1.1 NÚMEROS REALES

■ Números reales ■ Propiedades de los números reales ■ Adición y sustracción ■ Multiplicación y división ■ La recta de números reales ■ Conjuntos e intervalos ■ Valor absoluto y distancia

En el mundo real usamos números para medir y comparar diferentes cantidades. Por ejemplo, medimos temperatura, longitud, altura, peso, presión, distancia, velocidad, aceleración, energía, fuerza, ángulos, edad, costos, etcétera. La figura 1 ilustra algunas situaciones en las que se utilizan números. Los números también nos permiten expresar relaciones entre cantidades diferentes, por ejemplo, las relaciones entre el radio y el volumen de una pelota, entre las millas conducidas y la gasolina utilizada, o entre el nivel educativo y el salario inicial.

Contar Longitud Rapidez Peso

FIGURA 1 Medidas con números reales

Números reales

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los diferentes tipos de números reales se inventaron para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales son necesarios para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas bajo cero, los números racionales para expresar conceptos como “medio galón de leche” y los números irracionales se usan para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y el 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar cocientes de enteros. Entonces, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como un cociente de enteros y, por tanto, se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

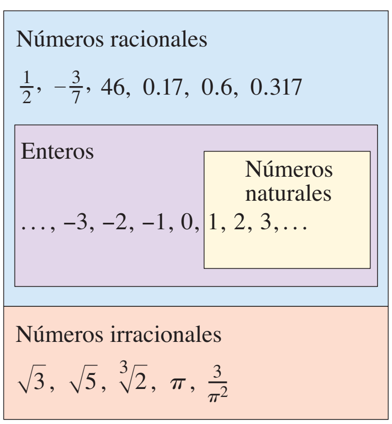


FIGURA 2 El sistema de números reales

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando se usa la palabra *número* sin más detalle, queremos decir “número real”. La figura 2 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747...$$

es un número racional. Para convertirlo a un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747... \\ 10x &= 35.47474747... \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.)

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre.) Si el número es irracional la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095... \qquad \pi = 3.141592653589793...$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualesquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Propiedades asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de estos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de estos multiplicamos primero.
Propiedad distributiva		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números obtenemos el mismo resultado que si multiplicáramos ese número por cada uno de los términos y luego sumáramos los resultados.

La propiedad distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualquier número real a, b y c.

La propiedad distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interaccionan una con otra.

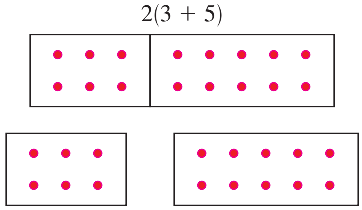


FIGURA 3 La propiedad distributiva

EJEMPLO 1 ■ Uso de la propiedad distributiva

a) $2(x+3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

b) $(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$ — Propiedad distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad asociativa de la adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la adición.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a+b) = -a - b$	$-(3+5) = -3 - 5$
6. $-(a-b) = b - a$	$-(5-8) = 8 - 5$

La propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a+b+c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 ■ Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

a) $-(x+2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a+b) = -a - b$

b) $-(x+y-z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a+b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales mediante la operación de división usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones** multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para **dividir fracciones** multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2 + 7}{5} = \frac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el **mismo denominador** sume los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes** encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Elimine** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por tanto $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la propiedad 4. En cambio reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores) y luego usamos la propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ■ Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN Al factorizar cada denominador en factores primos se obtiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones usando la máxima potencia de cada factor. Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use el común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

La recta de números reales

Los números reales se pueden representar por puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 4. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

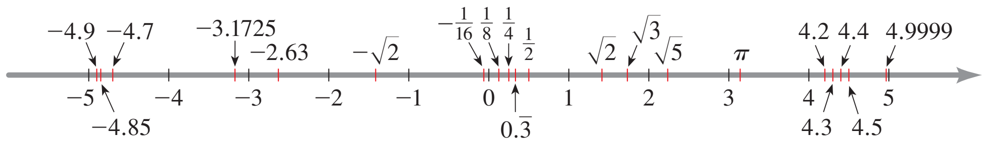


FIGURA 4 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase la figura 5):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

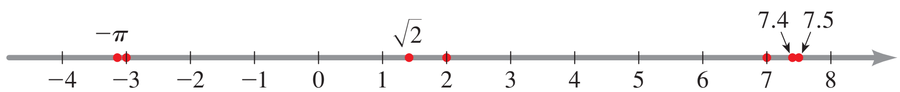


FIGURA 5

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos se pueden describir si sus elementos se colocan dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A, que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$".

