right)^{51.50} = 192.982,95569$$

c) Tasa del 9% anual capitalizable quimestral:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{2,4}\right)^{61,80} = 194.578,5257$$

d) Tasa del 9% anual capitalizable cuatrimestral:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{3}\right)^{77,25} = 196.202,9822$$

e) Tasa del 9% capitalización trimestral:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{4}\right)^{103} = 197.857,0883$$

f) Tasa del 9% capitalización bimestral:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{6}\right)^{154,50} = 199.541,6335$$

g) Tasa del 9% capitalización mensual:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{309} = 201.257,4348$$

h) Tasa del 9% capitalización diaria:

$$M = 20.000\left(1 + \frac{0,09}{360}\right)^{9.270} = 202.946,5481$$

i) Tasa del 9% capitalización continua:

$$M = 20.000\, e^{(0,09)(25,75)} = 203.005,337856$$

Como puede notarse, cuando la capitalización aumenta, se incrementa el Monto.

Ejemplo

Si una empresa obtiene un préstamo de \$ 3.000 a 6 años de plazo, con una tasa de interés del 15% anual capitalizable semestralmente, ¿qué monto debe pagar a la fecha de vencimiento y qué interés?

Se calculan *i* y *n* :

$$n = \frac{6 \times 12}{6} = 12 \text{ períodos} \qquad m = \frac{360}{180} = 2$$

$$i = \frac{0{,}15}{2} = 0{,}075 = 7{,}5\% \text{ semestral}$$

$$C = 3.000$$
$$M = 3.000(1 + 0{,}075)^{12} = 3.000(1{,}075)^{12}$$
$$M = 3.000(2{,}381780) = \$\ 7.145{,}34$$

Interés compuesto que debe pagar:

$$I = M - C$$
$$I = 7.145{,}34 - 3.000 = \$\ 4.145{,}34$$

Monto compuesto con períodos de capitalización fraccionarios

Cuando el tiempo de pago no coincide con el período de capitalización, se presenta el caso de los períodos de capitalización fraccionarios.

Entonces, si el tiempo de pago de una deuda es 4 años y 9 meses y la tasa de interés del 14% capitalizable semestralmente, se tiene que:

$$n = \frac{4(12) + 9}{6} = \frac{57}{6} = 9{,}5 \text{ semestres}$$

Es decir, 9 semestres y una fracción de semestre.

Para el cálculo del monto compuesto con períodos de capitalización fraccionario pueden aplicarse dos métodos.[5]

a) El matemático, que toma el valor exacto de *n* en la fórmula del monto compuesto.
b) El comercial (*véase* el siguiente ejemplo parte b).

Para el cálculo el monto de una deuda de \$ 4.000 a interés compuesto durante 6 años y 3 meses de plazo, con una tasa de interés del 7% anual capitalizable semestralmente, se tiene:

[5] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 75.

a) Cálculo matemático

$$n = \frac{6\ (12) + 3}{6} = \frac{75}{6} = 12{,}5 \text{ semestres}$$

$$i = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035$$

$$M = 4.000(1 + 0{,}0035)^{12{,}5} = 4.000(1{,}537285)$$
$$M = \$\ 6.149{,}14$$

b) El cálculo comercial, aplica la parte entera de n en la fórmula del monto compuesto (interés compuesto) y la parte fraccionaria en la fórmula del monto de interés simple.
En otras palabras, el método comercial aplica interés compuesto a la parte entera e interés simple a la parte fraccionaria.
En el ejemplo anterior, con el método comercial se tiene:

$$M = 4.000(1{,}035)^{12}\left(1 + 0{,}035\frac{3}{6}\right)^{*}$$

$$M = 4.000(1{,}51107)(1{,}075) = \$\ 6.150{,}05$$

Como puede apreciarse, el método comercial da un resultado mayor que el método matemático.

Calculemos por los dos métodos, el matemático y el comercial, el monto compuesto de \$ 2.000 a 7 años y 8 meses de plazo, al 9% anual capitalizable trimestralmente.

Método matemático
Se calcula el valor de *n* e *i*

$$n = \frac{7(12) + 8}{3} = \frac{84 + 8}{3} = 30{,}6667$$

$$i = \frac{0{,}09}{4} = 0{,}0225$$

Se aplica la fórmula del monto:

$$M = 2.000(1 + 0{,}0225)^{30{,}6667} = \$\ 3.957{,}05$$

Método comercial

$$n = \frac{7(12) + 8}{3} = \frac{90}{3} + \frac{2}{3} = 30 + \frac{2}{3} \text{ períodos}$$

$$i = \frac{0{,}09}{4} = 0{,}0225$$

* En este procedimiento es necesario destacar que, en la parte del cálculo con interés simple, debe relacionarse la tasa de interés por período con los meses o días que tiene el correspondiente período.

$$M = 2.000(1{,}0225)^{30}\left(1 + 0{,}0225\frac{2}{3}\right)$$

$$M = 2.000(1{,}9494)(1{,}015) = \$\ 3.957{,}27$$

También puede expresarse así:

$$M = 2.000(1{,}0225)^{30}\left(1 + 0{,}09\frac{60}{360}\right)$$

$$M = 2.000(1{,}9494)(1{,}015) = \$\ 3.957{,}27$$

Diferencia entre los resultados obtenidos por los dos métodos:

$$\$\ 3.957{,}27 - \$3.957{,}05 = \$\ 0{,}22$$

Esto se debe a la diferente aplicación del interés en el tiempo fraccionario (dentro de los dos últimos meses se acumula el interés).

Aplicación de la capitalización continua en plazos menores de un año

En algunas operaciones de documentos financieros, como contratos a término o forwards, contratos futuros, opciones de compra (put), opciones de venta (call), se utiliza la tasa de interés anual con capitalización continua, tomando el año calendario o el año comercial y como base el número "e" = 2,71828182846, en plazos menores a un año. El resultado es siempre mayor que la aplicación con el interés simple normal.

Ejemplo

Calcular el Interés y el Monto que generará un documento financiero de $ 3.000.000,00 durante 92 días, si se considera una tasa de interés del 4 % anual con capitalización continua.
Resolución:

$$M = C\,e^{it} \qquad i = 0,\ 04$$

$$\text{a) } t_1 = \frac{92}{360} = 0{,}255555555556$$

$$\text{b) } t_2 = \frac{92}{365} = 0{,}252054794521$$

a) Con el año comercial

$$M = 3.000.000{,}00\ e^{(0{,}04)\ (0{,}2555555556)} = 3.000.000{,}00\ e^{0,\ 0102222222222} = 3.030.823{,}94285$$

$$\text{Interés} = 3.030.823{,}94285 - 3.000.000{,}00 = 30.823{,}94285$$

b) Con el año calendario:

$M = 3.000.000,00\ e^{0,04\ (0,252054794521)} = 3.000.000,00\ e^{0,010082191781} =$ 3.030.399,56495

Interés = 3.030.399,56495 – 3.000.000,00 = 30.399,56495

Esta forma de cálculo da un resultado mayor que si se realizara con la fórmula del interés simple: I = Cit y la del Monto = C + I

c) Con el año comercial y tasa de interés anual

$$I = 3.000.000,00(0,04)\left(\frac{92}{360}\right) = 30.666,6666667$$

M = 3.000.000,00 + 30.666,6666667 = 3.030.666,666667

d) Con el año calendario y tasa de interés anual

$$I = 3.000.000,00(0,04)\left(\frac{92}{365}\right) = 30.246,5753425$$

M = 3.000.000,00 + 30.246,5753425 = 3.030.246,5753425

Se puede considerar igualmente el cálculo del valor actual, en el que el resultado es lógicamente menor.

Ejemplo

Calcular el valor actual 90 días antes de su vencimiento de un documento financiero suscrito a 210 días de plazo, por un monto de \$ 5.000.000,00, si se considera una tasa de interés del 9% anual con capitalización continua:
Resolución:

$$C = M\ e^{-it}$$

Con el año comercial:

$$C = 5.000.000,00\ e^{-0,09\ (90/360)} = 5.000.000,00\ e^{-0,0225}$$

$$C = 5.000.000,00(0,977751237) = 4.888.756,186$$

Si se calcula con el interés simple:

$$C = \frac{5.000.000,00}{1 + 0,09\left(\frac{90}{360}\right)} = \frac{5.000.000,00}{1,0225} = 4.889.975,55$$

www.elsolucionario.net

Con el año calendario

$$C = 5.000.000{,}00\ e^{-0{,}09\ (90/365)} = 5.000.000{,}00\ e^{-0{,}02219178}$$

$$C = 5.000.000{,}00\ (0{,}978052646) = 4.890.263{,}231$$

Si se calcula con interés simple:

$$C = \frac{5.000.000{,}00}{1 + 0{,}09\left(\frac{90}{365}\right)} = \frac{5.000.000{,}00}{1{,}022191781} = 4.891.450{,}01$$

En los dos casos se puede notar la diferencia que se incrementa con el valor del documento financiero.

Tasas equivalentes

Tasa nominal es aquella que puede ser capitalizable varias veces en un año y se denomina *(j)*.
Tasa efectiva de interés es la que realmente actúa sobre el capital una vez en el año y se denomina (*i*).

“Se dice que dos tasas anuales de interés con diferentes períodos de conversión (capitalización) son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final de un año.”[6]

“Las tasas nominal y efectiva son equivalentes cuando producen la misma cantidad de dinero al final del año.”[7]

Así a un capital de \$ 1, al 18% anual capitalizable mensualmente, será:

$$M = 1\left(1 + \frac{0{,}18}{12}\right)^{12} = 1(1{,}05)^{12} = 1(1{,}1956182)$$

$$M = \$\ 1{,}1956182$$

A una tasa de interés efectiva del 19,56182%:

$$M = 1(1 + 0{,}1956182) = 1(1{,}1956182)$$
$$M = \$\ 1{,}1956182$$

En este ejemplo se puede apreciar que la tasa nominal, 18% anual capitalizable mensualmente, es equivalente a la tasa efectiva del 19,56182%, puesto que las dos producen el mismo resultado.

[6] F. Ayres Jr., ob. cit., p. 65.
[7] J. H. Moore, ob. cit., p. 92.

Fórmula de equivalencia tasa nominal/tasa efectiva

El monto de \$ 1, a la tasa i en un año, es:

$$i\,(1 + i) = 1 + i = M$$

El monto de \$ 1, a la tasa j con m capitalizaciones en el año, es:

$$M = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

Considerando que los dos montos son iguales, se puede plantear la identidad

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

Fórmula 5.4. Fórmula de la ecuación de equivalencia.

que es la ecuación de equivalencia, que relaciona una tasa efectiva con una tasa nominal capitalizable varias veces en el año y viceversa, con tasas de interés vencidas.

Tasas equivalentes son aquellas tasas que, con diferentes períodos de capitalización, producen el mismo interés compuesto.

Así, para conocer a qué tasa efectiva de interés equivale una tasa nominal del 18% anual capitalizable trimestralmente, se realiza el siguiente cálculo:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

En este caso:

$i = ?$ $\quad j = 18\%$ $\quad m = 4$

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{0{,}18}{4}\right)^4$$

$$(1 + i) = (1 + 0{,}045)^4$$

$$(1 + i) = (1{,}045)^4$$

$$(1 + i) = 1{,}1925186$$

$$i = 1{,}1925186 - 1 = 0{,}1925186$$

$$i = 19{,}25186\%$$

También se puede plantear el problema inverso: ¿A qué tasa nominal capitalizable trimestralmente es equivalente una tasa efectiva del 19,25186%?

Para la solución de este problema utilizamos la ecuación de equivalencia:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

y reemplazamos

$$(1 + 0{,}1925186) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

$$(1{,}1925186) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

Para encontrar la respuesta pueden emplearse dos métodos: exponentes o radicales y logaritmos.

Por exponentes o radicales

Elevamos ambos miembros a la misma potencia y la igualdad no se altera.

$$(1{,}192518)^{1/4} = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4/4}$$

$$1{,}045 = 1 + \frac{j}{4}$$

$$1{,}045 - 1 = \frac{j}{4}$$

$$0{,}045 = \frac{j}{4}$$

$$4\,(0{,}045) = j$$

$j = 0{,}18$ $\quad$ $j = 18\%$ anual, capitalizable trimestralmente.

Por logaritmos

$$\log\,(1{,}192518) = \log\left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

$$0{,}076465 = 4 \log\left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$\frac{0{,}076465}{4} = \log\left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$0{,}019116 = \log\left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$\text{antilog}\,(0{,}019116) = 1 + \frac{j}{4}$$

$$1{,}045 = 1 + \frac{j}{4}$$

$$1{,}045 - 1 = \frac{j}{4}$$

$$0{,}045 = \frac{j}{4}$$

$$0{,}045(4) = j$$

$$j = 0{,}18 \qquad j = 18\%$$

Se obtiene la misma respuesta: $j = 18\%$ anual, capitalizable trimestralmente.

Ejemplo

Para conocer, entonces, a qué tasa nominal, capitalizable semestralmente, es equivalente la tasa efectiva del 8%, se realiza el siguiente procedimiento:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

Por exponentes o radicales

$$1 + 0{,}08 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^2$$

en razón de que la capitalización es semestral

$$1{,}08 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^2$$

$$(1{,}08)^{1/2} = \left[\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

(se elevan ambos miembros a la potencia 1/2)

$$1{,}03923 = 1 + \frac{j}{2}$$

$$1{,}03923 - 1 = \frac{j}{2}$$

$$0{,}03923 = \frac{j}{2}$$

$$2(0{,}03923) = j$$

$$0{,}07846 = j$$

$j = 7{,}846\%$ anual, capitalizable semestralmente.

Por logaritmos

$$\log(1{,}08) = \log\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2$$

$$0{,}03342376 = 2\log\left(1 + \frac{j}{2}\right)$$

$$\frac{0{,}03342376}{2} = \log\left(1 + \frac{j}{2}\right)$$

$$0{,}01671188 = \log\left(1 + \frac{j}{2}\right)$$

$$\text{antilog}\,(0{,}01671188) = 1 + \frac{j}{2}$$

$$1{,}03923 = 1 + \frac{j}{2}$$

$$1{,}03923 - 1 = \frac{j}{2}$$

$$0{,}03923 = \frac{j}{2}$$

$$0{,}03923(2) = j$$

$j = 0{,}07846$ $\quad$ $j = 7{,}846\%$ anual, capitalizable semestralmente.

Como puede notarse, al comparar la misma tasa de interés, la tasa efectiva es mayor cuando se capitaliza más de una vez en el año.

$$8\% > 7{,}846\%$$

También puede plantearse el problema inverso: ¿A qué tasa efectiva es equivalente la tasa nominal del 7,846% capitalizable semestralmente?

$$(1 + i) = \ 1 + \frac{j}{m}^{\ m}$$

$$(1 + i) = \ 1 + \frac{0{,}07846}{2}^{\ 2}$$

$$1 + i = (1 + 0{,}03923)^2$$

$$i = 1{,}08 - 1$$

$$i = 0{,}08$$

$$i = 8\%$$

Esta relación también puede demostrarse en forma práctica.

Ejemplo

Calculemos el monto y el interés compuesto que producirá un capital de \$ 200.000 durante 5 años y 9 meses si es colocado: a) a una tasa del 16% efectiva y b) a una tasa del 15,4065923% anual con capitalización semestral.

a. $M = 200.000(1 + 0{,}16)^{5{,}75} = \$\ 469.530{,}09$

$I = 469.530{,}09 - 200.000 = \$\ 269.530{,}09$

b. $M = 200.000\left(1 + \dfrac{0{,}154065923}{2}\right)^{11{,}5} = \$\ 469.530{,}09$

$I = \$\ 269.530{,}09$

Fórmulas para tasas equivalentes con capitalización continua

Se tiene que diferenciar si son tasas para calcular el Monto o para el Valor Actual.

a) Para el Monto:

$1 + i_c = e^i$ $\qquad$ $i_c = e^i - 1$

Ejemplo

¿A qué tasa efectiva es equivalente una tasa del 6% anual con capitalización continua, en una serie de depósitos?

$i_c = e^{0{,}06} - 1 = 0{,}061836546545$

$i_c = 6{,}1836546545\%$

¿A qué tasa anual con capitalización continua es equivalente una tasa efectiva del 6,1836546545%?

$0{,}061836546545 = e^i - 1$

$1{,}061836546545 = e^i$

$\ln 1{,}061836546545 = i \ln e \qquad 0{,}06 = i \qquad i = 6\%$

Ejemplo

¿ A qué tasa anual con capitalización mensual es equivalente una tasa del 9% anual con capitalización continua?

$\left(1 + \dfrac{j}{12}\right)^{12} = e^{0{,}09} \qquad \left(1+ \dfrac{j}{12}\right)^{12} = 1{,}09417428$

Se saca la raíz 12 de los dos miembros

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=1{,}00752819$$

j = 9,033834 % anual capitalizable mensualmente

b) Para el valor actual, se puede comparar cualquier tipo de capitalización

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=e^{i}$$

o también

$$i_c = 1 - e^{-i}$$

Ejemplo

¿A que tasa anual capitalizable mensualmente es equivalente una tasa del 6% anual con capitalización continua, en una serie de pagos?

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=e^{0{,}06} \qquad \left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=1{,}061836547$$

$$j = 0{,}06015025 \qquad j = 6{,}015025\ \%$$

¿A que tasa anual con capitalización continua, en una serie de pagos, es equivalente una tasa del 6,015025 % anual capitalizable mensualmente?

$$\ln\left(1+\frac{0{,}06015025}{12}\right)^{12}=\ln e^{i}$$

$$\ln 1{,}061836546 = i \ln e$$

$$0{,}06 = i \qquad i = 6\%$$

Ejemplo

En una serie de pagos, ¿a que tasa de interés anual capitalizable mensualmente es equivalente una tasa de interés del = 9% anual con capitalización continua?

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=e^{0{,}09}$$

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=1{,}094174284$$

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}=1{,}007528195$$

$j = 0{,}090338345$ $\qquad$ j = 9,0338345% anual capitalizable mensualmente

Alternativas de inversión, comparando tasas de interés

Cuando se requiere invertir determinado capital en el mercado financiero, es frecuente encontrar tasas de interés con diferentes tipos de capitalización, por lo que necesitamos analizar en forma matemática cuál es la mejor alternativa, utilizando la ecuación de equivalencia (fórmula 5.4).

Ejemplo

Una empresa desea invertir $ 6.000 durante dos años y tiene las siguientes opciones: a) una tasa del interés del 4,14% efectiva; b) una tasa de interés del 4,1% anual, capitalizable semestralmente; c) una tasa de interés del 4% anual, capitalizable trimestralmente; d) una tasa de interés del 3,9% anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál opción le conviene y cuál le produce mayor interés?

Este problema se puede solucionar de dos formas: *analíticamente*, utilizando la ecuación de equivalencia, o *prácticamente,* utilizando la fórmula del monto con interés compuesto.

Solución analítica

Se compara la tasa efectiva del 4,14% con las demás.

Con tasa de interés del 4,1% anual, capitalizable semestralmente:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}041}{2}\right)^2$$

$i = 1{,}04142025 - 1$

$i = 0{,}4142$

$i = 4{,}142\%$

Con la tasa de interés del 4% anual, capitalizable trimestralmente:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}4}{4}\right)^4$$

$i = 1{,}04060 - 1$

$i = 0{,}04060$

$i = 4{,}06\%$

Con la tasa de interés del 3,9% anual, capitalizable mensualmente:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}39}{12}\right)^{12}$$

$i = 1{,}039703 - 1$

$i = 0{,}0397$

$i = 3{,}97\%$

La mejor oferta es la segunda, $i = 4{,}1\%$ anual, capitalizable trimestralmente, que da una tasa efectiva del 4,142%.

Solución práctica
Se calcula con los datos de capital, tiempo y tasa de interés.
Con tasa efectiva del 4,14%:

$$M = 6.000(1 + 0{,}0414)^2 = \$\ 6.507{,}08$$

Con tasa del 4,1% anual, capitalizable semestralmente:

$$M = 6.000\left(1 + \frac{0{,}041}{2}\right)^4 = \$\ 6.507{,}33$$

Con tasa del 4% anual, capitalizable trimestralmente:

$$M = 6.000\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^8 = \$\ 6.497{,}14$$

Con tasa del 3,9% anual, capitalizable mensualmente:

$$M = 6.000\left(1 + \frac{0{,}039}{12}\right)^{24} = \$\ 6.485{,}91$$

La mejor oferta es la segunda, con un monto de $ 6.507,33. La respuesta hallada por la forma analítica siempre debe coincidir con la encontrada por la forma práctica, como se vio en el ejemplo.

Ejemplo

Una empresa desea invertir $ 18.000 durante dos años y tiene las siguientes opciones: a) una tasa de interés del 9% efectiva; b) una tasa de interés del 8 3/4% anual capitalizable semestralmente; c) una tasa de interés del 8 7/8% anual capitalizable trimestralmente y d) una tasa de interés del 8 13/16% anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál opción produce mayor monto e interés? Resolvamos el proceso en forma analítica y en forma práctica.

Solución analítica

a) $i = 9\%$

b) $$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0875}{2}\right)^2$$

$i = 8{,}94140625\%$ efectiva, anual

c) $$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}08875}{4}\right)^4$$

$i = 9{,}174764359\%$ efectiva, anual

d) $$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}088125}{12}\right)^{12}$$

$i = 9{,}1773$ efectiva, anual

La mejor oferta es la cuarta: i = 8 13/16% anual, capitalizable mensualmente, que da una tasa efectiva del 9,1773%.

Solución práctica

a. $M = 18.000(1 + 0{,}09)^2 = \$\ 21.385{,}80$

$I = 21.385{,}80 - 18.000 = \$\ 3.385{,}80$

b. $M = 18.000\left(1 + \frac{0{,}0875}{2}\right)^4 = \$\ 21.362{,}82$

$I = 21.362{,}82 - 18.000 = \$\ 3.362{,}82$

c. $M = 18.000\left(1 + \frac{0{,}08875}{4}\right)^8 = \$\ 21.454{,}44$

$I = 21.454{,}44 - 18.000 = \$\ 3.454{,}44$

d. $M = 18.000\left(1 + \frac{0{,}088125}{12}\right)^{24} = \$\ 21.455{,}43$

$I = 21.454{,}43 - 18.000 = \$\ 3.455{,}43$

La mejor oferta es la cuarta con un monto de \$ 21.455,43 y un interés de \$ 3.455,43; esta respuesta coincide con la respuesta de la forma analítica.

Se puede utilizar la ecuación de equivalencia cuando nos enfrentamos con problemas que tienen tasas con diferentes tipos de capitalización.

Ejemplo

¿A qué tasa anual, capitalizable semestralmente, es equivalente una tasa del 15% anual, capitalizable trimestralmente?

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{0{,}15}{4}\right)^4$$

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right) = \left(1 + \frac{0{,}15}{4}\right)^1$$

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right) = (1{,}0375)^2$$

$$\frac{j}{2} = 1{,}07649625 - 1$$

$j = 0{,}1528125$ $\quad j = 15{,}28125\%$ anual, capitalizable semestralmente

El ejemplo que sigue presenta el problema inverso.

Ejemplo

¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, es equivalente una tasa del 15,28125% anual, capitalizable semestralmente?

$$\left(1 + \frac{0,1528125}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

$$(1,07649625)^2 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

$$(1,07649625)^{2/4} = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4/4}$$

$$1,0375 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$0,0375 = \frac{j}{4}$$

$j = 0,15$ $\qquad$ $j = 15\%$ anual, capitalizable trimestralmente

Tasa de interés anticipada

La *tasa de interés anticipada* es aquella que permite pagar o cobrar los intereses por adelantado; para la aplicación se utiliza la siguiente fórmula (para demostrarla se recurre a la ecuación de equivalencia [fórmula 5.4] y al descuento bancario):

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

Conociendo que j es una tasa de interés anticipada, puede establecerse que

$$j = \frac{d}{1 - d}$$

Entonces; $\qquad j = \dfrac{\dfrac{d}{m}}{1 - \dfrac{d}{m}}$

Llevando este criterio a la ecuación de equivalencia, se tiene:

$$1 + i = \left[1 + \frac{\dfrac{d}{m}}{1 - \dfrac{d}{m}}\right]^m$$

Simplificando,

$$1 + i = \left(\frac{1 - \frac{d}{m} + \frac{d}{m}}{1 - \frac{d}{m}} \right)^m$$

$$1 + i = \left(\frac{1}{1 - \frac{d}{m}} \right)^m$$

$$1 + i = \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^m}$$

$1 + i = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{-m}$	**Fórmula 5.5.** Fórmula de equivalencia con tasas de interés anticipadas.

¿A qué tasa de interés efectiva anticipada es equivalente una tasa anticipada del 9% anual, capitalizable cuatrimestralmente?

$$m = \frac{360}{120} = 3$$

$$1 + i = \left(1 - \frac{0{,}09}{3}\right)^{-3}$$

$i = 1{,}0956827 - 1$
$i = 0{,}0956827$
$i = 9{,}56827\%$

También puede plantearse el problema inverso.

¿A qué tasa de interés anticipada anual, capitalizable cuatrimestralmente, es equivalente una tasa efectiva anticipada del 9,56827%?

$$1 + 0{,}0956827 = \left(1 - \frac{j}{3}\right)^{-3}$$

$$(1{,}0956827)^{-1/3} = \left[\left(1 - \frac{j}{3}\right)^{-3}\right]^{-1/3}$$

$$0{,}097 = 1 - \frac{j}{3}$$

$$1 - 097 \;= \frac{j}{3}$$

$(0{,}03)3 = j$
$0{,}09 = j$
j = 9% anual, capitalizable cuatrimestralmente, anticipada

La diferencia entre la tasa de interés vencida y anticipada puede apreciarse en la siguiente tabla:

	Número de meses anticipados							Número de meses vencidos					
Interés anual	12	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
3%	3.093	3.069	3.065	3.061	3.057	3.053	3.049	3.042	3.038	3.034	3.031	3.026	3.023
42%	72.410	60.230	58.690	57.220	55.850	54.460	53.350	51.110	50.070	49.090	48.150	47.260	46.410
6%	6.383	6.281	6.265	6.248	6.232	6.216	6.200	6.170	6.152	6.136	6.121	6.105	6.090
45%	81.820	66.490	64.600	63.830	61.190	59.640	58.190	55.550	54.330	53.180	52.090	51.050	50.060
9%	9.890	9.646	9.607	9.568	9.530	9.492	9.454	9.380	9.344	9.038	9.273	9.237	9.203
48%	92.310	73.130	70.840	68.720	66.750	64.620	63.210	60.100	58.690	57.350	56.090	54.890	53.760

Tabla 5.4. *Tabla comparativa entre la tasa de interés anticipada y la tasa de interés vencida*

Cálculo de la tasa de interés

La tasa efectiva o nominal puede calcularse partiendo de la fórmula del monto a interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^{n} \; ; \; M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^{n}$$

Para despejar i, se presentan tres alternativas:

- Utilización de *logaritmos:*

$$\log \frac{M}{C} = \log (1 + i)^{n}$$

$$\log \frac{M}{C} = n\log (1 + i)$$

$$\frac{\log \frac{M}{C}}{n} = \log(1+i)$$

- Otro método es utilizando exponentes o radicales.

$$\frac{M}{C} = (1+i)^n$$

Se elevan ambos miembros a la potencia 1/n

$$\left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} = [(1+i)^n]^{1/n}$$

y se simplifica el exponente en el segundo miembro

$$\left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} = 1+i$$

$$\left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1 = i$$

- Un tercer método es la *interpolación de tablas,* que se realiza en forma similar a la interpolación logarítmica. Sin embargo, este método casi no se utiliza porque no se encuentran tablas fácilmente para determinados tipos de interés.

$$\frac{M}{C} = (1+i)^n$$

Se busca en las tablas, para un determinado período, la cantidad que se aproxima al cociente M/C. Si no se encuentra exactamente se procede a interpolar.

¿A qué tasa efectiva se convertirá un capital de \$ 30.000 en un monto de \$ 45.000, en 6 años?

$$M = C(1+i)^n$$

$$\frac{M}{C} = (1+i)^n$$

$$\frac{45.000}{30.000} = (1+i)^6$$

$$1{,}5 = (1+i)^6$$

Por logaritmos

$$\log 1{,}5 = \log(1+i)^6$$
$$\log 1{,}5 = 6\log(1+i)$$

$$\frac{0{,}176091}{6} = \log(1+i)$$

$0{,}029348 = \log(1+i)$
antilog $0{,}029348 = 1 + i$
$1{,}069913 = 1 + i$
$0{,}069913 = i$
$i = 6{,}99132\%$

Por exponentes

$1{,}5 = (1+i)^6$
$(1{,}5)^{1/6} = (1+i)^{6/6}$
$(1{,}5)^{0{,}1666} = 1 + i$
$1{,}069913 = 1 + i$
$i = 6{,}99132\%$

Por interpolación de tablas

$1{,}5 = (1+i)^6$

Se busca en tablas de $(1+i)^n$ cuando $n = 6$

7%	1,50073035	1,50000000
6,50%	1,45914230	1,45914230
0,50%	0,04158805	0,04085770

Tabla 5.4. *Tabla para la interpolación del ejercicio anterior*

Se plantea una regla de tres simple, comparando la diferencia tabular de 0,041588 con la diferencia entre la cantidad dada y la menor en la tabla, que corresponde a 0,040857.

0,005 ——— 0,041588
x ——— 0,040857

x = 0,00412

Se suma este resultado al menor

0,065000
0,004912
0,069912

y se obtiene
$i = 0{,}069912$
$i = 6{,}9912\%$, aproximadamente

¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, un capital de $ 40.000 se convertirá en 3/4 veces más en 5 años?

$$M = C + I$$
$$C = \$\ 40.000$$

$$M = 40.000 + \frac{3}{4}(400.000) = \$\ 70.000$$

$$t = 5\ ;\ m = 4\ ;\ m.t = 20$$
$$\frac{M}{C} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$\frac{70.000}{40.000} = \left(1 + \frac{j}{40}\right)^{20}$$

$$(1{,}75)^{1/20} = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^{20/20}$$

$$(1{,}75)^{1/20} = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$1{,}028376 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

$$(0{,}028376)4 = j$$
$$0{,}113504 = j$$
$j = 11{,}3504\%$ anual, capitalizable trimestralmente

¿A qué tasa efectiva es equivalente la tasa del 11,35037% anual, capitalizable trimestralmente?

$$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}113504}{4}\right)^{4}$$

$$1 + i = (1 + 0{,}028376)^4$$
$$1 + i = (1{,}028376)^4$$
$$1 + i = 1{,}118427$$
$$i = 0{,}118427$$
$i = 11{,}8427\%$ efectiva

Cálculo del tiempo en interés compuesto

Para calcular el tiempo, se debe hallar primero *n*, por lo cual se aplica la fórmula del monto:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

Para hallar n existen dos alternativas:

- *Por logaritmos*, utilizando calculadoras electrónicas o tablas logarítmicas:

$$\log \frac{M}{C} = \log (1 + i)^n$$

$$\log \frac{M}{C} = n \log (1 + i)$$

$$\frac{\log \frac{M}{C}}{\log (1 + i)} = n$$

No se requiere hallar el antilogaritmo, pues a n no le afecta la palabra logaritmo.

- *Por interpolación de tablas*, con la restricción mencionada, de que a veces no hay tablas para todo tipo de interés.

Ejemplo

¿En qué tiempo, expresado en años, meses y días, un capital de $ 1.000 se convertirá en $ 1.500 a una tasa de interés del 18% efectiva?

$M = 1.500$
$C = 1.000$
$i = 18\%$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n; \quad \frac{1.500}{1.000} = (1 + 0{,}18)^n$$

$$1{,}5 = (1{,}18)^n$$

$$\log 1{,}5 = n \log (1{,}18)$$

$$\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}18} = n$$

$$\frac{0{,}176091}{0{,}071882} = n$$

$n = 2{,}449726$ años

Para calcular el tiempo en años, meses y días se plantea una regla de tres considerando el año comercial:

1 año	———	360 días
0,449726	———	x días

$$x = \frac{(0{,}449726)\ (360)}{1}$$

x = 161,90 días = 5 meses y 12 días

Tiempo = 2 años, 5 meses y 12 días

Ejemplo

¿En qué tiempo, expresado en años, meses y días, se duplicará un capital de $ 800, a una tasa de interés del 16%, capitalizable semestralmente?

M = 800 (2) = $ 1.600

C = $ 800

$$j = \frac{0{,}16}{2} = 0{,}08$$

$$\frac{M}{C} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$\frac{1.600}{800} = \left(1 + \frac{0{,}16}{2}\right)^{2.t}$$

$$2 = (1{,}08)^{2.t}$$

$$\log 2 = 2\ t \log (1{,}08)$$

$$\frac{\log 2}{\log (1{,}08)} = 2t$$

$$\frac{0{,}301030}{0{,}033423} = 2t$$

$$\frac{9{,}006468}{2} = t$$

t (años) = 4,503234

1 año	———	360 días
0,503234	———	x

x = 181,164 días

tiempo = 4 años, 6 meses y día, aproximadamente

Ejemplo

¿En qué tiempo un capital de $ 2.500 se convertirá en $ 5.625 a una tasa de interés del 24% anual, capitalizable mensualmente?

M = $ 5.625
C = $ 2.500
j = 0,24

$$\frac{M}{C} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$\frac{5.625}{2.500} = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12.\,t}$$

$2,25 = (1 + 0,02)^{12.\,t}$

Por logaritmos

$\log 2,25 = 12\, t \log (1,02)$

$$\log \frac{2,25}{1,02} = 12t$$

$$\frac{0,352182}{0,008600} = 12t$$

$40,950977 = 12t$ (meses)

$$\frac{40,950977}{12} = t \text{ (años)}$$

$3,412501 = t$ (años)

1	———	360 días
0,412501	———	x días

x = 148,5 días
Tiempo = 3 años, 4 meses y 28,5 días

Por tablas
Utilizando tablas de $(1 + i)^n$, se busca el valor correspondiente a 2,25.

