

EL PROBLEMA DUAL

El significado de dualidad tiene una función muy importante, no sólo en programación lineal, sino en la teoría de optimización en general.

En un modelo de programación lineal cada problema lineal tiene otro problema denominado problema dual (PD), que posee importantes propiedades y relaciones notables con respecto al Problema lineal original, llamado problema primal (PP)

Las relaciones las podemos enumerar como siguen:

- a) El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el programa primal.
- b) El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el programa primal
- c) Los coeficientes de la función objetivo del problema dual son los términos independientes de las restricciones o RHS del programa primal
- d) Los términos independientes de las restricciones o RHS del dual son los coeficientes de la función objetivo del problema primal.
- e) La matriz de coeficientes técnicos del problema dual es la traspuesta de la matriz técnica del problema primal.
- f) El sentido de las desigualdades de las restricciones del problema dual y el signo de las variables del mismo problema, dependen de la forma de que tenga el signo de las variables del problema Primal y del sentido de las restricciones del mismo problema. (Ver tabla de TUCKER)
- g) Si el programa primal es un problema de maximización, el programa dual es un problema de Minimización
- h) El problema dual de un problema dual es el programa primal original.

El sentido de las igualdades y desigualdades se comporta según la tabla de TUCKER, presentada a continuación.

	Primal	Dual
Función Objetivo	Maximización	Minimización
Restricciones	\leq	\geq
	\geq	\leq
	$=$	\times
Variables	\geq	\geq
	\leq	\leq
	\times	$=$

Tabla de TUCKER

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Problema de maximización		Problema de minimización	
<i>Restricciones</i>			<i>Variables</i>
\geq	\Leftrightarrow		≤ 0
\leq	\Leftrightarrow		≥ 0
$=$	\Leftrightarrow		<i>Restricciones</i>
<i>Variables</i>			<i>irrestringidas</i>
≥ 0	\Leftrightarrow		\geq
≤ 0	\Leftrightarrow		\leq
<i>Irrestringidas</i>	\Leftrightarrow		$=$

Los problemas duales simétricos son los que se obtienen de un problema primal en forma canónica y 'normalizada', es decir, cuando llevan asociadas desigualdades de la forma mayor o igual en los problemas de minimización, y desigualdades menores o igual para los problemas de maximización.

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
F.O: Max	F.O: Min
Z= 4X + 3Y	W= 15Y ₁ + 18Y ₂
s.a.	s.a.
X + 5Y ≤ 15	Y ₁ + 2Y ₂ ≥ 4
2X + 3Y ≤ 18	5Y ₁ + 3Y ₂ ≥ 3
X, Y ≥ 0	Y ₁ , Y ₂ ≥ 0

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
F.O: Min Z= $2X + 5Y$ s.a. $2X + Y \leq 18$ $X + 3Y \geq 20$ $X + Y = 10$ $X, Y \geq 0$	F.O: Max W= $18Y_1 + 20Y_2 + 10Y_3$ s.a. $2Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 2$ $Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \leq 5$ $Y_1 \leq 0, Y_2 \geq 0, Y_3$ no restringida

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
F.O: Max Z= $7X + 4Y + 7W$ s.a. $2X + 7Y \leq 12$ $X + Y + W = 40$ $X - 7W = -10$ $X, W \geq 0; Y$ sin restricción de signo	F.O: Min W= $12Y_1 + 40Y_2 - 10Y_3$ s.a. $2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 7$ $7Y_1 + Y_2 + \quad = 4$ $Y_2 - 7Y_3 \geq 7$ $Y_1 \geq 0, Y_2, Y_3$ no restringidas

EL PRECIO DUAL O PRECIO DE SOMBRA. Es un costo de oportunidad por elaborar o por consumir algún servicio o bien

El valor dual o precio de sombra es la cantidad que mejoraría la función objetivo por incrementar una unidad adicional de cierto material que ya se ha terminado.

CONCLUSIÓN

- 1.- Si una restricción del primal es no saturada, entonces la variable de dual asociada debe ser nula.
- 2.- Si una variable de primal es positiva, entonces la correspondiente restricción del dual es una restricción saturada, es decir, se verifica como una igualdad.