

RELACIONES

INTRODUCCIÓN

La importancia de esta idea es que las funciones juegan un papel primordial en la modelación de situaciones de la vida real.

La palabra función la introdujo en Matemática el alemán Leibniz, quien utilizaba el término para designar algunas fórmulas matemáticas.

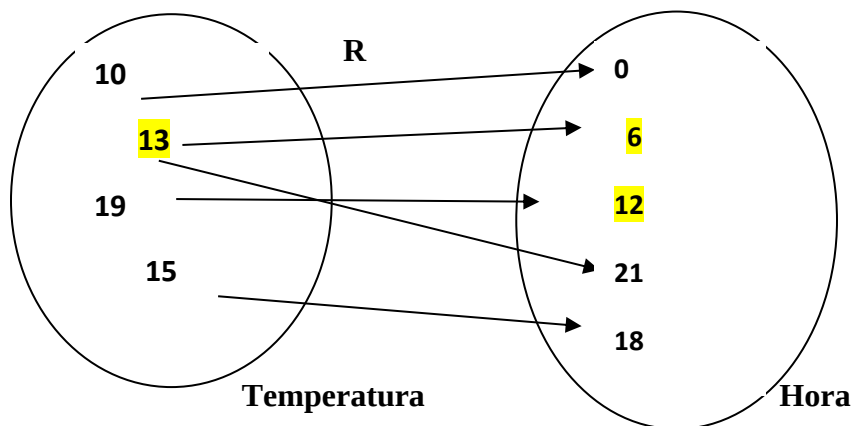
Todos los que utilizan Matemática, esencialmente emplean funciones: Físicos, Químicos, Biólogos, Economistas, Psicólogos, Sociólogos, e Ingenieros analizan las relaciones entre los elementos en sus campos y tratan de entender el porqué de las cosas.

RELACIONES

Hay muchas situaciones en que un conjunto de información está relacionado con otro; por ejemplo, la relación existente entre la hora del día y la temperatura ambiental, otro ejemplo la relación existente entre la distancia entre 2 ciudades y el costo del pasaje entre ellas.

EJEMPLO PRÁCTICO: supongamos que identificamos la temperatura con la hora del día y representémosla mediante un Diagrama de Venn.

Temperatura en °C	10	13	19	15	13
Hora del Día	0	6	12	18	21



Si la anterior información se muestra como un Conjunto de pares ordenados tenemos:

$$R = \{(10,0);(13,6);(19,12);(15,18);(13,21)\} \quad (x,y) \in R^2$$

DEFINICIÓN DE RELACIÓN: Dados dos conjuntos A y B una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas (par ordenado) que hacen verdadera una proposición; dicho de otro modo, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

Ejemplo 1.

Si $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 4, 5\}$, encontrar tres relaciones definidas de A en B.

Solución

El producto cartesiano de $A \times B$ está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$$

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

$$R_1 = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$R_2 = \{(2, 4), (3, 5)\}$$

$$R_3 = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$R_4 = \{(2, 4)\}$$

La relación R_1 se puede definir como el conjunto de pares cuyo segundo elemento es 1, esto es,

$$R_1 = \{(x, y) / y = 1\}.$$

La relación R_3 está formada por los pares cuyo primer componente es menor que el segundo componente, $R_3 = \{(x, y) / x < y\}$

La relación R_2 está conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo, $R_2 = \{(x, y) / y = x + 2\}$

Ejemplo 2.

Dados los conjuntos $C = \{1, -3\}$ y $D = \{2, 3, 6\}$, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación

$$C \times D = \{(1,2); (1,3); (1,6); (-3,2); (-3,3); (-3,6)\}$$

$$R1 = \{(x, y) / x \leq 0\} = R1 = \{(-3, 2); (-3, 3); (-3, 6)\}$$

$$R2 = \{(x, y) / X + 5 = Y\} = R2 = \{(1, 6); (-3, 2)\}$$

$$R3 = \{(x, y) / Y = 2X\} = R3 = \{(1, 2)\}$$

$$R4 = \{(x, y) / Y = X + 1\} \quad R4 = \{(1, 2)\}$$

Solución:

