FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

La función de densidad de una variable aleatorio continua X es :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ k\cdot\left(x^2-3x\right) & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ 0 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

a) **Calcula el valor de k para que f (x) sea función de densidad.**

$$\int_0^3 KX^2\,dx - \int_0^3 3KX\,dx = 1$$

$$K\left(\frac{X^3}{3}\right) - 3K\left(\frac{X^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 1$$

$$K(9) - \frac{3}{2}K(9) = 1$$

$$18K - 27K = 2$$

$$K = -\frac{2}{9}$$

b) **Determina la función de distribución F (x).**

$$K\left(\frac{X^3}{3}\right) - 3K\left(\frac{X^2}{2}\right)$$

$$-\frac{2}{9}\left(\frac{X^3}{3}\right) - 3\left(-\frac{2}{9}\right)\left(\frac{X^2}{2}\right)$$

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{Si } X<0 \\ \dfrac{-2X^3}{27} + \dfrac{X^2}{3} & \text{Si } 0\le X\le 3 \end{cases}$$

0 Si X > 3

La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en
miles de unidades, es del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

Determinar:

a) **k para que sea función de distribución**

$\lim_{x \to K^+} F(X)$ **=1** $\lim_{x \to K^+} X(2-X)$ **=1** $\lim_{x \to K^+} K(2-K)$ **=1**

K^2**-2K+1=0 K=1**

Por consiguiente, la función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

b) **La función de densidad**
La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) **Calcular la mediana. moda y coeficiente de variación de la producción**

La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la
derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que F(Me)= 0,5

Me(2- Me)= 0,5 **Me² -2me +0,5=0** **2Me² - 4me +1=0**

$M_e = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **Me= 0,2928**

Para calcular la Moda hay que ver el valor que hace mínima la función de densidad o de cuantía, es decir: halle la primera derivada

f(x)= 2 -2x **0≤ x ≤ 1**

f`(x)= -2 **La derivada de la función de cuantía f '(x)= - 2 <0 se trata de una función decreciente. De donde la moda =0**

Para la media $\mu = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx$

$\mu = x^2 - 2\frac{x^3}{3}$

$\mu = \frac{1}{3}$

Para la varianza

$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x) - \mu^2$

$\sigma^2 = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)dx - \mu^2$

$\sigma^2 = \frac{2X^3}{3} - \frac{2X^4}{4} - \frac{1}{9}$ $\sigma^2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{9}$ $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

σ= **0,2357**

CV= $\frac{0,2357}{\frac{1}{3}}$ **CV= 70,71%**

d) Hallar P(X >0,25)

P(X >0,25) = 1 -f(0,25)

= 1 – 0,25(2-0,25)

P(X >0,25) = 0,5625

P(X >0,25) = $\int_{0,25}^{1} (2 - 2X)dx$

$$P(X > 0{,}25) = 2x - x^2$$

$$P(X > 0{,}25) = 1{,}5 - 0{,}9375$$

$$P(X > 0{,}25) = 0{,}5625$$