Para i = 2%
cuando n = 41, valor en tablas, 2,252200
cuando n = 40, valor en tablas: –2,208039
0,044160

2,250000 (restamos del menor)
–2,208039
diferencia: 0,041960
Se aplica la regla de tres:

1 período	———	0,044160
x	———	0,041960

x = 0,950107

Luego se suma a $n = 40$

$$12n = (40 + 0{,}950170) = 40{,}950170 \text{ (meses)}$$

$$n = \frac{40{,}950170}{12} = 3{,}412514 \text{ (años)}$$

1	———	360 días
0,412514	———	x

x = 148,51 días
Tiempo = 3 años, 4 meses y 28,5 días

El valor actual a interés compuesto o cálculo del capital

El valor actual a interés compuesto es el valor de un documento, bien o deuda, antes de la fecha de su vencimiento, considerando determinada tasa de interés.
Por ejemplo, las siguientes preguntas, y otras similares, se pueden responder mediante el cálculo del valor actual: ¿Cuánto vale hoy una deuda de $ 1.000.000 que vencerá en 5 años? y ¿en cuánto se puede vender un documento de $ 5.000 que vence en 4 años?
"La expresión valor actual significa el valor de un pago futuro en una fecha determinada antes del vencimiento."[8]
"Valor actual, valor en el momento presente de los beneficios o de los costos del futuro, actualizados al costo de oportunidad o de sustitución del capital."[9]

Para el efecto, se considera la fórmula del monto a interés compuesto:

$M = C(1 + i)^n$, de donde se despeja C:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$C = M(1 + i)^{-n}$	**Fórmula 5.6.** Fórmula del valor actual a interés compuesto.

También se conoce que $M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m.t}$. Entonces:

$C = M\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m.t}$	**Fórmula 5.7.** Fórmula del valor actual a interés compuesto en función de *m* y *t*.

Para capitalizaciones continuas:

$C = Me^{-j.t}$ $(e = 2{,}718281)$	**Fórmula 5.7a.** Fórmula del valor actual con capitalización continua.

[8] J. H. Moore, ob. cit., p. 124.
[9] N. Dávalos Arcentales, *Enciclopedia Básica de Administración, Contabilidad y Auditoría*, Quito, 1981, p. 519.

Gráficamente, se puede ubicar el valor actual:

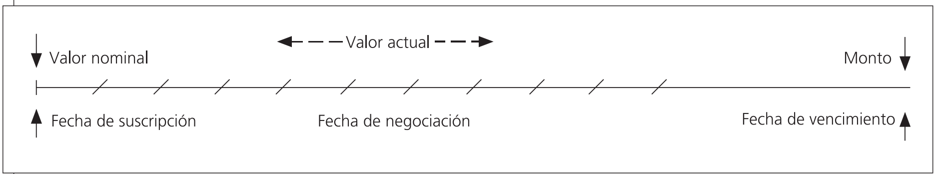


Gráfico 5.3. Expresión gráfica del valor actual en interés compuesto

El valor actual puede calcularse en cualquier fecha comprendida entre la fecha de suscripción y la fecha de vencimiento, según las condiciones en que se establezca el cálculo. Puede haber dos casos generales: *cuando el documento no gana interés y el valor nominal coincide con el monto, o cuando el documento gana interés y se requiere calcular el monto.*

Ejemplo

¿Cuál será el valor actual de un pagaré cuyo valor al vencimiento, al final de 4 años, es de $ 3.500, considerando una tasa de interés del 12% anual capitalizable semestralmente? (Éste es un ejemplo típico del primer caso.)

M = $ 3.500; j = 0,12; t = 4; m = 2

$$C = M\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m.t}$$

$$C = 3.500\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{-2(4)}$$

$$C = 3.500\ (1,06)^{-8}$$
$$C = 3.500\ (0,627412)$$
$$C = \$\ 2.195,94$$

Entonces, el valor actual es de $ 2.195,94

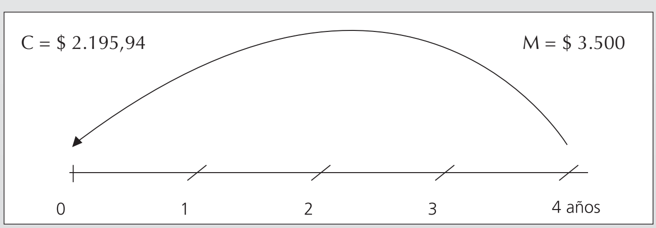


Gráfico 5.4. Solución gráfica del ejemplo

Ejemplo

¿Cuál es el valor actual de un documento cuyo calor nominal es de $ 5.000 a 6 años de plazo con el 4% de interés anual, capitalizable semestralmente, desde su suscripción, si se vende dos años antes de la fecha de vencimiento, considerando una tasa del 5% anual, capitalizable semestralmente¿ (Éste es un ejemplo típico del segundo caso.)
Se elabora un gráfico de tiempos y valores:

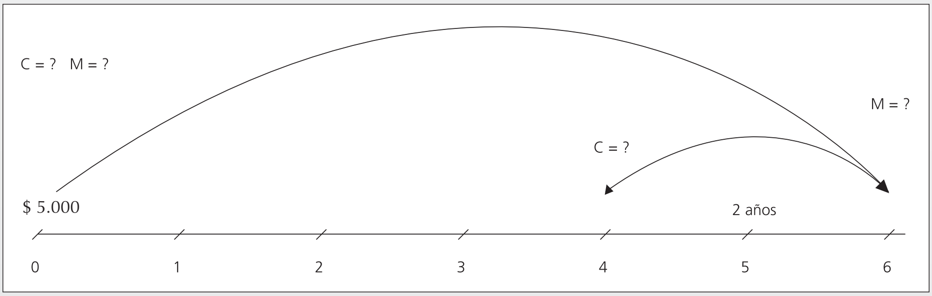


Gráfico 5.5. Solución gráfica del ejemplo

Se calcula el monto a los 6 años:

$$M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$M = 5.000\left(1 + \frac{0{,}04}{2}\right)^{2(6)}$$

$$M = 5.000(1{,}02)^{12}$$
$$M = 5.000(1{,}268241)$$
$$M = \$\ 6.341{,}20$$

Se calcula el valor actual 2 años antes del vencimiento:

$$C = M\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m.t}$$

$$C = 6.341{,}20\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{-2(2)}$$

$$C = 6.341{,}20\ (1{,}025)^{-4}$$
$$C = 6.341{,}20\ (0{,}905950)$$
$$C = \$\ 5.747{,}81$$

Valor actual = $ 5.744,81

Precio de un documento

En el segundo caso pueden darse, a su vez, tres situaciones diferentes respecto a la compra/venta de un documento: cuando se *negocia a la par*: la tasa de negociación es la misma que la nominal y el precio se mantiene sin variaciones; cuando se *negocia con premio*: la tasa de negociación es menor que la nominal y el precio sube; cuando se *negocia con castigo*: la tasa de negociación es mayor que la nominal y el precio baja.

Veamos:
Después de 2 años de la fecha de suscripción se negocia un documento de \$ 3.000 con vencimiento en 5 años y una tasa de interés del 2,1% anual, capitalizable semestralmente desde la suscripción. Calculemos su valor actual o precio en las siguientes alternativas: a) con una tasa del 1,8% anual, capitalizable trimestralmente; b) con una tasa del 2,1% anual, capitalizable semestralmente, y c) con una tasa del 2,4% efectiva.
Se traza el gráfico de tiempos y valores:

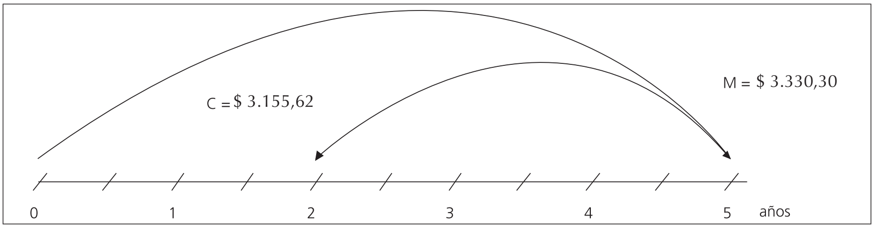


Gráfico 5.6. Solución gráfica del ejemplo

Se calcula el monto:

$$M = 3.000(1 + 0,0105)^{10} = \$\ 3.330,30825$$

Se halla el valor actual o precio de negociación:

a) Respecto de la primera alternativa, *i* = 1,8% anual, capitalizando trimestralmente:

$$C = 3.330,30825\ (1 + 0,045)^{-12}$$

C = \$ 3.155,62. Ésta es una *negociación con premio*.

b) En relación con la segunda alternativa, *i* = 2,1% anual, capitalizando semestralmente:

$$C = 3.330,30825(1 + 0,105)^{-6}$$

C = \$ 3127,99. Ésta es una *negociación a la par*, pues la tasa de negociación es igual a la nominal; además, se puede comprobar calculando el monto desde la fecha de suscripción hasta la de negociación.

$$M = 3.000(1 + 0,0105)^{4} = \$\ 3.127,99$$

c) Respecto de la tercera alternativa, i = 2,4% efectiva:

$$C = 3.330{,}30825(1 + 0{,}024)^{-3}$$

C = \$ 3.101,59. Ésta es una *negociación con castigo*; el precio más bajo de los tres.

Valor actual con tiempo fraccionario

El valor actual, al igual que el monto a interés compuesto, también puede calcularse con períodos de capitalización no enteros, es decir, fraccionarios.
Para el cálculo existen dos alternativas:

• *En forma matemática o exacta*, utilizando únicamente interés compuesto:

$$C = M(1+ i)^{-n}$$

• *En forma práctica o comercial*, utilizando interés compuesto para la parte entera e interés simple para la parte fraccionaria:

$$C = M(1+ i)^{-n} (1 + it)^{-1}\ *$$

Entonces:
El valor de un documento al final de 7 años será de \$ 3.400. Queremos calcular su valor actual, luego de transcurridos 3 años y 4 meses de la fecha de suscripción, considerando una tasa de interés del 14%, capitalizable semestralmente. Utilicemos la forma matemática y la comercial.

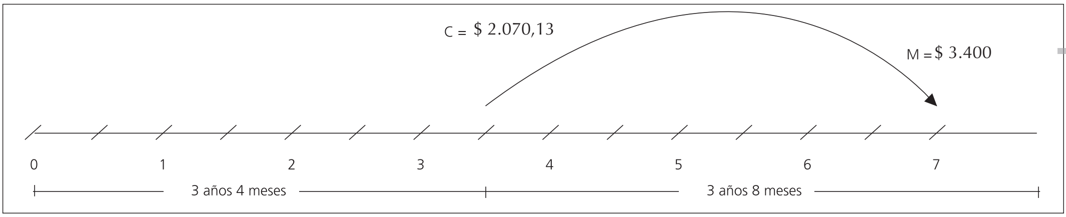


Gráfico 5.7. Solución gráfica, matemática, del ejemplo

$$M = \$\ 3.400$$

$$\frac{j}{2} = \frac{0{,}14}{2} = 0{,}07$$

Por la forma matemática

$$C = M(1 + j)^{-n}$$

$$n = \frac{(7)(12) - [(3)(12) + 4]}{6}$$

* Con interés simple: $C = \dfrac{M}{(1 + it)}$

$$n = \frac{84 - 40}{6} = \frac{44}{6} = 7 + \frac{2}{6}$$

O también:

$$n = \frac{(3)(12) + 8}{6} = \frac{44}{6} = 7{,}3333$$

$$C = 3.400\left(1 + \frac{0{,}14}{2}\right)^{-n}$$

Se convierte el tiempo en meses y se divide entre el número de meses que tiene el período de capitalización.

$$C = 3.400(1 + 0{,}07)^{-(7)2/6}$$
$$C = 3.400(1{,}07)^{-7{,}3333}$$
$$C = 3.400(0{,}608862)$$
$$C = \$\ 2.070{,}13 \text{ (valor actual por la forma matemática)}$$

Por la forma práctica o comercial

$$C = M(1 + i)^{-n}\ (1 + it)^{-1}$$

$$n = \frac{(3)(12) + 8}{6} = \frac{44}{6} = \frac{42}{6} + \frac{2}{6} = 7 + \frac{2}{6}$$

(7 la parte entera y 2/6 la parte fraccionaria)

Entonces:

$$C = 3.400\left(1 + \frac{0{,}14}{2}\right)^{-7}\left(1 + 0{,}14\,\frac{2}{12}\right)^{-1}$$

En interés simple, si se toma la tasa anual, se divide el número de meses por 12:

$$C = 3.400(1 + 0{,}07)^{-7}\left(1 + 0{,}7\left(\frac{2}{6}\right)\right)^{-1}$$

Si tomamos la tasa semestral, el tiempo se divide por 6:

$$C = 3.400(0{,}622750\ )(1{,}023333)^{-1}$$
$$C = 3.400(0{,}622750)(0{,}977199)$$
$$C = \$\ 2.069.07$$

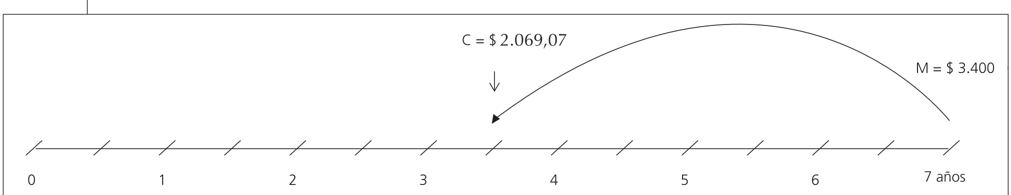


Gráfico 5.8. Solución gráfica, comercial, del ejemplo

Al comparar los dos resultados, se obtiene que por el método práctico el valor actual es menor; es decir, el documento tendría un valor mayor que por el método matemático.

Ejemplo

Luego de 3 años y 3 meses de la fecha de suscripción se negocia un documento suscrito el día de hoy por $ 2.800 a 6 años y 9 meses, con una tasa de interés del 12%, capitalizable semestralmente. Calculemos el valor actual a dicha fecha considerando una tasa de interés del 11 1/4% efectiva.

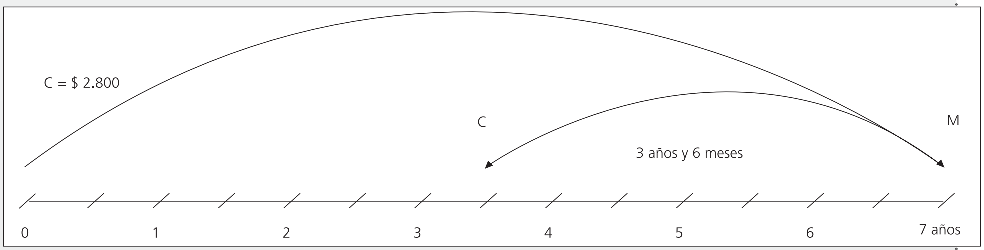


Gráfico 5.9. Solución gráfica del monto del ejemplo. Se calcula el monto al final de los 6 años y 9 meses:

$$n = \frac{(6)(12+9)}{6} = \frac{81}{6} = 13\,\frac{3}{6} = 13{,}5$$

$$M = 2.800\left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{13{,}5}$$

$$M = 2.800\ (2{,}195984)$$
$$M_1 = \$\ 6.148{,}76$$

Se calcula el monto por el método práctico o comercial:

$$M = 2.800\ (1{,}06)^{13}\left(1 + 0{,}12\ \frac{3}{12}\right)$$

$$M_2 = 2.800\ (2.132928)(1{,}03)$$
$$M_2 = \$\ 6.151{,}365$$

Con estos resultados, se calcula el valor actual a los 3 años y 3 meses, si la tasa de interés es del 11,25% efectiva.

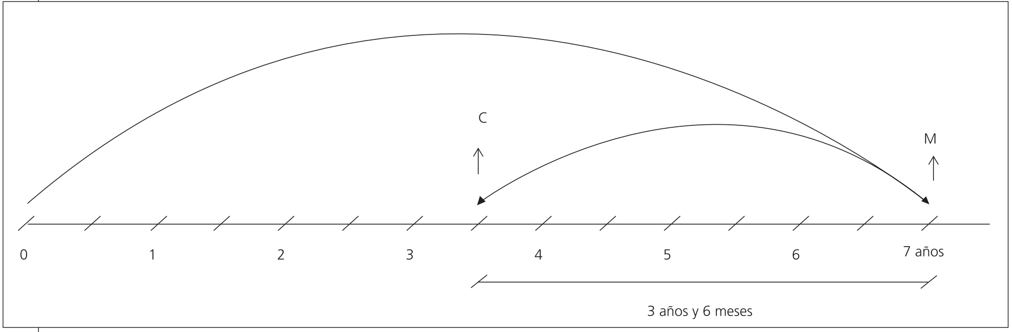


Gráfico 5.10. Solución gráfica del valor actual del ejemplo

El tiempo que falta para el vencimiento del documento es:

$$n = \frac{[6(12) + 9] - [3(12) + 3]}{6} = 3{,}5 \text{ años}$$

$$M_1 = \$\ 6.148{,}755$$
$$M_2 = \$\ 6.151{,}365$$

Se calcula el valor actual por el método matemático:

$$C_1 = 6.148{,}755(1 + 0{,}1125)^{-3{,}5}$$
$$C_1 = 6.148{,}755(0{,}688573)$$
$$C_1 = \$\ 4.233{,}87$$

Ahora, por el método práctico o comercial:

$$C_2 = 6.151{,}365(1 + 0{,}1125)^{-3}\left(1 + 0{,}1125\ \frac{6}{12}\right)^{-1}$$

$$C_2 = 6.151{,}365(1{,}1125)^{-3}(1{,}05625)^{-1}$$
$$C_2 = 6.151{,}365(0{,}726273)(0{,}946746)$$
$$C_2 = \$\ 4.229{,}65$$

Del análisis de los dos resultados:

$C_1 = \$\ 4.233{,}87$ (matemático)

$C_2 = \$\ 4.229{,}65$ (comercial)

Conclusión: El valor actual hallado mediante el método práctico es menor que el valor actual hallado mediante el método matemático.

Descuento compuesto

El descuento compuesto, al igual que el descuento simple, es la diferencia entre el monto y el valor actual de un documento, deuda, etcétera.
Puede calcularse de dos maneras: el más utilizado es el *descuento compuesto matemático*. Su fórmula se basa en el descuento simple:

$$Dc = M - C$$
$$Dc = M - M(1+ i)^{-n}$$

$$Dc = M[1 - (1+ i)^{-n}]$$ **Fórmula 5.8.** Fórmula del descuento compuesto matemático

$$Dc = M[1 - v]$$
$$v = (1 + i)^{-n}$$

La otra forma es el *descuento compuesto bancario,* que se calcula sobre el monto de la deuda; es decir, el monto menos el valor efectivo a interés compuesto. El valor efectivo a interés compuesto se expresa como *Cbc*. Se toma como base de deducción de la fórmula el valor efectivo a interés simple.

$$Cb = M(1 - dt)$$

Para interés compuesto, se tiene:

$$Cbc = M(1 - d)^n$$

Luego

$$Dbc = M - M[(i - d)^n]$$

$$Dbc = M[1 - (i - d)^n]$$ **Fórmula 5.9.** Fórmula del descuento compuesto bancario

Calculemos el descuento compuesto de un documento cuyo monto será de $ 9.000.000, luego de 10 años, si se descontó 3 años antes de su vencimiento a una tasa de interés del 15% efectiva.

$$Dc = M - C$$

Descuento compuesto matemático

$$Dc = M - M(1 + i)^{-n}$$
$$M = 9.000;\ i = 15\%;\ n = 3;\ Dc = M[1 - (1 + i)^{-n}]$$
$$Dc = 9.000 - 9.000(1 + 0{,}15)^{-3}$$
$$Dc = 9.000[1 - (1{,}15)^{-3}]$$
$$Dc = 9.000(1 - 0{,}657516)$$
$$Dc = 9.000(0{,}342484)$$
$$Dc = \$\ 3.082{,}35$$

Descuento compuesto bancario

$M = 9.000$; $d = 15\%$; $Dbc = M[1 - (1\text{-}d)^n]$
$Dbc = 9.000[1 - (1 - 0{,}15)^3]$
$Dbc = 9.000(1 - 0{,}614125)$
$Dbc = \$\ 3.472{,}875$

Como puede notarse, el descuento bancario compuesto es mayor, con una diferencia notable; por esto, casi no se utiliza.

Ecuaciones de valor en interés compuesto

Al igual que en interés simple, en interés compuesto también se utilizan las ecuaciones de valor cuando se requiere reemplazar un conjunto de obligaciones por otro conjunto de diferentes valores o capitales disponibles en diversos tiempos, tomando en consideración una fecha común, llamada también *fecha focal*.
Relacionando los valores y fechas con la fecha focal, se obtiene la *ecuación de valor*, que permite igualar el conjunto de obligaciones iniciales con el conjunto de nuevas obligaciones. La siguiente gráfica nos ayuda a explicar el procedimiento:

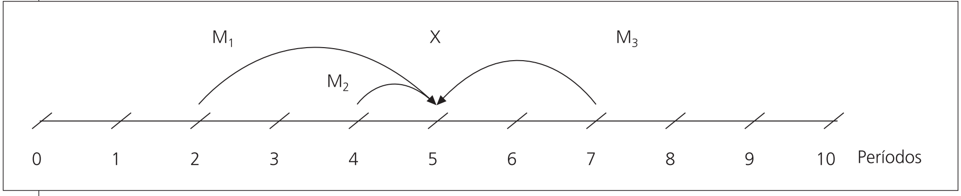


Gráfico 5.11. Expresión gráfica de la solución a un problema de ecuación de valor en interés compuesto

Sean M_1, M_2 y M_3 las obligaciones que vencen en los períodos dos, cuatro y siete, respectivamente, las cuales se quiere reemplazar por un solo valor al final del quinto período, con una tasa de interés (i) y una capitalización por período, siendo x el valor que reemplaza las tres obligaciones y al final del quinto período la fecha focal. Al relacionar ésta con las obligaciones, se puede plantear la ecuación de valor, de la siguiente manera:

$$S = M_1(1 + i)^3 + M_2(1 + i)^1 + M_3(1 + i)^{-2}$$

El primer valor (M_1) acumulará interés durante 3 períodos; el segundo valor (M_2) acumulará interés durante 1 período y el tercer valor (M_3) deberá calcularse como valor actual por –2 períodos.

Ejemplo

Una empresa tiene las siguiente obligaciones: $ 900 a 12 meses de plazo; $ 1.300 a 18 meses de plazo y $ 1.800 a 24 meses de plazo. Desea reemplazarlas por un solo pago el día de hoy, ¿cuál será el valor de ese pago, considerando una tasa de interés del 15% capitalizable semestralmente?

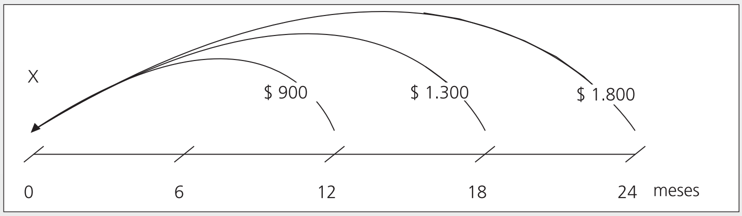


Gráfico 5.12. Solución gráfica del ejemplo

Para resolver el problema se toma como fecha focal el día de hoy, por ser la fecha en que pagará las deudas, y se asigna la letra x al valor de reemplazo. Todos los valores que hay que calcular serán valores actuales.

$$x = 900\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{-2} + 1.300\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{-3} + 1.800\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{-4}$$

$$x = 900(1{,}075)^{-2} + 1.300(1{,}075)^{-3} + 1.800(1{,}075)^{-4}$$
$$x = 900(0{,}86533) + 1.300(0{,}804960) + 1.800(0{,}748801)$$
$$x = 778{,}79700 + 1.046{,}448{,}74 + 1.347{,}840{,}95$$
$$x = \$\ 3.173{,}09$$

Si en el mismo problema la empresa consigue que sus acreedores le acepten consolidar sus tres deudas para cancelarlas al final de 24 meses, ¿cuál será el valor de este pago?

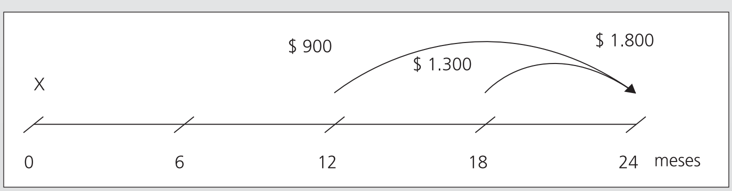


Gráfico 5.13. Segunda solución gráfica del ejemplo

Se toman 24 meses como fecha focal por ser la fecha de pago; los dos primeros valores serán montos por cuanto ganarán intereses por 2 y 1 períodos y el último no se altera:

$$x = 900(1 + 0{,}075)^{2} + 1.300(1 + 0{,}075)^{1} + 1.800$$
$$x = 900(1{,}155625) + 1.300(1{,}075) + 1.800$$

x = 1.040,06 + 1.397,50 + 1.800
x = $ 4.237,56

Como puede observarse, el resultado es mayor que el del primer problema puesto que se realiza el pago al final, en consecuencia, tiene que pagar más intereses.

Comparación de ofertas

En cualquier empresa o negocio, es frecuente tener que seleccionar la mejor oferta, en condiciones similares, tanto para comprar como para vender uno o más bienes o servicios. En este punto se estudiará cómo las ecuaciones de valor ayudan a seleccionar la oferta más alta para el vendedor o la más baja para el comprador, a largo plazo, tomando como fecha focal el tiempo cero.

Ejemplo

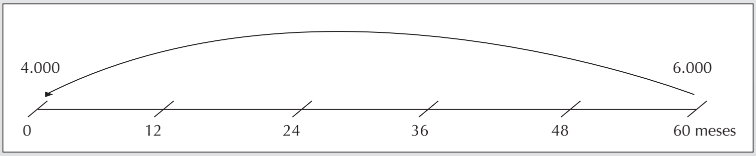
Una persona desea vender una propiedad y recibe 3 ofertas: a) $ 4.000,00 al contado y $ 6.000,00 a 5 años de plazo; b) $ 2.300,00 al contado, $ 4.000,00 a 3 años de plazo y $ 3.700,00 a 5 años de plazo; y c) $ 3.000,00 al contado, una letra de $ 5.000,00 a 30 meses y otra letra de $ 2.000,00 a 60 meses de plazo. ¿Cuál de las 3 ofertas le conviene aceptar, considerando que el rendimiento del dinero es del 12% anual, capitalizable trimestralmente?

$$i = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03$$ Fecha focal: tiempo cero

Primera oferta:

$$n = \frac{5(12)}{3} = 20$$

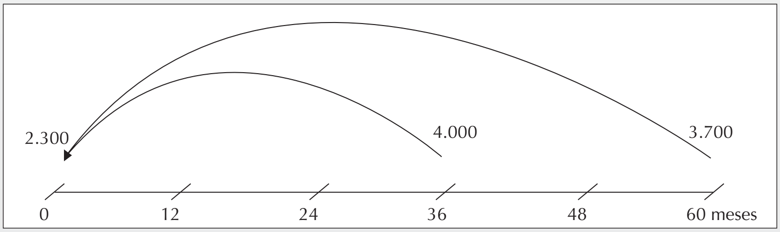
Se plantea el gráfico y la ecuación de valor, con el respectivo cálculo del valor actual:



$X_1 = 4.000{,}00 + 6.000{,}00(1 + 0{,}03)^{-20} = 4.000{,}00 + 3.322{,}05 = \$\ 7.322{,}05$

Segunda oferta: $n = 12$ $n = 20$

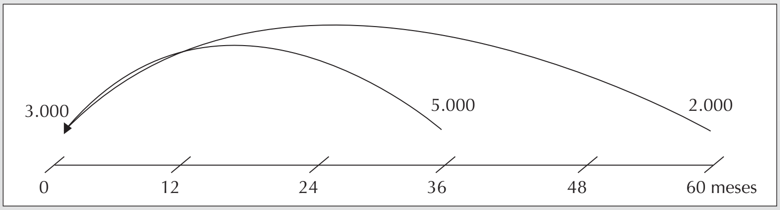
Se plantea el gráfico, la ecuación de valor y los cálculos de valor actual:



X_2 = 2.300,00 + 4.000,00$(1 + 0,03)^{-12}$ + 3.700,00 $(1 + 0,03)^{-20}$ =
X_2 = 2.300,00 + 2.805,52 + 2.048,60 = \$ 7.154,12

Tercera oferta:
$n = 10$ $n = 20$

Se plantea el gráfico, la ecuación de valor y los cálculos de valor actual respectivos:



X_3 = 3.000,00 + 5.000,00$(1 + 0,03)^{-10}$ + 2.000,00 $(1 + 0,03)^{-20}$ =
X_3 = 3.000,00 + 3.720,47 + 1.107,35 = \$ 7.827,82

La oferta más conveniente para el vendedor es la tercera, que es la más alta; y para el comprador la segunda, que es la más baja.

Reemplazo de las obligaciones por dos pagos iguales

Cuando se quiere reemplazar las obligaciones por dos pagos iguales, se debe escoger la fecha de pago de cualquiera de los dos pagos como fecha focal.

Ejemplo

Una empresa tiene las siguientes deudas: \$ 1.000 a 15 meses de plazo; \$ 1.500 a 21 meses de plazo; \$ 2.000 a 27 meses de plazo, con una tasa de interés del 12% efectiva desde la suscripción; y \$ 3.000 a 33 meses de plazo; la empresa desea reemplazar todas sus deudas por 2 pagos iguales a 24 y 36 meses, a una tasa de interés del 36% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor de dichos pagos.
Se plantea el problema gráficamente, tomando como fecha focal 24 meses:

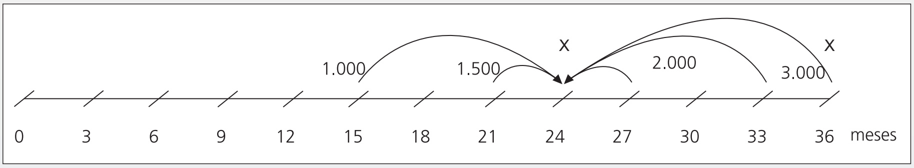


Gráfico 5.16. Solución gráfica del ejemplo

$$n_x = \frac{24 - 36}{3} = -\frac{12}{3} = -4$$

$$n_1 = \frac{24 - 15}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$n_2 = \frac{24 - 21}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$n_3 = \frac{24 - 27}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$n_4 = \frac{24 - 33}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

Se calcula el monto de la tercera opción:

$$M = 2.000(1 + 0{,}12)^{2{,}25}$$
$$M = 2.580{,}90$$

Se plantea la ecuación de valor:

$$x + x\left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{-4} = 1.000(1{,}09)^{3} + 1.500(1{,}09)^{1} + 2.580{,}90(1{,}09)^{-1} + 3.000(1{,}09)^{-3}$$

$$x + x(1{,}09)^{-4} = 1.295{,}03 + 1.635 + 2.367{,}79 + 2.316{,}55$$
$$x + x(0{,}708425) = 7.614{,}37$$
$$(1{,}7084252)x = 7.614{,}37$$

$$x = \frac{7.614{,}37}{1{,}7084252}$$

$$x = \$\ 4.456{,}95$$

Se deben efectuar dos pagos iguales de \$ 4.456,95.

Ejemplo

Una empresa tiene las siguientes deudas: \$ 2.500 a 21 meses de plazo; \$ 3.000 a 27 meses de plazo; \$ 3.500 a 42 meses de plazo; \$ 4.000 a 63 meses de plazo, con una tasa de interés del 9% efectiva; \$ 5.000 a 75 meses de plazo. La empresa desea reemplazar sus deudas por dos pagos iguales a los 24 y 60 meses. Calculemos el valor de dichos pagos, considerando una tasa de interés del 12% anual, capitalizable trimestralmente.

Primero se calcula el monto de cuarta deuda:

$$M = 4.000(1{,}09)^{5{,}25} = \$\ 6.288{,}53$$

Se toman 60 meses como fecha focal:

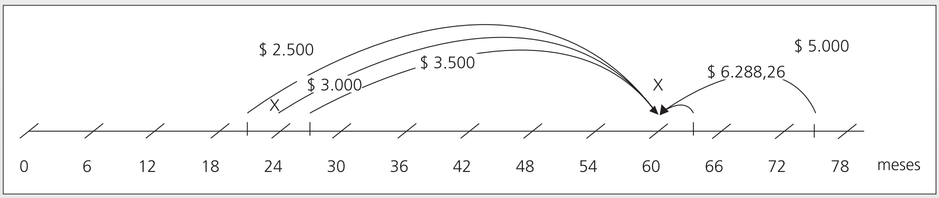


Gráfico 5.17. Solución gráfica del ejemplo, tomando como fecha focal los 60 meses

$$i = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03$$

$$n_x = \frac{60 - 24}{3} = 12$$

$$n_1 = \frac{60 - 21}{3} = 13$$

$$n_2 = \frac{60 - 27}{3} = 11$$

$$n_3 = \frac{60 - 42}{3} = 6$$

$$n_4 = \frac{60 - 63}{3} = -1$$

$$n_5 = \frac{60 - 75}{3} = -5$$

Se plantea la ecuación tomando como fecha focal los 60 meses:

$$x\,(1 + 0{,}03)^{12} + x = 2.500{,}00(1{,}03)^{13} + 3.000{,}00(1{,}03)^{11} + 3.500{,}00(1{,}03)^{6} +$$
$$+\ 6.288{,}53(1{,}03)^{-1} + 5.000{,}00(1{,}03)^{-5} =$$

x (1,42576) + x = 3.671,3342 + 4.152,7016 + 4.179,183 + 6.105,37 + 4.313,044 =
2,42576(x) = 22.421,6328
x = 22.421,6328 / 2,42576 = $9.243,1373 (dos pagos iguales)

Ahora se toman los 24 meses como fecha focal:

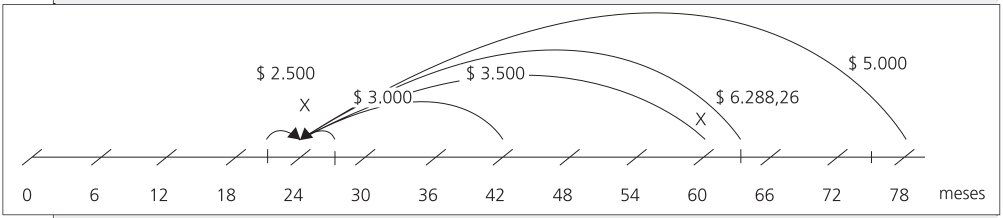


Gráfico 5.18. Solución grafica del ejemplo, tomando la fecha focal 24 meses

$$i = \frac{0,12}{4} = 0,03$$

$$n_x = \frac{24 - 60}{3} = -12$$

$$n_1 = \frac{24 - 21}{3} = 1$$

$$n_2 = \frac{24 - 27}{3} = -1$$

$$n_3 = \frac{24 - 42}{3} = -6$$

$$n_4 = \frac{24 - 63}{3} = -13$$

$$n_5 = \frac{24 - 75}{3} = -17$$

$$x + x\,(1 + 0,03)^{-12} = 2.500,00(1,03)^{1} + 3.000,00(1,03)^{-1} + 3.500,00(1,03)^{-6} + \\ + 6.288,53(1,03)^{-13} + 5.000,00(1,03)^{-17} =$$

x + x(0,701380) = 2.575,00 + 2.912,62 + 2.931,19 + 4.282,18 + 3.025,08 =
x(1,701380) = 15.726,07
x = $9.243,1373 (dos pagos iguales)

Por lo tanto, deben hacerse dos pagos iguales de $9.243,1373

Estos procedimientos permiten concluir que, tomando cualquiera de las dos fechas focales, el resultado es el mismo.