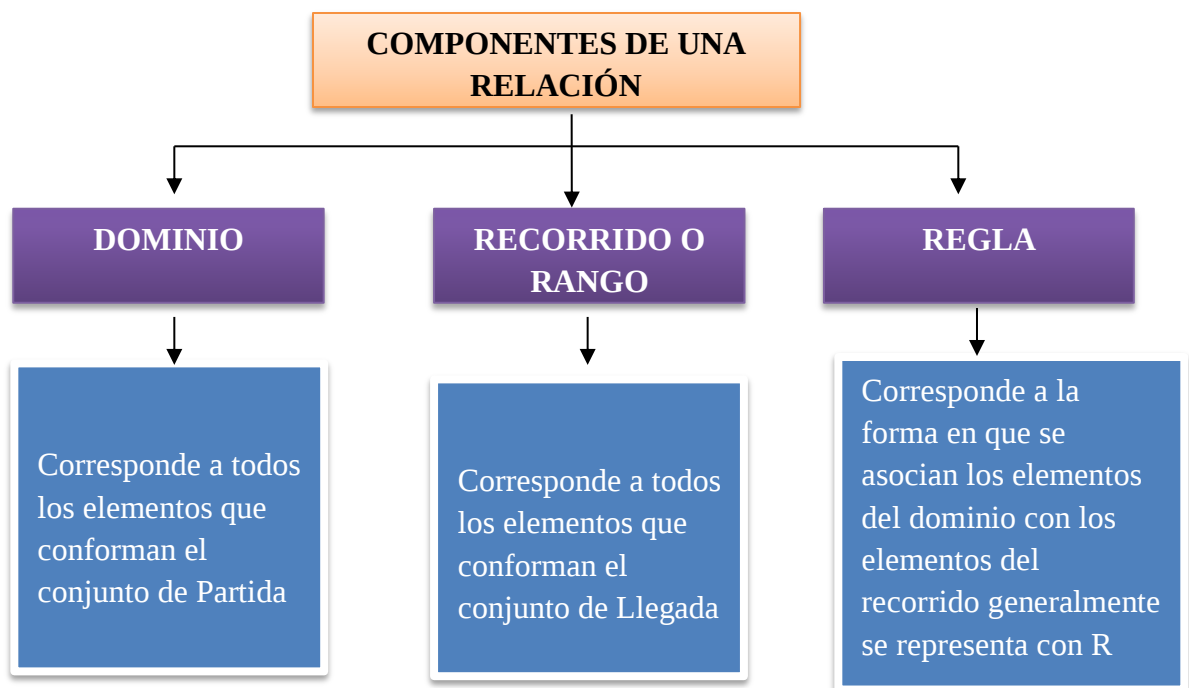
El producto cartesiano de $C \times D$ está formado por los siguientes pares ordenados

$$C \times D = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (-3, 2), (-3, 3), (-3, 6)\}$$

Las parejas ordenadas que satisfacen que la suma de sus componentes sea igual a 3 son:

$$R = \{(1, 2), (-3, 6)\} \quad R = \{(x, y) / 3 = X + Y\}$$

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto **C**, el conjunto de llegada es el conjunto **D** y la expresión $x + y = 3$ es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RELACIONES

Los pares ordenados se pueden representar gráficamente por medio de diagramas sagitales (venn) o por medio de puntos en el plano cartesiano (sistema de referencia; eje coordenado; R^2).

Ejemplo

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y R la relación definida por la regla

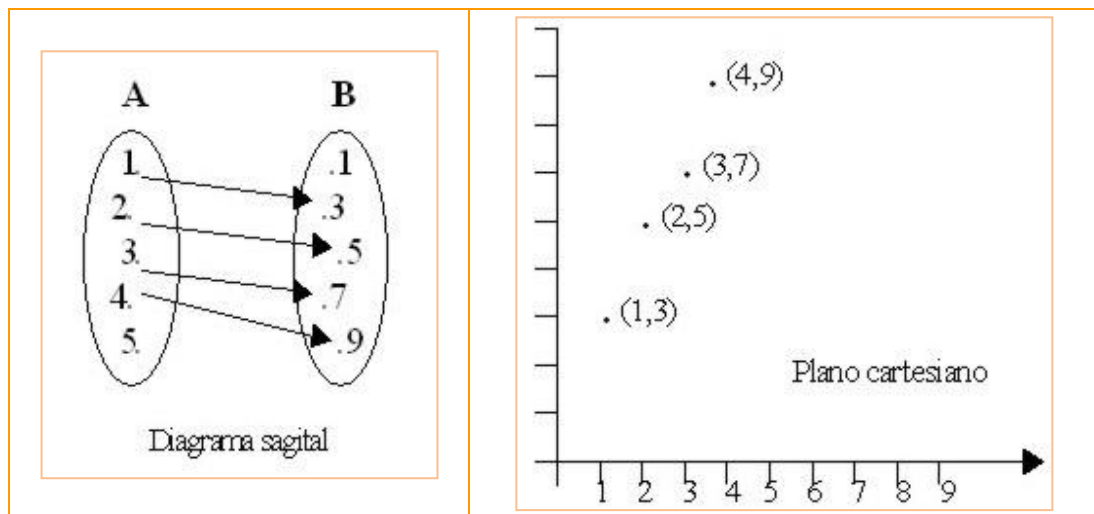
$R = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$, graficar R .

