

EL MÉTODO SIMPLEX

El **Método Simplex** es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. La razón matemática de esta mejora radica en que el método consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya (según el contexto de la función objetivo, sea maximizar o minimizar), dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito siempre se hallará solución. El algoritmo Simplex requiere que el Modelo Lineal, para ser solucionado, cumpla las condiciones de Forma Estándar y Sistema Canónico.

La Forma Estándar: Incluye

- a) Una Función Objetivo a optimizar
- b) Lado derecho de las restricciones con valor positivo
- c) Variables de decisión no negativas
- d) Las restricciones deben ser expresadas como igualdades.

Para transformar las restricciones en igualdades se deben incorporar las llamadas variables de holgura. Una variable de holgura tiene coeficiente cero en la Función Objetivo. Se suman en restricciones del Tipo $\leq$.

En términos matemáticos, expresan la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de las restricciones. Al igual que las variables de decisión deben ser mayores o iguales a cero.

En términos del modelo representan la cantidad de recurso no utilizado con relación a un máximo disponible (Parte ociosa de los recursos)

El Sistema Canónico En un Modelo Lineal significa que debe existir una variable básica en cada restricción. Esto permite obtener una primera solución posible que satisface todas las restricciones.

Una variable básica tiene coeficiente 1 positivo en una restricción y no existe en las demás.

Las variables de decisión (estructurales) del modelo y las variables de holgura pueden ser variables básicas. Cuando ninguna de ellas cumple con la condición de ser básica, se incorpora una variable como artificio matemático, para cumplir con el sistema canónico y a esa variable se le llama variable artificial. Una variable artificial debe tener incorporado un coeficiente muy alto en la Función Objetivo, con signo negativo en maximización y con signo positivo en minimización. Con esto se logra que el procedimiento Simplex las elimine de la solución en las primeras iteraciones. Estas variables deben valer cero en la solución óptima del modelo.

Una Tabla Simplex es un resumen detallado de toda la información del modelo para trabajar más fácilmente con él. La siguiente tabla expresa cómo deben ser recogidos los datos para resolver el problema de programación lineal por el Método Simplex.

Modelo de Tabla Simplex

Iteración

V.B. Ec. # Coeficientes L.D. Razón

PROCEDIMIENTO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE POR EL MÉTODO SIMPLEX.

FASE I: Preparar el modelo inicial para construir la tabla:

- 1) Transformar los términos independientes en positivos (multiplicando por -1).

- 2) Si en alguna restricción, hay un solo proceso que está contenida en ella sola, lo convertiremos en unitario (dividiendo por su coeficiente) y si no lo hago meteré una variable de holgura.
- 3) En las inecuaciones en las que encontramos $\leq$ introducimos una variable de holgura sumando.
- 4) En toda restricción debe haber una variable unitaria positiva.
- 5) Las variables de holgura, a la hora de introducirlas en la función objetivo lo haremos siempre con coeficiente cero.
- 6) Igualar a cero la función objetivo

Construir la tabla y resolver el algoritmo.

Paso 1: Construir la tabla del método Simplex y rellenamos la tabla con los coeficientes. Comprobamos que las variables básicas tienen un coeficiente de 1 en la intersección de su renglón y columna correspondiente y cero en los demás renglones incluido la función objetivo

Paso 2: La S.B.F. es óptima, si y sólo si todos los coeficientes del renglón (Z) son no negativos. De lo contrario se debe iterar. En

Paso 3: Si comprobamos que hay coeficientes negativos en el renglón (Z), marcamos el mayor en valor absoluto y esta será la variable no básica que entra a la base. Para determinar la variable básica que sale de la base, divide cada elemento del lado derecho para cada elemento del vector entrante debe ser mayor que cero (POSITIVO)

c) Se identifica el renglón con la menor razón

La variable básica para este renglón es la que sale y se le da el nombre de renglón pivote. La intersección entre la columna pivote y el renglón pivote lo denominamos número pivote. El patrón de coeficientes en la columna de la variable que entra en la base, debe quedar como actualmente está el patrón de coeficientes de la variable que sale.

