- Identificar tautologías y contradicciones.
- Aplicar las reglas de inferencia para determinar la validez de un razonamiento.
- Conocer los distintos tipos de demostraciones.
- Determinar la validez de una demostración.

Proposición.

Se llama así a toda oración (en el sentido gramatical de la palabra) que atribuye alguna propiedad o cualidad a un objeto o conjunto de objetos que puede ser verdadero o falso pero no ambas cosas simultáneamente.

El carácter verdadero o falso de la proposición lo simbolizaremos por V y F, respectivamente. Es lo que llamaremos *valores de verdad*.

Se suele utilizar letras minúsculas para representar proposiciones de manera general. Adoptaremos las letras p, q, r, ... Se mantiene la hipótesis de que puedan tomar los valores V o F pero no ambos a la vez.

Ejemplos:

Son proposiciones las siguientes:

- El triángulo tiene tres lados.
- La astronomía es una ciencia.
- Hace calor
- $3+12 = 20$
- $x > 4$

En ellas podemos establecer los valores V o F y en ningún caso se pueden dar los dos valores. En la última, para cada valor que se dé a x la proposición toma uno de los valores V o F. Es eso lo que les da carácter de proposición.

Obsérvense las siguientes expresiones:

- ¡Estate quieto!
- ¿Hará buen tiempo mañana?

No es posible determinar los valores V o F porque el primero es una orden mientras que en la segunda no es posible determinar ese valor hasta que no llegue mañana.

(*)Nota: Si consideramos la última expresión $x > 4$, estamos ante una expresión de la que no podemos indicar si es verdadera o falsa por cuanto que no se nos dice cuánto vale x. Como no podemos especificar su valor, entonces *no es una proposición*. Obviamente, si hacemos $x = 7$, entonces sería una proposición que toma el valor V.

Así, podemos adoptar la siguiente definición.

Definición Una **proposición** es una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas a la vez.

Conectivos. Proposiciones simples y compuestas.

Conectivos.

Presentamos los llamados *conectivos lógicos* como aquellas palabras o grupos de palabras que permiten conectar proposiciones entre sí o bien modificar el valor de verdad de una proposición. Son los siguientes que analizaremos posteriormente:

Nombre	Negación	Conjunción	Disyunción	Condicional	Bicondicional
Conectivo	no	Y	o	si ... entonces	si y solo si

A veces se usan términos lingüísticos equivalentes como, por ejemplo, "implica" en lugar del "si ... entonces".

Definición Una **proposición** es **simple** o **atómica** cuando no contiene ningún conectivo, y **compuesta** o **molecular** en caso contrario

Ejemplos:

Proposiciones simples:

Hoy es lunes.
Mañana es martes.
Raquel estudia matemáticas.
Aprobó la asignatura

Proposiciones compuestas, formadas a partir de las simples anteriores:

Si hoy es lunes, entonces mañana es martes.
Raquel estudia matemáticas y aprobó la asignatura.
No aprobó la asignatura.

Notación

Con el fin de simplificar la escritura, a los conectivos se les nota con un símbolo que será utilizado en su lugar, salvo que convenga usar la expresión lingüística. Son estos:

no	Y	o	si ... entonces	si y solo si
$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$

En el ejemplo anterior:

Proposiciones simples:

Hoy es lunes. (La denotaremos por p). Esto es, p: Hoy es lunes

q: Mañana es martes.

r: Raquel estudia matemáticas.

s: Aprobó la asignatura.

Proposiciones compuestas, formadas a partir de las simples anteriores, quedarían simbolizadas:

Lenguaje natural	Simbolización lógica
Si hoy es lunes, entonces mañana es martes.	$p \Rightarrow q$
Raquel estudia matemáticas y aprobó la asignatura.	$r \wedge s$
No aprobó la asignatura.	$\neg s$

Les proponemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1.

Para las siguientes proposiciones, identifica las proposiciones simples que las componen (asígnales una letra) y simbolízalas mediante notación lógica:

- Alberto quiere sopa y pescado.
- Este curso no es fácil.
- Si $x=2$ entonces $x^2=4$.
- Antonio es el ganador o Javier hizo trampa.
- Mario se casó y tiene dos niños.
- 5 es par o es impar.
- Hoy no haremos las prácticas en el patio.