Solución

Los pares ordenados que pertenecen a la relación (que cumplen con $y = 2x + 1$) son:

$$R = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$$

Y la gráfica correspondiente es la siguiente:



TALLER N 01:

- 1) En cada una de las relaciones; identifique sus componentes.

$$a \rightarrow w$$

$$b \rightarrow u$$

$$c \rightarrow v$$

$$p \rightarrow 1$$

$$q \rightarrow 2$$

$$r \rightarrow 3$$

$$-2 \rightarrow 4$$

$$-5 \rightarrow 25$$

$$5 \rightarrow$$

$$-3 \rightarrow -27$$

$$-1 \rightarrow -1$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$9 \rightarrow 729$$

- 2) Represente las siguientes relaciones.

a. $A = \{(1,1), (-2,1), (3,5), (-3,7)\}$

b. $B = \{(-1,-1), (2,2), (3,-3), (-4,4)\}$

c. $C = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$

d. $D = \{(a,b), (c,d), (e,f), (b,a)\}$

- 3) Encuentre la segunda componente de cada par ordenado si su valor es el doble de la primera componente.

a. $(3, ?)$

b. $(2, ?)$

c. $(-1/2, ?)$

d. $(a^2, ?)$

- 4) Dado el conjunto $P = \{0, 1, 4, 16\}$ y la regla es que los elementos de Q son tales que $x = 4y^2$ donde $x \in P$. Obtenga las parejas ordenadas y realice el Diagrama de Venn.

- 5) Si el conjunto $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y la regla es los elementos de A cumplen que $x^2 + y^2 = 4$ donde $y \in B$. Obtenga las parejas ordenadas y realice el Diagrama de Venn.

FUNCIÓN

DEFINICIÓN_1.- Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes recibe el nombre de contra dominio (rango, recorrido, ámbito, imagen) de la función.

DEFINICIÓN_2.- Se denomina función a la relación que existe entre 2 conjuntos de números reales, de forma que a cada elemento del Dominio le corresponde uno y solamente un elemento del Recorrido o Rango.

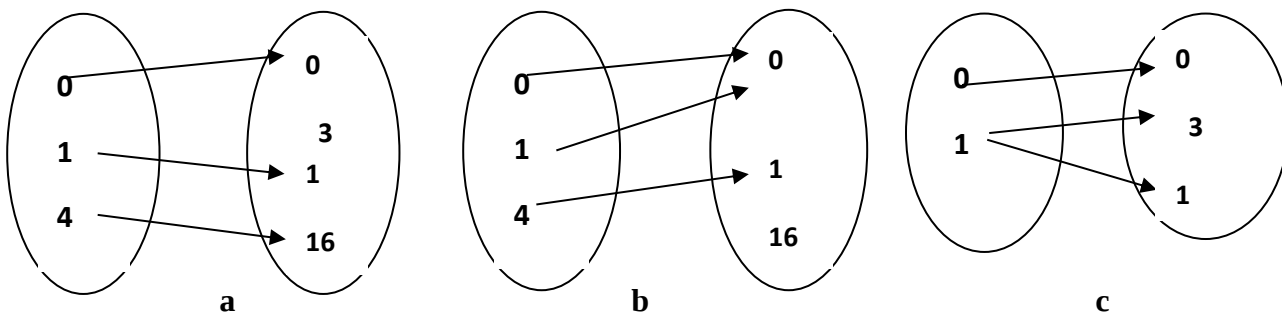
Ejemplos de función

1. En la ecuación $y = x + 1$, a cada valor de x le corresponde un solo valor de y.
2. Un estudiante puede calcular el perímetro de los polígonos regulares cuyo lado es igual a 2 cm. Así al triángulo le corresponde el número 6, al cuadrado el 8, al pentágono el 10, etc. De ahí se puede formar la siguiente tabla de valores:

Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Perímetro en cm.	6	8	10	12	14	16	18

NOTA: Se debe tener en cuenta que no toda correspondencia es una función

Por ejemplo en la figura las relaciones a y b son funciones pero la relación c no es función ya que a uno de sus elementos le corresponden dos elementos del rango.



VARIABLES Y CONSTANTES

En el estudio de funciones hay 2 conceptos fundamentales que debemos estudiar:

VARIABLES: Es todo aquello que cambia a través del espacio o tiempo. Existen dos tipos de variables que son:

- a. **Independiente.-** Se considera a aquella variable que se define por sí sola, por ejemplo el Tiempo.
- b. **Dependiente.-** Como su nombre lo indica es aquella que queda definida a partir de otra, es decir depende de otra para ser establecida. Por ejemplo el área del círculo depende del radio.

