Los números enteros

Con los **números naturales no** era posible realizar **diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo**, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor.

Por ejemplo, la necesidad de representar **el dinero adeudado, temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar**, etc.

Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo **conjunto** numérico llamado **números enteros**.

El conjunto de los números enteros está formado por:

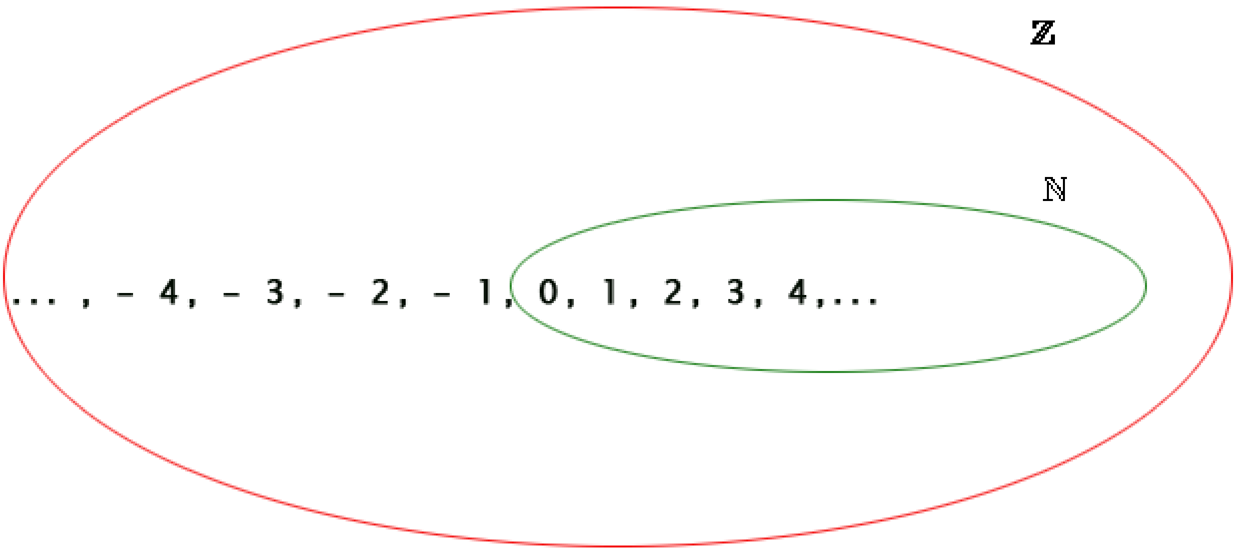
$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

Es decir, **los naturales, sus opuestos (negativos) y el cero.** Se dividen en tres partes: **enteros positivos o números naturales, enteros negativos y cero.**

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a **los números naturales son un subconjunto de los enteros**.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$



Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un **número entero** es el **número natural** que resulta al **suprimir su signo**.

El **valor absoluto** lo escribiremos entre **barras verticales**.

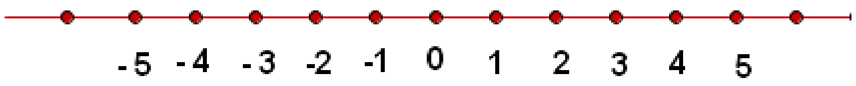
$|-5| = 5$ $\qquad$ $|5| = 5$

Representación de los números enteros

1. En una **recta horizontal**, se toma un **punto** cualquiera que **se señala** como **cero**.

2. A su **derecha** y a distancias iguales se van señalando los números **positivos**: **1, 2, 3,...**

3. A la **izquierda** del cero y a distancias iguales que las anteriores, se van señalando los números **negativos: − 1, −2, −3,...**



Orden en los números enteros

Los números enteros están ordenados. De dos números representados gráficamente, es **mayor** al que él está situado más a la **derecha**, y **menor** el situado más a la **izquierda.**

Criterios para ordenar los números enteros

1. **Todo número negativo es menor que cero.**

$-7 < 0$

2. **Todo número positivo es mayor que cero.**

$7 > 0$

3. **De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.**

$-7 > -10$ $\quad$ $|-7| < |-10|$

4. **De los enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.**

$10 > 7$ $\quad$ $|10| > |7|$

Suma de números enteros

1. Si los sumandos son del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el signo común.

$3 + 5 = 8$

$(-3) + (-5) = -8$

2. Si los sumandos son de distinto signo, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le pone el signo del número de mayor valor absoluto.