Tabla de verdad. Ya hemos indicado que toda proposición simple toma los valores V o F pero cuando se trata de una proposición compuesta, su valor depende del que tomen las proposiciones simples. Pues bien, los valores de una proposición compuesta se pueden sintetizar en lo que llamaremos su *tabla de verdad*.

La tabla de verdad por tanto recoge de manera organizada el valor de verdad de la proposición compuesta para todas las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la integran, esto es, determina su valor de verdad para todos los los casos posibles. De esta manera cada fila de la tabla constituye un posible caso (con unos valores

de verdad de las proposiciones simples muy concretos y únicos) del que se deduce el valor de verdad de dicha proposición compuesta.

El número de filas o casos posibles de una tabla de verdad, vendrá determinado por tanto por el número de proposiciones simples que forman la proposición compuesta de estudio. Dado que cada proposición simple solo puede adoptar los valores V o F (pero no ambos a la vez), el número de filas de la tabla de verdad será 2^n , siendo n el número de proposiciones simples que la forman, ya que se trata de todas las variaciones con repetición de los elementos V y F que pueden repetirse hasta n veces

Estudiaremos a continuación la tabla de verdad de cada uno de los conectivos anteriores.

Definición Negación de una proposición.

Si a la proposición p se le añade el conectivo "no", entonces se obtiene la proposición "no p" que simbolizaremos por: $\neg p$. Es verdad si p es falsa, y falsa si p es verdad.

Ejemplos:

p: la carretera es rectilínea. $\neg p$: la carretera no es rectilínea
 q: estuve estudiando. $\neg q$: no estuve estudiando

Tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Así que la proposición $\neg p$ toma el valor contrario de la proposición p.

Definición Conjunción.

Dadas dos proposiciones p, q, se llama conjunción de p y q a la proposición compuesta que relaciona dichas proposiciones mediante el conectivo lógico "y". Se representa por: $p \wedge q$.

Ejemplos:

p: 5 es un número par ; q: 5/8 es un número fraccionario.

$p \wedge q$: 5 es un número par y $5/8$ es un número fraccionario.

r : hoy es día festivo; s : el mercado está cerrado.

$r \wedge s$: hoy es festivo y el mercado está cerrado.

Tabla de verdad

La conjunción $p \wedge q$ es verdadera cuando lo son p y q . Por tanto su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Nota: Obsérvese que la proposición compuesta $p \wedge q$ está formada por dos proposiciones simples y que, por tanto, su tabla de verdad integra 4 casos posibles.

Podemos combinar conectivos como por ejemplo: dadas las proposiciones p y q podemos formar: $\neg p \wedge q$

La correspondiente tabla de verdad de esta nueva proposición es:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

En un epígrafe posterior ampliaremos esta idea.

Definición Disyunción.

Dadas dos proposiciones p, q , se llama disyunción de p y q a la proposición compuesta que relaciona dichas proposiciones mediante el conectivo lógico "o". Se representa por: $p \vee q$.

Debemos clarificar que la disyunción "o" se toma aquí en sentido inclusivo o incluyente, esto es, que la proposición p sea verdadera no excluye que q lo sea en contraposición con cuando la certeza de una excluye la de la otra. En Lógica, la disyunción en sentido excluyente tiene su propio símbolo y constituye otro conectivo adicional.

Ejemplos:

$p: x > 3$; $q: x < 3$. La proposición $p \vee q$ utiliza aquí el "o" excluyente pues la verificación de una de las proposiciones invalida la otra.

r : el número n es divisible por 3; s : el número n es divisible por 5. La proposición $p \vee q$ utiliza el "o" incluyente pues la verificación de una de las proposiciones no invalida la otra.

Tabla de verdad

La disyunción $p \vee q$ es verdadera cuando lo es al menos una de las proposiciones simples que la forman, p o q . En otras palabras, solo es falsa cuando lo son las dos. Por tanto su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Igual que en el caso anterior, podemos plantearnos el deducir la tabla de verdad de la siguiente proposición: $p \vee (\neg q)$.

p	q	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Ejercicio 2.

En el ejemplo anterior hemos aclarado que la proposición $p \vee q$, siendo $p: x > 3$ y siendo $q: x < 3$, utiliza el "o" excluyente pues la verificación de una de las proposiciones invalida la otra.

Compruébalo construyendo su tabla de verdad.

Definición Condicional.

