

Cálculo de una variable

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill • Warren S. Wright

Mc
Graw
Hill



Cálculo de una variable

Trascendentes tempranas

Cálculo de una variable

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill **Warren S. Wright**
Loyola Marymount University Loyola Marymount University

Revisión técnica:

Marlene Aguilar Ábalo Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Ciudad de México	Enrique Arturo Galván Flores Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional, México
Crisanto Castillo Castillo Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Cuernavaca, México	Joel Ibarra Escutia Instituto Tecnológico de Toluca, Toluca, México
Fidel Castro López Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional, México	Linda Margarita Medina Herrera Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Ciudad de México
Rocío Cerecero López Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Cuernavaca, México	Santiago Neira Rosales Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, México
Ramón Espinosa Armenta Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)	Ignacio Ramírez Vargas Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Hidalgo, México
Eugenio L. Fautsch Tapia Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)	Héctor Joé Rosas Toledo Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
José Job Flores Godoy Universidad Iberoamericana, Ciudad de México	Tonatihu Valdez Hernández Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
	Petr Zhevandrov Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.

Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez

Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

CÁLCULO DE UNA VARIABLE. TRASCENDENTES TEMPRANAS

Cuarta edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2011 respecto a la primera edición en español por

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of *The McGraw-Hill Companies, Inc.*

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,

Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,

Delegación Álvaro Obregón,

C.P. 01376, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0501-9

Translated from the 4th edition of: *Calculus. Early transcendentals* by Dennis G. Zill and Warren S. Wright.

Copyright © 2011 by Jones and Bartlett Learning, 40 Tall Pine Drive, Sudbury, MA 01776. All rights reserved.

978-0-7637-5995-7

1234567890

1098765432101

Impreso en China

Printed in China

≡ Para el instructor

Filosofía

La cuarta edición de *Cálculo: trascendentes tempranas* constituye una revisión sustancial de la última edición. Aunque en esta edición hay mucho material nuevo, he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un libro que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta edición

Secciones y ejercicios La mayor parte del material se ha actualizado y, en algunos casos, reorganizado. Muchas secciones y conjuntos de ejercicios se han reescrito por completo; asimismo, se les han agregado muchos problemas nuevos, en especial aplicaciones, problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones agregadas pertenecen al ámbito de la “vida real” en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han agregado problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. En esta edición hay más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Pienso en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

El capítulo 1 es un repaso de funciones, y siguiendo la moda prevaleciente actual, las funciones se presentan desde los puntos de vista algebraico, gráfico, numérico o verbal. De hecho, la última sección del capítulo 1 se titula *De las palabras a las funciones*. Debido a que muchos estudiantes invariablemente encontrarán dificultades para resolver problemas relacionados con tasas y optimización aplicada, he incluido esta sección a fin de proporcionar una visión previa sobre cómo establecer, o construir, una función a partir de una descripción verbal (donde se ha eliminado el contexto del cálculo). En efecto, muchos problemas en la sección 1.7 vuelven a aparecer en un contexto de cálculo en la sección 4.8.

En este texto las ecuaciones diferenciales aparecen en dos capítulos: 8, y 16 (el cual se incluye en el libro *Cálculo de varias variables*). Las ecuaciones de primer orden se consideran en el capítulo 8 para beneficio de aquellos estudiantes que encuentren sus aplicaciones en cursos de física e ingeniería. En el capítulo 16 del libro *Cálculo de varias variables* se consideran la solución y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior. Por supuesto, los capítulos 8 y 16 pueden combinarse y cubrirse como una unidad en cualquier punto del curso, una vez que se haya concluido el capítulo 4. En el apéndice se proporcionan demostraciones de algunos de los teoremas más largos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada capítulo empieza con su propia tabla de contenido y una introducción al material referido en ese capítulo. En la parte final del libro, después del apéndice, el lector encontrará la sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Autoevaluación*, que fue introducida en la última edición, consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerequisite esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Los usuarios de las tres ediciones previas han sido muy receptivos a las *Observaciones* con las que a menudo termina una sección. En consecuencia, el número de éstas ha aumentado y se les ha denominado *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean análisis informales dirigidos directamente al estudiante. Estos análisis varían desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

También, a solicitud de los usuarios, se ha incrementado el número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, he cambiado a un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de “figura 1.2.3” es

Capítulo Sección del capítulo 1
 ↓ ↓
 1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en un capítulo posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 7.5 se proporciona como **FIGURA 7.5.1**, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 7.5.1. También, en esta edición cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

≡ Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material.

Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano*, con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En la página xiii encontrará la sección “Autoevaluación”, que contiene 56 preguntas. Esta “prueba” es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en la página RES-1. Sin tomar en cuenta su “calificación”, lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer “que se le pegue”) mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

≡ Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta edición y las ediciones previas, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, *Baylor University*
 Salvatore Anastasio, *SUNY, New Paltz*
 Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
 Steven Blasberg, *West Valley College*
 Robert Brooks, *University of Utah*
 Dietrich Burbulla, *University of Toronto*
 David Burton, *Chabot College*
 Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
 H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
 John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
 Arthur Dull, *Diablo Valley College*
 Hugh Easler, *College of William and Mary*
 Jane Edgar, *Brevard Community College*

Joseph Egar, *Cleveland State University*
 Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
 Peter Frisk, *Rock Valley College*
 Shirley Goldman, *University of California at Davis*
 Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
 David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
 Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
 Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
 Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
 Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
 Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
 Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
 Jean Holton, *Tidewater Community College*

Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlton A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut State University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*
Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*

Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University, Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Lloyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto del problema 37 de los ejercicios 8.3.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

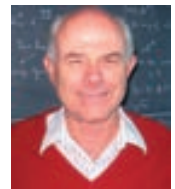
Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.