Tiempo equivalente

El tiempo equivalente es el tiempo de vencimiento promedio de dos o más deudas, valores u obligaciones.
"La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento en fechas diferentes, puede liquidarse mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como fecha de vencimiento promedio de las deudas. El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como tiempo equivalente."[10]
La regla más frecuente y común para el cálculo del tiempo equivalente o tiempo de vencimiento promedio de dos o más deudas está regida por la siguiente fórmula:

$$TE = \frac{M_1t_1 + M_2t_2 + M_3t_3 + M_4t_4 \ \ldots}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \ldots}$$

Fórmula 5.10. Fórmula del tiempo equivalente

Es decir que el tiempo equivalente es igual a la suma de los diferentes montos multiplicados por sus tiempos de vencimiento, divididos por la suma de los respectivos montos, por cuanto lo que se calcula es un tiempo de vencimiento promedio. A continuación se presenta un ejemplo de cálculo cuando se tiene una tasa efectiva.

Encontremos el tiempo equivalente, o tiempo de vencimiento promedio, de las siguientes obligaciones:
$ 1.000 a 1 año de plazo; $ 2.000 a 2 años y 6 meses de plazo; $ 3.000 a 2 años y 9 meses de plazo, con una tasa del 7% anual.

$$TE = \frac{1.000(1) + 2.000(2{,}5) + 3.000(2{,}75)}{1.000 + 2.000 + 3.000}$$

$$TE = \frac{1.000 + 5.000 + 8.250}{6.000} = \frac{14.250}{6.000}$$

$$TE = 2{,}375 \text{ años}$$

TE = 2 años, 4 meses y 15 días

En el ejemplo siguiente la tasa de interés es anual capitalizable semestralmente.

Ejemplo
Una empresa tiene las siguientes deudas: $ 1.000.000 a 3 años de plazo, con una tasa del 18% capitalizable semestralmente; $ 2.000.000 a 4 años y 6 meses con una tasa del 12% efectiva; $ 3.000.000 a 6 años y 7 meses con una tasa del 15% capitalizable trimestralmente, desde su suscripción. La empresa desea reemplazar sus deudas por un solo pago, con un tiempo equivalente para los tres vencimientos. Calculaemos la fecha de pago y el valor del pago único, considerando una tasa de interés del 28% anual capitalizable semestralmente.

[10] F. Ayres Jr., ob. cit., p. 75.

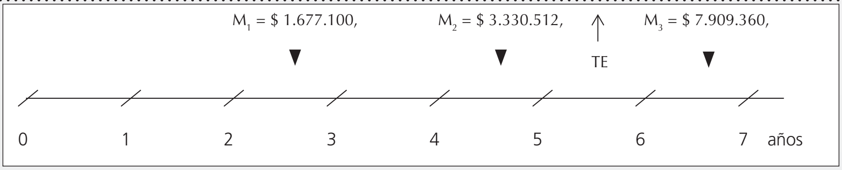


Gráfico 5.19. Solución gráfica del ejemplo, cálculo del tiempo equivalente

$$M_1 = 1.000\left(1 + \frac{0,18}{2}\right)^6 = \$\ 1.677,10$$

$$M_2 = 2.000\ (1 + 0,12)^{4,5} = \$\ 3.330,51$$

$$M_3 = 3.000\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{2\ 6,3333} = \$\ 7.909.360,36$$

$$TE = \frac{1.677.10(6) + 3.330,51(9) + 7.909,36(13,17)}{1.677,10 + 3.330,51 + 7.909,36}$$

$$TE = \frac{10.062,6 + 29.974,61 + 104.166,27}{12.916.973,20} = \frac{144.203,48}{12.916.973,20}$$

$TE = 11,16$ semestres

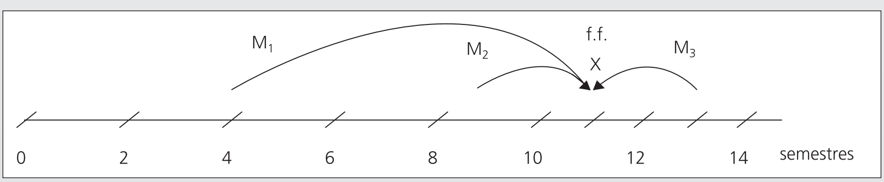


Gráfico 5.20. Solución gráfica del ejemplo, cálculo del pago único

Cálculo de tiempos con referencia a la fecha focal:

$11,16 - 6 = 5,16$
$11,16 - 9 = 2,16$
$11,16 - 13,16 = -2$

Entonces, se puede plantear la ecuación de valor:

$x = 1.677,10(1 + 0,14)^{5,16} + 3.330,51(1 + 0,14)^{2,16} + 7.909,36(1,14)^{-2}$
$x = 3.297,52 + 4.420,033 + 6.085,99$
$x = \$\ 13.803,54$

Actividades de ejercitación

1. Calcule el monto a interés compuesto y a interés simple de un capital de \$ 8.000,00 colocado durante 10 años a una tasa de interés del 12% anual.

2. Calcule el monto a interés compuesto y el interés compuesto de un capital de \$ 30.000,00 colocado a una tasa de interés del 15% anual, capitalizable semestralmente durante 9 años.

3. Una persona obtiene un préstamo de \$ 5.000,00 a 12 años plazo, con una tasa de interés del 12% anual, capitalizable trimestralmente. Calcule el interés y el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento.

4. Una persona coloca un capital de \$ 3.000,00 en una cuenta de ahorros al 6% de interés anual capitalizable trimestralmente, ¿cuánto habrá en la cuenta al final de 8 años y 6 meses?

5. Andrés abre una cuenta de ahorros con \$ 800,00, a una tasa de interés del 14% anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta luego de 7años y 7 meses? Haga los cálculos en forma matemática y comercial y analice los resultados.

6. Calcule el monto compuesto que acumulará un capital de \$ 3.500,00 durante 6 años y 9 meses al 16% anual con capitalización continua.

7. Calcule el monto y el interés compuesto que producirá un capital de \$ 58.000.000,00 colocado a una tasa de interés del 18% anual con capitalización continua, durante 15 años y 6 meses.

8. En el mismo problema, calcule el monto y el interés compuesto con una tasa de interés del 18% anual con capitalización diaria. Analice resultados.

9. ¿A qué tasa efectiva es equivalente una tasa nominal del 12% anual, capitalizable semestralmente?

10. Resuelva el problema anterior buscando la tasa nominal, capitalizable semestralmente, equivalente a una tasa efectiva del 12,36%.

11. ¿A qué tasa efectiva equivale una tasa nominal del 9% anual, capitalizable trimestralmente?

12. ¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, equivale una tasa efectiva del 9,3083318%

13. ¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, se debe colocar un capital de \$ 2.500,00 para que produzca un monto de 5.520,00 en 10 años? ¿A qué tasa efectiva es equivalente?

14. ¿A qué tasa efectiva se convertirá un capital de $ 5.000,00 en un monto de $ 8.979,28163 en 12 años?

15. ¿En qué tiempo, en años meses y días, se duplicará un capital de $ 7.000,00 a una tasa de interés efectiva del 7,25%?

16. ¿En qué tiempo, en años, aumentará en ¾ partes más un capital de $ 6.000,00, considerando una tasa de interés del 17 1/8 % anual, capitalizable semestralmente?

17. Calcule el valor actual de un pagaré cuyo valor al término de 9 años y 6 meses será de $ 8.100,00, considerando una tasa de interés del 13% anual, capitalizable trimestralmente.

18. De un documento financiero, cuyo valor al término de 12 años y 9 meses será de $ 15.000,00, se desea conocer su valor actual luego de transcurridos 2 años y 3 meses desde la fecha de suscripción, considerando una tasa de interés del 8% anual con capitalización continua.

19. Un documento financiero, suscrito el día de hoy, por un valor de $ 3.800,00 a 5 años de plazo, con una tasa de interés del 7% anual, capitalizable semestralmente, desde su suscripción, se vende 2 años antes de la fecha de vencimiento, considerando una tasa del 9% anual, capitalizable cuatrimestralmente. Calcule el valor de la venta del documento a esa fecha; elabore la gráfica correspondiente.

20. Una persona desea vender una propiedad, que tiene un avalúo de $ 20.000,00, recibe 3 ofertas: a) $ 10.000 al contado y $ 10.000 a 60 meses; b) $ 9.000 al contado, $ 4.000 a 24 meses y $ 7.000 a 60 meses; c) $ 11.000 al contado, una letra de $ 4.500 a 6 años y otra letra de $ 4.500 a 8 años. ¿Cuál de las 3 ofertas le conviene aceptar, considerando que el rendimiento del dinero es del 21% anual, capitalizable quimestralmente?

21. Un documento de $ 7.500,00, suscrito el día de hoy a 9 años y 6 meses plazo, con una tasa de interés del 9% anual con capitalización efectiva, desde su suscripción, es negociado luego de transcurridos 2 años y nueve meses desde la fecha de suscripción, con las siguientes alternativas: a) una tasa del 12% anual capitalizable semestralmente; b) una tasa del 9% anual con capitalización efectiva; c) una tasa del 6% anual con capitalización continua. Calcule el valor actual o precio para cada alternativa e indique si es a la par, con premio o con castigo.

22. Un documento suscrito por $ 3.500 a 5 años y 7 meses, con una tasa del 12%, capitalizable trimestralmente, se vende 2 años y 5 meses después de la fecha de suscripción. Considerando una tasa de interés del 13%, capitalizable semestralmente, calcule el valor de la venta de dicho documento. Haga los cálculos en forma matemática y comercial.

23. Calcule el descuento compuesto matemático y el descuento compuesto bancario de un documento cuyo monto al final de 7 años es de $ 7.000.000, si fue descontado 3 años antes de la fecha de su vencimiento con una tasa de interés del 14% efectiva.

24. Una empresa tiene las siguientes deudas: $ 1.000.000 a 3 años de plazo con una tasa del 18% capitalizable semestralmente; $ 5.000.000 a 4 años y 6 meses con una tasa del 12% efectiva; $ 3.000.000 a 6 años y 9 meses con una tasa del 15% anual capitalizable trimestralmente. La empresa desea reemplazarlas por un único pago en un tiempo equivalente para los tres vencimientos. Calcule: a) la fecha de pago y b) el valor del pago único, considerando una tasa de interés del 14% anual capitalizable semestralmente.

Respuestas

1. Monto a interés compuesto = $ 24.846,78567
Monto a interés simple = $ 17.600,00

2. Monto = $ 110.274,12 Interés compuesto = $ 80.274,12

3. Monto = $ 20.661,26 Interés compuesto = $ 15.661,26

4. Habrá en la cuenta de ahorros = $ 4.976,9891

5. Por la forma matemática $ 2.232,26
Por la forma comercial $ 2.232,98

6. M = $ 10.306,38

7. M = $ 944.299.148,50 I = $ 886.299.148,50

8. M = $ 943.640.948,81 I = $ 885.640.948,81

9. i = 12,36% efectiva

10. j = 12% anual capitalizable semestralmente.

11. i = 9,3083318% efectiva, anual

12. i = 9% anual capitalizable trimestralmente.

13. i = 8% anual capitalizable trimestralmente.
i = 8,243216% efectiva.

14. i = 5% efectiva, anual.

15. t = 9,9 años = 9 años, 10 meses y 25 días.

16. 3,405818 años.

17. C = $ 2.402,50

18. C = $ 6.475,66

19. Valor de la venta del documento = $ 4.489,146167

20. La oferta a) X = $ 13.654,67542

21. a) $ 7.744,3293 (con castigo);
b) $ 9.505,7006 (a la par);
c) 11.342,8902 (premio).

22. Valor de la venta $ 4.545,19 y $ 4.543,61

23. Dc = $ 2.275,20 y Dbc = $ 2.547,61

24. a) TE = 5,368206 años = 10,736412 semestres.
b) Pago único = $ 18.398.403,52

Actividades de autoevaluación

1. Calcule el número de períodos de capitalización y la tasa de interés, por período de capitalización, de un capital colocado a una tasa del 24% anual, capitalizable semestralmente durante 6 años y 9 meses.

2. Calcule el monto, a interés compuesto, de un capital de $ 5.000 colocado a una tasa de interés del 18% anual, capitalizable trimestralmente durante 5 años y 6 meses.

3. En el problema anterior calcule el monto y el interés compuesto con capitalización continua.

4. Al nacer su hijo, una madre abre una cuenta de ahorros con un capital de $ 900. ¿Cuánto tendrá en la cuenta cuando su hijo cumpla 18 años, si se considera una tasa de interés del 15% anual, capitalizable trimestralmente?

5. ¿A qué tasa efectiva es equivalente una tasa del 36% anual, capitalizable trimestralmente?

6. ¿A qué tasa anual capitalizable trimestralmente es equivalente una tasa efectiva del 41,1582%?

7. ¿A qué tasa efectiva es equivalente una tasa del 7% anual con capitalización continua?

8. ¿A qué tasa anual con capitalización continua es equivalente una tasa efectiva del 7,2508182%?

9. Un inversionista tiene un capital de $ 50.000 y desea invertirlo a 15 meses de plazo. Al consultar en el mercado financiero le ofrecen las siguientes opciones: a) una tasa efectiva del 42%; b) una tasa del 39% anual capitalizable semestralmente; c) una tasa del 38% anual capitalizable trimestralmente y d) una tasa del 36% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál de las cuatro opciones produce mayor interés? Haga el cálculo con los métodos analítico y práctico.

10. Un capital de $ 7.500,00 suscrito a 12 años y 9 meses de plazo, con una tasa de interés del 9% anual con capitalización continua, es negociado luego de transcurridos 2 años y 6 meses desde la fecha de suscripción, con una tasa de interés del 8 3/4% anual con capitalización continua. Calcular el valor actual o precio a la fecha de negociación.

11. Un documento de $ 10.000, suscrito el día de hoy a 5 años y 6 meses de plazo, es negociado después de 2 años y 3 meses de la fecha de suscripción, con una tasa de interés del 18% anual, capitalizable trimestralmente. Calcule su valor actual a la fecha de negociación.

12. Un documento de $ 4.000, suscrito el día de hoy a 6 años y 9 meses de plazo, con una tasa de interés del 15% anual, capitalizable semestralmente desde su suscripción, después de 2 años y 6 meses de la fecha de suscripción es negociado con las siguientes alternativas: a) una tasa de interés del 18% efectiva; b) una tasa del 15% anual, capitalizable semestralmente y c) una tasa del 12% anual capitalizable trimestralmente. Calcule el valor actual o precio a la fecha de negociación para cada alternativa e indique si es con premio, a la par o con castigo.

13. Una empresa tiene las siguientes deudas u obligaciones: $ 3.000 a 2 años de plazo; $ 5.000 a 4 años de plazo; $ 7.000 a 8 años de plazo; $ 9.000 a 10 años de plazo. La empresa acuerda con sus acreedores reemplazar sus deudas por un solo pago a los 5 años, con una tasa de interés del 14% anual, capitalizable semestralmente. Calcule el valor del pago único.

14. Una empresa tiene las siguientes deudas u obligaciones: $ 10.000 a 3 años de plazo; $ 8.000 a 4 años de plazo; $ 6.000 a 5 años de plazo; $ 8.000 a 6 años de plazo y $ 10.000 a 7 años de plazo. Desea reemplazar sus deudas por un solo pago en un tiempo equivalente para los 5 vencimientos. Calcule: a) la fecha de pago y b) el valor del pago único, considerando una tasa de interés del 6% anual, capitalizable semestralmente.

Respuestas

1. $m = \dfrac{360}{180} = 2$ $\qquad i = \dfrac{0{,}24}{2} = 0{,}12 = \text{semestral}$

$$n = \left(\frac{6(12) + 9}{6}\right) = 13{,}5$$

2. $m = \dfrac{360}{90} = 4$ $\qquad i = \dfrac{0{,}18}{4} = 0{,}045$ trimestral

$n = \dfrac{5(12) + 6}{3} = 22$

$M = C\,(1 + i)^n$ (fórmula 5.1)

$M = 5.000(1 + 0{,}045)^{22} = \$\ 13.168{,}26$

3. $M = C\,e^{jt}$ $\qquad C = 5.000$ $\qquad e = 2{,}71828182846$ $\qquad j = 0{,}18$

$t = \dfrac{5(12) + 6}{12} = 5{,}5$

$M = 5.000\ e^{0{,}18(5{,}5)}$ $\qquad M = 5.000\ e^{0{,}99} = 5.000\ (2{,}691234472)$

$M = 13.456{,}17$

4. $i = \dfrac{0{,}15}{4} = 0{,}0375$ trimestral

$n = (18)\dfrac{12}{3} = 72$

$M = 900(1 + 0{,}0375)^{72} = \$\ 12.746{,}36$

5. $m = \dfrac{360}{90} = 4$

$1 + i = \left(1 + \dfrac{0{,}36}{4}\right)^4$ (fórmula 5.4)

$1 + i = 1{,}411582$

$i = 0{,}411582$

$i = 41{,}1582\%$ efectiva

6. $1 + 0{,}411582 = \left(1 + \dfrac{j}{4}\right)^4$

Elevamos ambos miembros de la ecuación a la potencia 1/4

$(1{,}411582)^{1/4} = \left(1 + \dfrac{j}{4}\right)^{4/4}$

$1{,}09 = 1 + \dfrac{j}{4}$

$(0{,}09)4 = j$

$0{,}36 = j$

$j = 36\%$ anual capitalizable trimestralmente

7. $1 + i = e^{0,07}$ $1 + i = 1,072508181818181$ $i = 0,0725081818181$
$i = 7,250818181818\%$

8. $1 + 0,072508181818181 = e^x$ $1,072508181818 = e^x$
$\ln 1,0725081818181 = x \ln e$
$0,07 = x\,(1)$
$7\% = x$

9. a) Método analítico:

Primera opción:
$i = 42\%$ $i = 0,42$ efectiva, anual

Segunda opción:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,39}{2}\right)^2 \qquad \text{(fórmula 5.4)}$$

$1 + i = 1,428025$
$i = 42,8025\%$

Tercera opción:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,38}{4}\right)^4$$

$1 + i = 1,437661$
$i = 43,7661\%$ efectiva, anual

Cuarta opción:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12}$$

$1 + i = 1,425761$
$i = 42,5761\%$ efectiva, anual

En este caso, le conviene analíticamente la tercera opción $i = 43,7661\%$

b) Método práctico:

Primera opción: Tasa efectiva del 42%
$M = 50.000(1 + 0,42)^{1,25}$
$M = \$\ 77.505,127$
$I = 77.505,127 - 50.000 = \$\ 27.505,127$

Segunda opción: Tasa del 39% anual capitalizable semestralmente

$$M = 50.000\left(1 + \frac{0,39}{2}\right)^{2,5}$$

M = \$ 78.053,03
I = 78.053,03 – 50.000 = \$ 28.053,03

Tercera opción: Tasa del 38% anual capitalizable trimestralmente:

$$M = 50.000\left(1 + \frac{0,38}{4}\right)^{5}$$

M = \$ 78.711,937
I = 78.711,937 – 50.000 = \$ 28.711,937

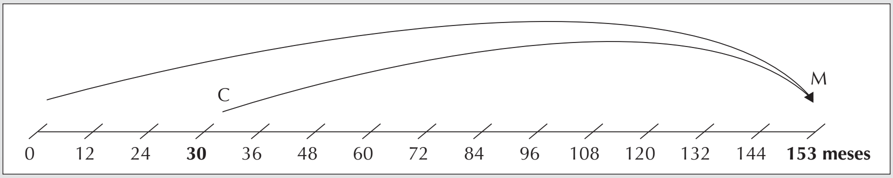
Cuarta opción: Tasa del 36% anual capitalizable mensualmente:

$$M = 50.000\left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{15}$$

M = \$ 77.898,37
I = 77.898,37 – 50.000 = \$ 27.898,37

En este caso, le conviene la tercera opción M = \$ 78.711,937;
I = \$ 28.711,937

10. Se elabora el gráfico del problema:



$i = 0,09$

$$t = \frac{(12 \times 12 + 9)}{12} = 12,75$$

$M = 7.500\,(e)^{0,09(12,75)}$ $M = 7.500,00(e)^{1,1475} = 7.500,00\,(3,15073) =$ 23.627,30

$$t = \frac{(12 \times 12 + 9) - (2 \times 12 + 6)}{12} = \frac{123}{12} = 10,25 \qquad i = 0,0875$$

$C = 23.627,30\ e^{-(10,25)\,(0,0875)} = 23.627,30\ e^{-0,896875} = 23.627,30$ (0,407842)
C = \$ 9.636,21

11. Se expresa gráficamente el problema:

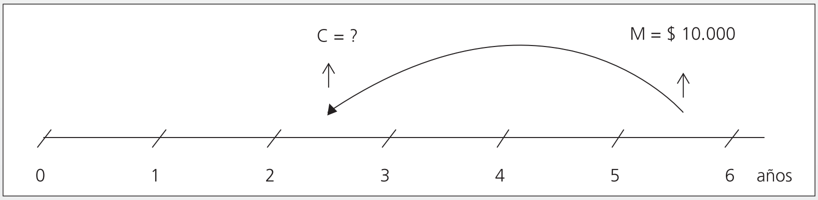


Gráfico 5.21. Solución gráfica del problema 11

$$n = \frac{[(5)(12) + 6] - [(2)(12) + 3]}{3} = 13$$

$$C = 10.000\left(1 + \frac{0{,}18}{4}\right)^{-13}$$

C = $ 5.642,72

C = 5.642,72, éste es el valor actual o precio del documento a esa fecha

12. Se expresa el problema gráficamente:

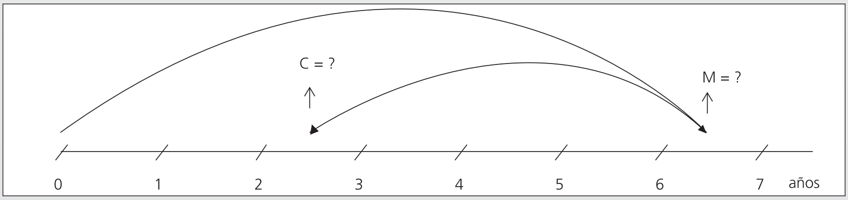


Gráfico 5.22. Solución gráfica del problema 12

Negociación con una tasa del 18% efectiva:

$$M = 4.000\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{13{,}50}$$

M = $ 10.618.77

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{12} = 4{,}25$$

$C = 10.618.77\ (1 + 0{,}18)^{-4{,}25}$
C = $ 5.255.03 (negociación con castigo)

Negociación con una tasa del 15% anual capitalizable semestralmente:

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{6} = 8{,}5$$

$$C = 10.618.771{,}09\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{-8{,}5}$$

C = $ 5.742.51 (negociación a la par)

Se comprueba:

$$M = 4.000\left(1 + \frac{0{,}15}{2}\right)^{5} = \$\ 5.742.52$$

Negociación con una tasa del 12% anual capitalizable trimestralmente:

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{3} = 17$$

$$C = 10.618{,}77\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{-17}$$

C = $ 6.424.53 (negociación con premio)

13. Se expresa el problema gráficamente:

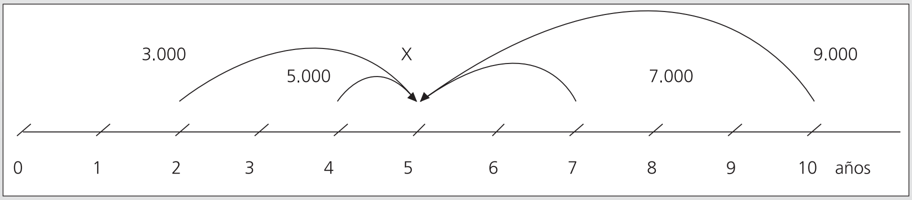


Gráfico 5.23. Solución gráfica del problema 13

$$n_1 = \frac{(5)(12) - (2)(12)}{6} = 6$$

$$n_2 = \frac{(5)(12) - (4)(12)}{6} = 2$$

$$n_3 = \frac{(5)(12) - (8)(12)}{6} = -6$$

$$n_4 = \frac{(5)(12) - (10)(12)}{6} = -10$$

$$x = 3.000\left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^6 + 5.000(1 + 0,07)^2 + 7.000(1 + 0,07)^{-6} + 9.000(1 + 0,07)^{-10}$$

$x = 19.466,23$

Un solo pago de \$ 19.466,23.

14. Se expresa el problema gráficamente:

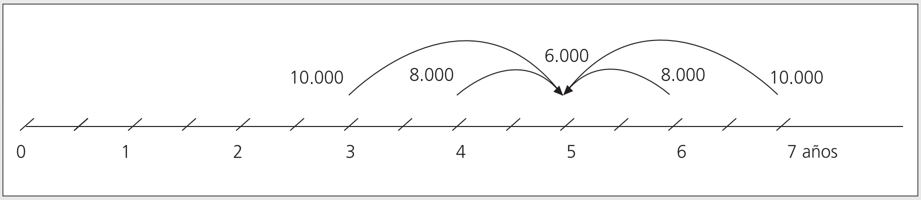


Gráfico 5.24. Solución gráfica del problema 14

$$TE = \frac{10.000(6) + 8.000(8) + 6.000(10) + 8.000(12) + 10.000(14)}{10.000 + 8.000 + 6.000 + 8.000 + 10.000} = \frac{420.000}{42.000}$$

TE = 10 semestres = 5 años

Calculamos el valor del pago único:

$n_1 = 10 - 6 = 4$ $\quad$ $n_3 = 10 - 10 = 0$ $\quad$ $n_5 = 10 - 14 = -4$
$n_2 = 10 - 8 = 2$ $\quad$ $n_4 = 10 - 12 = -2$

$x = 10.000(1 + 0,03)^4 + 8.000(1,03)^2 + 6.000(1,03)^0 + 8.000(1,03)^{-2} + 10.000(1,03)^{-4}$
$x = 11.255,09 + 8.487,20 + 6.000 + 7.540,77 + 8.884,87$
$x = \$\ 42.167,93$

Pago único: \$42.167,93

Actividades de repaso

1. ¿Cuál es la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto?

2. ¿Cuál es la fórmula del monto en interés compuesto?

3. ¿Cómo se calcula el interés compuesto?

4. ¿En qué se diferencia una tasa de interés efectiva de una tasa de interés nominal capitalizable varias veces en el año?

5. ¿Qué es más conveniente para un inversionista: una tasa de interés del 45% efectiva o una tasa del 39% anual capitalizable mensualmente?

6. ¿Cuál es la fórmula del valor actual en interés compuesto?

7. ¿En qué se diferencia una tasa de interés anticipada de una tasa de interés vencida? ¿Cuál produce mayor interés compuesto?

8. ¿Cómo se calcula el precio de un documento con interés compuesto?

9. ¿Con qué procedimiento de cálculo se puede reemplazar un conjunto de obligaciones o deudas a largo plazo por uno o más pagos?

10. ¿Cómo se calcula el descuento compuesto? ¿Con qué fórmula?

Complete su aprendizaje con el CD
que acompaña a este libro

Anualidades o rentas

VII

Presentación

Las anualidades o rentas son utilizadas con mucha frecuencia en operaciones financieras de endeudamiento y de formación de capitales, mediante cuotas periódicas o series de pagos o depósitos; es decir, sirven para formar capitales o para reducir deudas mediante cuotas periódicas. Son muy útiles para la elaboración de tablas de amortización gradual, tablas de valor futuro, para el cálculo de cuotas periódicas, ya sea para cancelar una deuda o formar un capital.

La anualidades o rentas se emplean en los cálculos de pólizas de seguros, cuotas de pago, cuotas de depósito, cálculo actuarial, compras a plazo, préstamos a largo plazo, préstamos hipotecarios y otros; por lo tanto, es importante analizarlas en el área financiera.

De otra parte, para estudiarlas y manejarlas adecuadamente, es imprescindible dominar el interés simple y el interés compuesto.

Se incluyen las anualidades con capitalización continua.

Objetivo general

- Conocer y manejar los mecanismos de cálculo que faciliten al estudiante la forma de acumular capitales o de amortizar endeudamientos mediante cuotas periódicas.

Objetivos específicos

- Conocer el concepto, nomenclatura y clasificación de las anualidades o rentas.
- Calcular el monto y el valor actual de una anualidad.
- Calcular la renta en función del monto o del valor actual.
- Conocer las formas de cálculo de las variables: renta, períodos y tasas.
- Conocer la aplicación de las anualidades o rentas en la realidad financiera con casos prácticos.
- Conocer las gradientes y su aplicación.
- Manejar las anualidades con capitalización continua.

CONTENIDO

Anualidades o rentas R

"Una anualidad es una serie de pagos periódicos iguales."[1]
Puede consistir en el pago o depósito de una suma de dinero a la cual se le reconoce una tasa de interés por período.
"El valor de cada pago periódico recibe el nombre de renta o, simplemente, anualidad".[2]
Es decir, que la renta o anualidad aparece asociada con los pagos o depósitos periódicos de sumas de dinero, como los dividendos de acciones, cupones de bonos, cuotas, pensiones, cuotas de amortización, cuotas de depreciación, etcétera.
Las anualidades o rentas constituyen una sucesión o serie de depósitos o de pagos periódicos, generalmente iguales, con sus respectivos intereses por período, y se las puede expresar gráficamente, como se observa en el ejemplo siguiente donde aparecen 6 períodos y sus correspondientes 6 pagos o depósitos (R).

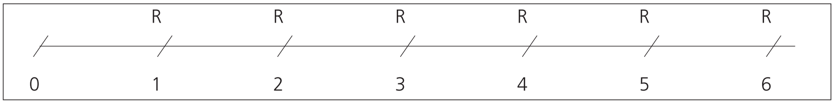


Gráfico 6.1. Representación gráfica de la anualidad

Clasificación de las anualidades o rentas

Antes de esbozar una clasificación de las rentas, es necesario definir algunos conceptos:

Período de pago o período de la anualidad: Tiempo que se fija entre dos pagos o depósitos sucesivos; puede ser continuo diario, semanal, quincenal, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral, anual, etcétera.

Tiempo o plazo de una anualidad: Intervalo de tiempo que transcurre entre el comienzo del primer período de pagos o depósitos y el final del último.

Tasa de una anualidad: Tipo de interés que se fija para el pago o depósito de las rentas o anualidades; puede ser nominal o efectiva.

Renta: Valor del pago o depósito periódico.

Renta anual: Suma de los pago o depósitos efectuados en un año.

Rentas perpetuas: *S*erie de pagos que han de efectuarse indefinidamente.

Justin H. Moore y Lincoyán Portus Govinden coinciden en clasificar las anualidades o rentas de la siguiente forma:

[1] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 100.
[2] J. H. Moore, *Manual de Matemáticas Financieras*, México, Uteha, 1973, pp. 158-160.

Tipos de anualidades según el tiempo

Anualidades eventuales o contingentes: Aquellas en las que el comienzo y el fin de la serie de pagos o depósitos son imprevistos y dependen de algunos acontecimientos externos, tales como,los seguros de vida, de accidentes, incendios, robo, etcétera.

Anualidades ciertas: Aquellas en las que sus fechas inicial y terminal se conocen por estar establecidas en forma concreta, como son las cuotas de préstamos hipotecarios o quirografarios, pago de intereses de bonos, etcétera.

Tipos de anualidades según la forma de pago

Anualidades ordinarias o vencidas: Son aquellas en las que el depósito, pago o renta y la liquidación de intereses se realizan al final de cada período. Ejemplo: pago de cuotas mensuales por deudas a plazo.

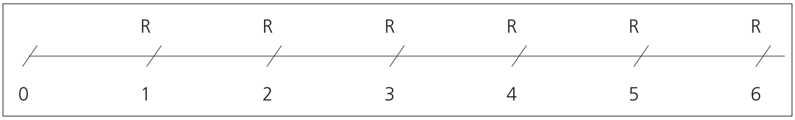


Gráfico 6.2. Expresión gráfica de una anualidad vencida

Anualidades anticipadas: Son aquellas en las que el depósito, el pago y la liquidación de los intereses se hacen al principio de cada período: pago de cuotas por adelantado.

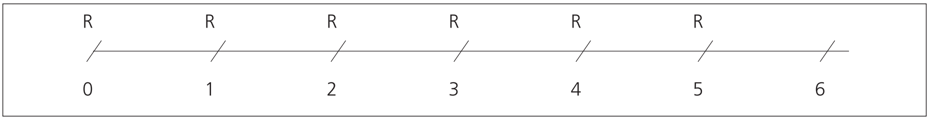


Gráfico 6.3. Expresión gráfica de una anualidad anticipada

Anualidades diferidas: Son aquellas cuyo plazo comienza después de transcurrido determinado intervalo del tiempo establecido: préstamos con períodos de gracia.

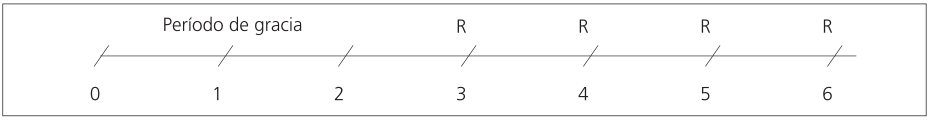


Gráfico 6.4. Expresión gráfica de una anualidad diferida

Anualidades simples: Son aquellas cuyo período de pago o depósito coincide con el período de capitalización. Por ejemplo, si la capitalización es semestral, los pagos o depósitos serán semestrales.