© Monkey Business Images/Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Números reales en el mundo real

Las medidas reales siempre implican unidades. Por ejemplo, generalmente medimos la distancia en pies, millas, centímetros o kilómetros. Algunas medidas implican diferentes tipos de unidades. Por ejemplo, la rapidez se mide en millas por hora o en metros por segundo. A menudo tenemos que convertir una medición de un tipo de unidad a otro. En este proyecto exploramos diferentes tipos de unidades utilizadas para diferentes propósitos y cómo convertir un tipo de unidad a otro. Se puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

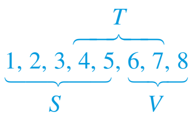
* Este material se encuentra disponible en inglés.

Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S *o en* T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están en S *y* T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 ■ Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ y $V = \{6, 7, 8\}$ encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN



$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos en S o T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes a S y T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

Con frecuencia se presentan en cálculo ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a a b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

FIGURA 6 El intervalo abierto (a, b)

FIGURA 7 El intervalo cerrado $[a, b]$

Observe que los paréntesis ( ) en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la figura 6 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la figura 7 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo, pero no el otro; o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

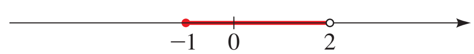
Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números)	

El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha, pero se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

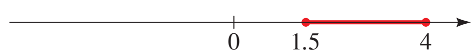
EJEMPLO 5 ■ Trazo de la gráfica de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, después, trace la gráfica del intervalo.

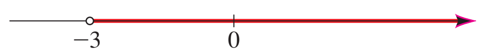
a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$



b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$

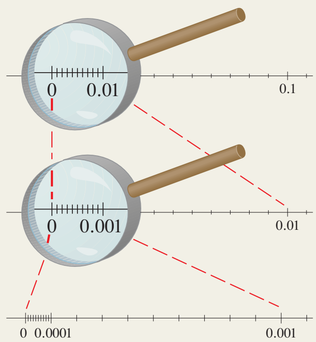


c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto
Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo ni máximo. Para ver esto observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 es más cercano, 0.0001 es todavía más cercano y así, sucesivamente. Siempre podemos encontrar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 está aún más cercano y así, sucesivamente. Dado que 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.



EJEMPLO 6 ■ Encontrar uniones e intersecciones de intervalos

Trace la gráfica de cada conjunto.

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ ***b)*** $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por tanto

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 8.

b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 9.

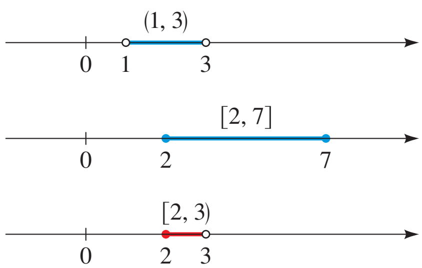


FIGURA 8 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

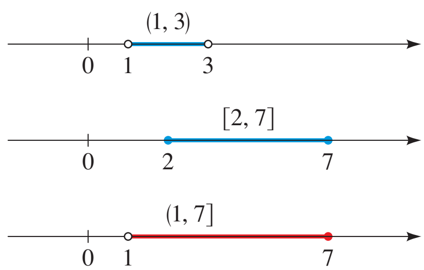


FIGURA 9 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

■ Valor absoluto y distancia

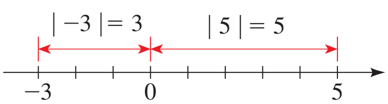


FIGURA 10

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (véase la figura 10). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de valores absolutos de números

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3 \qquad (\text{como } 3 < \pi \quad \Rightarrow \quad 3 - \pi < 0)$

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

Cuando trabajamos con valores absolutos utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
5. $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$\lvert -3 + 5 \rvert \leq \lvert -3 \rvert + \lvert 5 \rvert$	Desigualdad del triángulo.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11? De la figura 11 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $\lvert 11 - (-2) \rvert = 13$ o $\lvert (-2) - 11 \rvert = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (véase la figura 12).

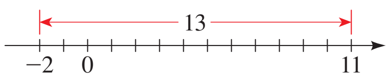


FIGURA 11

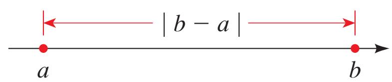


FIGURA 12 La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la propiedad 6 de los números negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a.

