

Conjuntos

Intuitivamente, un **conjunto** es una colección de cosas, reales o imaginarias, llamadas **elementos** del conjunto. Para decir que x es elemento de A escribimos $x \in A$.

Esta definición tiene algunos problemas cuando los conjuntos son muy grandes, pero lo importante es que cada conjunto está determinado por sus elementos:

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los seres vivos.
- El conjunto de las especies de seres vivos.
- El alfabeto ingles = $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$
- El conjunto de los números naturales $\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5,\dots\}$.
- El conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales.

Aunque los conjuntos pueden ser muy heterogéneos, los conjuntos mas útiles están formados por elementos con alguna propiedad en común, algo como

$\{ x / P(x) \}$ = El conjunto de los x que tienen la propiedad $P(x)$

Ejemplos:

- El conjunto de las canciones de los Beatles = $\{x / x \text{ es canción y } x \text{ fue escrita por los Beatles}\}$
- El conjunto de los números primos = $\{ n \in \mathbf{N} / n \text{ no es divisible por ningún } m \text{ con } 1 < m < n \}$
- El conjunto de los números *racionales* $\mathbf{Q} = \{ r \in \mathbf{R} / \exists m,n \in \mathbf{N}, r=m/n \}$
- El conjunto de los números *irracionales* $\mathbf{I} = \{ r \in \mathbf{R} / \nexists m,n \in \mathbf{N}, r=m/n \}$

Un **conjunto vacío** es un conjunto que no tiene elementos, así que todos los conjuntos vacíos son iguales, lo denotamos por $\{\}$ o por $\emptyset$.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los perros voladores = $\emptyset$ = El conjunto de los triángulos con 4 lados.
- $\emptyset = \{\} \neq \{\{\}\} = \{\emptyset\}$

Si A y B son conjuntos, decimos que A esta **contenido** en B , o que A es **subconjunto** de B , si todos los elementos de A son elementos de B , y escribimos $A \subset B$ o $A \subseteq B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \rightarrow x \in B$$

Por el contrario, cuando A no esta contenido en B escribimos $A \not\subset B$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x, x \in A \text{ } x \notin B$$

Ejemplos.

- Si A = El conjunto de todas las aves
 B = El conjunto de todos los animales con alas
 C = El conjunto de todos los animales que vuelan
Entonces $A \subset B$, $B \not\subset A$, $B \not\subset C$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $C \not\subset A$.
- Las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Los puntos son *elementos* del plano mientras que las rectas son *subconjuntos* del plano.

Afirmación. Si A , B y C son conjuntos y $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Demostración. $A \subset B$ y $B \subset C \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x, x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \rightarrow x \in C) \Rightarrow$
 $\stackrel{\text{silog}}{\Rightarrow} (\forall x, x \in A \rightarrow x \in C) \Leftrightarrow A \subset C \quad \square$

Afirmación. $A = B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Demostración. $A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A y B tienen los mismos elementos $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \text{ y } B \subset A \quad \square$

Operaciones con conjuntos.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ formado por los elementos de A y los elementos de B , es decir

$$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ formado por los elementos de A y los elementos de B , es decir

$$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$$

Ejemplo. Si A = El conjunto de los números naturales impares = $\{1,3,5,7,9,11,13,\dots\}$

y B = El conjunto de los múltiplos de 3 = $\{3,6,9,12,15,\dots\}$

entonces $A \cup B = \{1,3,5,6,7,9,11,12,13,15,\dots\}$ $A \cap B = \{3,9,15,21,27,\dots\}$

La **diferencia** entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A - B$ formado por los elementos de A que *no* son elementos de B .

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \}$$

Ejemplo. Si A y B son los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

$A - B$ = el conjunto de los impares que no son múltiplos de 3 = $\{1,5,7,11,13,17,19,23,\dots\}$

$B - A$ = el conjunto de los múltiplos de 3 que son pares = $\{6,12,18, 24,\dots\}$

La unión y la intersección son *operaciones* entre conjuntos, que tienen algunas propiedades parecidas a la suma y la multiplicación de números naturales.

Afirmación. Si A, B y C son conjuntos entonces se cumplen:

1. $A \cup B = B \cup A$ *La unión es conmutativa*
2. $A \cap B = B \cap A$ *La intersección es conmutativa*
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ *La unión es asociativa*
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ *La intersección es asociativa*
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *La intersección se distribuye sobre la unión*
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *La unión se distribuye sobre la intersección*

Demostración.