Anualidades generales: Son aquellas cuyos períodos de pago o de depósito y de capitalización no coinciden. Por ejemplo, cuando se hace una serie de depósitos trimestrales y la capitalización de los intereses es semestral. Para resolver este tipo de anualidad se utiliza la ecuación de equivalencia $1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$.

Las anualidades **ciertas** y las **eventuales** pueden ser **vencidas** o **anticipadas***;* y éstas a su vez pueden ser **diferidas**, **perpetuas** y **perpetuas diferidas**.

Anualidades ciertas		Anualidades eventuales	
Vencidas	Anticipadas	Vencidas	Anticipadas
Diferidas Perpetuas Perpetuas diferidas	Diferidas Perpetuas Perpetuas diferidas	Diferidas Perpetuas Perpetuas diferidas	Diferidas Perpetuas Perpetuas diferidas

Tabla 6.1. *Cuadro resumen de la clasificación de las anualidades*

Anualidades vencidas

Del conjunto de anualidades que se acaban de detallar, se explicarán las más comunes, que son las *anualidades ciertas vencidas simples*, es decir, aquellas que *vencen al final de cada período* y cuyo *período de pago o de depósito coincide con el de capitalización*.

"El valor de una anualidad calculada a su terminación es el monto de ella. El valor de la anualidad calculado a su comienzo es su valor actual o presente."[3]

"El monto de una anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos depósitos, cada uno acumulado hasta el término del plazo. El valor actual de una anualidad es la suma de los valores actuales de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo."[4]

En estas dos definiciones bastante completas, radica la base de la expresión práctica del monto y del valor presente o valor actual de una anualidad, así como la deducción de las respectivas fórmulas.

Para la deducción de la fórmula del monto de una anualidad, se toma como fecha focal el término de la anualidad. Para la deducción de la fórmula del valor actual de una anualidad, se toma como fecha focal el tiempo cero o inicio de la anualidad.

[3] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 101.
[4] F. Ayres Jr., *Matemáticas financieras. Teoría y 500 problemas resueltos*, Bogotá, McGraw-Hill, pp. 80-81.

Monto de una anualidad

Sea una anualidad o renta de $ 10.000 al final de cada 6 meses durante 3 años, al 12% anual capitalizable semestralmente (anualidad vencida):

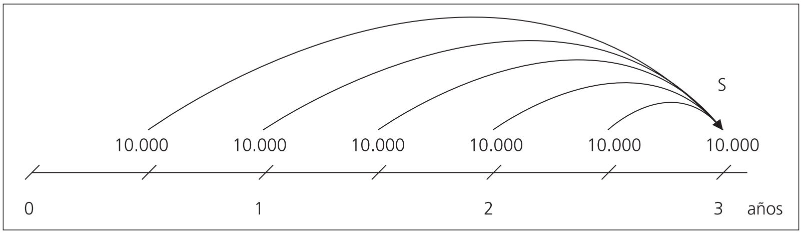


Gráfico 6.5. Representación gráfica del monto de una anualidad

Para calcular el monto (S) de la anualidad, se toma como fecha focal el final del año 3.

Entonces: $n = 6$; $\qquad i = \frac{0,12}{2} = 0,06$

Cada renta ganará intereses durante los períodos que falten hasta el término de la anualidad, o hasta el último depósito o renta. Por lo tanto, se pueden sumar:

$$S = 10.000(1 + 0,06)^5 + 10.000(1,06)^4 + 10.000(1,06)^3$$
$$+ 10.000(1,06)^2 + 10.000(1,06) + 10.0000$$

Se puede sacar el factor común: 10.000

$$S = 10.000[(1,06)^5 + (1,06)^4 + (1,06)^3 + (1,06)^2 + (1,06) + 1]$$

Al ordenar en forma ascendente,

$$S = 10.000[1 + (1,06) + (1,06)^2 + (1,06)^3 + (1,06)^4 + (1,06)^5]$$

Resulta una progresión geométrica cuya razón es (1,06)

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$a = 1$; $r = 1,06$; $n = 6$

Entonces,

$$S = 10.000 \left[\frac{(1,06)^6 - 1}{1,06 - 1}\right] = 10.000(6,975318)$$

$$S = \$\ 69.753,18538$$

Generalizando:

$$R = \$\ 10.000;\ \ i = 0{,}06;\ \ S = \text{monto};\ \ n = 6$$

$$S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

Fórmula 6.1. Fórmula del monto de una anualidad

Valor actual de una anualidad

El valor actual de la misma anualidad puede calcularse tomando como fecha focal el inicio de la anualidad. Cada renta se calculará con el valor actual que le corresponde, relacionada con el inicio de la anualidad y con la respectiva tasa de interés. Para la demostración, se utilizará un ejemplo similar al anterior, pero en este caso se trata de una serie de pagos semestrales de $ 10.000 durante 3 años con una tasa de interés del 12% anual, capitalizable semestralmente.

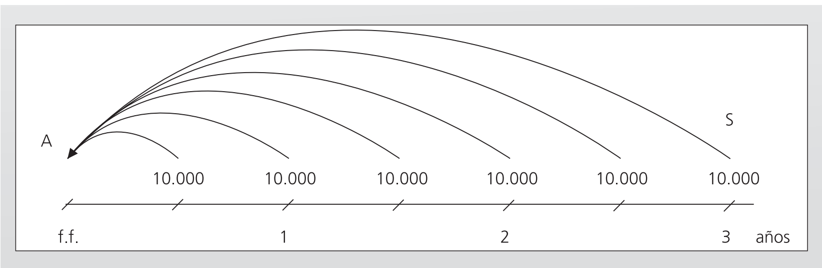


Gráfico 6.6. Expresión gráfica del valor actual de una anualidad

$$\begin{aligned} A = {} & 10.000(1 + 0{,}06)^{-1} + 10.000(1{,}06)^{-2} + 10.000(1{,}06)^{-3} \\ & + 10.000(1{,}06)^{-4} + 10.000(1{,}06)^{-5} + 10.0000(1{,}06)^{-6} \end{aligned}$$

Al hallar el factor común:

$$A = 10.000[(1{,}06)^{-1} + (1{,}06)^{-2} + (1{,}06)^{-3} + (1{,}06)^{-4} + (1{,}06)^{-5} + (1{,}06)^{-6}]$$

Resulta una progresión geométrica cuya razón $(1{,}06)^{-1} < 1$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Entonces,

$$A = 10.000\left[\frac{(1{,}06)^{-1} - (1{,}06)^{-1}[(1{,}06)^{-1}]^6}{1 - [(1{,}06)^{-1}]}\right]$$

$$A = 10.000\left[\frac{\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,06}(1,06^{-6})}{\frac{1,06-1}{1,06}}\right]$$

$$A = 10.000\left[\frac{1-(1,06)^{-6}}{0,06}\right]$$

$$A = 10.000(4,917324) = \$\ 49.173,24$$

Generalizando:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Fórmula 6.2. Fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria simple

Los símbolos utilizados en las fórmulas de monto y de valor actual de las anualidades son:

R = el pago periódico o renta.
i = tasa de interés por período de capitalización.
j = tasa nominal anual.
n = número de períodos de pago.
S = monto de una anualidad o suma de todas sus rentas.
A = valor actual de una anualidad o suma de los valores actuales de las rentas.

Tanto **S** como **A** pueden calcularse directamente mediante calculadoras electrónicas, por logaritmos o utilizando las tablas de valores por tasa de interés (*i*) y por período de pago (*n*).

Ejemplo

Hallaremos el monto y el valor actual de una anualidad de $ 10.000 cada trimestre durante 5 años y 6 meses al 12% capitalizable trimestralmente (anualidad vencida simple).

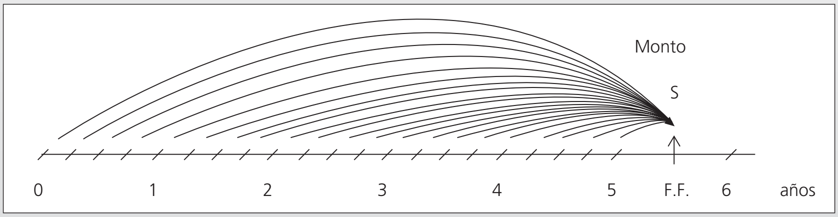


Gráfico 6.7. Solución gráfica del monto de la anualidad

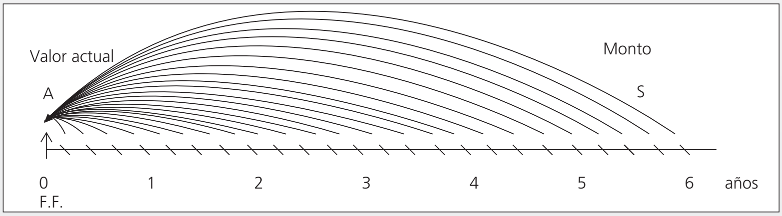


Gráfico 6.8. Solución gráfica del valor actual de la anualidad

$n = [(5)(4) + 2] = 22$ rentas

$i = \frac{0,12}{4} = 0,03$ trimestral; R = \$ 10.000; S =?; A =?

Para calcular el monto se aplica la fórmula 6.1:

$$S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

Se toma como fecha focal el término de la anualidad y se aplica la fórmula indicada.

$$S = 10.000\left[\frac{(1 + 0,03)^{22} - 1}{0,03}\right]$$

$$S = 10.000\left[\frac{1,916103 - 1}{0,03}\right]$$

$$S = 10.000(30,536780)$$

$$S = \$\ 305.367,80 \text{ monto de la anualidad}$$

(Los intereses crecen en función del tiempo y se acumulan al capital).

Para calcular el valor actual, se toma como fecha focal el inicio de la anualidad y se aplica la fórmula 6.2:

$$A = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 10.000\left[\frac{1 - (1 + 0,03)^{-22}}{0,03}\right]$$

$$A = 10.000\left[\frac{1 - 0,521893}{0,03}\right]$$

$$A = 10.000(15,936917)$$

$$A = \$\ 159.369,17, \text{ valor actual de la anualidad}$$

La deuda decrece y los intereses también, pero al inicio son altos.

Como puede observarse, el valor del monto (S) y el valor actual (A) difieren notablemente, por concepto y por forma de cálculo, a pesar de que los datos del ejemplo son los mismos.
En la formación del monto, los intereses crecen y se acumulan al capital; mientras que en el valor actual, los intereses se aplican al saldo en cada período y la deuda decrece en función del tiempo.

Cálculo de la renta o pago periódico

El pago periódico o renta de una determinada cantidad, sea deuda o fondo por acumularse –como es el caso de las cuotas periódicas para cancelar una deuda, o el valor que debe depositarse en una cuenta para constituir un capital–, puede calcularse sobre la base de las dos fórmulas anteriores: la del monto (S) y la del valor actual (A).

Cálculo de la renta (R) a partir del monto (S)
Se despeja R en la fórmula 6.1:

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Fórmula 6.3. Fórmula de la renta de una anualidad en función del monto.

Para el cálculo de R deben conocerse las otras variables: S, *n, i*. Esta fórmula permite calcular el valor del depósito o renta periódica para constituir un fondo de valor futuro.

Cálculo de la renta (R) a partir del valor actual (A)
Se toma la fórmula 6.2 y se despeja R:

$$R = \frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Fórmula 6.4. Fórmula de la renta de una anualidad en función del valor actual.

Para el cálculo de R deben conocerse las otras variables: A, *n, i*. Esta fórmula permite calcular el valor de la cuota o pago periódico con el cual se paga o amortiza una deuda.
Los valores de dichas rentas pueden encontrarse en las tablas de fondos de valor futuro y de amortización, respectivamente, en función de *n* pagos y la tasa de interés *i*, por período de pago.

Ejemplo

Calculemos entonces el valor del depósito mensual que debe hacer una empresa en una institución financiera que paga 14,4% anual, capitalizable mensualmente, a fin de obtener $ 6.400 en 6 años. Así como los intereses que ganará.

$R = ?;\ S = \$\ 6.400;\ i = \dfrac{0{,}144}{12} = 0{,}012;\ n = (6)(12) = 72$

$$R = \frac{S}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$R = \frac{6.400}{\dfrac{(1+0{,}012)^{72} - 1}{0{,}012}} = \frac{6.400}{113{,}37178}$$

$R = \$\ 56{,}45$

$I = S - n(R)$

Intereses: 6.400 – 56,45(72) = $ 2.335,50

Ejemplo

Calcular el valor de la cuota bimestral que debe pagar una empresa que tiene una deuda de $ 40.000,00 a 8 años de plazo, con una tasa de interés del 6% anual capitalizable bimestralmente.

$R = ?;\ i = \dfrac{0{,}06}{6} = 0{,}01; \qquad m = \dfrac{360}{60} = 6 \qquad n = \dfrac{(8 \times 12)}{2} = 48$

$$R = \frac{A}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$R = \frac{40.000{,}00}{\dfrac{1-(1+0{,}01)^{-48}}{0{,}01}} = 1.053{,}35 \qquad R = \$\ 1.053{,}35 \text{ cada bimestre}$$

Intereses = $I = n(R) - A$

$I = 48(1.053{,}35) - 40.000{,}00 = 10.560{,}96$

En general, para la acumulación de capitales o fondos se utiliza la suma de una anualidad; es decir, la fórmula del monto (S). Para el pago de una deuda se utiliza la fórmula del valor actual (A).

Anualidades con capitalización continua

Las anualidades o rentas, como son series de depósitos o pagos, pueden efectuarse en diferentes períodos, y en la capitalización de sus intereses aplicar la capitalización continua, cuya base es el número "e".

Para solucionar este tipo de problemas debemos aplicar la ecuación de equivalencia

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} \qquad\qquad i_c = e^{i} - 1$$

Cuando se trate de relacionar una tasa con diferentes tipos de capitalización con la capitalización continua:

Para Monto: $e^{i} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}$

Para Valor Actual: $e^{-i} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}$

En donde se encuentra la tasa *j* o la tasa anual con diferentes tipos de capitalizaciones, utilizando logaritmos o exponentes y radicales

Con la aplicación de la capitalización continua, el Monto de una Anualidad o serie de depósitos será mayor que con otro tipo de capitalización de los intereses; y como consecuencia los depósitos menores.

A su vez, con la aplicación de la capitalización continua, el Valor Actual de una Anualidad o serie de pagos dará como resultado un préstamo mayor y cuotas menores que con otro tipo de capitalización de los intereses.

Estos postulados se pueden demostrar con los ejemplos que se realizan a continuación:

Ejemplos

1. Calcular el Monto de una serie de depósitos de $ 300,00 cada mes durante 15 años, si se considera una tasa de interés del 6% anual con capitalización continua.

$j = 0{,}06$ t = 15 años
m = (15) (12) = 180 depósitos R = 300,00 e = 2,71828182846

Primero se utiliza la ecuación de equivalencia:

$$e^{j} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}$$

Se tiene que hacer la pregunta:

¿A qué tasa anual con capitalización mensual es equivalente una tasa del 6% anual con capitalización continua?:

$$\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = e^{0,06} \qquad \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = 1,06183654655$$

Se saca la raíz 12 de los dos miembros de la ecuación:

$$1 + \frac{j}{12} = 1,06183654655^{1/12} \qquad 1 + \frac{j}{12} = 1,005$$

$j = 0,06015$ tasa mensual: $0,06015/12 = 0,0050125$

$$S = 300,00 \, \frac{(1 + 0,0050125)^{180} - 1}{0,0050125} = 87.357,2422$$

Este resultado se puede comparar con una tasa del 6% anual con capitalización mensual:

$$S = 300,00 \, \frac{(1 + 0,005\,)^{180} - 1}{0,005} = 87.245,6137$$

El primer resultado es mayor que el segundo con \$ 111.6285

2. Una empresa quiere formar un fondo de \$ 100.000,00, mediante depósitos trimestrales durante 25 años, en una institución financiera que le otorga una tasa de interés del 7,2% anual con capitalización continua, calcular el valor del depósito trimestral.

$j = 0,072$ $t = 25$
$n = (25)(12)/\,3 = 100$ depósitos $S = 100.000,00$
$e = 2,71828182846$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4} = e^{0,072} \qquad \left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4} = 1,074655344$$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right) = 1,018163$$

$j = 0,072652$ $i = 0,072652/4 = 0,018163$

$$R = \frac{100.000,00}{\frac{(1+0,018163)^{25}-1}{0,018163}} = 3.195,9496$$

Se puede comparar con una tasa del 7,2% anual con capitalización trimestral:

$$R = \frac{100.000,00}{\frac{(1+0,018)^{25}-1}{0,018}} = 3.202,5719$$

El primer resultado es menor con $ 6,6223 que el segundo, en cada depósito.

3. Calcular el valor del préstamo a 7 años de plazo, que obtendría una empresa en una institución financiera que cobra una tasa de interés del 12% anual con capitalización continua, si la empresa puede pagar $ 2.000,00 cada mes.

$$I = \frac{0,12}{12} = 0,01 \qquad n = (12)(7) = 84 \qquad e = 2,71828182846$$

Se pregunta: ¿A qué tasa anual capitalizable mensualmente es equivalente una tasa del 12% anual con capitalización continua?

$$\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12} = e^{-0,12} \qquad \left(1+\frac{j}{12}\right)^{12} = 0,886920 \qquad \left(1+\frac{j}{12}\right)^{12} = 0,99005$$

$j = 0,1194 \qquad i = 0,1194/12 = 0,00995$

$$A = 2.000,00\ \frac{1-(1+0,00995)^{-84}}{0,00995} = 113.503,1139$$

Si la tasa de interés fuera del 12% anual capitalizable mensualmente:

$$A = 2.000,00\ \frac{1-(1+0,01)^{-84}}{0,01} = 113.296,905527$$

El préstamo otorgado con capitalización continua es mayor con $ 206,208373.

4. Una empresa obtiene un préstamo de $ 120.000,00 a 15 años de plazo que tiene que pagar en cuotas mensuales, con una tasa de interés del 9% anual con capitalización continua, calcular el valor de la cuota mensual.

$j = 0{,}09$ $\quad$ $t = 15$
$n = (15)\,(12) = 180$ $\quad$ $A = 120.000{,}00$ $\quad$ $e = 2{,}71828182846$

Se pregunta: ¿A qué tasa de interés anual capitalizable mensualmente es equivalente una tasa del 9% anual con capitalización continua?

$$\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = e^{-0{,}09} \qquad \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = 0{,}91393118527$$

$$1 + \frac{j}{12} = 0{,}992528 \qquad j = 0{,}089304$$

$$i = \frac{0{,}089304}{12} = 0{,}007442$$

$$R = \frac{120.000{,}00}{\dfrac{1 - (1 + 0{,}007442)^{-180}}{0{,}007442}} = 1.212{,}15648$$

Si la tasa de interés fuera del 9% anual capitalizable mensualmente:

$$R = \frac{120.000{,}00\ (0{,}0075)}{1 - (1 + 0{,}0075)^{-180}} = 1217{,}1199$$

El valor de cada pago mensual con capitalización continua es menor en \$ 2,96342; que da un valor total de \$ 893,4156.

Cálculo del número de períodos de pago

Conocidos el monto o valor actual de una anualidad, la renta y la tasa de interés, se puede calcular el número de períodos de pago *(n)*.
Partiendo de la fórmula del monto (S), se puede calcular *(n)*.

$$S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\frac{S}{R} = \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\frac{Si}{R} + 1 = (1 + i)^n$$

Aplicando logaritmos,

$$\log\left(\frac{Si}{R}+1\right)= n\log(1+i)$$

$$\frac{\log\left(\frac{Si}{R}+1\right)}{\log(1+i)}=n$$

Fórmula 6.5. Fórmula para calcular el tiempo en función del monto de una anualidad.

Del mismo modo, mediante la fórmula del valor actual (A):

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\frac{Ai}{R} = \left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

$$1-\frac{Ai}{R} = (1+i)^{-n}$$

Aplicando logaritmos,

$$\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right) = n\log(1+i)$$

$$-n = \frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

Fórmula 6.6. Fórmula para calcular el tiempo en función del valor actual de una anualidad.

Para $Ai/R < 1$, n es real. También puede calcularse n mediante interpolación de tablas.

Caso de acumulación de fondos o valor futuro

¿Cuántos depósitos de \$ 25.000 debe hacer una empresa cada trimestre para obtener \$ 750.000, considerando una tasa de interés del 15% anual capitalizable trimestralmente?

$$R = \$\ 25.000;\ \ S = \$\ 750.000;\ \ i = \frac{0{,}15}{4} = 0{,}0375;\ \ n = ?$$

Aplicamos la fórmula 6.5

$$n = \frac{\log\left(\frac{Si}{R}+1\right)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{750.000(0{,}0375)}{25.000}+1\right)}{\log(1+0{,}0375)} = \frac{\log(2{,}125)}{\log(1{,}0375)} = \frac{0{,}327358}{0{,}015988}$$

n = 20,47516 depósitos trimestrales

Se hacen 20 depósitos de \$ 25.000 y un último depósito menor. Éste puede calcularse en el caso de que se realice conjuntamente con el vigésimo depósito.

$$750.000 = 25.000\left[\frac{(1+0{,}0375)^{20}-1}{0{,}0375}\right]+x$$

$$750.000 = 25.000(29{,}017387) + x$$

$$750.000 = 725.434{,}66 + x$$

$$x = \$\ 24.565{,}34$$

Son 20 depósitos de \$ 25.000 y un último depósito de \$ 24.565,34, coincidente con el vigésimo depósito.
También puede calcularse el valor del último depósito un trimestre después:

$$750.000 = 25.000\left[\frac{(1+0{,}0375)^{20}-1}{0{,}0375}\right](1+0{,}0375)+x$$

$$750.000 = 25.000[(29{,}017387)(1{,}0375)] + x$$
$$750.000 = 752.638{,}46 + x$$

Si transcurre un trimestre adicional al vigésimo, no se requiere realizar ningún otro depósito puesto que el valor acumulado excede los \$ 750.000 en \$ 2.638,46.

Caso de pago de deudas
¿Cuántos pagos de \$ 12.000 debe hacer una empresa cada mes para cancelar una deuda de \$ 690.000, considerando una tasa de interés del 18%, capitalizable mensualmente?

$$R = \$\ 12.000;\ \ A = \$\ 690.000;\ \ i = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015;\ \ n = ?$$

Se aplica la fórmula 6.6.

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{690.000(0{,}015)}{12.000}\right)}{\log(1 + 0{,}015)} = \frac{\log(1 - 0{,}8625)}{\log(1{,}015)}$$

Nota: Ai/R < 1; 0,8625 < 1 para que sea factible el cálculo de *n*.

$$n = \frac{\log(0{,}1375)}{\log(1{,}015)} = \frac{0{,}862697}{0{,}006466} = 133{,}4206 \text{ meses}$$

Debe hacer 133 pagos mensuales de \$ 12.000 y un pago mensual menor.

Para calcular el último pago después de 1 mes se tiene:

$$690.000 = 12.000\left[\frac{1 - (1 + 0{,}015)^{-133}}{0{,}015}\right] + x\,(1 + 0{,}015)^{-134}$$

$$690.000 = 12.000(57{,}463757) + x(0{,}136003)$$
$$690.000 = 689.565{,}09 + x(0{,}136003)$$

$$\frac{434{,}91}{0{,}136004} = x$$

$$x = \$\ 3.197{,}78$$

Se ha tomado como fecha focal el inicio de la anualidad.

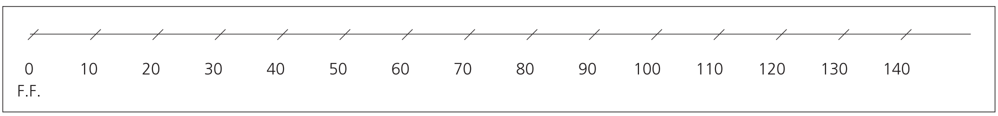


Gráfico 6.9. Solución gráfica del ejemplo

Son 133 pagos de \$ 12.000 y un pago final de \$ 3.197,78, un mes más tarde.
Así mismo, puede calcularse el pago final en la misma fecha del último pago completo:

$$690.000 = 12.000\left[\frac{1 - (1 + 0{,}015)^{-133}}{0{,}015}\right] + x\,(1{,}015)^{-133}$$

$$690.000 = 12.000(57{,}46376) + x\,(0{,}13804)$$
$$690.000 = 689.565{,}12 + x\,(0{,}13804)$$

$$x = \frac{434{,}88}{0{,}13804}$$

$$x = \$\ 3.150{,}39$$

Son 133 pagos de \$ 12.000 y un último pago de \$ 3.150,39, coincidente con el pago número 133.

Cálculo de la tasa de interés (i)

El cálculo de la tasa de interés por período de pago (i) se puede calcular de dos modos: a) a partir de la fórmula del monto (S), o b) a partir de la fórmula del valor actual (A) en una anualidad en la cual se conozcan las demás variables: R y n.

A partir de la fórmula 6.1 del monto de una anualidad (S).

$$\frac{S}{R} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Fórmula 6.7. Fórmula para calcular la tasa en función del monto.

Se resuelve por interpolación de tablas o por aproximaciones, dando diferentes valores a (i).

A partir de la fórmula del valor actual (A) de una anualidad.

$$\frac{A}{R} = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Fórmula 6.8. Fórmula para calcular la tasa en función del valor actual de una anualidad.

Se resuelve por interpolación de tablas o por aproximaciones, dando diferentes valores a (i).

Ejemplo

¿Entonces cuál será la tasa de interés anual, capitalizable trimestralmente, a la que una serie de depósitos de \$ 30.000 efectuados al final de cada trimestre podrá constituir un fondo de \$ 800.000 en 5 años?

$$S = \$\ 800.000;\ \ R = \$\ 30.000;\ n = (5)(4) = 20$$

Aplicamos la fórmula 6.7:

$$\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{800.000}{30.000} = \frac{(1+i)^{20} - 1}{i}$$

$$26{,}6667 = \frac{(1+i)^{20} - 1}{i}$$

Utilizando las tablas de $= \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Buscamos i cuando $n = 20$

Valor de *i*	**Valor en tablas**		
0,030	26,870374	26,666666	se resta del valor menor
<u>0,025</u>	<u>25,544657</u>	<u>25,544657</u>	
0,005	1,325716	1,122009	

Planteando una regla de tres:

$$0{,}005 \;\text{———}\; 1{,}325716$$
$$x \;\text{———}\; 1{,}122009$$

$$x = \frac{(0{,}005)(1{,}122009)}{1{,}325716}$$

$x = 0{,}004231$

Entonces,

$i = 0{,}025 + 0{,}004231 = 0{,}029231$

$i = 2{,}92\%$ (tasa trimestral)

$i = (0{,}029231)(4) = 0{,}116926$

$i = 11{,}6926\%$ anual capitalizable trimestralmente

Ejemplo

Una persona debe realizar 90 pagos de $ 200,00 a fines de cada mes para cancelar una deuda de $ 7.500,00. ¿Cuál será la tasa de interés anual, capitalizable mensualmente, que tiene esa deuda?

A = $ 7.500; R = $ 200; $n = 90$; $i = ?$

Aplicamos la fórmula 6.8:

$$\frac{A}{R} = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\frac{7.500}{200} = \frac{1-(1+i)^{-90}}{i}$$

$$37{,}5 = \frac{1-(1+i)^{-90}}{i}$$

Se utiliza la tabla de $\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Valor en tablas para $n = 90$

Valor de *i*	**Valor en tablas**		
0,020	41,586929	37,500000	se resta del valor menor
<u>0,025</u>	<u>35,665768</u>	–<u>35,665768</u>	
–0,005	5,921160	1,834232	

Se plantea una regla de tres:

$$\begin{array}{rcl} -0{,}005 & \text{———} & 5{,}921160 \\ x & \text{———} & 1{,}83422 \end{array}$$

$$x = \frac{(-0{,}005)(1{,}83422)}{5{,}92116\,0}$$

$$x = 0{,}0015488$$

Como la serie es descendente, cuando la tasa de interés aumenta, se resta de la tasa de interés mayor:

$$\begin{array}{r} 0{,}0250000 \\ -\ \underline{0{,}0015488} \\ 0{,}0234512 \end{array}$$

$i = 0{,}0234512$
$i = 2{,}34512\%$ mensual
$i = (0{,}0234512)(12) = 28{,}8\%$ anual capitalizable mensualmente

Para averiguar a qué tasa efectiva es equivalente, se procede así:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{0{,}2814}{12}\right)^{12}$$

$i = 1{,}3207 - 1$
$i = 0{,}3207 = 32{,}07\%$ efectiva

Anualidades anticipadas

Las anualidades anticipadas (ciertas y simples) son aquellas que se efectúan o vencen al principio de cada período de pago o depósito, como es el caso de los arriendos o alquileres de edificios, oficinas, terrenos, casa, pólizas de seguros, etcétera.
"Una anualidad anticipada es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen al principio del período de pago."[5]

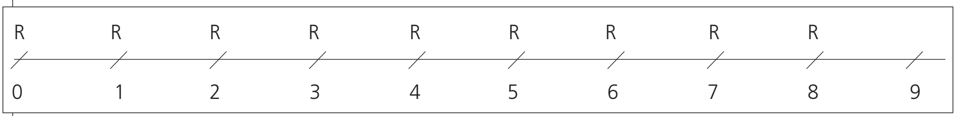


Gráfico 6.10. Expresión gráfica de una anualidad anticipada

[5] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 123.

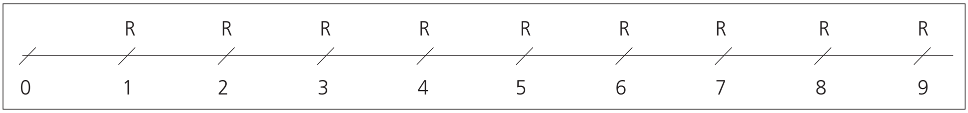


Gráfico 6.11. Expresión gráfica de una anualidad vencida

En las gráficas anteriores se observa la diferencia entre las anualidades anticipadas y las vencidas, según los pagos o depósitos que se realicen al comienzo o al final de cada período. En la anticipada, se comienza a pagar desde el período 0 y se termina en el período 8. En la vencida se empieza a pagar desde el período 1 y se termina en el período 9.

El monto de las anualidades anticipadas

El monto de una anualidad anticipada puede calcularse mediante la siguiente gráfica:

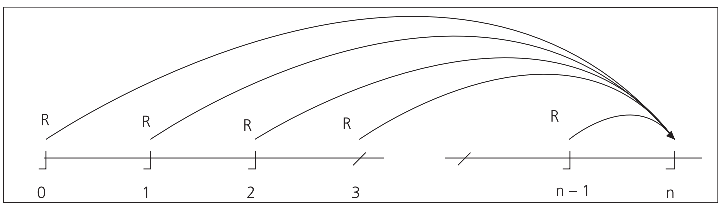


Gráfico 6.12. Expresión gráfica del monto de una anualidad anticipada

Donde **R** es la renta o pago periódico, y **n** el número de períodos de capitalización. Además, se considera una tasa de interés (i) por período de pago, un monto **S**, y como fecha focal, la del término de la anualidad.

$$S = R(1 + i)^n + R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} \ldots + R(1 + i)^3 + R(1 + i)^2 + R(1 + i)^1$$

Al ordenar y sacar el factor común R:

$$S = R[(1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} \ldots + (1 + i)^3 + (1 + i)^2 + (1 + i)^1]$$

que es una progresión geométrica cuya razón es:

$$(1 + i) > 1$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$ **Fórmula 6.9.** Fórmula de la progresión geométrica

Reemplazando y sacando el factor común $(1 + i)$, se tiene:

$$S = R\left[\frac{(1+i)\,(1+i)^n - (1+i)}{(1+i) - 1}\right]$$

$$S = R\,(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Fórmula 6.10. Fórmula del monto de una anualidad anticipada.

¿Si una empresa deposita al principio de cada trimestres $ 5.000 a una tasa de interés del 12% anual, capitalizable trimestralmente, ¿cuánto habrá acumulado en 5 años?

$$S = ?;\ \ R = 5.000;\ 1 = \frac{0,12}{4} = 0,03;\ n = (5)(4) = 20$$

Se aplica la fórmula 6.10.

$$S = 5.000(1 + 0,03)\left[\frac{(1 + 0,03)^{20} - 1}{0,03}\right]$$

$$S = 5.000(1,03)(26,870374) = \$\ 138.382,43$$

El valor actual de las anualidades anticipadas

El valor actual de una anualidad anticipada puede calcularse en forma análoga al monto; pero se toma como fecha focal el inicio de la anualidad.

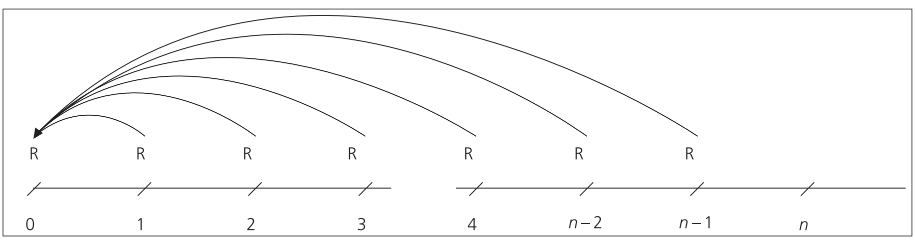


Gráfico 6.13. Expresión gráfica del valor actual de una anualidad anticipada (siguiente página)

Sea **R** la renta, ***n*** el número de períodos de pago, ***i*** la tasa de interés por período de pago.

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \ldots.\ R(1+i)^{-(n-1)}$$

Sacando el factor común,

$$A = R[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ \ldots\ (1+i)^{-n+1}]$$

Resulta una progresión geométrica cuya razón es $(1 + i)^{-1} < 1$. Luego se utiliza la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$$A = R\left[1 + \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}(1+i)^{-n+1}}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

$$A = R\left[1 + \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1(1+i)^{-n+1}}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}\right]$$

$$A = R\left[1 + \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1}{1+i}}\left(\frac{1-\{1+i\}^{-n+1}}{1+i-1}\right)\right]$$

$$A = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

Fórmula 6.11. Fórmula del valor actual de una anualidad anticipada.