Dadas dos proposiciones p , q , se llama condicional de p y q a la proposición compuesta con el conectivo lógico "si ... entonces" que notaremos como: $p \Rightarrow q$. También se suele utilizar la frase " p implica q " o también " p condiciona q ".

La proposición p se llama *antecedente* o *premisa* y la q , *consecuente* o *conclusión*.

Ejemplos:

- p : 18 es múltiplo de 6; q : 18 es múltiplo de 3.

$p \Rightarrow q$: Si 18 es múltiplo de 6 entonces 18 es múltiplo de 3

- r : las rectas a y b son paralelas; s : las rectas a y b se cortan en un punto.

$r \Rightarrow s$: si las rectas a y b son paralelas entonces se cortan en un punto.

Los valores V o F que tomen estas proposiciones se verán en la tabla de verdad.

La condicional es la forma que toman los teoremas: el antecedente está constituido por la hipótesis o las hipótesis del teorema y el consecuente es la tesis. Así, por ejemplo:

Teorema de Rolle:

Hipótesis:

- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- f es derivable en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) .
- $f(a) = f(b)$

Tesis:

Existe al menos un punto c del intervalo (a,b) tal que $f'(c) = 0$

La condicional se traduce también como la *condición necesaria* de los teoremas. Así, por ejemplo:

Teorema:

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto (máximo o mínimo), es **condición necesaria** que la tangente a la curva en ese punto sea paralela al eje horizontal.

Utilizando la notación analítica, lo podemos escribir en forma de proposición condicional:

p : x_0 es un extremo relativo de una función $y = f(x)$

q : $f'(x_0) = 0$

$p \Rightarrow q$: si x_0 es un extremo relativo de una función $y = f(x)$, entonces $f'(x_0) = 0$.

Como es sabido, el recíproco de este teorema es falso por cuanto que

puede haber puntos de tangencia horizontal y no ser extremo relativo. Es lo que ocurre, por ejemplo, en la función $f(x) = x^3$ en el punto $x_0 = 0$

Tabla de verdad

La proposición condicional es falsa solo cuando de un antecedente verdadero se sigue un consecuente falso. Por tanto la tabla de verdad es:

P	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cabe añadir que en la vida diaria estamos familiarizados con el uso de la condicional o implicación en el lenguaje natural, por ejemplo en política.

Así, por ejemplo, podemos escuchar declaraciones del tipo: "Si gano las elecciones, [entonces] aumentaré el salario mínimo interprofesional"... Obviamente lo que podemos asegurar es que el partido que quede en la oposición siempre dijo la verdad, dado que solo podremos decir que ha mentado si como candidatura electa no aumentara el salario mínimo interprofesional.

Nota: La palabra "entonces" puede ser omitida.

La condicional $p \Rightarrow q$, también se denomina condicional directa. Otros tres condicionales se derivan de ella. Se recogen en la siguiente tabla.

Condicional	Directa	Inversa o Recíproca	Contraria	Contrarrecíproca
<i>Símbolo</i>	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
<i>Ejemplo</i>	Si N es divisible por 2 entonces acaba en cifra par.	Si N acaba en cifra par entonces es divisible por 2.	Si N no es divisible por 2 entonces no acaba en cifra par.	Si N no acaba en cifra par entonces no es divisible por 2.

Ejercicio 3.

Comprobar que la condicional directa es lógicamente equivalente a la contrarrecíproca.

Definición Bicondicional.

Dadas dos proposiciones p y q , la unión de ambas mediante el conectivo "si y solo si" da lugar a la proposición bicondicional. Lo simbolizaremos como: $p \Leftrightarrow q$

Esta proposición es equivalente a la expresión "es condición necesaria y suficiente" que es muy utilizada en los textos de los teoremas como una forma de demostrarlos. En este caso, la bicondicional se considera como una doble condicional: la directa y la inversa, esto es:

Es condición necesaria es equivalente a la condicional directa: $p \Rightarrow q$

Es condición suficiente es equivalente a la condicional inversa: $q \Rightarrow p$

Por tanto, la bicondicional $p \Leftrightarrow q$ equivale a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Ejemplo:

Teorema de Rouché-Frobenius: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es que el rango de la matriz del sistema sea igual al rango de la matriz ampliada.

Para demostrarlo es necesario probar:

- a) que la condición es necesaria, esto es, que si el sistema tiene solución, entonces coinciden los dos rangos.
- b) Que la condición es suficiente, es decir, que si los rangos de ambas matrices coinciden, entonces el sistema es compatible.