Paso 4: Calculamos los nuevos coeficientes de la matriz:

- a) Coeficientes del renglón de la variable que entra: Dividimos el renglón pivote entre el número pivote y el resultado serán los coeficientes del nuevo renglón de la variable que entra.
- b) Coeficientes de los demás renglones : Dividimos el nuevo renglón de la variable que entra por menos el coeficiente del de la variable que entra en el renglón que estamos calculando y al resultado, le sumamos el renglón que teníamos inicialmente

Paso 5: Construimos la tabla con los resultados.

Paso 6: En la nueva matriz, comprobamos los coeficientes del renglón Z, si todavía existen coeficientes negativos, se sigue iterando, de lo contrario hemos terminado y hallamos la solución óptima.

Existen problemas de programación lineal que no proporcionan una solución básica inicial. Esta situación se presenta cuando al menos una de las restricciones es del tipo ($\leq$) o ($=$). Para este propósito se desarrollan 2 métodos basados en el uso de variables artificiales: El método M o de penalización y la técnica de 2 fases.

METODO M O DE PENALIZACIÓN.

Los pasos básicos del método M son los siguientes:

1. Expresa el problema en forma estándar transformando las inecuaciones en ecuaciones introduciendo variables de holgura.
2. Agregue variables no negativas al lado izquierdo de cada una de las ecuaciones correspondientes a las restricciones de tipo ($\geq$) o ($=$). Estas variables se denominan variables artificiales y su adición hace que las restricciones correspondientes.

Esta dificultad se elimina asegurando que las variables sean 0 en la solución final. Esto se logra asignando una penalización muy grande por unidad a estas variables en la función objetivo. Tal penalización se designará como $-M$ para problemas de maximización y $+M$ para problemas de minimización.

3. Utiliza las variables artificiales en la solución básica inicial; sin embargo la función objetivo de la tabla inicial se prepara adecuadamente para expresarse en términos de las variables no básicas únicamente. Esto significa que los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo deben ser 0 un resultado que puede lograrse sumando múltiplos adecuados de las ecuaciones de restricción al renglón objetivo.

4. Proceda con los pasos regulares del método simplex.

MINIMIZACIÓN.

Para resolver problemas de minimización mediante el algoritmo simplex existen dos procedimientos que se emplean con regularidad.

- El primero, que a mi juicio es el más recomendable se basa en un artificio aplicable al algoritmo fundamentado en la lógica matemática que dicta que "*para cualquier función $f(x)$, todo punto que minimice a $f(x)$ maximizará también a $-f(x)$* ". Por lo tanto el procedimiento a aplicar es multiplicar por el factor negativo (-1) a toda la función objetivo.

$$Z_{\text{MIN}} = X_1 - 3X_2 \quad \text{se reescribe} \quad (-Z)_{\text{MAX}} = -X_1 + 3X_2$$

a continuación se resuelve el algoritmo como un problema de maximización.

- El segundo procedimiento, el cual pretende conservar la minimización consiste en aplicar los criterios de decisión que hemos esbozado con anterioridad, en los casos de la variable que entra, que sale y el caso en el que la solución óptima es encontrada. Aquí recordamos los procedimientos según el criterio dado el caso "minimizar".

Holgura Es todo recurso no utilizado, o capacidad no utilizada producto de una restricción de tipo $\leq$

Excedente Es todo exceso o supera a un producto de una restricción de tipo $\geq$

Cuando una de las variables de holgura o excedente tiene un valor mayor a cero (0.0) indica que la restricción a la cual está asociada es una restricción inactiva. Y cuando ese valor de la variable de holgura o excedente es cero (0.0), es porque la restricción a la cual están asociadas es una restricción activa. Dicho en otra forma, Una restricción será

Activa, si al sustituir los valores de las variables de la solución óptima en dicha restricción, el valor resultante en su miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho (RHS). Un caso especial es el de la restricción de igualdad, donde este tipo de restricción siempre es activa. Si una restricción no es activa, se dice que es inactiva. Esto es cuando al sustituir los valores de las variables de la solución óptima en la restricción en cuestión, el valor resultante del lado izquierdo (de la restricción) no coincide con el valor del lado derecho de la restricción.