También hay otra forma de expresión de la anualidad anticipada:

$$A = R + R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

Ejemplo

Si una empresa realiza pagos al principio de cada mes por un valor de $ 1.800 a una tasa de interés del 15% anual, capitalizable mensualmente, ¿cuánto habrá pagado de capital en 7 años (valor de la deuda original)?

$$A = ?;\ R = \$\ 1.800;\ i = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125;\ n = (7)(12) = 84$$

Apliquemos la fórmula 6.11.

$$A = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$A = 1.800\left[1 + \frac{1-(1{,}0125)^{-84+1}}{0{,}0125}\right]$$

$$A = 1.800\left[1 + \frac{1-(1{,}0125)^{-83}}{0{,}0125}\right]$$

$$A = 1.800(52{,}469963)$$

$$A = \$\ 94.445{,}93$$

Gradientes

Cuando se manejan series de pagos, cuotas o valores que crecen o decrecen de manera uniforme, se trata de *gradientes*. Se usan para calcular cuotas crecientes y decrecientes, proyección de presupuestos y otras operaciones similares.
Algunos autores e investigadores de la matemática financiera han diseñado una serie de fórmulas para hacer estos cálculos en forma rápida y normalizada. A continuación, se presentan algunos ejemplos en los que se analizan los aspectos fundamentales de este concepto.

Ejemplo

Un negocio de panadería tiene registrados los siguientes gastos mensuales en harina:

Mes	Gasto real ($)
1	79.900
2	81.050
3	81.950
4	83.025
5	83.990
6	85.010

Tabla 6.2. *Tabla de gastos mensuales del negocio de panadería.*

¿Cuál será su proyección de gasto para los próximos 6 meses, si se considera una tasa del interés del 1,5% mensual?
Para resolver este problema se recurrirá al modelo establecido por Alberto Álvarez Arango y otros autores.[6]

Mes	Gasto real ($)	Gasto aproximado ($)	En forma de gradiente ($)
1	79.900	80.000	80.000 + 0
2	81.050	81.000	80.000 + 1.000
3	81.950	82.000	80.000 + 2.000
4	83.025	83.000	80.000 + 3.000
5	83.990	84.000	80.000 + 4.000
6	85.010	85.000	80.000 + 5.000

Tabla 6.3. *Tabla de gastos en forma de gradientes.*

Proyección para los próximos 6 meses con i = 1,5% mensual:

Mes	Gasto aproximado en forma de gradiente ($)
7	85.000 [1 + 0,015(1)] = 86.275
8	85.000 [1 + 0,015(2)] = 87.550
9	85.000 [1 + 0,015(3)] = 88.825
10	85.000 [1 + 0,015(4)] = 90.100
11	85.000 [1 + 0,015(5)] = 91.375
12	85.000 [1 + 0,015(6)] = 92.650

Tabla 6.4. *Tabla de gastos proyectados en forma de gradientes.*

[6] A. Álvarez Arango, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1995.

En este ejemplo se supone que la tasa de interés no varía durante el tiempo de la proyección.

Ejemplo

Una empresa tiene que realizar 5 pagos mensuales para cancelar su deuda de acuerdo con el siguiente detalle:

Cuota	Valor de pago ($)
1	500
2	525
3	550
4	575
5	600
Total	2.750

Tabla 6.5. *Tabla de gastos del ejemplo 6.11.*

Si se considera una tasa de interés del 9% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor de la cuota uniforme que reemplazaría los citados pagos?

Primero se calcula el valor actual de la deuda:

$$A = 500(1{,}0075)^{-1} + 525(1{,}0075)^{-2} + 550(1.0075)^{-3}$$
$$+ 575(1{,}0075)^{-4} + 600(1{,}0075)^{-5}$$
$$A = 496{,}28 + 517{,}21 + 537{,}81 + 558{,}07 + 578{,}00$$
$$A = \$\ 2.687{,}37$$

Luego se calcula el valor de la cuota uniforme, aplicando la fórmula 6.4:

$$R = \frac{2.687{,}37}{\dfrac{1 - (1{,}0075)^{-5}}{0{,}0075}}$$

$R = \$\ 549{,}63$

Esta cuota sirve para hacer presupuesto

Actividades de ejercitación

1. Calcule el monto de una serie de depósitos de $ 3.000,00 cada 6 meses, durante 8 años al 7% anual capitalizable semestralmente. Calcule también los intereses generados.

2. Calcule el valor actual de una serie de pagos de $ 900,00 cada mes durante 15 años a una tasa del 12% anual capitalizable mensualmente. Calcule también los intereses generados.

3. Una empresa desea formar un fondo de jubilación para sus empleados; para lo cual descuenta $ 25,00 cada mes a cada empleado de su sueldo, durante 35 años y los deposita en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 4,2% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto habrá acumulado cada trabajador? ¿Cuánto de intereses?

4. Calcule el monto destinado para reposición de un activo fijo, de una serie de depósitos de $ 1.500,00 cada trimestre durante 10 años, a una tasa de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente. Calcule también los intereses generados.

5. Una empresa debe 60 cuotas de $ 850,00 pagaderos al final de cada mes. Calcule el valor actual de la deuda, considerando una tasa de interés del 9% anual capitalizable mensualmente.

6. ¿Qué opción le conviene más al comprador de un automóvil: $ 12.000,00 al contado; o, $ 4.000,00 al contado y 23 cuotas de $ 400,00 al final de cada mes, considerando una tasa de interés del 15% anual capitalizable mensualmente?

7. ¿Qué cantidad mensual debe depositar un trabajador para su jubilación, durante 35 años, desde el año 2000, en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 6% anual capitalizable mensualmente, si se tiene el propósito de recibir una pensión mensual de $ 750,00 desde año desde el año 2035 hasta el año 2050?

8. Una empresa necesita acumular $ 12.000,00 en 10 años. ¿Qué cantidad de dinero debe depositar al final de cada trimestre en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 12% anual capitalizable trimestralmente?

9. ¿Qué cantidad debe pagarse en cada mes con el propósito de cancelar una deuda de $ 15.000,00 durante 12 años, considerando una tasa de interés del 9% anual capitalizable mensualmente?

10. Una empresa necesita acumular $ 10.000. Para eso hace depósitos semestrales de $ 300 a una tasa de interés del 14% anual capitalizable semestralmente. ¿Cuántos depósitos completos debería realizar y de cuánto debería ser un depósito adicional, realizado en la misma fecha del último depósito, para completar el monto requerido?

11. En el problema anterior, ¿de cuánto sería el depósito adicional, si lo realizara un semestre después del último depósito completo?

12. ¿Cuántos pagos completos de $ 1.800 al final de cada mes son necesarios para cancelar una deuda de $ 12.000, considerando una tasa de interés del 15% anual, capitalizable mensualmente? ¿Con qué pago final, coincidente con el último pago completo, se cancelará la citada deuda?

13. En el problema anterior, ¿con qué pago adicional, realizado un mes después del último pago completo, se cancelaría la deuda?

14. ¿Cuál será la tasa de interés anual, capitalizable trimestralmente, a la que una serie de depósitos de $ 1.000 cada trimestre podrá llegar a constituir un fondo de $ 50.000 en 10 años?

15. Una deuda de $ 12.000 debe cancelarse en 15 años, mediante pagos que se realizan al final de cada mes. Cada pago es de $ 121,71. ¿Qué tasa de interés anual se aplica a esos pagos? ¿A qué tasa efectiva es equivalente?

16. Una empresa deposita al principio de cada trimestre $ 1.500 durante 5 años. ¿Cuánto habrá acumulado, considerando una tasa de interés del 7% anual, capitalizable trimestralmente?

17. Una empresa realiza pagos al principio de cada mes, por el valor de $ 2.800,00, considerando una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente, ¿Cuánto habrá pagado de capital en 10 años? ¿Cuánto de intereses?

18. Una empresa solicita un préstamo a un banco a 3 años de plazo, indicando que puede pagar cuotas de hasta $ 900 mensuales. Calcule el valor del préstamo que le concedería el banco si le cobra una tasa de interés del 12% anual capitalizable mensualmente.

19. Una empresa necesita constituir durante 10 años un fondo de depreciación de $ 70.000 para reposición de maquinaria. Calcule el valor del depósito trimestral que deberá realizar en una institución financiera que paga una tasa de interés del 7% anual, capitalizable trimestralmente.

20. Calcule el valor de los depósitos mensuales que durante 40 años deberá hacer una empresa en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 6% anual capitalizable mensualmente, a fin de efectuar retiros de $ 500,00 mensuales durante los 15 años siguientes.

21. Adriana aporta $ 60,00 durante 45 años, para su jubilación, en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 3,6% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor del retiro mensual por jubilación, que tendría derecho Adriana durante 20 años.

22. Calcular el monto y el valor actual, con sus respectivos intereses, de una serie de rentas de $ 40,00 cada mes durante 35 años considerando una tasa del 6% anual con capitalización continua.

Respuestas

1. S = $ 62.913,09 I = $ 14.913,09

2. A = $ 74.989,50 I = $ 87.010,50

3. S = $ 23.843,48 I = $ 13.343,48

4. S = $ 81.401,84   I = $ 21.401,84

5. A = $ 40.947,37

6. La segunda opción $ 11.952,81

7. $ 62,38

8. $ 159,15

9. $170,70

10. Diecisiete (17) depósitos de $ 300 y un último depósito de $ 747,93.

11. $ 100,29 (17 depósitos de $ 300 y uno adicional de $ 100,29).

12. Ciento cuarenta y cuatro (144) pagos completos de $ 180,00 y un pago adicional de $ 41,94.

13. Ciento cuarenta y cuatro (144) pagos completos de $ 180,00 y un pago adicional, un mes más tarde, de $ 42,46.

14. 4,44% anual capitalizable trimestralmente.

15. a) 9% anual capitalizable mensualmente.   b) 9,38% efectiva, anual

16. $ 35.552,42

17. A = $ 221.036,74   I = 114.936,26

18. $ 27.096,75

19. $ 1.223,05

20. $ 29,75

21. Un retiro mensual por jubilación de $ 472,87

22. Un monto acumulado de $ 57.185,8252
I = 57.185,8252 – 16.800 = $ 40.385,8252

Un valor pagado de $7.027,60
I = 16.800 – 7.027,60 = $ 9.772,40

Actividades de autoevaluación

1. Calcule el monto de una serie de depósitos de $ 100 cada trimestre durante 6 años y 9 meses, considerando una tasa de interés del 8% anual, capitalizable trimestralmente.

2. En el ejercicio anterior, calcule los intereses que genera la operación.

3. Al nacer su hijo, un padre empieza a realizar una serie de depósitos mensuales de $ 200 en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 6% anual capitalizable mensualmente. Calcule cuánto habrá acumulado cuando su hijo cumpla 18 años.

4. En el problema anterior, calcule los intereses que genera la operación.

5. Una empresa requiere conformar un fondo de valor futuro para reemplazar equipos de trabajo, mediante cuotas trimestrales de $ 900. ¿Cuánto habrá acumulado en 10 años, que es la vida útil de los equipos, si se considera una tasa de interés del 4% anual, capitalizable trimestralmente?

6. El cliente de un banco solicita un préstamo a 5 años de plazo e indica que su capacidad de pago es de $ 700 mensuales. Calcule el valor del préstamo que el banco le acreditaría, si le cobra una tasa de interés del 12% anual, capitalizable mensualmente.

7. En el problema anterior, calcule los intereses que pagaría ese cliente.

8. Una empresa desea acumular un fondo de $90.000 para reposición de maquinarias, mediante depósitos trimestrales durante 7 años en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 6% anual, capitalizable trimestralmente. Calcule el valor del depósito trimestral.

9. Felipe recibe un préstamo de $ 35.000 a 10 años de plazo para la adquisición de un departamento, comprometiéndose a pagar cuotas mensuales a una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente. Calcule el valor de la cuota mensual.

10. En el problema anterior, calcule los intereses que debería pagar Felipe.

Respuestas

1. $R = \$\ 100, \quad i = \dfrac{0{,}08}{4} = 0{,}02, \quad n = \dfrac{[(6)(12) + 9]}{3} = 27$

Se aplica la fórmula 6.1:

$$S = 100\ \frac{(1 + 0{,}02)^{27} - 1}{0{,}02}$$

$$S = \$\ 3.534{,}43$$

2. $I = S - n(R)$

$I = 3.534,43 - (27)(100)$

$I = \$ \ 834,43$

3. $R = \$ \ 200;\ \ i = \dfrac{0,06}{12} = 0,005;\ \ n = (18)(12) = 216$

Se aplica la fórmula 6.1:

$$S = 200\left[\frac{(1 + 0,005)^{216} - 1}{0,005}\right]$$

$S = \$ \ 77.470,64$

4. $I = S - (n)(R)$

$I = 77.470,64 - 218\ (200)$

$I = \$ \ 34.270,64$

5. $R = \$ \ 900;\ \ i = \dfrac{0,04}{4} = 0,01;\ \ n = \dfrac{(10)(12)}{3} = 40$

$$S = 900\left[\frac{(1 + 0,01)^{40} - 1}{0,01}\right]$$

$S = \$ \ 43.997,74$

6. $R = \$ \ 700;\ \ i = \dfrac{0,12}{12} = 0,01;\ \ n = (5)(12) = 60$

Se aplica la fórmula 6.2:

$$A = 700\ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-60}}{0,01}$$

$A = \$ \ 31.468,53$

7. $I = (n)(R) - A$

$I = (60)(700) - 31.468,53$

$I = 42.000 - 31.468,53$

$I = \$ \ 10.539,47$

8. $S = 90.000;\ \ i = \dfrac{0,06}{4} = 0,015;\ \ n = \dfrac{(7)(12)}{3} = 28$

Se aplica la fórmula 6.3:

$$R = \frac{90.000}{\dfrac{(1 + 0,015)^{28} - 1}{0,015}}$$

$R = \$ \ 2.610,10$

9. A = \$ 35.000; $i = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075$; $n = (10)(12) = 120$

Se aplica la fórmula 6.4:

$$R = \frac{35.000}{\dfrac{1 - (1 + 0{,}0075)^{-120}}{0{,}0075}}$$

R = \$ 443,3652

10. I = (n)(R) – A

I = (120)(443,3652) – 35.0000

I = 53.203,82 – 35.000

I = \$ 18.203,82

Actividades de repaso

1. ¿En qué consiste una anualidad o renta?

2. ¿Cómo se clasifican las anualidades?

3. ¿Qué es una anualidad cierta, ordinaria y simple?

4. ¿Cuál es la fórmula del monto de una anualidad ordinaria?

5. ¿Cuál es la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria?

6. ¿Cuál es la fórmula de la renta o depósito periódico de una anualidad ordinaria?

7. ¿Cómo se calcula el tiempo en una anualidad en función del monto y en función del valor actual?

8. ¿Cómo se calcula la tasa de interés de una anualidad en función del monto y en función del valor actual?

9. ¿Cuál es la fórmula del monto de una anualidad anticipada?

10. ¿Cuál es la fórmula del valor actual de una anualidad anticipada?

11. ¿Qué son y para qué se utilizan las gradientes?

Complete su aprendizaje con el CD que acompaña a este libro

Amortización y fondos de amortización

VIII

Presentación

La amortización y los fondos de valor futuro, o fondos de amortización, son aplicaciones de las anualidades o rentas estudiadas en el capítulo anterior. Las amortizaciones se utilizan para programas de endeudamiento a largo plazo; y fondos de amortización, para constituir fondos de valor futuro.

Actualmente, el sistema de amortización gradual tiene una utilización bastante acentuada en todo el sistema financiero, compuesto por bancos, cooperativas, mutualistas, financieras, etc., en lo que respecta al crédito a mediano y largo plazos, ya sea para la compra de bienes inmuebles –como terrenos, casas o departamentos– o para la adquisición de automotores, maquinaria o crédito comercial. Así mismo, para la constitución de fondos de valor futuro o fondos de depreciación, con el propósito de reponer activos fijos o para formar capitales o seguros cuyo propósito sea el otorgar pensiones.

Objetivo general

- Conocer y manejar el proceso de amortización gradual, así como el proceso de formación de fondos de valor futuro.

Objetivos específicos

- Calcular la renta o pago periódico.
- Elaborar las tablas de amortización gradual.
- Reconstruir tablas de amortización gradual.
- Calcular reajustes de las tablas por variación en la tasa de interés en los endeudamientos por amortización gradual.
- Calcular los derechos del acreedor y el deudor.
- Elaborar las tablas de valor futuro.
- Reconstruir las tablas de valor futuro o de fondos de amortización.
- Manejar la amortización gradual y los fondos de valor futuro, con capitalización continua.
- Conocer las Unidades de Valor Constante (UVC) y su forma de cálculo
- Aplicar en las Amortizaciones la capitalización continua
- Aplicar en los Fondos de Valor Futuro la capitalización continua.

CONTENIDO

Amortización

Es muy frecuente la utilización del término *amortizar* como *el proceso de extinción de una deuda, con su interés compuesto, mediante una renta o pago durante un determinado número de período*. En este libro se empleará este término en ese sentido.

"Amortizar es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses por medio de pagos periódicos."[1]

"Amortizar: se dice que un documento que causa intereses está amortizado cuando todas las obligaciones contraídas (tanto capital como intereses) son liquidadas mediante una serie de pagos (generalmente iguales) hechos en intervalos de tiempos iguales."[2]

Cálculo de la cuota o renta

En la amortización cada renta o pago sirve para cubrir los intereses y reducir el capital; es decir, cada pago está compuesto por capital e intereses. La composición del pago o renta, aunque es constante en su cantidad, varía en función del número de períodos de pago: mientras aumenta el número, disminuirá el interés y se incrementará el capital por cuota. En el siguiente gráfico puede observarse el comportamiento de la amortización.

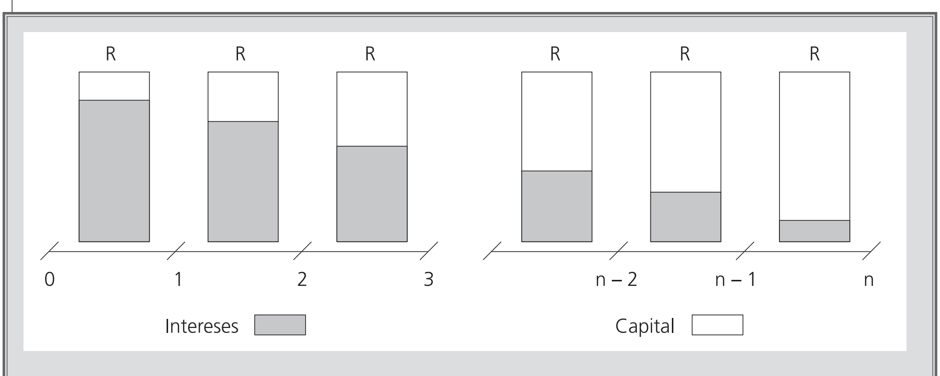


Gráfico 7.1. Comportamiento de una amortización

En general, cuando el número de cuotas es grande, en las primeras se paga más interés y en las últimas más capital. Para el cálculo de la cuota o renta se utiliza la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad vencida.

$$R = \frac{A}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

[1] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 175.
[2] F. Ayres Jr., *Teoría y 500 problemas resueltos*, México, McGraw-Hill, 1971, p. 95.

Por ejemplo, para calcular el valor del pago semestral de una empresa que consigue un préstamo de \$ 3.000 con una tasa de interés del 14% anual capitalizable semestralmente, el cual será amortizado mediante pagos iguales, cada semestre, durante 3 años y 6 meses, se realiza el siguiente procedimiento:

$$R = \frac{A}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$A = \$\ 3.000;\quad R = ?;\quad n = \frac{[(3)(12)+6]}{6} = 7 \qquad m = \frac{360}{180} = 2$$

$$i = \frac{0{,}14}{2} = 0{,}07$$

$$R = \frac{3.000}{\dfrac{1-(1{,}07)^{-7}}{0{,}07}} = \frac{3.000}{5{,}389289} = \$\ 556{,}66$$

El valor del pago o cuota semestral será de \$ 556,66. En esa cuota están incluidos el interés y el capital, este último se utiliza para reducir la deuda. Con el transcurso del tiempo y a medida que se van pagando cuotas, disminuye el interés y aumenta el capital por cada cuota, como se muestra en el gráfico 7.1, "Comportamiento de una amortización".

Capital insoluto y tabla de amortización

"La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como saldo insoluto o capital insoluto en la fecha..."

"El capital insoluto, justamente después de que se ha efectuado un pago, es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse."[3]

La parte de la deuda no pagada constituye el *saldo insoluto*, como se muestra en la siguiente tabla denominada "Tabla de amortización". Utilizando los datos del ejemplo anterior se detallan los períodos, el capital insoluto, el interés, la cuota y el capital pagado. Este tipo de tablas pueden elaborarse en el computador, en el programa EXCEL.

Período (1)	Capital insoluto al principio del período (2)	Interés vencido al final del período (3)	Cuota o pago (4)	Capital pagado por cuota al final del período (5)	Saldo deuda al final del período (6)
1	\$ 3.000	\$ 210	\$ 556,66	\$ 346.66	\$ 2.653,34
2	\$ 2.653,34	\$ 185,73	\$ 556,66	\$ 370.93	\$ 2.282,41
3	\$ 2.282,41	\$ 159,77	\$ 556,66	\$ 396.89	\$ 1.885,52
4	\$ 1.885,52	\$ 131,99	\$ 556,66	\$ 424.67	\$ 1.460,85
5	\$ 1.460,85	\$ 102,26	\$ 556,66	\$ 454,40	\$ 1.006,45
6	\$ 1.006,45	\$ 70,45	\$ 556,66	\$ 486.21	\$ 520,24
7	\$ 520,24	\$ 36,42	\$ 556,66	\$ 520.24	\$ 0,00
Total		\$ 896,62	\$ 3.896,62	\$ 3.000,00	

Tabla 7.1. *Tabla de amortización*

[3] Ídem.

Forma de elaboración de la tabla de amortización gradual

El interés vencido al final del primer período es:
$I = Cit$; $I = 3.000(0,07)(1) = \$ 210,00$
El capital pagado al final del primer período es:
Cuota – Interés = 556.66 – 210.000 = $ 346,66
El capital insoluto para el segundo período, que es a la vez el saldo de la deuda al final del primer período, es:
Capital al principio del primer período – Capital pagado al final de primer período
= 3.000 – 346,66 = $ 2.653,34
El interés vencido al final del segundo período es:
$I = 2.653,34(0,07)(1) = \$ 185,73$
El capital pagado al final del segundo período es:
556,66 – 185,73 = $ 370,92
El capital insoluto para el tercer período es:
2.653,34 – 370,93 = $ 2.282,41

y así sucesivamente hasta el último período, en el cual deben coincidir el capital insoluto al principio del último período con el capital pagado al final del último período, cuando se cancela la deuda. Como puede apreciarse, los intereses se calculan sobre los saldos deudores.

La columna (4) de la tabla 7.1., "Cuota o pago", menos la columna (3), "Interés vencido al final del período", deben dar como resultado la columna (5): "Capital pagado al final del período". La columna (6) es la diferencia de la columna (2) menos la columna (5) en cada período, tanto horizontal como verticalmente. A veces pueden ocurrir pequeñas diferencias debido a las aproximaciones; en estos casos, deben reajustarse.

Cálculo del saldo insoluto

El capital insoluto puede calcularse para cualquier período utilizando la fórmula del valor actual de una anualidad, con ligeras variaciones.
Con base en el ejemplo anterior, calculemos el capital insoluto después del quinto pago que corresponde al valor actual de los dos períodos que faltan por cubrirse. Sea P el saldo insoluto, *m* el número de cuotas pagadas, *n* el número total de cuotas y *k* el número de cuotas que quedan por pagar, entonces:

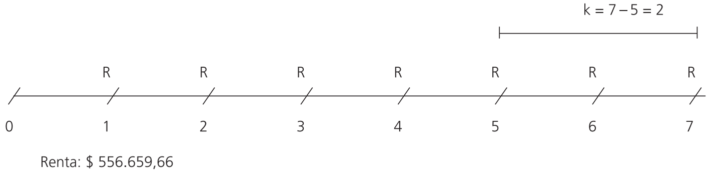


Gráfico 7.1. Solución gráfica del saldo insoluto

$$k = n - m$$
$$k = 7 - 5 = 2$$

En consecuencia, se tiene la siguiente fórmula del saldo insoluto:

$$P_m = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right]$$

Fórmula 7.1. Fórmula del saldo insoluto

$$P_5 = 556{,}66\ \frac{1-(1+0{,}07)^{-2}}{0{,}07}$$

$$P_5 = \$\ 1.006{,}45$$

Este valor se halla en la tabla de amortización como capital insoluto al principio del sexto período o, lo que es igual, el saldo de la deuda al final del quinto período.

Reconstrucción de la tabla de amortización

La tabla de amortización puede rehacerse en cualquier período; para ello es necesario calcular primero el saldo insoluto en el período que queremos rehacer la tabla, y luego el interés y el capital que correspondan a la determinada cuota.

Calculamos ahora la distribución del interés y capital de la cuota 6 del ejemplo citado anteriormente. Puesto que el saldo insoluto es $ 1.006.45 al comienzo del sexto período, el interés será:

$$(1.006{,}45)\ (0{,}07) = \$\ 70{,}45$$

El capital será:

$$\text{Cuota} - \text{Interés} = 556{,}66 - 70{,}45 = \$\ 486{,}21$$

y la tabla puede rehacerse así:

Período	Capital insoluto $	Interés vencido $	Cuota $	Capital pagado $	Saldo deuda al final del período $
6	1.006,45	70,45	556,66	486,21	520,24
7					

Tabla 7.2. *Reconstrucción de la tabla de amortización*

Ejemplo

Para calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización con interés sobre saldos de una deuda de $ 4.500, que se va a cancelar en 3 años mediante el sistema de amortización, con pagos al final de cada semestre a una tasa de interés del 12% capitalizable semestralmente, realizamos el siguiente procedimiento:

$$n = \frac{(3)(12)}{6} = 6; \quad i = \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06 \text{ semestral}$$

$$R = \frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{4.500}{\frac{1-\ (1+0{,}06)^{-6}}{0{,}06}}$$

$$R = \frac{4.500}{4{,}917324} = \$\ 915{,}13$$

Período	Saldo insoluto inicio período	Interés	Renta	Capital pagado	Saldo deuda final período
1	$ 4.500,00	$ 270,000	$ 915,13	$ 645,13	$ 3.854,87
2	3.854,87	231,29	915,13	683,84	3.171,03
3	3.171,02	190,26	915,13	724,87	2.446,16
4	2.446,16	146,77	915,13	768,36	1.677,80
5	1.677,80	100,67	915,13	814,46	863,33
6	863,33	51,80	915,13	863,33	0,00
Total		$ 990,78	$ 5.490,78	$ 4.500	

Tabla 7.3. *Tabla de amortización del ejemplo*

Calculemos el saldo insoluto inmediatamente después del pago 4 y la distribución del capital e intereses de la cuota 5.

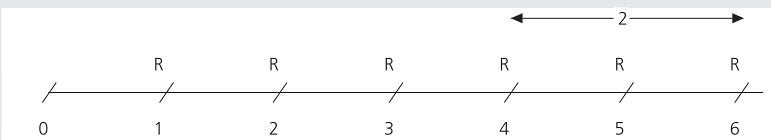


Gráfico 7.3. Solución gráfica del saldo insoluto después del pago 4

$$P_4 = 915{,}13\left(\frac{1-(1-0{,}06)^{-2}}{0{,}06}\right)$$

$$P_4 = \$\ 915{,}13(1{,}833393) = \$\ 1.677{,}80$$

El saldo insoluto es de $ 1.677,80

Distribución de la cuota 5

$I = (1.677{,}80)(0{,}06) = \$\ 100{,}67$ (interés)

Cuota – Interés = Capital pagado

$915{,}13 - 100{,}67 = \$\ 814{,}46$

Período de gracia

Con frecuencia se realizan préstamos a largo plazo con la modalidad de *amortización gradual*. Esto consiste en que *se incluye un período sin que se paguen cuotas (generalmente sólo se paga el interés), el cual se denomina período de gracia*, con el propósito de permitir a las empresas o instituciones operar libremente durante un tiempo y luego cubrir las cuotas respectivas.

Ejemplo

Una empresa consigue un préstamo por un valor de $ 20.000 a 10 años de plazo, incluidos 2 de gracia, con una tasa de interés del 9 1/2% anual capitalizable semestralmente, para ser pagado mediante cuotas semestrales por el sistema de amortización gradual. La primera cuota deberá pagarse un semestre después del período de gracia. ¿Cuál será la cuota semestral y el saldo insoluto inmediatamente después de haber pagado la cuota 5 y la distribución de la cuota 6, en lo que respecta al capital e intereses.

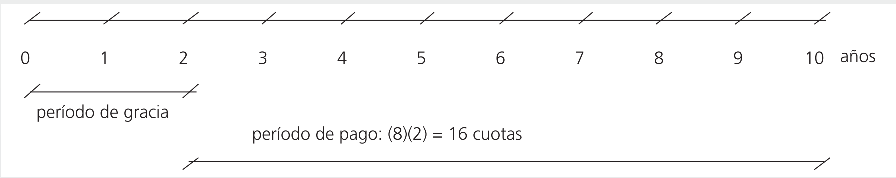


Gráfico 7.4. Expresión gráfica del período de gracia.

A continuación se presenta la gráfica para el saldo insoluto

$$k = 16 - 5 = 11$$

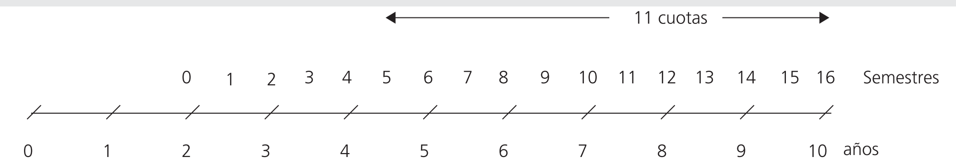


Gráfico 7.5. Expresión gráfica de la solución del saldo insoluto del ejemplo.

$$R = \frac{20.000}{\dfrac{1-(1+0{,}0475)^{-16}}{0{,}0475}} = \$\ 1.812{,}70$$

$$P_5 = 1.812{,}70\left[\frac{1-(1+0{,}0475)^{-11}}{0{,}0475}\right]$$

P_5 = $15.256,75 saldo insoluto por pagar (de capital, excluido interés)

La composición de la cuota 6 será, tanto de interés como de capital:

I = (15.256,75)(0,0475) = $ 724,69 de interés

Cuota – Interés = Capital pagado por cuota

1.812,70 – 724,69 = $ 1.088,01

Derechos del acreedor y del deudor

Cuando se adquiere un bien a largo plazo o se está pagando una deuda por el sistema de amortización gradual, generalmente se quiere conocer qué parte de la deuda está ya pagada en determinado tiempo, o también cuáles son ***los derechos del acreedor (parte por pagar) o los derechos del deudor (parte pagada)***.

La relación acreedor deudor se puede representar mediante la siguiente ecuación:

Derechos del acreedor + Derechos del deudor = Deuda[4]

DA + DD = DO

O también

Saldo insoluto + Parte amortizada = Deuda original

Ejemplo

Una persona adquiere una propiedad mediante un préstamo hipotecario de $ 120.000 a 15 años de plazo. Si debe pagar la deuda en cuotas mensuales iguales y se considera una tasa de interés del 1,5% mensual, ¿cuáles serán los derechos del acreedor y del deudor inmediatamente después de haber pagado la cuota?

Se calcula el valor de la cuota mensual:

$i = 0{,}015$; $n = (15)(12) = 180$ cuotas

$$R = \frac{120.000}{\frac{1 - (1 + 0{,}015)^{-180}}{0{,}015}} = \$\ 1.932{,}50$$

[4] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 179.

Se expresa el problema gráficamente:

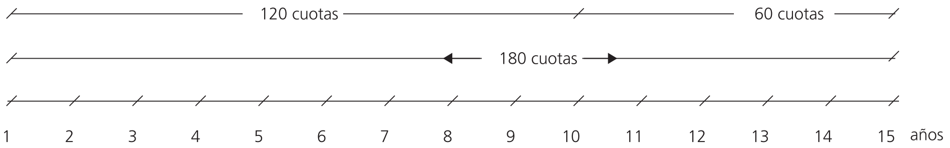


Gráfico 7.6. Expresión gráfica del ejemplo

Saldo insoluto + Parte amortizada = Deuda original

$$1.932{,}50\,\frac{1-(1+0{,}015)^{-60}}{0{,}015} + \text{Parte amortizada} = \$\ 120.000$$

76.102,58 + Parte amortizada = $ 120.000
120.000 – 76.102,58 = $ 43.897,42
$ 43.897,42 = Parte amortizada

La parte amortizada constituye los derechos del deudor, que son de $ 43.897,42.

Por lo tanto, luego de la cuota 120, se tiene que:

Derechos de acreedor + Derechos del deudor = Deuda original
76.102,58 + 43.897,42 = $ 120.000

Es decir que, inmediatamente después de que el deudor pague la cuota 120, sus derechos sobre la propiedad que adquiere son de $ 43.897,42 y el saldo de la deuda o saldo insoluto es $ 76.102,58 (derechos del acreedor).

Amortizaciones con reajuste de la tasa de interés

En el medio financiero es frecuente realizar contrataciones de préstamos con el sistema de *amortización gradual*, en cuyas cláusulas *se establece que la tasa de interés puede reajustarse cada cierto tiempo, de acuerdo con las fluctuaciones del mercado*.
En este tipo de casos, se necesita calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la última cuota con la tasa anterior y posteriormente calcular el valor de la cuota con la nueva tasa de interés y rehacer la tabla de amortización.