$-3 + 5 = 2$

$3 + (-5) = -2$

Propiedades de la suma de números enteros

1. **Interna**:

El resultado de sumar dos números enteros es otro número entero.

a + b $\in \mathbb{Z}$

3 + (−5) $\in \mathbb{Z}$

2. **Asociativa**:

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

(a + b) + c = a + (b + c) ·

(2 + 3) + (− 5) = 2 + [3 + (− 5)]

5 − 5 = 2 + (− 2)

0 = 0

3. **Conmutativa**:

El orden de los sumandos no varía la suma.

a + b = b + a

2 + (− 5) = (− 5) + 2

− 3 = − 3

4. **Elemento neutro**:

El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

a + 0 = a

(−5) + 0 = − 5

5. **Elemento opuesto**

Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.

a + (-a) = 0

5 + (−5) = 0

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

−(−5) = 5

Resta de números enteros

La resta de números enteros se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

a - b = a + (-b)

$7 - 5 = 2$

$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$

Propiedades de la resta de números enteros

1.**Interna**:

La **resta dos números enteros** es otro **número entero**.

a − b $\in \mathbb{Z}$

$10 - (-5) \in \mathbb{Z}$

2. **No es Conmutativa**:

a - b ≠ b - a

$5 - 2 \neq 2 - 5$

Multiplicación de números enteros

La **multiplicación** de varios **números enteros** es otro **número entero**, que tiene como **valor absoluto el producto de los valores absolutos** y, como **signo**, el que se obtiene de la aplicación de la **regla de los signos**.

Regla de los signos

+ por + = +
- por - = +
+ por - = -
- por + = -

$2 \cdot 5 = 10$

$(-2) \cdot (-5) = 10$

$2 \cdot (-5) = -10$

(−2) · 5 = − 10

Propiedades de la multiplicación de números enteros

1. **Interna**:

El resultado de **multiplicar dos números enteros** es otro **número entero**.

a · b $\in \mathbb{Z}$

2 · (−5) $\in \mathbb{Z}$

2. **Asociativa:**

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son **números enteros** cualesquiera, se cumple que:

(a · b) · c = a · (b · c)

(2 · 3) · (−5) = 2· [(3 · (−5)]

6 · (−5) = 2 · (−15)

-30 = -30

3. **Conmutativa:**

El orden de los factores no varía el producto.

a · b = b · a

2 · (−5) = (−5) · 2

-10 = -10

4. **Elemento neutro**:

El **1** es el **elemento neutro** de la **multiplicación** porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

a ·1 = a

(−5)· 1 = (−5)

5. Distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

a · (b + c) = a · b + a · c

(−2)· (3 + 5) = (−2) · 3 + (−2) · 5

(−2)· 8 =- 6 - 10

-16 = -16

6. **Sacar factor común:**

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

a · b + a · c = a · (b + c)

(−2) · 3 + (−2) · 5 = (−2) · (3 + 5)

División de números enteros

La **división** de **dos números enteros** es otro **número entero**, que tiene como **valor absoluto el cociente de los valores absolutos** y, como **signo**, el que se obtiene de la aplicación de la **regla de los signos**.

Regla de los signos

+	entre	+	=	+
-	entre	-	=	+
+	entre	-	=	-
-	entre	+	=	-

10 : 5 = 2

(−10) : (−5) = 2

10 : (−5) = − 2

(−10) : 5 = − 2

Propiedades de la división de números enteros

1. **No es una operación interna**:

El resultado de **dividir dos números enteros** no siempre es otro **número entero**.

(−2) : 6 $\notin \mathbb{Z}$

2. **No es Conmutativo**:

a : b ≠ b : a

6 : (−2) ≠ (−2) : 6

Potencia de números enteros

La **potencia de exponente natural de un número entero** es otro **número entero**, cuyo valor **absoluto es el valor absoluto de la potencia** y cuyo **signo** es el que se deduce de la aplicación de las siguientes **reglas**:

1. **Las potencias de exponente par son siempre positivas.**

$$(+)^{par} = +$$
$$(-)^{par} = +$$

2. **Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base.**

$$(+)^{impar} = +$$
$$(-)^{impar} = -$$

Propiedades

1. $\mathbf{a^0 = 1}$ ·

2. $\mathbf{a^1 = a}$

3. **Producto de potencias con la misma base**:

Es otra potencia con **la misma base** y cuyo **exponente** es la **suma de los exponentes.**

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

$\mathbf{(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128}$

4. **División de potencias con la misma base**:

Es otra potencia con la **misma base** y cuyo **exponente** es la **diferencia de los exponentes.**

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

$\mathbf{(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8}$

5. **Potencia de una potencia**:

Es otra potencia con l**a misma base** y cuyo **exponente** es el **producto de los exponentes.**

$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

$\mathbf{[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64}$

6. **Producto de potencias con el mismo exponente**:

Es otra potencia con el **mismo exponente** y cuya **base** es el **producto de las bases**

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

$(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-6)^3 = -216$

7. **Cociente de potencias con el mismo exponente**:

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

$a^n : b^n = (a : b)^n$

$(-6)^3 : 3^3 = (-2)^3 = -8$

Potencias de exponente entero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } a \neq 0$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 \qquad 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{-2+3} = 3$$

$$3^2 \cdot 3^{-3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad 3^{-2} \cdot 3^{-3} = 3^{-2-3} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

$$\frac{3^2}{3^3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad \frac{3^{-2}}{3^3} = 3^{-2-3} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

$$\frac{3^2}{3^{-3}} = 3^{2-(-3)} = 3^{2+3} = 3^5 \qquad \frac{3^{-2}}{3^{-3}} = 3^{-2-(-3)} = 3^{-2+3} = 3$$

Operaciones combinadas

Jerarquía de las operaciones

1º. Efectuar las operaciones entre **paréntesis, corchetes y llaves.**

2º. Calcular las **potencias y raíces**.