CONSTANTES: Son términos que tienen valores fijos; es decir no cambian en ninguna circunstancia, por ejemplo los valores numéricos son considerados constantes.

NOTA: Se emplean las primeras letras del alfabeto para designar las constantes (a,b,c) y las últimas letras del alfabeto para las variables (x,y,z)

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Una función se puede expresar mediante:

- ✓ **Un texto.-** Indica de manera cómo se relacionan 2 cantidades. Ej: “El salario de un obrero en 15 días”.
- ✓ **Representación Algebraica.-** Cuando las magnitudes están relacionadas entre sí por una fórmula. Ej: $y = f(x)$; $g(x)$; $h(x)$,.....

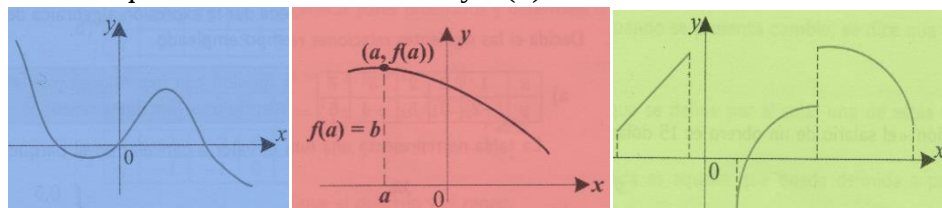
Del ejemplo anterior tenemos: $y=15x$

- ✓ **Representación Tabular.-** Consiste en elaborar una tabla en la que se escribe una pequeña cantidad de valores de la variable independiente y de la función.

Por ejemplo se puede ilustrar el salario de un obrero y el número de días laborados de la siguiente manera:

X días	1	2	13	15	29
Y dólares	15	30	195	225	435

- ✓ **Representación Gráfica.-** El gráfico de una función es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano cartesiano que satisfacen la ecuación $y=f(x)$



EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Aunque generalmente se usa f para denominar una función y x se emplea para indicar la variable independiente, se pueden emplear otras letras. Por ejemplo,

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1, f(y) = -y^2 + 4y + 1 \quad g(s) = -s^2 + 4s + 1 \quad q(r) = -r^2 + 4r + 1$$

Podemos ver el rol de la variable independiente como un «recipiente» donde se colocan los valores que toma esta variable. La evaluación de una función consiste en sustituir el argumento de la función por un valor numérico o una expresión algebraica.

$$f(\square) = -(\square)^2 + 4(\square) + 1.$$

Ejemplos:

1) Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, hallar:

a) $f(2)$; b) $f(t - 1)$

Solución:

a) Reemplazando x por 2 en $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, se obtiene:

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 \quad f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$$

b) Sustituyendo x por $t - 1$, resulta:

$$f(t-1) = -(t-1)^2 + 4(t-1) + 1 = -(t^2 - 2t + 1) + 4t - 4 + 1 = -t^2 + 6t - 4.$$

2) Evaluar la función $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ cuando el valor numérico de x es 4 .

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^4 + 4^3 - 11(4)^2 - 9(4) + 18 \\ f(4) &= 256 + 64 - 11(16) - 36 + 18 \\ f(4) &= 256 + 64 - 176 - 36 + 18 \\ f(4) &= 126 \end{aligned}$$

TAREA 1:

ACTIVIDADES DE REFUERZO.

Llene el cajón, usando la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y los valores de la variable independiente. Simplifique el resultado.

- a) $f(2) = (\square)^2 - 3(\square) + 2$; c) $f(t + 1) = (\square)^2 - 3(\square) + 2$;
b) $f(-2) = (\square)^2 - 3(\square) + 2$; d) $f(x + h) = (\square)^2 - 3(\square) + 2$;

En los siguientes ejercicios evalúe la función en los valores de la variable independiente indicada simplifique.

- a) $f(x) = 5x - 12$.
 $f(-2)$; $f(0)$; $f(t-1)$; $f(x^2)$
b) $g(t) = t^2 + 3t$
 $g(0,5)$

Para $h(x) = 2x^2 - 5$, determine:

- a) $h(a)$ b) $h(b-1)$ c) $h(\sqrt{c} - 2)$; d) $h(2-5x)$.

Considerando las funciones $f(x) = 4x^2 + 3x$ y $g(x) = 1 + 2x$.

- a. Determine $f(36)$
b. $g(25)$
c. Halle $f(c-2) + g(c+2)$.

Supongamos que t horas después de medianoche, la temperatura =

$10 + 3t + 5t^2$

Grados centígrados.

¿Cuál es la temperatura a las 2h00?

¿Cuál es el incremento de la temperatura entre las 6h00 y las 9h00