Ejemplo

Una empresa obtiene un préstamo de $ 50.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés del 7% anual capitalizable trimestralmente, que debe ser pagado en cuotas trimestrales por el sistema de amortización gradual. Es necesario: a) calcular el valor de la cuota trimestral; b) elaborar la tabla de amortización en los períodos 1 y 2; c) si la tasa de interés se reajusta al 6% anual capitalizable trimestralmente luego del pago 16, realizar el cálculo de la nueva cuota trimestral y reconstruir la tabla en los períodos 17, 18, 19 y 20.

a) Se calcula la renta:

$$R = \frac{50.000}{\dfrac{1-(1+0{,}0175)^{-20}}{0{,}0175}} = \$\ 2.984{,}56$$

b) Se elabora la tabla para los períodos 1 y 2:

Período	Saldo insoluto $	Interés $	Renta $	Capital pagado por cuota $	Saldo deuda $
1	50.000	875,00	2.984,56	2.109,56	47.890,44
2	47.890,44	838,08	2.984,56	2.146,48	45.743,96

Tabla 7.4. *Construcción de la tabla de amortización para los períodos 1 y 2*

c) La tasa de interés se reajusta al 6% anual capitalizable trimestralmente luego del pago 16. Por consiguiente, se calcula el saldo insoluto luego del pago 16.

$$P_{16} = 2.984{,}56\left[\frac{1-(1+0{,}0175)^{-4}}{0{,}075}\right] = \$\ 1433{,}68$$

Calculemos la nueva renta:

$$R = \frac{11.433{,}68}{\dfrac{1-(1+0{,}015)^{-4}}{0{,}015}} = \$\ 2.966{,}41$$

Reconstruimos la tabla con la nueva renta y la tasa de interés del 24% anual capitalizable trimestralmente:

Período $	Saldo insoluto $	Interés	Renta por cuota $	Capital pagado final período $	Saldo deuda $
17	11.433,68	171,5052	2.966,41	2.794,90	8.638,77
18	8.638,77	129,58	2.966,41	2.836,83	5.801,95
19	5.801,95	87,03	2.966,41	2.879,38	2.922,57
20	2.922,57	43,84	2.966,41	2.922,57	0,00

Tabla 7.5. *Reconstrucción de la tabla de amortización del periodo 17 hasta el 20.*

Cálculo de la renta cuando no coincide el período de pago con el período de capitalización

Cuando se debe calcular la renta y el período de pago no coincide con el período de capitalización, o viceversa, es necesario transformar la tasa de interés o la capitalización, utilizando la ecuación de equivalencia del capítulo cinco de este libro, de manera que coincidan tanto la capitalización como el período de pago.

Ejemplo

Una empresa obtiene un préstamo hipotecario de amortización gradual por un valor de \$ 90.000 a 5 años de plazo, a una tasa de interés del 9% anual, capitalizable semestralmente. Deben pagarse en cuotas trimestrales y hay que calcular el valor de cada una de éstas. La pregunta previa sería: ¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, es equivalente una tasa del 9% anual, capitalizable semestralmente?

A partir de la ecuación de equivalencia.

$$\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^2=\left(1+\frac{j}{4}\right)^4$$

$$1{,}092025=\left(1+\frac{j}{4}\right)^4$$

$$1{,}022252415=\left(1+\frac{j}{4}\right)$$

$j = 8{,}9\%$ anual capitalizable trimestralmente

Luego se calcula la renta:

$$i=\frac{0{,}089}{4}=0{,}02225;\ n=\frac{(5)(12)}{3}=20$$

$$R=\frac{90.000}{\dfrac{1-(1+0{,}02225)^{-20}}{0{,}02225}}=5.624{,}34$$

El valor de la cuota trimestral es de \$ 5.624,34.

Ejemplo de amortización gradual con capitalización continua

Una empresa obtiene un préstamo de \$ 10.000,00 a 5 años de plazo, con una tasa de interés del 9% anual con capitalización continua, calcule el valor de la cuota mensual y el total de intereses que tiene que pagar.

$t = 5$ años $\qquad j = 0{,}09 \qquad n = 5(12) = 60$ pagos

$$\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = e^{-0{,}09} \qquad \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} = 0{,}913931185271$$

$$1 + \frac{j}{12}^{12} = 0{,}992528$$

$$j = 0{,}08966334217$$

$$i = \frac{0{,}08966334217}{12} = 0{,}007471945$$

$$R = \frac{10.000{,}00}{\frac{1 - (1 + 0{,}007471945)^{-60}}{0{,}007471945}} = 207{,}4202$$

Intereses 207,4202 (60) – 10.000,00 = 12.445,212 – 10.000,00 = \$2.4445,212

Fondos de amortización o de valor futuro

"Un fondo de amortización es una cantidad que se va acumulando mediante depósitos periódicos que devengan cierto interés, de modo que en número determinado de períodos se obtenga un monto prefijado."[5]

Los fondos de amortización son depósitos periódicos que ganan interés con la finalidad de acumular un determinado capital; este sistema se utiliza para reposición de activos fijos, creación de fondos de reserva, pago de prestaciones futuras, seguros, etcétera.

Las cuotas para constituir un fondo de amortización, pueden calcularse mediante la fórmula del monto de una anualidad, puesto que la fecha focal que se toma como referencia es el término de la anualidad, fecha en la que se debe completar el capital o cantidad prefijada.

Al igual que en la amortización gradual, se puede elaborar la tabla de fondo de amortización o tabla de valor futuro, en la que los depósitos o cuotas ganan interés.

Ejemplo

Una empresa desea acumular un capital de \$ 60.000 en 3 años mediante depósitos semestrales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés del 14% capitalizable semestralmente. Calculemos la cuota semestral y elaboremos la tabla de fondo de amortización correspondiente.

Se calcula la cuota:

$$S = \$\ 60.000;\ n = (3)(2) = 6\ ;\ i = \frac{0{,}14}{2} = 0{,}07 \text{ semestral}$$

[5] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 179.

www.elsolucionario.net

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$R = \frac{60.000}{\frac{(1+0,07)^6 - 1}{0,07}} = \frac{60.000}{7,153291} = \$\ 8.387,75$$

Luego se elabora la tabla:

Período	Depósito o renta $	Aumento de interés $	Total añadido al fondo $	Fondo acumulado $
1	8.387,75		8387,75	8.387,75
2	8.387,75	587,14	8.974,89	17.362,64
3	8.387,75	1.215,38	9.603,13	26.965,77
4	8.387,75	1.887,60	10.275,35	37.241,12
5	8.387,75	2.606,88	10,994,62	48.235,75
6	8.387,75	3.376,50	11.764,25	60.000
Total	50.326,50	9.673,5	60.000	

Tabla 7.6. *Tabla de fondo de amortización o de valor futuro del ejemplo*

Forma de cálculo:
En el primer período solamente se registra el valor de la renta; en el segundo período se consideran los intereses generados por la primera renta:

I = (8.387,75)(0,07) = $ 587,14

Se suman los intereses más la renta y se tiene:

Total añadido al fondo = 587,14 + 8.387,75 = $ 8.974,89

El fondo acumulado al final del período se obtiene sumando el total añadido al fondo más el fondo acumulado del período anterior:

Fondo acumulado al final del período:
8.974,89 + 8.387,75 = $ 17.362,64

Y así sucesivamente hasta el último depósito o renta con el cual se acumula el monto de $ 60.000.

El saldo insoluto en fondos de amortización

En los fondos de valor futuro también se puede calcular el denominado saldo insoluto, que en este caso es lo que queda por acumular para conseguir el monto prefijado, sin tener que elaborar toda la tabla. Para el efecto se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{Saldo insoluto} = \text{Monto} - \text{Valor acumulado}$$

$$\text{Saldo insoluto} = \text{Monto} - R\left[\frac{(1+i)^{m}-1}{i}\right]$$

donde ***m*** es el número de depósitos o rentas.

Ejemplo

En el ejemplo anterior se pide calcular el valor acumulado y el saldo insoluto en el cuarto período.

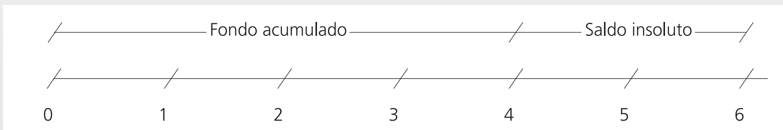


Gráfico 7.7. Expresión gráfica del valor acumulado y saldo insoluto

$$SI = 60.000 - 8.387{,}75 \;\; \frac{(1+0{,}07)^{4}-1}{0{,}07}$$

$$SI = 60.000 - 37.241{,}12$$
$$SI = \$\ 22.758{,}80$$

Ejemplo

Una empresa requiere constituir un fondo de amortización de $ 50.000 mediante depósitos trimestrales durante 4 años, con el propósito de reemplazar cierta maquinaria. Si se considera una tasa de interés del 15% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuál será el valor acumulado inmediatamente después de haber hecho el depósito 12?

Primero se calcula la renta o depósito trimestral:

$$n = \frac{(4)(13)}{3} = 16; i = \frac{0{,}15}{4} = 0{,}0375$$

$$R = \frac{50.000}{\dfrac{(1+0{,}0375)^{16}-1}{0{,}0375}} = \$\ 2.337{,}24$$

Luego, el valor acumulado en el período 12:

$$S = 2.337{,}24\left[\frac{(1+0{,}0375)^{12}-1}{0{,}0375}\right] = \$\ 34.619{,}49$$

Por último, el saldo insoluto inmediatamente después del período 12.

$$SI = 50.000 - 34.619{,}49 = \$\ 15.380{,}51$$

Ejemplo

La empresa XX desea constituir un fondo de amortización de $ 30.000 en 3 años, mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Considerando una tasa de interés del 5% anual capitalizable semestralmente, cuál es el valor del depósito semestral y elaborar la tabla del fondo de amortización correspondiente.

Se calcula el valor del depósito semestral:

$$i = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025; \qquad n = (3)(2) = 6$$

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{30.000}{\frac{(1+0{,}025)^6 - 1}{0{,}025}}$$

R = $ 4.696,50 cada semestre

Período	Aumento de interés $	Depósito $	Incremento al fondo $	Importe del fondo $
1	0,00	4.696,50	4.696,50	4.696,50
2	117,41	4.696,50	4.813,91	9.510,41
3	237,76	4.696,50	4.934,26	14.444,67
4	361,12	4.696,50	5.057,62	19.502,29
5	487,56	4.696,50	5.184,06	24.686,35
6	617,15	4.696,50	5.213,65	72.840,22
Total	$1.821	$28.179	$ 29.990	

Tabla 7.7. Tabla de fondo de amortización o de valor futuro del ejemplo

Ejemplo de fondo de valor futuro con capitalización continua

Una empresa desea formar un fondo para reposición de activos, por un valor de $ 25.000,00, durante 10 años, mediante depósitos trimestrales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés del 7% anual con capitalización continua, calcular el valor del depósito y los intereses.

$$S = 25.000{,}00 \qquad n = \frac{(10)(12)}{3} = 40$$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right)^4 = e^{0{,}07} \qquad \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4 = 1{,}0725 \qquad 1 + \frac{j}{4} = 1{,}017652$$

$$j = 0{,}017652(4) \qquad j = 0{,}070608$$

$$R = \frac{25.000{,}00}{\frac{(1+0{,}017652)^{40} - 1}{0{,}017652}} = 435{,}382$$

Intereses = 25.000,00 – (40) (435,382) = 25.000 – 17.415,28 = $ 7.584,72

La unidad de valor constante (UVC)

La unidad de valor constante (UVC) es un instrumento financiero que sirve como referencia para mantener el valor del dinero. Las obligaciones de dinero activas y pasivas expresadas en UVC deben tener un plazo mínimo de 365 días; por lo tanto, es un instrumento financiero a largo plazo. La UVC tiene un valor inicial (puede ser $ 10) que se puede ajustar diariamente, de acuerdo con la inflación (generalmente con la variación mensual del índice de precios al consumidor).
Si tenemos una UVC de $ 10 y la inflación mensual es del 0,25%, el valor de la UVC será:

$$\text{UVC} = 10(1 + 0{,}0025) = \$\ 10{,}25$$

La UVC protege el ahorro y facilita el endeudamiento a largo plazo pues la persona que ahorra en UVC, por una determinada cantidad, tiene sus ahorros en UVC al valor que esté en el día de pago.

Cálculo del ajuste de la UVC
El valor de la UVC puede calcularse a la fecha que se desee, de acuerdo con el sistema de cálculo que se utilice. Al utilizar la fórmula respectiva, aprobada por la autoridad financiera y monetaria competente, se tiene, por ejemplo:

$$Vf = Vu\left[\frac{IPC_{n-1}}{IPC_{n-2}}\right]^{df/dm}$$

Fórmula 7.2. Fórmula para calcular el valor de la UVC

En donde:

- Vf = valor de la UVC en la fecha actual.
- Vu = valor de la UVC del último día del mes anterior.
- IPC_{n-1} = índice de precios al consumidor correspondiente al mes inmediatamente anterior.
- IPC_{n-2} = índice de precios al consumidor correspondiente al mes previo anterior.
- df = día del mes para el que se calcula el valor de la UVC.
- dm = número de días calendario del mes.

Ejemplo

Con base en los siguiente datos: a) valor de la uvc el 30 de abril: $ 10; b) índice de precios al consumidor en el mes de abril: 1,15; c) índice de precios al consumidor en el mes de marzo: 1,14; d) número de días del mes de mayo: 31, calculemos el valor de una UVC el día 26 de mayo de 2008.

$$Vf = 10\left[\frac{1{,}15}{1{,}14}\right]^{26/31} = \$\ 10{,}07$$

Actividades de ejercitación

1. Calcule el valor de la cuota anual necesaria para amortizar una deuda de $ 90.000,00 en 18 años, considerando una tasa de interés del 12% anual, con capitalización efectiva.

2. Calcule el valor de la cuota trimestral necesaria para amortizar una deuda de $ 17.000,00 en 8 años, considerando una tasa de interés del 15% anual capitalizable trimestralmente.

3. Una empresa obtiene un préstamo de $ 40.000,00 amortizable en pagos semestrales iguales durante 5 años, con una tasa de interés del 9% anual capitalizable semestralmente. Calcule la cuota semestral y elabore la tabla de amortización correspondiente.

4. Una empresa obtiene un préstamo por $ 99.000,00 a 8 años de plazo, que debe pagarse en cuotas trimestrales, con una tasa de interés del 18% anual capitalizable trimestralmente, calcule la renta y el saldo insoluto, inmediatamente después de pagar la cuota 20.

5. La empresa Riko obtiene un préstamo de $ 10.000 a 10 años de plazo para amortizarlo mediante pagos semestrales. El primer pago debe hacerlo luego de haber transcurrido 6 meses. Considere una tasa de interés del 14% anual, capitalizable semestralmente y calcule el saldo insoluto luego de haber pagado la cuota 12.

6. En el problema anterior calcule: a) la distribución de la cuota 13 en intereses y b) el capital pagado por cuota. Reconstruya la tabla de amortización en los períodos 13 y 14.

7. Una empresa adquiere una propiedad por un valor de $ 1.200.000 mediante el sistema de amortización gradual. Hipoteca dicha propiedad a una institución financiera, a 25 años de plazo, pagaderos en cuotas mensuales iguales, a una tasa de interés del 12% anual capitalizable mensualmente. Calcule: a) el valor de la cuota mensual; b) los derechos del acreedor; c) los derechos del deudor, ambos luego de haber pagado la cuota 200.

8. Anita adquiere una casa mediante el sistema de amortización gradual e hipoteca la propiedad a una institución financiera, por un valor de $ 120.000,00 a 30 años de plazo, pagadera en cuotas mensuales con una tasa de interés del 9% anual capitalizable mensualmente. Calcule a) el valor de la cuota mensual; b) ¿cuánto le queda por pagar luego de la cuota 300?; y c) ¿cuánto ha pagado de la deuda?

9. Una empresa obtiene un préstamo de $ 25.000,00 a 9 años de plazo, con una tasa de interés del 9% anual capitalizable semestralmente, que debe pagarse en cuotas trimestrales. Calcule el valor de la cuota trimestral (necesita calcular la tasa trimestral equivalente).

10. Una empresa obtiene un préstamo de $ 36.000,00 a 7 años de plazo, con una tasa de interés del 9% anual capitalizable mensualmente, que debe ser pagado en cuotas bimestrales. Calcule el valor de la cuota bimestral. (Necesita calcular la tasa bimestral equivalente).

11. Calcule el valor del depósito trimestral necesario para acumular $ 20.000,00 en 4 años, considerando una tasa de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente.

12. Calcule el valor del depósito trimestral necesario para acumular $ 35.000,00 en 5 años, a una tasa de interés del 5% anual, capitalizable trimestralmente y elabore la tabla de valor futuro correspondiente.

13. La empresa XYZ desea constituir un fondo de $ 40.000,00 para reposición de una maquinaria al cabo de 5 años. Calcule el valor del depósito semestral que debe realizar, si se considera una tasa de interés del 7% anual capitalizable semestralmente, y elabore la tabla de fondo de amortización o de valor futuro correspondiente.

14. Una empresa desea acumular un capital de $ 70.000 en 4 años, mediante depósitos semestrales iguales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés del 15% anual, capitalizable semestralmente. Calcule: a) el valor del depósito semestral; b) el valor acumulado; c) el saldo insoluto al final del período 6.

15. La empresa Arme consigue un préstamo de $ 120.000 a 10 años de plazo, incluidos 2 años de gracia, con una tasa de interés del 9% anual, capitalizable semestralmente y una comisión de compromiso del 2% anual, capitalizable semestralmente sobre saldos deudores. Calcule el valor de la cuota semestral y elabore la tabla de amortización gradual correspondiente.

16. Una persona desea comprar una motocicleta por un valor de $ 18.000, que debe pagarse en cuotas mensuales fijas, a 3 años de plazo, con una tasa de interés del 2% mensual. Calcule el valor de la cuota fija mensual para las tres alternativas que le ofrecen y seleccione la más baja: a) por acumulación de intereses o método lagarto; b) sobre saldos deudores; c) por amortización gradual.

17. Una persona obtiene un préstamo de $30.000,00 a 3 años de plazo, con una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente, que se reajusta luego del primer año al 10% anual, capitalizable mensualmente. Calcule a) la cuota original y b) la cuota con reajuste.

18. En el problema anterior, construya la tabla de amortización gradual en los primeros 12 períodos.

19. En el problema 17, reconstruya la tabla de amortización en los períodos 13, 14 y 15 con la nueva renta y la nueva tasa de interés.

20. En el problema 17, calcule una nueva renta tomando en cuenta el primer reajuste, luego de pagar la cuota número 24, a una tasa de interés reajustada del 6% anual capitalizable mensualmente y reconstruya la tabla hasta la cuota 36.

Respuestas

1. R = \$ 12.414,3580

2. R = \$ 921,08

3. R = \$5.055,1529

4. a) R = 5.896,7564 b) Saldo insoluto = \$ 55.770,05

5. Saldo insoluto = \$ 5.636,48

6. a) Intereses = \$ 394,55 b) Capital pagado por cuota = \$ 549,38

7. a) Cuota mensual = \$ 12.638,69 b) Derechos del Acreedor = \$ 796.602,00
c) Derechos del Deudor = \$ 403.397,51

8. a) Cuota mensual = \$ 965,5471 b) Saldo por pagar = \$ 46.513,6611
c) Ha pagado = \$ 73.486,3389

9. Valor de la cuota trimestral = \$ 1.016,61

10. Valor de la cuota bimestral = \$ 1.332,9297

11. R = \$ 1.115,30

12. R = \$ 1.551,2136

13. \$ 3.409,65

14. a) Valor del depósito = \$ 6.700,89; b) valor acumulado = \$ 48.541,39;
c) saldo insoluto = \$ 21.458,60

15. \$ 11.469,90 incluido el 2% de comisión

16. a) \$ 860,00
b) \$ 685,00 (es la más baja)
c) \$ 706,19

17. a) Renta original = \$ 953,99; b) nueva renta = \$ 945,39

20. Renta reajustada = \$ 934,87
(El saldo insoluto luego del pago 24 es de \$ 10.862,22)

Actividades de autoevaluación

1. Calcule el valor de la cuota semestral necesaria para amortizar una deuda de $ 50.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés del 11% anual, capitalizable semestralmente.

2. Calcule el valor de la cuota mensual necesaria para amortizar una deuda de $ 15.000 en 6 años, considerando una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente.

3. Una empresa obtiene un préstamo de $ 380.000 para amortizarlo en cuotas trimestrales a 10 años de plazo, con una tasa de interés del 8% anual, capitalizable trimestralmente. Calcule el saldo insoluto luego de pagar la cuota 10.

4. En el problema anterior, reconstruya la tabla de amortización gradual en el período 11.

5. Federico adquiere una casa por un valor de $ 95.000 mediante una hipoteca con el sistema de amortización gradual. El plazo es de 15 años, con una tasa de interés del 6 % anual, capitalizable mensualmente. Calcule: a) el valor de la cuota mensual; b) los derechos del acreedor y c) del deudor, ambos luego del pago 60.

6. Francisco desea adquirir un auto a crédito, por un valor de $ 36.000 a 3 años de plazo, que debe ser pagado en cuotas fijas mensuales, con una tasa de interés del 1% mensual. ¿Cuál de las siguientes alternativas le conviene para comprar el auto?

a) Método de acumulación de intereses o método “lagarto”.
b) Método de saldos deudores.
c) Método de amortización gradual.

7. Una empresa obtiene un préstamo por $ 60.000 a 5 años de plazo, con una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente; los pagos son trimestrales. Calcule el valor del pago trimestral.

8. Una persona obtiene un préstamo de $ 20.000 a 3 años de plazo y una tasa de interés del 24% anual, capitalizable mensualmente, la cual se reajusta luego de los primeros 12 meses al 21% anual, capitalizable mensualmente. Calcule el valor de la renta o pago mensual original y la renta o pago después del reajuste.

9. Una empresa requiere constituir un fondo de valor futuro para reposición de equipos por un valor de $ 75.000 durante 10 años, que es la vida útil estimada de dichos equipos, mediante depósitos trimestrales con una tasa de interés del 5% anual, capitalizable trimestralmente. Calcule el valor del depósito trimestral.

10. Cierta empresa requiere acumular un fondo de $ 50.000 durante 5 años mediante depósitos semestrales, en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés del 4% anual, capitalizable semestralmente. Calcule: a) el valor del depósito semestral, b) el valor acumulado luego del depósito número 4 y c) el saldo insoluto luego del depósito.

11. Una organización requiere constituir un fondo para pagar eventuales indemnizaciones por cesantía de sus trabajadores; para lo cual retiene el 5% del sueldo de cada trabajador y como empleador aporta el 7% mensual. Estos valores se depositan todos los meses en una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 4% durante los primeros 10 años, 5% anual durante los siguientes 10 años y 6% anual por los últimos 15 años. El sueldo promedio de los primeros 10 años fue de \$ 500, en los siguientes 10 años fue de \$ 900 y en los últimos 15 años, de \$ 1.500. Calcule: a) el fondo de cesantía y b) los intereses generados a favor de cada trabajador.

Respuestas

1. $i = \dfrac{0,11}{2} = 0,055$ semestral $\qquad n = \dfrac{(5)(12)}{6} = 10$

$$R = \dfrac{50.000}{\dfrac{1-(1+0,055)^{-10}}{0,055}} = \$\ 6.633,39$$

R = \$ 6.633,39

2. $i = \dfrac{0,09}{12} = 0,075$ mensual; $\qquad n = (12)(6) = 72$

$$R = \dfrac{15.000}{\dfrac{1-(1+0,0075)^{-72}}{0,0075}} = \$\ 270,38$$

R = \$ 270,38

3. Primero se calcula la renta:

$i = \dfrac{0,08}{4} = 0,02$ trimestral; $\qquad n = \dfrac{(10)(12)}{3} = 40$

$$R = \dfrac{380.000}{\dfrac{1-(1+0,002)^{-40}}{0,02}} = \$\ 13.891,18$$

El saldo insoluto (P) luego del pago 10 se calcula utilizando la fórmula del saldo insoluto.

$n = 40$; $\qquad m = 10$; $\qquad k = 40 - 10 = 30$

$$P_{10} = 13.891,18\left[\left(\frac{1-(1+0,02)^{-30}}{0,02}\right)\right] = \$\ 311.113,20$$

$$P_{10} = \$\ 311.113,20$$

4. Se toma el saldo insoluto luego del pago 10, que es el mismo valor al inicio del período 11 y se procede a reconstruir la tabla.

Saldo insoluto al inicio del período 11 = $ 311.113,20
Interés = $ 311.113,20 (0,02) = 6.222,26
Cuota o renta = $ 13.891,18
Capital pagado por cuota = $ 13.811,18 – 6.222,26 = $ 7.668,92
Saldo deuda = 311.113,20 – 7.668,92 = $ 303.444,28

Período	Saldo insoluto	Interés	Cuota o renta	Capital pagado	Saldo deuda
11	$ 311.113,20	$ 6.222,26	$ 13.891,18	$ 7.668,92	$ 303,444,28

Tabla 7.8. *Reconstrucción de la tabla de amortización en el período 11*

5. Se calcula la renta:

$$i = \frac{0,06}{12} = 0,005 \text{ mensual}; \qquad n = (15)(12) = 180$$

$$R = \frac{95.000}{\dfrac{1-(1+0,005)^{-180}}{0,005}} = \$\ 801,66$$

Se calcula el saldo insoluto luego del pago 60.

$$k = 180 - 60 = 120$$

$$P_{60} = 801,66\left[\frac{1-(1+0,005)^{-120}}{0,005}\right] = \$\ 72.208,29$$

$$P_{60} = 72.208,29$$

Por definición, el saldo insoluto constituye los derechos del acreedor.

Al emplear la ecuación:

Derechos del acreedor + Derechos del deudor = Deuda original

Entonces:

Derechos del deudor = 95.000 – 72.208,29 = $ 22.791,71

a) Renta = $ 801,66; b) DA = 72.208,29; c) DD = $ 22.791,71

6. Se calcula la cuota fija durante los 36 meses, mediante cada uno de los citados métodos.

a) Este método acumula los intereses; por tanto, utiliza la fórmula del monto en interés simple.

$$M = 36.000[1 + 0{,}01(36)] = \$\ 48.960$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{48.960}{36} = \$\ 1.360$$

b) Este método calcula la cuota mensual sobre saldos.

$$\text{Primera cuota} = \$\ 1.360$$

$$\text{Cuota de capital} = \frac{36.000}{36} = \$\ 1.000$$

$$\text{Última cuota} = 1.000 + 1.000(0{,}01) = \$\ 1.010$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2}$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{1.360 + 1.010}{2} = \$\ 1.185$$

c) Este método utiliza las amortizaciones graduales, con la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad.

$i = 0{,}03;\qquad n = 36$

$$R = \frac{36.000}{\dfrac{1 - (1 + 0{,}001)^{-36}}{0{,}01}} = \$\ 1.195{,}72.$$

Le conviene el método de saldos deudores, pues le da una cuota de $ 1.185. Le sigue en prioridad el método de amortización gradual: $ 1.195,72.

7. Como el período de pago es diferente del período de capitalización de los intereses, se requiere utilizar la ecuación de equivalencia.

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right)^{4} = \left(1 + \frac{0{,}09}{12}\right)^{12} \qquad 1 + \frac{5}{4} \quad = (1{,}0075)^{3}$$

$j = 9{,}068\%$ anual capitalizable trimestralmente

Es decir, una tasa de interés del 9% anual, capitalizable mensualmente, equivale a una tasa del 9,068% anual, capitalizable trimestralmente.

www.elsolucionario.net

Entonces se puede calcular la renta:

$$i = \frac{0{,}09068}{4} = 0{,}02267 \text{ trimestral} \qquad n = \frac{(5)(12)}{3} = 20$$

$$R = \frac{60.000}{\dfrac{1-(1+0{,}02267)^{-20}}{0{,}02267}} = \$\ 3.764{,}63$$

R = $ 3.764,63

8. Renta original:

$$i = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 \text{ mensual} \qquad n = (3)(12) = 36$$

$$R = \frac{20.000}{\dfrac{1-(1+0{,}02)^{-36}}{0{,}02}} = \$\ 784{,}66$$

Nueva renta:
Se calcula el saldo insoluto luego del pago 12.

$$k = 36 - 12 = 24$$

$$P_{12} = 784{,}66\,\frac{1-(1+0{,}02)^{-24}}{0{,}02} = \$\ 14.840{,}95$$

$$i = \frac{0{,}21}{12} = 0{,}0175 \text{ mensual} \qquad n = 24$$

$$R = \frac{14.840{,}95}{\dfrac{1-(1+0{,}0175)^{-24}}{0{,}0175}} = \$\ 762{,}61$$

a) Renta original = $ 784,66; b) Nueva renta = $ 762,61

9. $i = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$ trimestral $\qquad n = \frac{(10)(12)}{3} = 40$

$$R = \frac{75.000}{\dfrac{(1+0{,}0125)^{40}-1}{0{,}0125}} = \$\ 1.456{,}61$$

R = $ 1.456,61 cada trimestre

10. $i = \dfrac{0{,}27}{2} = 0{,}135$ semestral $\qquad n = \dfrac{(5)(12)}{6} = 10$

$$R = \dfrac{50.000}{\dfrac{(1 + 0{,}02)^{10} - 1}{0{,}02}} = \$\ 4.566{,}33$$

Fondo acumulado luego del depósito 4:

$$S = 4.566{,}33 \left[\dfrac{(1 + 0{,}02)^{4} - 1}{0{,}02}\right] = \$\ 18.820{,}62$$

Saldo insoluto:

$$50.000 - 18.820{,}62 = \$\ 31.179{,}38$$

a) Depósito semestral = $ 4.566,33
b) Fondo acumulado = $ 18.820,62
c) Saldo insoluto = $ 31.179,38

11. Solución gráfica

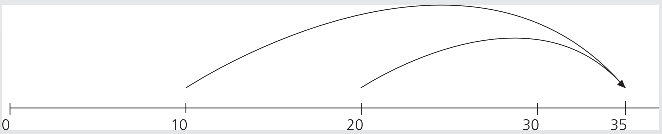


Gráfico 7.8. Solución gráfica del problema 11

Se suman las tasas del 5% + 7% = 12% para calcular el valor de cada depósito mensual (R) y se procede al cálculo de variable ***n*** e ***i***:

$$R_1 = 500(0{,}12) = 60$$

$$i_1 = \dfrac{0{,}04}{12} = 0{,}00333 \text{ mensual}$$

$$n_1 = (10)(12) = 120$$

$$R_2 = 900(0{,}12) = 108$$

$$i_2 = \frac{0{,}05}{12} = 0{,}004167 \text{ mensual}$$

$$n_2 = (10)(12) = 120$$

$$R_3 = 1.500(0{,}12)$$

$$i_3 = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005 \text{ mensual}$$

$$n_3 = (15)(12) = 180$$

Todos los depósitos se acumulan durante el plazo de 15 años, en forma periódica de acuerdo con la tasa de interés.

Se utiliza la fórmula del monto de una anualidad (fórmula 6.1):

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$S = 60\ \frac{(1+0{,}003333)^{120}-1}{0{,}003333}(1+0{,}004167)^{120}\,(1+0{,}005)^{180} +$$

$$+ 108\ \frac{(1+0{,}004167)^{120}-1}{0{,}004167}(1+0{,}005)^{180} + 180\ \frac{(1+0{,}005)^{180}-1}{0{,}005}$$

S = 35.710,94 + 41.157,22 + 52.347,37 = \$ 129.215,61 para cada trabajador

Interés = 129.215,61 – [60(120) + 108(120) + 180(180)]

Interés = 129.215,61 – 52.560 = \$ 76.655,61

Actividades de repaso

1. ¿En qué consiste la amortización gradual?

2. ¿Qué es una tabla de amortización gradual?

3. ¿Cómo se calcula la renta o pago periódico para amortizar una deuda?

4. ¿Qué es el saldo insoluto?

5. ¿Cómo se calcula el saldo insoluto de una deuda?

6. ¿En qué consisten los derechos del acreedor y el deudor? ¿Cómo se pueden calcular?

7. ¿Cómo se puede calcular la nueva renta cuando existe un reajuste en la tasa de interés?

8. ¿Qué debe hacerse cuando el período de capitalización de una tasa de interés no coincide con los períodos de pago?

9. ¿Cómo se puede calcular un fondo de valor futuro?

10. ¿En qué consiste la unidad de valor constante? ¿Para qué se utiliza?

Complete su aprendizaje con el CD
que acompaña a este libro

VIII Documentos financieros

Presentación

En este capítulo se estudiarán el sistema financiero con las principales normas e instituciones que lo conforman, y los principales documentos financieros, tanto los de renta fija como variable. Dentro de estos documentos se analizarán los conceptos y cálculos vinculados a los diversos tipos de bonos que circulan en los mercados. Otros temas serán los seguros, las tasas de interés reales, el valor actual neto y las tasas internas de retorno, necesarias, estas últimas, para evaluar los proyectos empresariales

Aunque aparezcan tratados de una manera sencilla, son conceptos básicos que constituyen un conjunto de conocimientos que complementan los ya explicados en los capítulos anteriores, y dan una orientación real del área de aplicación de la matemática financiera.

Objetivo general

- Conocer el sistema financiero, sus normas e instituciones, los documentos financieros, los bonos, seguros y tasas de interés especiales como una aplicación de las matemáticas financieras.

Objetivos específicos

- Conocer el sistema financiero, sus principales normas y las instituciones que lo integran.
- Diferenciar los principales documentos financieros que se manejan en el sistema financiero.
- Comprender el concepto de bonos y calcular el precio de los mismos.
- Conocer en qué consisten los seguros y su aplicación.
- Comprender el concepto de tasa de interés real y de valor actual neto y tasa interna de retorno.
- Calcular el precio y rendimiento de documentos financieros.

CONTENIDO

Sistema financiero

Es un conjunto de instituciones interrelacionadas e interdependientes que regulan y operan las actividades financieras, mediante leyes o normas en un país o región geográfica.

Las instituciones que conforman el sistema financiero recogen los excedentes financieros, los ahorros y los canalizan hacia aquellas personas que los requieren.

Uno de los elementos del sistema está conformado por el conjunto de normas o leyes y disposiciones en general que regulan las actividades de las personas naturales y jurídicas que se dedican a las actividades financieras. Entre ellas, la captación y manejo del dinero, inversiones, préstamos, ahorros, compraventa de valores o documentos financieros, manejo de las tasas de interés, etcétera.

Estas normas pueden diferir en su denominación de acuerdo con las leyes o regulaciones de los países. Algunos ejemplos son:

- La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero y otras con similar denominación que regulan las actividades de las instituciones financieras, como los bancos, las sociedades financieras, las cooperativas de ahorro y crédito, las mutualistas, compañías de arrendamiento mercantil, compañías emisoras o administradoras de tarjetas de crédito, la Dirección Nacional del Tesoro, etc.

- Ley del Mercado de Valores y otras con similar denominación que regulan la operación de un mercado de valores organizado, integrado, eficaz y transparente. Abarca el mercado bursátil y extrabursátil, el Consejo Nacional de Valores, las casas de valores, las administradoras de fondos de inversión, los agentes de bolsa, calificadores de riesgo y otras.