3º. Efectuar los **productos** y **cocientes**.

4º. Realizar las **sumas** y **restas**.

Operaciones combinadas

1. Sin paréntesis

*1.1 **Sumas y diferencias.***

$9 - 7 + 5 + 2 - 6 + 8 - 4 =$

Comenzando por la izquierda, vamos efectuando las operaciones según aparecen.

$= 9 - 7 + 5 + 2 - 6 + 8 - 4 = 7$

*1.2 **Sumas, restas y productos.***

$3 \cdot 2 - 5 + 4 \cdot 3 - 8 + 5 \cdot 2 =$

Realizamos **primero** los **productos** por tener mayor **prioridad**.

$= 6 - 5 + 12 - 8 + 10 =$

Efectuamos las **sumas y restas**.

$= 6 - 5 + 12 - 8 + 10 = 15$

*1.3 **Sumas, restas , productos y divisiones.***

$10 : 2 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2 - 16 : 4 =$

Realizamos los **productos y cocientes** en el orden en el que los encontramos porque las dos operaciones tienen la misma **prioridad**.

$= 5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 8 - 4 =$

Efectuamos las **sumas y restas**.

$= 5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 8 - 4 = 10$

*1.4 **Sumas, restas , productos , divisiones y potencias.***

$2^3 + 10 : 2 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2^2 - 16 : 4 =$

Realizamos en primer lugar las **potencias** por tener mayor **prioridad**.

$= 8 + 10 : 2 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 4 - 16 : 4 =$

Seguimos con los **productos y cocientes**.

$= 8 + 5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 16 - 4 =$

Efectuamos las **sumas y restas**.

= 26

2. Con paréntesis

$(15 - 4) + 3 - (12 - 5 \cdot 2) + (5 + 16 : 4) -5 + (10 - 2^3)=$

Realizamos en primer lugar las **operaciones contenidas en ellos**.

$= (15 - 4) + 3 - (12 - 10) + (5 + 4) - 5 + (10 - 8)=$

Quitamos paréntesis realizando las operaciones.

$= 11 + 3 - 2 + 9 - 5 + 2 = 18$

3.Con paréntesis y corchetes

$[15 - (2^3 - 10 : 2)] \cdot [5 + (3 \cdot 2 - 4)] - 3 + (8 - 2 \cdot 3) =$

Primero operamos con las **potencias, productos y cocientes de los paréntesis**.

$= [15 - (8 - 5)] \cdot [5 + (6 - 4)] - 3 + (8 - 6) =$

Realizamos las **sumas y restas de los paréntesis**.

$= [15 - 3] \cdot [5 + 2] - 3 + 2=$

En vez de poner corchetes pondremos paréntesis directamente:

$= (15 - 3) \cdot (5 + 2) - 3 + 2=$

Operamos en los **corchetes**.

$= 12 \cdot 7 - 3 + 2$

Multiplicamos.

$= 84 - 3 + 2=$

Restamos y sumamos.

$= 83$

4.Con fracciones

$$\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$$

Primero operamos con las **productos** y **números mixtos** de los **paréntesis**.

$$=\left[\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$$

Operamos en el primer **paréntesis**, quitamos el segundo, simplificamos en el tercero y operamos en el último.

$$=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\frac{19}{5}=$$

Realizamos el **producto** y lo **simplificamos**.

$$=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54000}{5000}\right):\frac{19}{5}=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54}{5}\right):\frac{19}{5}=$$

Realizamos las **operaciones del paréntesis**.

$$=\frac{32+125-150-2160}{200}:\frac{19}{5}=$$

Hacemos las **operaciones** del **numerador**, **dividimos** y **simplificamos** el resultado.

$$=\frac{-2153}{200}:\frac{19}{5}=-\frac{10765}{3800}=-\frac{2153}{760}$$

Ejercicio de operaciones combinadas

$14 - \{7 + 4 \cdot 3 - [(-2)^2 \cdot 2 - 6)]\}+ (2^2 + 6 - 5 \cdot 3) + 3 - (5 - 2^3 : 2) =$

Primero operamos con las potencias, productos y cocientes de los paréntesis.

$14 - [7 + 4 \cdot 3 -(4 \cdot 2 - 6)] + (4 + 6 - 5 \cdot 3) + 3 - (5 - 8 : 2) =$

Operamos con los productos y cocientes de los paréntesis.

$14 - [7 +12 -(8 - 6)] + (4 + 6 - 15) + 3 - (5 - 4) =$

Realizamos las sumas y diferencias de los paréntesis.

$14 - (7 +12 -2) + (-5) + 3 - (1) =$

$14 - (17) + (-5) + 3 - (1) =$

La supresión de paréntesis ha de realizarse considerando que:

Si el paréntesis va precedido del **signo +** , se suprimirá **manteniendo su signo** los términos que contenga.

Si el paréntesis va precedido del **signo −** , al suprimir el paréntesis hay que **cambiar de signo** a todo los términos que contenga.

$14 - 17 - 5 + 3 - 1 =$ **− 6**