Tabla de verdad

La proposición bicondicional es verdadera cuando las dos proposiciones son, simultáneamente, verdaderas o falsas. La tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicio 4.

Comprueba que la bicondicional $(p \Leftrightarrow q)$ equivale a la doble implicación:
 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Proposiciones con más de un conectivo.

Como ya se ha adelantado, podemos crear nuevas proposiciones considerando más de un conectivo. Cada una de ellas tendrá su propia tabla de verdad como veremos a continuación.

Enlace dominante.- En el lenguaje cotidiano, solemos enlazar las frases de forma que la concordancia o la subordinación la expresamos mediante la entonación de la voz cuando hablamos y mediante los signos ortográficos cuando las escribimos. Es un detalle importante porque el sentido de lo que se quiere expresar depende de esos matices.

En lógica, tal categoría se marca mediante paréntesis y es lo que permite establecer el enlace dominante en una expresión en la que intervienen más de un enlace. Existen unas reglas que rigen el agrupamiento de proposiciones y para el uso de paréntesis estableciendo las categorías:

- El conectivo $\neg$ no es dominante en presencia de otros conectivos salvo indicación en contra. Por eso la expresión $(\neg p) \vee q$ se puede escribir sin paréntesis: $\neg p \vee q$. Pero esta proposición es distinta de $\neg(p \vee q)$.
- Los conectivos $\vee$ y $\wedge$ no pueden ir consecutivos sin paréntesis que establezcan las categorías. Así, es incorrecto escribir: $p \vee q \wedge r$. Deber escribirse una de estas dos formas: $p \vee (q \wedge r)$ o $(p \vee q) \wedge r$.
- Los conectivos $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ son de categoría superior a los anteriores y de igual rango entre ellos.

Ejemplo:

p : jugamos al baloncesto.

q : jugamos al fútbol.

$(\neg p) \wedge q$: no jugamos al baloncesto y jugamos al fútbol.

$\neg(p \wedge q)$: no jugamos al baloncesto ni al fútbol

Vemos cómo las dos proposiciones son diferentes a pesar de tener los mismos conectivos. Es la colocación de los paréntesis los que establecen la categoría entre ellas.

La tabla de verdad se construye teniendo en cuenta las tablas de los conectivos y la categoría señalada en la proposición. Es un algoritmo que puede realizarse sin más que mantener el orden fijado en la proposición. Lo vamos a aplicar en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

Obtener la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

1) $\neg(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2) $\neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

3) $p \wedge (q \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Nota: Obsérvese como en esta última tabla el número de filas es 8, ya que hay tres proposiciones simples ($2^3=8$)

Tautologías.

Las tablas de verdad de las proposiciones compuestas nos pueden llevar a tres situaciones:

a) La proposición compuesta toma valores V o F según los distintos valores que tomen las proposiciones que intervengan. Es lo que ocurre, por ejemplo, en las proposiciones estudiadas en el epígrafe anterior.

b) La proposición compuesta toma el valor F para cualquier valor que tomen las proposiciones que la componen. En este caso, la proposición se dice que es una *contradicción* o un *absurdo*. Según lo dicho, se caracterizan porque en la tabla de verdad, la columna correspondiente es siempre F.

Ejemplo:

Obtener la tabla de verdad de la proposición: $p \wedge (\neg(p \vee q))$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge [\neg(p \vee q)]$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

c) La proposición compuesta toma el valor V para cualquier valor que tomen las proposiciones que la componen. En este caso, la proposición se dice que es una *tautología*. En su tabla de verdad la columna correspondiente es solo de V.

Ejemplo:

Obtener la tabla de verdad de la proposición: $p \vee (\neg(p \wedge q))$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee [\neg(p \wedge q)]$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Las tautologías juegan un papel importante en la lógica proposicional. De entre las infinitas que se pueden establecer, presentamos las siguientes de las que se puede comprobar que sus tablas de verdad cumplen la condición de ser tautologías:

Nombre	Tautología
Modus ponens	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
Modus tollens	$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow \neg p$
Silogismo disyuntivo	$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$ $[(p \vee q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow p$
Simplificación	$(p \wedge q) \Rightarrow p$ $(p \wedge q) \Rightarrow q$
Adición	$p \Rightarrow (p \vee q)$
Doble negación	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Contraposición	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
Condional	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
Bicondional	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$