- Ley de Régimen Monetario y otras con similar denominación que regulan la emisión de moneda y la paridad cambiaria, las tasas de interés, los términos de intercambio, la inflación, etc.

- Otras leyes, como la Ley de Compañías, la Ley de Empresas Aseguradoras, el Código Civil, el Código Tributario, etc.

Otro elemento importante del sistema financiero lo constituyen las instituciones, las cuales se pueden clasificar así:

Monetarias: Instituciones públicas que tienen la facultad de emitir dinero, con el respectivo respaldo en oro, divisas u otro medio de pago, como, por ejemplo, el Banco Central, el Banco de la Moneda, la Junta Monetaria, la Dirección Nacional de Tesoro u otro organismo similar.

Operativas: Ministerios de Economía y Hacienda, Ministerio de Economía y Finanzas, Dirección Nacional de Seguro Social; son aquellas que definen y ejecutan las políticas financieras y monetarias.

De control*:* Instituciones públicas que, respaldadas en la respectiva ley, tienen facultad para controlar y sancionar a aquellas personas naturales o jurídicas que incumplan la ley. Además, deben orientar y regular las actividades financieras. Por ejemplo, Superintendencia de Bancos, Superintendencia de Compañías, Junta Bancaria y Consejo Nacional de Valores, entre otros.

Entidades bancarias públicas*:* Son las encargadas de manejar dinero o valores y otorgar créditos, con finalidad social o de servicio, sin afán de lucro, tales como: el Banco Nacional de Fomento, el Banco de la Vivienda, la Corporación Financiera Nacional, el Instituto de Crédito Educativo, el Banco de Desarrollo, y otras instituciones financieras públicas que con diferentes denominaciones tienen como finalidad impulsar los procesos de desarrollo mediante líneas de crédito, especialmente a los sectores de la población con menores ingresos.
Entre las **Entidades bancarias privadas** figuran los bancos privados de diferente tipo, con alcance geográfico local, nacional e internacional, que son intermediarios en el mercado financiero, ya que captan recursos del público –mediante depósitos– y, a la vez, utilizan dichos recursos para realizar operaciones de crédito o inversión, con finalidad de lucro.

Otras entidades financieras no bancarias*:* Su funcionamiento y denominación dependen de las respectivas leyes de cada país. Algunas de ellas son:

- Cooperativas de ahorros y créditos: mutualistas que financian dinero para vivienda.
- Servicios financieros: almacenes generales de depósito, compañías de arrendamiento mercantil *(leasing),* compañías emisoras o administradoras de tarjetas de crédito, casas de cambio, corporaciones de garantía y retrogarantía, compañías de titularización, fiduciarias y otras.
- Servicios auxiliares: transporte de especies monetarias y de valores, servicios de cobranzas, cajeros automáticos, servicios contables y de computación, fomento a las exportaciones y otras.
- Empresas o instituciones privadas y públicas, incluyendo la seguridad social.

Mercado de valores

El *mercado de valores* abarca el *mercado bursátil* y el *extrabursátil* y las respectivas instituciones públicas y privadas que lo controlan y operan, como la Comisión Nacional del Mercado de Valores, el Consejo Nacional de Valores, las Bolsas de Valores, las Administradoras de Fondos de Inversión, los Agentes de Bolsa y los usuarios e inversionistas. Es decir, la administración y negociación de documentos financieros de renta variable y de renta fija. Por ejemplo, en el caso de renta variable, las acciones, y en el caso de renta fija, pagarés, letras de cambio, bonos, cédulas hipotecarias, certificados de tesorería, obligaciones de entidades públicas y del sector privado, aceptaciones bancarias, avales, cartas de crédito, cupones, pólizas y otros.

El *mercado bursátil* lo integran todos los valores o documentos financieros inscritos en el registro de las bolsas de valores. En cambio, el mercado *extrabursátil* lo integran aquellos valores o documentos financieros no inscritos en una bolsa de valores; pero inscritos en el mercado de valores.

Principales documentos financieros

Como ya se dijo antes, en el mercado de valores existen documentos de *renta fija* (a corto y largo plazos) y de *renta variable*.
Los documentos de renta fija poseen las siguientes características:

- Tienen un valor nominal que consta en el documento.
- Algunos tienen una tasa de interés nominal que igualmente consta en el documento original.
- Tienen fechas de suscripción y vencimiento.
- Pueden negociarse libremente con una tasa de descuento o con una tasa de rendimiento.
- Pueden ser emitidos por el sector público o el privado.
- Pueden ser emitidos a corto o a largo plazo y se pueden negociar a la par, con premio o con castigo.
- Algunos de estos documentos tienen cupones desprendibles en los que constan los intereses que se deben pagar o cobrar por período.

Pueden clasificarse en:
Papeles con descuento: Su rendimiento está determinado por el descuento sobre el valor nominal que tienen en el momento de su adquisición:

- Bonos de estabilización monetaria (Bems).
- Bonos de estabilización de divisas.
- Certificados de abono tributario.
- Letras de cambio, pagarés, notas de crédito, aceptaciones bancarias.

Papeles a corto plazo (vencimiento entre 1 y 360 días):
- Pólizas de acumulación.
- Certificados financieros.
- Certificados de inversión.
- Bonos del Tesoro o certificados de tesorería.
- Certificados de arrendamiento mercantil.
- Otras obligaciones.

Papeles a largo plazo (vencimiento mayor de 360 días):
- Cédulas hipotecarias.
- Bonos de prenda.
- Bonos de garantía.
- Títulos hipotecarios.
- Bonos del Estado.
- Bonos dólares.

- Bonos de gobiernos seccionales (municipales, departamentales, regionales y provinciales).
- Bonos de estabilización de la deuda externa.
- Certificados de derecho fiduciario (CDF)

Los documentos de renta fija o renta variable son títulos cuyo rendimiento varía. El principal es la *acción*, que representa una parte del total en que está dividido el capital social o patrimonio de una empresa. Se caracterizan porque:

- Su valor nominal impreso en la acción; casi siempre es un múltiplo de 10.
- Constituyen parte del capital social de la empresa.
- Se emiten cuando se constituye una empresa o cuando se realizan aumentos de capital de una empresa.
- Generan rendimiento que proviene de las utilidades de la empresa *(dividendo)*.
- Pueden negociarse con un precio o valor mayor o menor a su valor nominal.
- El beneficio que generan varía en función de los resultados de la gestión empresarial.

Los documentos de venta fija y de venta variable se pueden negociar en las "Ruedas de Bolsa", siempre y cuando hayan inscrito en el Registro del Mercado de Valores y en la respectiva Bolsa de Valores.

Precio de los documentos financieros

Los documentos financieros de renta fija o de renta variable pueden negociarse en el mercado bursátil, o en el extrabursátil, de acuerdo con la oferta y demanda, las tasas de interés, el rendimiento y determinadas condiciones especiales.

Ejemplo

¿Cuál será el precio y el rendimiento de un pagaré cuyo valor nominal es de \$ 10.000,00, suscrito el 12 de marzo con vencimiento en 90 días, si se negocia el 11 de abril del mismo año, a una tasa de descuento del 9% anual?

Puesto que las condiciones del problema, el pagaré no reconoce una tasa de interés desde la suscripción, se entiende que los \$ 10.000,00 son al vencimiento; por lo tanto, se puede calcular el precio:

Precio = Valor efectivo = Cb = M(1 – dt)

Fecha de vencimiento = 10 de junio (90 días desde el 12 de marzo)

Número de días comprendidos entre el 11 de abril y el 10 de junio = 60 días

$$\text{Precio} = 10.000,00\left[\left(1 - 0,09\,\frac{60}{360}\right)\right] = \$\ 9.850,00$$

Es decir que su precio equivale al 98,50% del valor nominal.

Para calcular el rendimiento se pueden tomar dos caminos:
a) El primero: con la fórmula genérica del rendimiento

$$\text{Rendimiento} = \frac{100 - p}{p} \cdot \frac{360}{t} = \frac{(100 - 98{,}50)}{(98{,}50)} \left(\frac{360}{60}\right) = 0{,}09137$$

Rendimiento = 9,137%

b) El segundo con la fórmula de la tasa de interés en función de la tasa de descuento:

$$i = \frac{d}{1 - dt} = \frac{0{,}09}{1 - 0{,}09\left(\frac{60}{360}\right)} = 0{,}09137 = 9{,}137\%$$

También se puede calcular el precio con la fórmula del valor actual y la tasa de rendimiento:

$$C = \frac{10.000{,}00}{1 + 0{,}09137\left(\frac{60}{360}\right)} = \$\ 9.850{,}00$$

Igualmente se puede expresar el precio de la siguiente forma:

$$\text{Precio} = M\left[1 - (0{,}09)\left(\frac{60}{360}\right)\right] = M\ (0{,}985) \text{ que es el 98,50\% del valor nominal}$$

Precio = 10.000,00(0,985) = $9.850,00

Bonos US $

"Bono es una obligación o documento de crédito, emitido por un gobierno o una entidad particular a un plazo perfectamente determinado, que devenga intereses pagaderos en períodos regulares de tiempo."[1]

"Un bono es una promesa escrita de:
a) Una suma fija, llamada *valor de redención,* en una fecha dada, llamada *fecha de redención*.
b) Pagos periódicos conocidos como *pagos de intereses* hasta la fecha de redención."[2]

Según estas definiciones, el bono es un documento financiero que se utiliza para obtener dinero actual (liquidez), con la obligación de reconocer el respectivo interés periódico con los cupones como su valor original (nominal) en la fecha de vencimiento.

[1] L. Portus Govinden, *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975, p. 120.
[2] F. Ayres Jr., *Matemáticas financieras. Teoría y 500 problemas resueltos*, Bogotá, McGraw-Hill, p. 106.

Características

En todo bono se pueden destacar los siguientes elementos:

El ***valor nominal*** que consta en el documento generalmente es un múltiplo de 10. Ejemplo: 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000, etcétera. Generalmente se expresan las letras mayúsculas iniciales del mes que inicia y el mes que termina cada pago de cupón.

Ejemplo: un bono al 12% pagadero en abril y octubre se puede expresar: 12% AO.

La ***tasa de interés*** que se debe pagar puede ser anual con capitalización semestral, trimestral, etc.; la más común es la semestral.

La ***fecha de redención*** es el plazo de terminación o fecha en la cual debe pagarse el valor nominal del bono. Casi siempre coincide con la fecha de pago de intereses.

El ***valor de redención*** es el valor del bono a la fecha de finalización o redención. Este valor puede ser:

- Redimible *a la par*: Cuando el valor nominal y el valor de redención son iguales. Por ejemplo, un bono de $ 1.000 redimible a la par = (1.000)(1) = $ 1.000.
- Redimible *con premio*: Cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal. Por ejemplo, un bono de $ 1.000 redimible a 102: 1000(1,02) = $ 1.020.
- Redimible *con descuento:* Cuando el valor de redención es menor que el valor nominal. Por ejemplo, un bono de $ 1.000 redimible a 98: 1.000(0,98) = $ 980.

Cupón*:* Es la parte desprendible del bono que contiene el valor de los intereses por período de pago. Por ejemplo, un bono de $ 10.000 al 12% FA, emitido el 1˚ de febrero de 1990 y redimible a la par el 1˚ de febrero del año 2020, establece los siguientes pagos: el pago de $ 10.000 el 1˚ de febrero de año 2020, valor de redención = (10.000)(1) = $ 10.000; sesenta cupones o pagos semestrales de (10.000)(0,12/2) = $ 600 desde el 1˚ de agosto de 1990.

$$\text{Cupón} = 10.000\ (0{,}12)\left(\frac{180}{360}\right) = \$\ 600{,}00$$

Precio: Es el valor que tiene un bono cuando se negocia; puede ser a la par, con premio o con castigo.

- *A la par,* cuando la tasa nominal del bono coincide con la tasa de negociación.
- *Con premio,* cuando la tasa de negociación es menor que la tasa nominal del bono.
- *Con castigo,* cuando la tasa de negociación es mayor que la tasa nominal del bono.

Ejemplo

El 1° de junio de 2006 una persona compra un bono de $ 1.000 al 7% JD (junio-diciembre), redimible a 101 el 1° de junio de año 2023. ¿Cuál será: a) su valor de redención, b) el número de cupones y c) el valor de cada cupón?

a) $ 100.000(1,01) = $ 101.000 el 1° de junio de 2023
b) 40 cupones
c) (1.000)(0,0035) = $ 35,00; el primero de ellos el 1° de diciembre del 2006

Fórmula para calcular el precio de un bono

El bono, por ser un documento financiero, es perfectamente negociable y se compra o vende considerando una tasa de interés del inversionista, que es diferente de la del bono. Para calcular su precio en una fecha de pago de interés, se puede utilizar la siguiente fórmula, que combina el valor actual del bono con el valor actual de los cupones hasta el vencimiento del mismo.

Precio de un bono = Valor actual del bono + Valor actual de los cupones.

$$P = C(1 + i)^{-n} + \text{cupón}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Fórmula 8.1. Cálculo del precio de un bono

donde:

P = precio del bono en la fecha de pago de intereses.
C = valor de redención del bono.
i = tasa de interés por período, del inversionista o de negociación.
n = número de cupones.
Cupón = valor de cada cupón.

Ejemplo

¿Cuál será el precio de venta de un bono de $ 10.000 al 9% FA, el 1° de febrero de 2003, redimible a la par el 1° de febrero de 2018, si se desea un rendimiento del 8% anual con capitalización semestral?

$$P = C(1 + i)^{-n} + \text{cupón}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Valor de redención: 10.000(1) = $ 10.000
Número de cupones: 30

Valor de cada cupón: $10.000\left(\frac{0,09}{2}\right) = \$\ 450$

Tasa de rendimiento o de negociación $= \left(\frac{0,08}{2}\right) = 0,04$

$$P = 10.000(1 + 0,04)^{-30} + 450\left[\frac{1-(1+0,04)^{-30}}{0,04}\right]$$

P = 3.083,19 + 450(17,29)
P = $ 10.864,60

Ésta es una negociación con premio para el vendedor pues vende el bono en $ 10.864,60.

Ejemplo

¿Cuál es el precio de compra de un bono de $ 1.000 al 11% JD, redimible a 101 el 1˚ de diciembre del año 2014, si se vende el 1˚ de diciembre de 2003 con un rendimiento del 11,5% anual capitalizable semestralmente?

Valor de redención: 1.000(1,01) = $ 1.010
Número de cupones: 22

$$\text{Valor del cupón: } 1.000\left(\frac{0,11}{2}\right) = \$\ 55$$

$$\text{Tasa de rendimiento: } \left(\frac{0,115}{2}\right) = 0,0575$$

$$P = 1.010(1 + 0,0575)^{-22} + 55\left[\frac{1 - (1 + 0,0575)^{-22}}{0,0575}\right]$$

P = 295,225 + 676,93
P = $ 972,155

Esta negociación es con castigo para el vendedor pues vende el bono en $ 972,155.

Precio de un bono comprado o negociado entre fechas de pago de intereses

Frecuentemente la negociación de un bono se realiza en fechas diferentes de la de pago de intereses o pago de cupones. Para calcular el valor del bono en esas fechas, se realiza el siguiente procedimiento:

a) Se halla el valor del bono en la última fecha de pago de intereses, inmediatamente antes de la fecha de compra-venta.
b) Se calcula el interés simple del referido valor, tomando en consideración los días exactos a partir de la última fecha de pago de intereses. Como procedimiento alternativo, se calcula el interés tomando el número de días comprendidos entre la fecha de negociación y la fecha futura de pago de intereses.

Ejemplo

¿Cuál es el precio de compra de un bono de \$ 3.000 al 7% AO, redimible a la par el 1˚ de abril de 2009, si se compra el 1˚ de julio de 2003 y se espera obtener un rendimiento del 6 3/4 %, capitalizable semestralmente?

Valor de redención: 3.000(1) = \$ 3.000
Número de cupones: 12

$$\text{Valor de cada cupón: } 3.000\left(\frac{0{,}07}{2}\right) = \$\ 105$$

$$\text{Tasa de negociación} = \left(\frac{0{,}0675}{2}\right) = 0{,}03375$$

$$P = C(1 + i)^{-n} + \text{cupón}\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]$$

$$P = 3.000(1 + 0{,}03375)^{-12} + 105\left[\frac{1 - (1 + 0{,}03375)^{-12}}{0{,}03375}\right]$$

$$P = 2.014{,}35 + 1.022{,}16$$
$$P = \$\ 3.036{,}51$$

Este valor se acumula del 1˚ de abril al 1˚ de julio de 2003, que es la fecha de negociación del bono, al 6 3/4 % anual, capitalizable semestralmente, utilizando la fórmula del monto a interés simple:

$$M = C\ (1 + it)$$

$$M = 3.036{,}51\left[1 + 0{,}03375\left(\frac{91}{180}\right)\right] = \$\ 3.088{,}32$$

El precio del bono es de \$ 3.088,32 que es el denominado "bono sucio"; es decir, al valor que todavía no se le resta el interés redituable.

Interés redituable de un bono

El interés redituable de un bono es una parte fraccionaria del pago de intereses en una fecha diferente del pago de cupones. Se obtiene así: el número de días (contados desde la última fecha de pago de un cupón hasta la fecha de compra, se divide por el número de días del período de capitalización de intereses, y luego este valor resultante se multiplica por los intereses del período completo.

El interés redituable se utiliza para obtener el denominado "bono limpio"; es decir, el bono al que se le ha restado el interés redituable.
En el ejemplo anterior:

P = \$ 3.036,51 en la fecha de pago del cupón.
P_1 = \$ 3.088,32 precio del bono sucio.

Número de días desde la fecha de pago de interés: 91.
Capitalización semestral: 180 días.

Intereses: $(3.000)(0{,}07)\left(\frac{180}{360}\right) = \$\ 105$ (Valor del cupón)

Interés redituable $= \frac{91}{180}(105) = \$\ 53{,}08$

El interés redituable sirve para calcular:

a) El precio del bono limpio: Precio del bono sucio – Interés redituable
$3.088{,}32 - 53{,}08 = \$\ 3.035{,}24$
b) El precio neto o precio con interés: Precio del bono sucio + Interés redituable
$3.088{,}32 + 53{,}08 = \$\ 3.141{,}40$

El más utilizado es el precio del bono limpio.

Rendimiento de un bono

Como ya se dijo antes, al explicar el precio de un bono en forma conceptual, el rendimiento de un bono está dado en función de la tasa de negociación que acuerden las partes: vendedor y comprador. Por lo tanto, existe un *rendimiento con premio* cuando se negocia un bono a una tasa menor que la nominal del bono; existe un rendimiento *a la par* cuando se negocia un bono con una tasa igual a la nominal del bono, y existe un *rendimiento con castigo* cuando se negocia un bono con una tasa mayor que la nominal del bono.

Ejemplo

Un bono de $ 5.000 al 9% MN, redimible a la par el 15 de noviembre del año 2015, se vende el 15 de mayo de 2006 con las siguientes opciones de rendimiento:

a) Con una tasa de rendimiento del 8% anual, capitalizable semestralmente.
b) Con una tasa de rendimiento del 9% anual, capitalizable semestralmente.
c) Con una tasa de rendimiento del 10% anual, capitalizable semestralmente.

¿Cuál es el precio para cada opción, así como el respectivo tipo de negociación (si es a la par, con premio o con castigo)?

Valor de redención: $5.000(1) = \$\ 5.000$
Número de cupones: 19

Valor de cada cupón: $5.000(0{,}09)\left(\frac{180}{360}\right) = \$\ 225.500$

a) Con $i = 8\%$

$$P = 5.000(1 + 0{,}04)^{-19} + 225\left[\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-19}}{0{,}04}\right]$$

$$P = 2.373{,}21 + 2.955{,}14 = \$\ 5.328{,}35$$

Ésta es una negociación con premio, pues su precio es mayor que el valor nominal.

b) Con $i = 9\%$

$$P = 5.000(1 + 0{,}045)^{-19} + 225\left[\frac{1 - (1 + 0{,}045)^{-19}}{0{,}045}\right]$$

$$P = 2.166{,}51 + 2.833{,}49 = \$\ 5.000$$

Ésta es una negociación a la par, pues su precio es igual al valor nominal del bono.

c) Con $i = 10\%$

$$P = 5.000(1 + 0{,}05)^{-19} + 225\left[\frac{1 - (1 + 0{,}05)^{-19}}{0{,}05}\right]$$

$$P = 1.978{,}67 + 2.719{,}20 = \$\ 4.697{,}87$$

Ésta es una negociación con castigo, pues su precio es menor que el valor nominal del bono.

Bonos cupón cero

Son aquellos bonos que no tienen cupones. Su valor actual o precio se calcula tomando sólo como referencia su valor nominal y la tasa de negociación.

Ejemplo

¿Cuál será el precio de un bono cupón cero de $ 9.000 al 7% JD, redimible a la par el 10 de junio del año 2018, se negocia el 10 de diciembre de 2006 a una tasa de rendimiento del 8% anual, capitalizable semestralmente?

Precio = Valor actual

$$\text{Precio} = 9.000\ (1 + 0{,}035)^{-23} = \$\ 4.079{,}57$$

Otras clases de bonos

Además de los enunciados, existen diversas clases de bonos que, por razones de espacio, no desarrollaremos en este libro. Entre ellos se destacan:

- Bonos seriados.
- Bonos de anualidad.
- Bonos de estabilidad monetaria (Bems).
- Bonos del Estado (a largo plazo).
- Bonos dólares.
- Bonos con fecha opcional de redención.
- Bonos de valor constante (para enfrentar la inflación).
- Bonos municipales.

Seguros

"Seguro es un contrato por el cual una persona natural o jurídica se obliga a resarcir pérdidas o daños que ocurran en las personas o cosas que corran riesgo."[3]
"Seguros sociales: los que, en previsión de ciertos riesgos (accidentes, enfermedad, vejez, paro, defunción, invalidez, etc.), impone el Estado en favor de los empleados, de las empresas y de los usuarios de ciertos servicios públicos."[4]
El seguro se fundamenta en dos principios: la solidaridad y la buena fe de las personas.

Es necesario señalar que el seguro como contrato requiere que el asegurado realice un pago o varios pagos periódicos –denominados primas– al asegurador, a fin de que este último se obligue a resarcir las pérdidas o daños que puedan ocurrir.
En los seguros intervienen los siguientes elementos:

- *Asegurador:* Compañía o empresa que se compromete a resarcir el objeto asegurado, si llega a suceder un accidente o evento.
- *Asegurado:* Persona u objeto que es protegido por el asegurador, previo pago de una prima periódica, al que se le reconoce una suma de dinero por eventos de muerte, accidente, etcétera.
- *Póliza:* Contrato mediante el cual el asegurador se obliga con el asegurado a mantener la cobertura de un riesgo durante un período de tiempo. En este contrato deberán especificarse, entre otras, las coberturas básicas, las exclusiones, el mínimo deducible, el coaseguro y la prima respectiva.
- *Prima:* Pago que realiza el asegurado al asegurador por una sola vez o periódicamente.
- *Indemnización:* Pago que efectúa el asegurador al asegurado, en el caso de que suceda el evento sujeto del contrato de seguro o termine el plazo del seguro.
- *La persona o el objeto que será asegurado:* Persona natural o jurídica, por ejemplo: un agente viajero, una compañía de publicidad, mercadería en tránsito, un vehículo, etcétera.
- *El riesgo que cubre el seguro:* Muerte, accidente, pérdida, terremoto, incendio, robo, etc., que deben estar incluidos en los términos de la póliza de seguros.
- *Valor deducido o valor deducible:* Valor mínimo de deducción al valor cubierto o asegurado.
- *Función del seguro:* John E. Magee, en su obra *Seguros generales,* afirma: "La función del seguro consiste en proporcionar certidumbre. Para llegar a este fin, el seguro trata de reducir las consecuencias inciertas de un peligro conocido, de tal manera que el costo de las pérdidas, al afectar a los individuos, sea cierto, o cuando menos relativamente cierto".
- *Concepto de seguro:* Además define el seguro "como proceso para efectuar certidumbre, cuando existen peligros amenazadores; el seguro puede ser definido, en un concepto amplio, como la garantía que uno da a otro contra alguna posible pérdida accidental [...] La práctica más generalizada es la de contribuir a formar un fondo común y, con ese fondo, pagar a quien haya sufrido una pérdida".

[3] L. Portus Govinden, ob. cit., p. 210.
[4] *Gran diccionario enciclopédico universal*, Valencia, Ortells,1980.

Como puede observarse, dentro de estos conceptos se hallan incorporados los citados elementos que se mencionaron antes, entre los cuales el más importante es el costo de la prima de seguro.

- *Prima de seguro:* Más adelante el mismo autor plantea que "El costo de una prima de seguro debe incluir el costo actuarial o costo de las pérdidas, el costo de mantenimiento del negocio y el costo de las contribuciones para constituir una reserva para catástrofes".[5]

Es decir, que la prima de seguro debe ser calculada en forma real, de modo que pueda cubrir la catástrofe en caso de producirse y no ser demasiado alta, para que pueda ser pagada por el asegurado.

- *Reaseguro:* Es común que las compañías aseguradoras se aseguren a su vez en otras empresas aseguradoras de mayor envergadura, para garantizarse a sí mismas y a sus clientes. Esto se conoce como reaseguro.

Magee divide el seguro en dos grupos, como parte de la estructura económica:

a) *Seguro social obligatorio:* Su finalidad es proporcionar un mínimo de seguridad económica a todos los trabajadores para cubrir accidentes, enfermedades, invalidez, desempleo, muerte prematura, etcétera. Se caracteriza por su obligatoriedad legal y porque el Estado lo administra. Esto depende de la respectiva legislación de los diferentes países y de las políticas de seguridad social que se apliquen.

b) *Seguro voluntario:* Es tomado por el asegurado, en forma voluntaria u obligada, para proteger personas o bienes. Este tipo de seguro comprende todo el vasto negocio de seguros desarrollado por compañías de propiedad privada. Cubre seguros de vida, accidentes, marítimos, de incendio, robo, fianzas, etcétera.

Por ejemplo, en el caso de los seguros de vida, la póliza consiste en: "un contrato entre una compañía de seguros y una persona llamada asegurado, mediante el cual el asegurado se compromete a pagar una prima ya sea de una vez o en pagos sucesivos (primas), comprometiéndose a su vez la compañía a pagar una suma fija a los beneficiarios al recibir las pruebas de la muerte del asegurado".[6]

- *Renta perpetua:* Para calcular el valor actual de una renta perpetua se puede deducir la siguiente fórmula:

$$\text{Renta perpetua} = \lim_{n\to\infty} R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = R\left[\frac{1-0}{i}\right] = \frac{R}{i}$$

Fórmula 8.2. Valor actual de una renta perpetua.

Entonces calcularemos el valor actual de una renta perpetua de $ 1.000 anuales con una tasa del 4% anual.

$$RP = \frac{1.000}{0,04} = \$\ 25.000$$

[5] John E. Magee, *Seguros generales*, México, Uteha, p. 3.
[6] Ídem.

Principios del seguro

a) Principio de Buena Fe: "que se refiere a la confianza o buen concepto que se tiene de una persona o cosa, la actuación clara, responsable y verdadera de quienes suscriben los contratos de seguros: asegurador, asegurado, solicitante, contratante, beneficiario, intermediario, reasegurados y autoridades de control".
b) Principio de Solidaridad: "es el derecho u obligación común a varias personas, cada una de las cuales debe ejercerlo o cumplirlo por entero, es una forma de no ser indiferente ante los problemas de las demás personas" [7].

El riesgo, que es "contingencia o proximidad de un daño", cada una de las contingencias que pueden ser objeto de un contrato de seguros" (según el Diccionario Enciclopédico Universal AULA).
De acuerdo con el conjunto de riesgos, características similares y su naturaleza, los seguros se pueden agrupar en dos ramos:

1. **Ramos Personales:** Que se refieren a la persona, entre los cuales se tienen:
   a) Ramo de Vida: en caso de vida y en caso de muerte; y mixto de ahorro y riesgo
   b) Ramo de Accidentes Individuales o de Accidentes Personales.
   c) Ramo de Enfermedad.

2. **Ramos Patrimoniales:** Cubre la pérdida o daños materiales causados a los bienes. Entre los cuales se destacan:
   a) De Responsabilidad Civil
   b) De Automóviles
   c) Seguro Agrario
   d) De Pérdidas Pecuniarias
   e) De Crédito y Caución
   f) De Transporte
   g) De Ingeniería.

El Sistema Social de Seguros lo componen aquellas Instituciones de Seguridad Social que protegen a sus afiliados, que en forma obligatoria aportan mensualmente un determinado porcentaje de su remuneración; y otorgan prestaciones de salud, maternidad, cesantía, pensiones de jubilación, montepío y otras.

El Sistema Privado de Seguros está conformado generalmente por:

- Las empresas de Seguros, que tienen conformación legal como compañías anónimas, de responsabilidad limitada u otra forma de constitución, pueden ser empresas de seguros generales o empresas de seguros de vida, otorgan cobertura de riesgo a personas naturales o jurídicas.
- Las empresas de Reaseguros otorgan coberturas a una o varias empresas de seguros sobre uno o varios riesgos que hayan asumido; también realizan operaciones de retrocesión (ceden parte del reaseguro).
- Intermediarios de reaseguros: Personas naturales o jurídicas que gestionan o colocan reaseguros o retrocesiones.

[7] Bueno René. *Compilación de Seguros*. Quito, Ecuador. Año 2004, p. 11.

- Peritos de seguros: Personas naturales o jurídicas que realizan actividades de peritaje de seguros; pueden ser **Inspectores de Riesgo**, que realizan su trabajo antes de la contratación del seguro, y **Ajustadores de Siniestros**, que examinan las causas de los siniestros y valoran las pérdidas para la indemnización respectiva.
- Asesores Productores de Seguros; que pueden ser: **Agentes de Seguros**, que son personas naturales que se dedican a gestionar y obtener contratos de seguros, a nombre de una o varias empresas de seguros; y las **Agencias Asesoras Productoras de Seguros**, que son personas jurídicas que gestionan y obtienen contratos de seguros para una o varias empresas de seguros o de medicina prepagada.

El Contrato de Seguro: "El contrato de seguro es un documento mediante el cual, una de las partes, El Asegurador, se obliga, a cambio de una prima, a indemnizar a la otra, El Asegurado, dentro de los límites convenidos, de una pérdida o un daño producido por un acontecimiento incierto; o a pagar un capital o una renta, si ocurre la eventualidad prevista en el contrato" [8].

Los Principios básicos que caracterizan al seguro son: Simple, Principal, Oneroso, Mercantil, de Buena Fe, Aleatorio. Indivisible. Conmutativo y de Adhesión o de libre discusión.

Elementos del Contrato de Seguro que son de tres clases: a) Esenciales, materiales o reales; b) Personales; y, c) Formales.

a) A su vez los esenciales o materiales se pueden clasificar en:[9]

1. Interés asegurable es el objeto del contrato de seguros.
2. El riesgo, que es una contingencia o proximidad de un daño.
3. La prima, que es el precio del seguro, es la aportación económica que el asegurado o contratante paga al asegurador, por la cobertura del riesgo contratado. Generalmente se conocen dos clases de primas: a) Prima Pura, neta o de riesgo, calculada estadística y matemáticamente (con probabilidades), b) Prima Bruta o Comercial, que incluye a más de la prima neta, gastos administrativos, de producción, beneficio, comisiones y otros gastos.
4. El siniestro, que es la realización del riesgo que se asegura, que debe estar incluido en la póliza.
5. La indemnización: Es una compensación monetaria por parte del asegurador, a favor del asegurado, por una pérdida o en caso de producirse un siniestro, que esté contemplado en la póliza.

Indemnización = (Valor de los daños)(Suma Asegurada/Interés Asegurable)

$$I = VD\ (SA/IA)$$

[8] Código de Comercio. Art. 606. Registro Oficial 1147 de 13 de diciembre de 1963. Quito, Ecuador.
[9] ibid.

b) Los elementos personales (naturales o jurídicas) del contrato de seguros son:

1. Asegurador: Es la persona jurídica que asume los riesgos especificados en el contrato de seguros.
2. Solicitante, según el Código de Comercio "es una persona natural o jurídica que contrata el seguro, sea por cuenta propia o por la de un tercero determinado o determinable que traslada los riesgos al asegurador" [10].
3. Asegurado: Es la persona natural o jurídica interesada en la traslación de los riesgos, es el titular del interés asegurable, es la persona cuyo patrimonio puede resultar afectado por la realización de un riesgo y ocurrido el siniestro tiene derecho a la indemnización establecida en el contrato de seguro.
4. Beneficiario: Es el que ha de percibir, en caso de siniestro, el producto del seguro; es la persona designada por el asegurado para recibir el monto de la indemnización, de acuerdo con el contrato de seguro.
5. Perjudicado: Es la persona que, a consecuencia de un siniestro, sufre un daño o un perjuicio.

c) Elementos formales del Contrato de seguro:

1. Origen del contrato: Solicitud de seguro, proposición y declaración del asegurado
2. La póliza (según el curso de Introducción al Seguro de MAPFRE-FITSE) es el documento que instrumenta el contrato de seguro, en el que se reflejan las normas que regulan las relaciones contractuales convenidas entre asegurador y asegurado, contiene la carátula, condiciones particulares y condiciones especiales, en las cuales se especifican las obligaciones de las partes contratantes, designación del asegurado y beneficiario, objetos asegurados y otros aspectos con sus respectivas responsabilidades.
3. Vida del contrato de seguros, expresa las obligaciones de cada una de las partes, con base en la emisión y formalización de la póliza, esto es, las obligaciones y derechos del asegurado, asegurador, solicitante, cláusulas especiales y plazos.