EJEMPLO 8 ■ Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = \lvert 2 - (-8) \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se muestra en la figura 13.

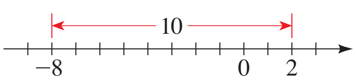


FIGURA 13

Ahora intente realizar el ejercicio 75

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo para cada uno de los siguientes enunciados:

a) Un número natural
b) Un entero que no sea número natural
c) Un número racional que no sea entero
d) Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de los números reales que haya empleado.

a) $ab =$ ________; propiedad ________

b) $a + (b + c) =$ ________; propiedad ________

c) $a(b + c) =$ ________; propiedad ________

3. Exprese el conjunto de números como sigue, pero no incluya el 2 ni el 7:

a) En notación constructiva de conjuntos: ____________

b) En notación de intervalos: ________________

4. El símbolo $|x|$ representa el ________ del número x. Si x no es 0, entonces el signo de $|x|$ siempre es ________.

5. La distancia entre a y b en la recta real es $d(a, b) =$ ______.

Entonces la distancia entre -5 y 2 es ______.

6–8 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique. Suponga que a y b son números reales diferentes de cero.

6. *a*) ¿La suma de dos números racionales siempre es un número racional?
b) ¿La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional?

7. *a*) ¿Es $a - b$ igual a $b - a$?
b) Es $-2(a - 5)$ igual a $-2a - 10$?

8. *a*) ¿La distancia entre cualesquier dos números reales diferentes siempre es positiva?
b) ¿La distancia entre a y b es igual a la distancia entre b y a?

HABILIDADES

9–10 ■ **Números reales** Mencione los elementos del conjunto dado que sean

a) números naturales
b) números enteros
c) números racionales
d) números irracionales

9. $\{-1.5, 0, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 2.71, -\pi, 3.1\overline{4}, 100, -8\}$

10. $\{1.3, 1.3333\ldots, \sqrt{5}, 5.34, -500, 1\frac{2}{3}, \sqrt{16}, \frac{246}{579}, -\frac{20}{5}\}$

11–18 ■ **Propiedades de los números reales** Exprese la propiedad de los números reales que se esté usando.

11. $3 + 7 = 7 + 3$

12. $4(2 + 3) = (2 + 3)4$

13. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

14. $2(A + B) = 2A + 2B$

15. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

16. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

17. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

18. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

19–22 ■ **Propiedades de los números reales** Vuelva a escribir la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

19. Propiedad conmutativa de adición, $x + 3 = \square$

20. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) = \square$

21. Propiedad distributiva, $4(A + B) = \square$

22. Propiedad distributiva, $5x + 5y = \square$

23–28 ■ **Propiedades de los números reales** Utilice las propiedades de los números reales al escribir la expresión sin paréntesis.

23. $3(x + y)$ **24.** $(a - b)8$

25. $4(2m)$ **26.** $\frac{4}{3}(-6y)$

27. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **28.** $(3a)(b + c - 2d)$

29–32 ■ **Operaciones aritméticas** Realice las operaciones indicadas.

29. *a*) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ *b*) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

30. *a*) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ *b*) $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

31. *a*) $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ *b*) $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$

32. *a*) $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ *b*) $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

33–34 ■ **Desigualdades** Coloque el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

33. *a*) $3 \;\square\; \frac{7}{2}$ *b*) $-3 \;\square\; -\frac{7}{2}$ *c*) $3.5 \;\square\; \frac{7}{2}$

34. *a*) $\frac{2}{3} \;\square\; 0.67$ *b*) $\frac{2}{3} \;\square\; -0.67$

c) $|0.67| \;\square\; |-0.67|$

35–38 ■ **Desigualdades** Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

35. *a*) $-3 < -4$ *b*) $3 < 4$

36. *a*) $\sqrt{3} > 1.7325$ *b*) $1.732 \geq \sqrt{3}$

37. *a*) $\frac{10}{2} \geq 5$ *b*) $\frac{6}{10} \geq \frac{5}{6}$

38. *a*) $\frac{7}{11} \geq \frac{8}{13}$ *b*) $-\frac{3}{5} > -\frac{3}{4}$

39–40 ■ **Desigualdades** Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

39. *a*) x es positivo.
b) t es menor a 4.
c) a es mayor o igual a π.
d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor que -5.
e) La distancia de p a 3 es, como máximo, 5.