1. Tenemos que ver que $A \cup B$ y $B \cup A$ tienen los mismos elementos:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A \quad \square$$

3. Hay que ver que $(A \cup B) \cup C$ y $A \cup (B \cup C)$ tienen los mismos elementos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \quad \square \end{aligned}$$

5. Veamos que $A \cap (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ tienen los mismos elementos:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \square \end{aligned}$$

Hay otras maneras de combinar conjuntos para obtener otros conjuntos.

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son todas las parejas (a,b) formadas por un elemento a de A y un elemento b de B:

$$A \times B = \{ (x,y) / x \in A, y \in B \}$$

Ejemplos.

- Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2\}$ entonces $A \times B = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$
- Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{ \}$ entonces $A \times B = \{ \}$
- Si $\mathbf{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ es el conjunto de parejas ordenadas de números reales.

Observar que si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicios.

1. ¿Es verdad que $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B = C$? ¿Y que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B = C$?
Demuéstralo o da contraejemplos.
2. Demuestra que $\cap$ es conmutativa y asociativa, y que se distribuye sobre $\cup$.
3. Muestra que la diferencia de conjuntos no es asociativa, es decir, que $(A - B) - C \neq A - (B - C)$.
4. ¿La unión y la intersección de conjuntos se distribuyen sobre la diferencia?
5. Encuentra 3 conjuntos A , B y C tales que $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ no sean vacíos, pero $A \cap B \cap C = \emptyset$.
6. Si A , B , C son conjuntos, muestra que $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. ¿Como definirías $A \times B \times C$?

Conjuntos universales, complementos.

Cuando pensamos en conjuntos usualmente no nos interesan conjuntos demasiado heterogéneos, donde ser revuelvan por ejemplo manzanas, poemas, números, amenazas y marcianos, sino que nos restringimos de entrada a un universo "mas pequeño, por ejemplo a los números, y pensamos en conjuntos que estén contenidos en este "conjunto universal", que puede cambiar de acuerdo a lo que nos interese.

Si fijamos un conjunto universal U y A está contenido en U , el **complemento** de A en U es el conjunto A^c formado por los elementos de U que no están en A .

$$A^c = \{x \in U / x \notin A\} = U - A$$

Ojo: aunque A^c depende del conjunto universal U , este no se escribe si se adivina del contexto.

Ejemplos.

- Si pensamos en el universo A de todos los animales, el conjunto de los animales que vuelan es

$$V = \{x \in A / x \text{ vuela}\} \quad \text{y entonces} \quad V^c = \{x \in A / x \text{ no vuela}\}$$

La propiedad que define a A^c es la negación de la propiedad que define a A , pero A^c depende de quien sea el universo.

- Si $P = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es primo}\}$ entonces se entiende que el conjunto universal es $\mathbb{N}$ y

$$P^c = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ no es primo}\}$$

- El conjunto de los *números algebraicos* es el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros}\}$$

Su complemento (en el universo de los números reales) es el conjunto de los *números trascendentes*:

$$A^c = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros}\}$$

Afirmación. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A - B = A \cap B^c$

Demostración. $\forall x, x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c \quad \square$

Afirmación. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A \subset B$ si y solo si $B^c \subset A^c$

Demostración. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \rightarrow x \in B \Leftrightarrow \forall x, x \notin B \rightarrow x \notin A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x, x \in B^c \rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow B^c \subset A^c \quad \square$

Las relaciones entre la unión, la intersección y el complemento están dadas por las

Leyes de De Morgan:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración.

1. $\forall x, x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

2. Ejercicio.

Ejercicios.

7. Si $U = \mathbf{N}$, $A = \{n \in \mathbf{N} / n \text{ es múltiplo de } 3\}$ $B = \{n \in \mathbf{N} / n > 8\}$ calcula A^c , B^c , $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$.

8. Demostrar la segunda ley de De Morgan.

10. Demuestra que el complemento de $(A \cup B) \cap C$ es $(A^c \cap B^c) \cup C^c$.

11. Si $A \subset U$ y $B \subset V$, calcula el complemento de $A \times B$ en $U \times V$ en términos de los complementos de A y B en U y V respectivamente.

Conjuntos de conjuntos.

Podemos considerar a conjuntos cuyos elementos sean otros conjuntos.

Ejemplos.

- El conjunto formado por los grupos en una escuela.
- El conjunto de todos los intervalos $[a, b]$, donde $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$
- El conjunto formado por todas las rectas en el plano (este conjunto *no* es el plano, que es un conjunto de puntos, sino un conjunto cuyos *elementos* son las rectas!)