Técnicas de distribución del riesgo asegurado

1. El coaseguro, constituye la cláusula de una póliza que exige que el asegurado realice un seguro adicional igual a un determinado porcentaje del valor de la propiedad.
2. El reaseguro, según J. M. Rosemberg, es la "Absorción por una compañía de seguros de todo o parte de un riesgo por póliza suscrita por otra compañía de seguros"; es el sistema o procedimiento mediante el cual se conviene que una de las partes, **la cedente o aseguradora**, traslade a otra, **la reaseguradora o aceptante**, una parte o participación fija de las responsabilidades que ha asumido a través de sus seguros directos, a fin de protegerse o reducir sus probables pérdidas. Es la operación de volver a asegurar. La responsabilidad de un reasegurador es para con el asegurador y hacia el asegurador únicamente"[11]; en el contrato de reaseguro existen conceptos que se tienen

[10] ibid.
[11] Bueno René Ing. *Compilación de Seguros*. Año 2004. Quito, Ecuador, p. 78.

que conocer: aceptación, asegurador directo, cedente, reasegurador, retención y retrocesión. En consecuencia, sus elementos personales son: **Reasegurador** (el que otorga una cobertura de reaseguro, aceptando el riesgo que le transfiere la aseguradora), **Cedente o reasegurado** (entidad aseguradora que tiene un riesgo y lo cede) y **Retrocesionario** (el que acepta el riesgo ofrecido por otro reasegurador).

Tipos de reaseguros

- Por su naturaleza:
1. El reaseguro obligatorio
2. Reaseguro Facultativo
3. Reaseguro Facultativo – Obligatorio

- Por su forma:
1. Reaseguro Proporcional, que puede ser a su vez:
   El contrato o reaseguro Cuota Parte
   El contrato o reaseguro Excedente
   El contrato facultativo – obligatorio como complemento del proporcional.

2. Reaseguro no Proporcional o de exceso de pérdidas, que puede ser a su vez:
   El contrato de pérdida por riesgo, o *excess of loss*
   El contrato de exceso de siniestralidad, *stop loss* o agregado.

Ejercicios de Reaseguro Proporcional, Contrato Cuota Parte

Una empresa de seguros toma un contrato de reaseguros con la modalidad Cuota Parte, 80/20, para un límite de contrato de $100.000,00:

Nº	Suma asegurada	Retención 20%	Cesión 80%	Facultativo
1	$ 10.000,00	2.000,00	8.000,00	-------
2	$ 20.000,00	4.000,00	12.000,00	-------
3	$ 40.000,00	8.000,00	32.000,00	-------
4	$ 100.000,00	20.000,00	80.000,00	-------
5	$ 120.000,00	20.000,00	80.000,00	20.000,00
6	$ 160.000,00	20.000,00	80.000,00	60.000,00

Como el límite del Contrato es de $ 100.000,00, el excedente puede colocarse en forma facultativa, o en un segundo contrato.
En eventualidad de ocurrencia de siniestros, en los casos del 1 al 4, el 80% cubre al reasegurador y el 20% a la aseguradora.

En los casos 5 y 6, en la eventualidad de siniestros, para reclamos por pérdidas de $ 4.000,00 y de $ 12.000,00, respectivamente:

Caso 5: $ 4.000,00

Descripción	Reaseguro	% de participación	Pérdida
Retención 20%	$ 20.000,00	16,67	666,80
Cuota Parte 80%	$ 80.000,00	66,67	2.666,80
Facultativo	$ 20.000,00	16,66	666,40
Total	$ 120.000,00	100,00	4.000,00

El % de participación se calcula en base de $ 120.000,00
La pérdida se calcula en base a $4.000,00 multiplicado por el respectivo %.

Caso 6: $ 12.000,00

Descripción	Reaseguro	% de participación	Pérdida
Retención 20%	$ 20.000,00	12,50	1.500,00
Cuota Parte 80%	$ 80.000,00	50,00	6.000,00
Facultativo	$ 60.000,00	37,50	4.500,00
Total	$ 160.000,00	100,00	12.000,00

El % de participación se calcula en base de $ 160.000.
La pérdida se calcula en base a $ 12.000,00 multiplicado por el respectivo %.

Ejemplo de indemnización:

Una persona posee un bien que tiene un costo de $25.000,00 y lo asegura en $20.000,00. Si el valor del siniestro es de $3.000,00. ¿Cuál será el valor de la indemnización?

$$I = 3.000,00\left(\frac{20.000,00}{25.000,00}\right) = \$2.400,00$$

Ejemplo de indemnización con Restauración de la Suma Asegurada (RSA):

Una empresa tiene un bien cuyo costo es de $50.000,00; lo asegura en $40.000,00, con una tasa de prima asegurable del 4,2%, realiza el contrato de seguros con un deducible del 10% del valor de los daños, se considera una depreciación del 1,8% mensual. El vencimiento de la póliza es el 20 de septiembre del 2008 y la fecha del siniestro el 24 de marzo del mismo año. El valor de los daños fue de $8.000,00. El Derecho de Emisión es el 50% del Impuesto a la Superintendencia de Bancos y Seguros (que es del 3,5% del valor de la prima). La vigencia del contrato de seguros es de un año. Calcular la Indemnización con Restauración de la Suma Asegurada (RSA).

Vencimiento de la póliza:	20 de sep.
Fecha del siniestro:	24 de marzo
Número de días por cobrar:	180 (6 meses)
Valor del bien:	\$50.000,00 = Interés Asegurable
Suma Asegurada:	\$40.000,00
Deducible:	10% del valor de los daños: 8.000,00(0,10) = \$800,00
Valor de los daños	\$ 8.000,00
Depreciación:	1,8% mensual del valor del siniestro (durante 6 meses)

Indemnización simple:

$$I = VD\left(\frac{SA}{IA}\right) = 8.000,00\left(\frac{40.000,00}{50.000,00}\right) = 6.400,00$$

Indemnización con depreciación:
Depreciación durante 6 meses = 8.000,00 (0,018) (6 meses) = 864,00
Indemnización con depreciación = 6.400,00 – 324,00 = 5.536,00

Indemnización con deducible:
Indemnización con depreciación - deducible
IDED = 5.536,00 – 800,00) = 4.736,00

Indemnización con Restauración de la Suma Asegurada RSA
Tasa de prima 0,042 (4.736,00) = 198,912

$$\text{Valor de la prima} = 198{,}9121\left(\frac{180}{360}\right) = 99{,}456$$

3,5% Sup. Bancos y Seguros = 99,456 (0,035) = 3,48
Derecho de emisión 50% = 3,48(0,50) = 1,74

Total \$ 104,676

Indemnización con RSA = 4.736,00 – 104,676 = \$ 4.631,32

Tasa de interés real *r*

De las tasas de interés estudiadas en este texto, se tomará *la tasa efectiva o anual* que, al ser relacionada con la tasa de inflación o la variación porcentual de índice de precios al consumidor, da lo que se denomina *tasa de interés real*.
Las *tasas de interés real* influyen significativamente en las economías de mercado, tanto en el ahorro como en los empréstitos o endeudamiento, y en las decisiones de inversión para poder calcular su rentabilidad. Se pueden calcular mediante dos fórmulas:

$$r = \left[\frac{\text{Tasa efectiva} - \text{Tasa de inflación}}{1 + \text{Tasa de inflación}}\right]$$

$$r = \left[\frac{i - d}{1 + d}\right] 100$$

Fórmula 8.3. Cálculo de la tasa de interés real

$$r = 100\left[\frac{1 + \text{Tasa efectiva}}{1 + \text{Variación porcentual del índice de precios}} - 1\right]$$

$$r = 100\left[\frac{1 + i}{1 + P} - 1\right]$$

Fórmula 8.4. Cálculo de la tasa de interés con ajuste de inflación.

Ejemplo

¿Qué tasa de interés real que se aplica en un país que tiene una tasa efectiva de 5% y una tasa de inflación del 3%? ¿Cuánto gana o pierde una persona que invierte $ 100.000 en un año en ese país?

$$r = \frac{i - d}{1 + d} 100$$

$$r = 100\,\frac{0{,}05 - 0{,}03}{1 + 0{,}03} = 100\left(\frac{0{,}02}{1{,}03}\right) = 1{,}94\%$$

$r = 1{,}94\ \%$

$r = 1{,}94\ \%$, tasa de interés real, o también

$$r = 100\left[\frac{(1{,}05)}{(1{,}03)}\ 1\right] = 1{,}94\%$$

$r = 1{,}94\ \%$

Ganancia o pérdida:

I = (C)(r) = 100.000(0,0914)(1) = $ 1.940
I = $ 1.940 como ganancia

Ejemplo

¿Qué tasa de interés real que se aplica en un país cuya tasa de interés efectiva es del 4% y la tasa de inflación o variación porcentual del índice de precios al consumidor es del 5%? ¿Cuánto gana o pierde una empresa que invierte $ 100.000 en 1 año?

$$r = \frac{i - d}{1 + d} 100$$

$$r = 100\left[\frac{0{,}04 - 0{,}05}{1 + 0{,}05}\right]$$

$$r = 100\left[\frac{-0{,}01}{1{,}05}\right] = -0{,}9524\%$$

$$I = 100.000\left(\frac{-0{,}9524}{100}\right) = -\$\ 925{,}40$$

Pérdida de $ – 952,40 en términos financieros.

Tasas de interés internacionales LIBOR

Las tasas de interés utilizadas con más frecuencia en préstamos o financiamiento externo son la tasa LIBOR y la *prime rate*.
La tasa LIBOR, sigla que significa "London Interbank Offered Rate", es una tasa de interés variable (de base flotante) de un grupo de los principales bancos y mercados de Londres. Es la principal base para las transacciones en el mercado de euros y dólares en el mundo occidental.
Por ejemplo, las transacciones para préstamos internacionales se realizan al 1 o 2% sobre la tasa LIBOR; también varían según el plazo de los créditos; así, en dos fechas diferentes:

a 30 días	2 3/4%	7 5/8%	4 1/2%	4 3/4%
a 180 días	2 5/15%	7 5/16%	5 1/5%	5 1/8%
a 360 días	3 3/16%	7 1/8%	3 2/5%	3 1/16%

Su variación afecta directamente el pago de los intereses.
La ***prime rate*** es la tasa de interés fluctuante que rige en el mercado de capitales de Nueva York para operaciones de crédito. Esta tasa es un promedio de las tasas de interés que cobran los bancos más importantes de los Estados Unidos de Norteamérica. Es una tasa fluctuante; por ejemplo, en un mes puede variar de 6%, 6 1/2% , 6 1/4%.
Así mismo, su variación afecta directamente el pago de los respectivos intereses. Las referidas tasas de interés son muy utilizadas, especialmente en préstamos internacionales tanto para el Estado como para las empresas privadas que los requieren para financiar sus programas de desarrollo e inversiones. Incluso se utilizan en el sistema de préstamos como amortización gradual y préstamos de proveedores.

Valor actual neto (VAN) Σ

Según Celio Vega, en su obra *Ingeniería económica,* “el valor actual neto (VAN) de una inversión es igual a la suma algebraica de los valores actualizados de los flujos netos de caja asociados a esa inversión... Si el valor actual neto de una inversión es positivo, la inversión debe aceptarse, y rechazarse si es negativo”.

Estos conceptos dan a entender que el VAN está relacionado con una tasa de interés y debe ser calculado con la fórmula del valor actual en interés compuesto: $C = M(1 + i)^{-n}$, donde M es el flujo de caja de un determinado año, durante el número de años que se deseen calcular los flujos de caja como valores actuales.
El VAN se utiliza en el cálculo de la tasa interna de retorno, como se verá más adelante.
La forma de cálculo es:

$$\text{VAN} = -\text{ INVERSIÓN} + \sum \frac{\text{FNC}}{(1+i)^n}$$

Fórmula 8.5. Cálculo del VAN.

VAN > 1 se acepta la inversión.
VAN < 1 no se recomienda la inversión.

Tasa interna de retorno TIR

La tasa interna de rendimiento o tasa interna de retorno de la inversión (TIR) es un *indicador financiero que se utiliza en la evaluación de proyectos para considerar su factibilidad* en un proyecto; en otras palabras, evaluar si un proyecto de inversión es o no rentable, cualquiera que sea. Se obtiene calculando el valor actual neto de la inversión y su posible recuperación en el largo plazo, con diferentes alternativas de tasa de interés.

Hay diversas definiciones de este concepto:
"Tasa interna de rendimiento: es aquella por la cual se expresa el lucro o beneficio neto que proporciona una determinada inversión en función de un porcentaje anual, que permite igualar el valor actual de los beneficios y costos y, en consecuencia, el resultado del VAN actual es igual a cero. Si la tasa interna de rendimiento es igual o sobrepasa el costo estimado de oportunidad o de sustitución del capital, la inversión permitirá, por lo menos, recuperar todos los gastos de explotación y de capital."[12]
"Tasa interna de retorno *(internal rate of return)* es la tasa de interés que equivale al valor presente de la expectativa futura de recibir el costo del gasto desembolsado. La tasa de rentabilidad se obtiene en pruebas necesarias con distintos tipos de interés hasta conseguir que se igualen los ingresos líquidos y los desembolsos para la inversión, descontados al momento inicial, con lo cual el valor del proyecto se hace cero."[13]
La tasa interna de retorno (TIR) puede calcularse mediante la siguiente ecuación, al tomar los datos del valor actual neto (VAN), el flujo neto de caja (FNC), el número de períodos de duración del proyecto (*n*) y los diferentes períodos (*k,* años) que se toman.[14]

$$\text{VAN} = -\text{I} + \sum_{n=0} \frac{{}^{n}\text{FNCk}}{(1+\text{TIR})^{k}} = 0$$

Fórmula 8.6. Cálculo de la TIR.

[12] N. Dávalos Arcentales*, Enciclopedia Básica de Administración, Contabilidad y Auditoría,* Quito, 1981, p. 498.
[13] N. A. A. Research Report*, Selección y planificación de inversiones*, Madrid, Ibérico Europea de Ediciones, 1968, p. 218.
[14] Celio Vega*, Ingeniería económica*, Quito, Mediavilla, 1983, p. 104.

Ejemplo

Calculemos el VAN y la TIR para una empresa que estima los siguientes flujos de caja durante 6 años de un proyecto X. Se considera el costo del capital r = 10% y una inversión inicial de $ 600.000, en el año cero.

Se requieren los flujos netos de caja con proyección a 6 años y se seleccionan tasas para que den un VAN positivo y otro VAN negativo.

Año	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ventas	--	500.000	510.000	520.000	530.000	540.000	550.000
Costo de operación	--	350.000	355.000	360.000	365.000	370.000	375.000
Depreciación	--	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
Utilidad (sin impuestos)	--	50.000	55.000	60.000	65.000	70.000	75.000
Flujo neto de caja (utilidad + depreciación)		150.000	155.000	160.000	165.000	170.000	175.000

Tabla 8.1. *Tabla de flujos netos de caja*

Cálculo de la TIR

Primero se calcula el valor actual neto para cada año:

Con r = 15% Con r = 16% Con r = 10%

	Con r = 15%	Con r = 16%	Con r = 10%
	$-VAN_1$	VAN_2	VAN_0
$-FNC_0 =$	– 600.000	– 600.000	– 600.000
$+FNC_1 =$	$\dfrac{150.000}{(1+r)^1} = 130.435$	129.310	$\dfrac{150.000}{1,10} = 136,364$
$+FNC_2 =$	$\dfrac{155.000}{(1+r)^2} = 117.202$	115.190	$\dfrac{155.000}{(1,10)^2} = 128,099$
$+FNC_3 =$	$\dfrac{160.000}{(1+r)^3} = 105.203$	102.505	$\dfrac{160.000}{(1,10)^3} = 120,210$
$+FNC_4 =$	$\dfrac{165.000}{(1+r)^4} = 94.340$	91.128	$\dfrac{165.000}{(1,10)^4} = 112,697$
$+FNC_5 =$	$\dfrac{170.000}{(1+r)^5} = 84.520$	80.939	$\dfrac{170.000}{(1,10)^5} = 105,557$
$+FNC_6 =$	$\dfrac{175.000}{(1+r)^6} = 75.657$	71.827	$\dfrac{175.000}{(1,10)^6} = 98.783$
$= VAN_r$	7.357	–9,101	101,710

$= VAN_{10\%} =$ 101.710 $VAN_{10\%} > 0$ entonces conviene la inversión

Como se halló un valor positivo y otro negativo, esto significa que la tasa interna de retorno se encuentra entre los límites:

Total: $\text{VAN}_1 = 7.357$ $\text{VAN}_2 = -9.101$

Entonces, la tasa interna de retorno puede calcularse por interpolación de las dos tasas:

$$\text{TIR} = r_1 + (r_2 - r_1)\left[\frac{\text{VAN}_1}{\text{VAN}_1 - \text{VAN}_2}\right]$$

Fórmula 8.7. Fórmula de la TIR por interpolación.

$$\text{TIR} = 0,15 + (0,16 - 0,15)\left[\frac{7.357}{7.357 - (-9,101)}\right]$$

$$\text{TIR} = 0,15 + 0,01\frac{7,357}{16.458}$$

$\text{TIR} = 0,15 + 0,00447$
$\text{TIR} = 0,15447$
$\text{TIR} = 15,447\%$ TIR > Costo del capítal, entonces conviene invertir.

Este resultado indica que la inversión podrá ser ventajosa, ya que el costo del capital es del 10%.
La TIR también puede encontrarse utilizando calculadoras electrónicas o computadoras.

Actividades de ejercitación

1. El 1º de enero del 2000 un inversionista compró un bono de \$ 100.000 al 20% EJ, redimible a la par el 1˚ de julio de 2009. Calcule: a) cuánto recibirá el 1˚ de julio de 2009; b) cuántos cupones cobrará y cuál será el valor de cada uno.

2. El 1˚ de junio de 2003 se compra un bono de \$ 100.000 al 12% DJ, redimible a 103 el 1˚ de diciembre del año 2017. Calcule: a) cuánto recibirá el comprador en la fecha de redención; b) cuántos cupones cobrará y cuál será el valor de cada uno.

3. Calcule el precio que se puede pagar por un bono de \$ 10.000 al 13% FA, redimible a 102 después de 10 años, si se desea un rendimiento del 12% capitalizable semestralmente.

4. Con el propósito de ganar el 17% anual capitalizable semestralmente, el 15 de marzo de 2002 se vende un bono de \$ 3.000 al 18% MS, redimible a la par el 15 de marzo del año 2017. Halle el precio de venta.

5. Halle el precio de un bono de \$ 5.000, al 16% MS, redimible a la par el 21 de marzo del año 2010, si se negocia el 21 de septiembre de 1998 a una tasa de rendimiento del 15% anual capitalizable semestralmente.

www.elsolucionario.net

6. Indique en el problema 5 si la negociación es a la par, con premio o con castigo. Justifique la respuesta.

7. Halle el precio de compra (sucio) de un bono de $ 1.000, al 14% EJ redimible a la par el 1° de julio de 2009, si se compra el 18 de abril de 1994, a fin de que reditúe 13% anual capitalizable semestralmente.

8. En el problema anterior, calcule el precio del bono limpio.

9. Calcule el precio de un bono (sucio) de $ 2.000 al 22% MN, redimible a la par el 30 de noviembre de 2003, si se compra el 15 de febrero de 1997 con un rendimiento del 21% anual capitalizable semestralmente.

10. Calcule el precio del bono limpio del problema 9.

11. Calcule la tasa de interés real, si la tasa efectiva es del 15% y la tasa de inflación del 6%.

12. Calcule: a) el valor real del interés generado y b) el valor real de la inversión de $ 100.000 durante un año, según los datos del problema anterior.

13. Calcule la tasa de interés real de una inversión de $ 76.000.000 durante un año, si la tasa efectiva fue del 12% y el índice de precios al consumidor o tasa de inflación, del 9%.

14. En el problema anterior, calcule: a) el valor real de los intereses generados y b) el valor real de la inversión.

15. Calcule la tasa de interés real que se aplica a una inversión de $ 100.000, si la tasa efectiva es del 18% y la variación porcentual del índice de precios al consumidor del 12%.

16. ¿Cuál es la ganancia o pérdida, en términos financieros, de la inversión del problema anterior durante 1 año?

17. Una empresa proporciona los siguiente datos para analizar si su inversión es rentable: inversión: $ 100.000; ingreso anual por renta promedio: $ 30.000; costo anual de operación: $ 15.000; depreciación anual: $ 10.000. Calcule su valor actual neto, si espera recuperar su inversión en 10 años y su TIR.

18. Calcule el VAN para el problema 17, e indique si la inversión es rentable, considerando el rendimiento del dinero con una tasa de interés real del 22%.

19. Una empresa requiere hacer una inversión de $ 500.000 y proyecta los siguientes datos: ingreso anual por ventas: $ 65.000; costo anual de operación: $ 35.000; depreciación anual: $ 50.000.000. Calcule su VAN si quiere recuperar su inversión en 10 años, si el costo del dinero se estima en el 9%.

20. En el problema 19, calcule la tasa interna de retorno e indique si la inversión es rentable, cuando el costo del dinero está a una tasa de interés real del 8%.

Respuestas

1. a) $ 100.000 b) 19 cupones de $ 10.000 c/u

2. a) $ 103.000 b) 29 cupones de $ 6.000 c/u

3. $ 10.635,8

4. $ 3.161,20

5. $ 5.270,17

6. La negociación es con premio, por cuanto la tasa de negociación es menor que la nominal del bono: 15% < 16%, lo cual da un precio mayor: $ 5.270,17.

7. $ 1.106,84

8. $ 1.064,84

9. $ 2.159,32

10. $ 2.065,21

11. Tasa de interés real: 8,4906%

12. a) Valor real del interés generado: $ 8.490,57
b) Valor real de la inversión: $108.490,57

13. Tasa de interés real: 2,75%

14. a) I = $ 2.090.000 b) M = $ 78.090.000

15. Tasa de interés real: 5,3571%

16. $ 5.357,14 de ganancia, en términos financieros

17. El VAN es mayor que 1: la inversión es factible. TIR = 21,4065%

18. VAN < 1: la inversión no es rentable.

19. El VAN es positivo > 1

20. TIR = 9,60%: la inversión sí es rentable.

Actividades de autoevaluación

1. Calcule: a) el valor de redención, b) el número de cupones y c) el valor de cada cupón de un bono de $ 100.000 al 15% MS, suscrito el 20 de marzo de 2002, redimible a la par el 20 de marzo de 2009.

2. Un bono de $ 500.000 al 20% AO, se suscribió el 15 de abril de 2003, redimible a 101 el 15 de abril de 2008. Calcule: a) el valor de redención, b) el número de cupones y c) el valor de cada cupón.

3. Calcule el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón de un bono de $ 900.000 al 18% MN, suscrito el 7 de mayo de 1995, redimible a 99 el 7 de mayo del año 2005.

4. Calcule el precio de un bono de $ 1.000.000 al 21% MS, redimible a la par el 18 de septiembre de 2009, si se negocia el 18 de marzo de 2004 a una tasa del 20% anual, capitalizable semestralmente.

5. En el problema anterior, explique qué tipo de negociación lleva a cabo el vendedor: con premio, a la par o con castigo.

6. En el problema 4, si la tasa de negociación es del 22% anual, capitalizable semestralmente, calcule el precio del bono e indique qué tipo de negociación es.

7. En el problema 4, considere una tasa de negociación del 21% anual, capitalizable semestralmente.

8. Un bono de $ 800.000 al 15% AO, redimible a la par el 24 de octubre de 2009, se negocia el 6 de junio de 2005 a una tasa de rendimiento del 14% anual, capitalizable semestralmente. Calcule el precio del bono al 6 de junio.

9. Calcule el precio del bono limpio en el problema anterior.

10. Calcule la tasa de interés real que se aplica en un país que tiene una tasa efectiva del 25% y una tasa de inflación o variación porcentual del índice de precios al consumidor del 21% anual. ¿Cuánto gana o pierde una empresa, en términos reales, si invierte $ 900.000.000 en un año?

11. Calcule el precio y el rendimiento de un pagaré cuyo valor nominal es de $ 3.000, suscrito el 17 de mayo a 180 días de plazo, si se negocia el 4 de septiembre del mismo año, a una tasa de descuento del 9% anual.

Respuestas

1. a) Valor de redención: (100.000)(1) = $ 100.000
b) Número de cupones: 14
c) Valor de cada cupón: $(100.000)(0{,}15)\dfrac{180}{360} = \$\ 7.500$

2. a) Valor de redención: (500.000)(1,01) = $ 505.000
b) Número de cupones: 10
c) Valor de cada cupón: $(500.000)(0{,}20)\dfrac{180}{360} = \$\ 50.000$

3. a) Valor de redención: (900.000)(0,99) = $ 891.000
b) Número de cupones: 20
c) Valor de cada cupón: $(900.000)(0{,}18)\dfrac{180}{360} = \$\ 81.000$

4. a) Valor de redención: 1.000.000(1) = $ 1.000.000
b) Número de cupones: 11
c) Valor de cada cupón: 1.000.000(0,105) = $ 105.000

$$\text{Precio} = 1.000.000(1 + 0{,}10)^{-11} + 105.000\left[\frac{1 - (1 + 0{,}10)^{-11}}{0{,}10}\right]$$

Precio = 350.493,90 + 681.981,40 = $ 1.032.475,30

Precio = $ 1.032.475,30

5. Como la tasa de negociación es menor que la nominal del bono, es lógico que el precio sea mayor que el valor nominal del bono; por lo tanto, es una negociación con premio para el vendedor.

1.032.465,30 – 1.000.000 = $ 32.475,30 a favor del vendedor

6. $\text{Precio} = 1.000.000(1 + 0{,}11)^{-11} + 105.000\left[\dfrac{1 - (1 + 0{,}11)^{-11}}{0{,}11}\right] = \$\ 968.967{,}42$

El precio es de $ 968.967,42; se trata de una negociación con castigo para el vendedor, pues el precio es menor que el valor nominal del bono.

7. $\text{Precio} = 1.000.000(1 + 0{,}105)^{-11} + 105.000\left[\dfrac{1 - (1 + 0{,}105)^{-11}}{0{,}105}\right]$

Precio = 333.437,88 + 666.562,12 = $ 1.000.000

Se trata de una negociación a la par, pues el precio es igual al valor nominal, $ 1.000.000.

8. Se trata de una negociación en una fecha diferente de la de pago de intereses; por tanto, primero se debe calcular el precio del bono en la última fecha de pago de intereses antes de la venta.

Valor de la redención: 800.000(1) = \$ 800.000
Número de cupones: 9

Valor de cada cupón: $(800.000)(0,15)\left(\frac{180}{360}\right) = \$\ 60.000$

$$\text{Precio} = 800.000(1 + 0,07)^{-9} + 60.000\left[\frac{1 - (1 + 0,07)^{-9}}{0,07}\right]$$

Precio = 435.146,99 + 390.913,94 = \$ 826.060,93
Número de días comprendidos entre el 24 de abril y el 6 de junio: 43
Monto = 826.060,93[1 + 0,07(43/180)] = \$ 839.874,50 que es el precio del bono sucio a la fecha citada.

El precio del bono (sucio) es \$ 839.874,50.

9. Es necesario calcular previamente el interés redituable.

Interés redituable: $\left(\frac{43}{180}\right)(60.000) = \$\ 14.333,33$

Precio del bono limpio = 839.874,50 – 14.333,33 = \$ 825.541,17

El precio del bono limpio es \$ 825.541,17

10. Tasa efectiva $i = 25\% = 0,25$
Tasa de inflación: $d = 21\% = 0,21$
Plazo: 1 año
Primero se debe calcular la tasa de interés real:

$$r = 100\left[\frac{0,25 - 0,21}{1 + 0,21}\right] = 3,305785\%$$

Luego se calcula el interés generado en un año:
I = 900.000.000(0,033057)(1) = \$ 29.752.06

Obtiene una ganancia de \$ 29.752.06

11. Expresemos el problema gráficamente:

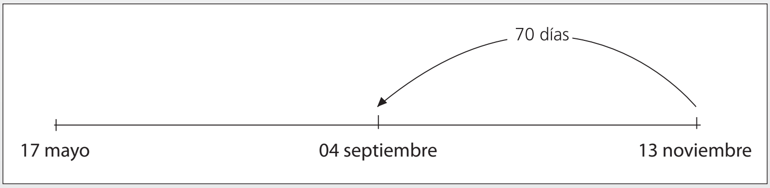


Gráfico 8.1. Solución gráfica del problema 11

$$\text{Precio} = 3.000\left[1 - 0{,}09\left(\frac{70}{360}\right)\right] = 3.000(0{,}9825)$$

Precio = \$ 2.947,50

Es el 98,25% del valor nominal.

$$\text{Rendimiento} = \frac{0{,}09}{1 - 0{,}09\left(\frac{70}{360}\right)} = 9{,}16\%$$

Actividades de repaso

1. ¿Qué es un sistema financiero? ¿Cuáles son sus componentes principales?

2. ¿En qué consiste el mercado de valores?

3. ¿En qué se diferencian los documentos de renta fija de los de renta variable?

4. ¿Cómo se calculan el precio y el rendimiento de los documentos financieros?

5. ¿Qué es un bono? ¿Cuáles son sus características?

6. ¿Cómo se calcula el precio de un bono?

7. ¿Cómo se calcula el precio de un bono sucio y de un bono limpio?

8. ¿Qué es un seguro?

9. ¿En qué consiste la tasa de interés real? ¿Cómo se calcula?

10. ¿Qué son valor actual neto y tasa interna de retorno?

Complete su aprendizaje con el CD
que acompaña a este libro

Bibliografía

ÁLVAREZ ARANGO, Alberto A., *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1995

AYRES, Frank Jr., *Matemáticas financieras, Teoría y 500 problemas resueltos*, Bogotá, McGraw-Hill, 1970.

BACCHINI D. Roberto y otros, *Ingeniería financiera futura y opciones utilizando Excel,* Ed. Omicron Editorial, Buenos Aires, Argentina, 2005.

BOLSA DE VALORES DE QUITO, *Guía del inversionista bursátil*, Quito, Jumandi, 2000.

BOTER Mauri, F., *Precio de coste industrial*, Barcelona, Juventud, 1950.

BRIGHAM, E. F. y Gapenski, L. C., *Financial Management, Theory and Practice,* Orlando, The Dryden Press, 1988.

BUENO, René, *Compilación de Seguros*. Quito, Ecuador, 2004.

CISSELL, R. y Cissell, H., *Matemáticas financieras*, México, Compañía Editorial Continental, 1978.

COBO, H., *Gestión financiera de control y sistemas* (tesis de grado), Quito, Facultad de Ciencias Administrativas, Universidad Central del Ecuador, 1978.

COLLI Bernard, J.C. y Lewandowski, D., *Diccionario Económico-Financiero*, Madrid, Asociación para el Progreso de la Dirección, 1981.

DÁVALOS ARCENTALES, N., *Enciclopedia básica de administración, contabilidad y auditoría*, Quito, Ed. Ecuador, 1981.

DE LA CUEVA G. B., *Matemáticas financieras*, México, UNAM, 1971.

DÍAS MOSTO, J., *Matemática financiera y aplicaciones de contabilidad*, Lima, Universo, 1979.

DÍEZ DE CASTRO, Luis y MASCAREÑAS PÉREZ - ÍÑIGO, Juan, *Ingeniería financiera*, Ed. McGraw-Hill, 2a. edición. Madrid, España, 2000.

Enciclopedia básica de matemática moderna, Madrid, Santillana, 1972.

FONDO MONETARIO INTERNACIONAL, *Informe anual 1981*. Washington D.C., Fondo Monetario Internacional, 1981.

FUNDACIÓN MAPFRE. *Estudios Instituto de Ciencias del Seguro,* Edit. MAPFRE, Madrid, 2000.

Gran diccionario enciclopédico universal, Valencia, Ortells, 1980.

GUARDIOLA LOZANO, Antonio, *Manual de Introducción al Seguro,* Madrid, MAPFRE, 2001.

INFANTE VILLARREAL, A., *Evaluación económica de proyectos de inversión*, Cali, Biblioteca Banco Popular, 1979.

LANYI, A. y Rusdu S., "La importancia de las tasas de interés en economías en desarrollo", en *Revista Finanzas y Desarrollo*, vol. 20, núm. 2, Washington D.C., Fondo Monetario Internacional-Banco Mundial, junio de 1983.

LERNER, J. J. y Zima, Peter, *Theory and Problems of Business Mathematics*, San Francisco, McGraw-Hill, 1985.

Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, Registro oficial 439, Suplemento, 12 de mayo de 1994, Quito, Ecuador.

Ley de Mercado de Valores, Quito, Registro Oficial 199 de 28 de mayo de 1993.

Ley de Seguridad Social, expedida el 30 de noviembre de 2001, Quito, Ecuador.

Locke, F. M., *Matemáticas comerciales*, México, Limusa, 1975.
Magee, J. E., *Seguros generales*, México, UTEHA, 1947.
Meier y Archer, *An Introduction to Mathematics for Business Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, 1960.
Moore H. J., *Manual de matemáticas financieras*, México, UTEHA, 1973.
Mora Zambrano, A., *Texto de matemática financiera,* Quito, Instituto de Estudios Administrativos, Universidad Central del Ecuador, 1995.
Mora Zambrano, A., *Matemáticas financieras,* Bogotá, McGraw-Hill, 2001.
NAA Research Report*, Selección y planificación de inversiones*, Madrid, Ibérico Europea, 1968.
Naranjo Toro, M., *Auditoría,* Quito, Instituto de Estudios Administrativos. Universidad Central del Ecuador, 1968.
Portus Govinden, L., *Matemáticas financieras*, Bogotá, McGraw-Hill, 1975.
Rich, B., *Álgebra elemental. 2.700 problemas resueltos y 3.000 problemas suplementarios*, Bogotá, McGraw-Hill, 1969.
Romero Miño, L. A., *Matemática financiera*, Quito, Northwood. Institute Division, 1971.
Santamaria Ñacato, Édgar, *Guía Didáctica de Seguros,* Quito, 2007.
Selby, S. M., *Standard Mathematical Tables*, Cleveland, Ohio, The Chemical Rubber, 1971.
Seldon, A. y Pennance, F. G., *Diccionario de Economía*, Barcelona, Oikostan, 1987.
Sevilla, J. M. y Souvegrain, R., *Tópicos de matemáticas para administradores y economistas*, México, Trillas, 1976.
Superintendencia de Bancos. *Catálogos de cuentas del Libro Mayor de las Asociaciones, Mutualistas de Ahorro y Crédito*, Quito, 1979.
Torija Torres, M., *Manual de matemáticas mercantiles*, México, Trillas, 1976.
Vega, C., *Ingeniería económica*, Quito, Mediavilla, 1983.
Venegas L., Rodríguez, J. y Mora, S. A., *"Solucionario de problemas propuestos de matemática financiera de Frank Ayres Jr",* Quito, 1983 (inédito).
Weston, Fred y Brighman, E. F., *Managerial Finance*, Nueva York, Holt Tinehart and Winston, 1969.