Dennis G. Zill



Warren S. Wright

Contenido

Prefacio v

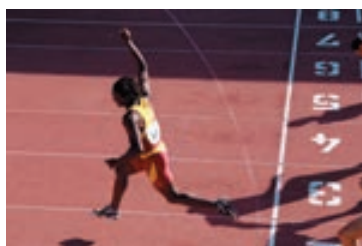
Autoevaluación xiii

Ensayo: La historia del cálculo xvii



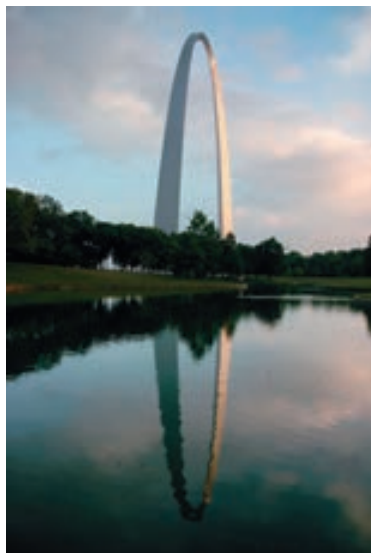
1 Funciones 1

- 1.1 Funciones y gráficas 2
- 1.2 Combinación de funciones 10
- 1.3 Funciones polinomiales y racionales 20
- 1.4 Funciones trascendentes 30
- 1.5 Funciones inversas 37
- 1.6 Funciones exponencial y logarítmica 48
- 1.7 De las palabras a las funciones 55
- Revisión del capítulo 1 61



2 Límite de una función 67

- 2.1 Límites: un enfoque informal 68
- 2.2 Teoremas sobre límites 74
- 2.3 Continuidad 81
- 2.4 Límites trigonométricos 88
- 2.5 Límites que involucran el infinito 94
- 2.6 Límites: un enfoque formal 103
- 2.7 El problema de la recta tangente 110
- Revisión del capítulo 2 118



3

La derivada 121

- 3.1 La derivada 122
- 3.2 Reglas de potencias y sumas 130
- 3.3 Reglas de productos y cocientes 138
- 3.4 Funciones trigonométricas 144
- 3.5 Regla de la cadena 149
- 3.6 Diferenciación implícita 156
- 3.7 Derivadas de funciones inversas 162
- 3.8 Funciones exponenciales 167
- 3.9 Funciones logarítmicas 172
- 3.10 Funciones hiperbólicas 178
- Revisión del capítulo 3 186

4

Aplicaciones de la derivada 191

- 4.1 Movimiento rectilíneo 192
- 4.2 Razones de cambio relacionadas 196
- 4.3 Extremos de funciones 204
- 4.4 Teorema del valor medio 210
- 4.5 Otro repaso a los límites: regla de L'Hôpital 216
- 4.6 Gráficas y la primera derivada 224
- 4.7 Gráficas y la segunda derivada 230
- 4.8 Optimización 235
- 4.9 Linealización y diferenciales 247
- 4.10 Método de Newton 254
- Revisión del capítulo 4 260

5

Integrales 267

- 5.1 La integral indefinida 268
- 5.2 Integración por sustitución u 276
- 5.3 El problema de área 286

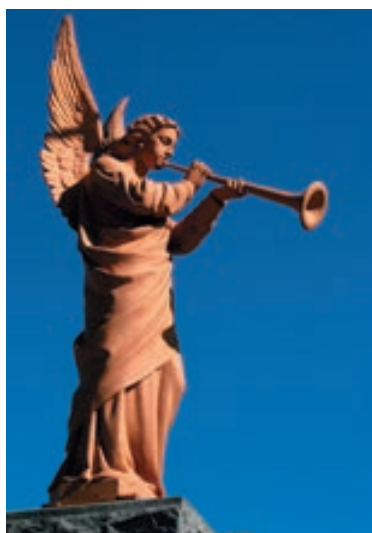


- 5.4 La integral definida 295**
- 5.5 Teorema fundamental del cálculo 305**
- Revisión del capítulo 5 316**

6

Aplicaciones de la integral 321

- 6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo 322**
- 6.2 Otro repaso al área 325**
- 6.3 Volúmenes de sólidos: método de rebanadas 333**
- 6.4 Volúmenes de sólidos: el método de los cascarones 340**
- 6.5 Longitud de una gráfica 345**
- 6.6 Área de una superficie de revolución 348**
- 6.7 Valor medio (promedio) de una función 351**
- 6.8 Trabajo 355**
- 6.9 Presión y fuerza del fluido 362**
- 6.10 Centros de masa y centroides 367**
- Revisión del capítulo 6 373**



7

Técnicas de integración 379

- 7.1 Integración: tres recursos 380**
- 7.2 Integración por sustitución 382**
- 7.3 Integración por partes 386**
- 7.4 Potencias de funciones trigonométricas 393**
- 7.5 Sustituciones trigonométricas 399**
- 7.6 Fracciones parciales 406**
- 7.7 Integrales impropias 415**
- 7.8 Integración aproximada 423**
- Revisión del capítulo 7 433**



8

Ecuaciones diferenciales de primer orden 439

- 8.1 Ecuaciones separables 440**



8.2	Ecuaciones lineales	445
8.3	Modelos matemáticos	450
8.4	Curvas solución sin solución	459
8.5	Método de Euler	468
	Revisión del capítulo 8	471

9

Sucesiones y series 475

9.1	Sucesiones	476
9.2	Sucesiones monótonas	485
9.3	Series	490
9.4	Prueba de la integral	501
9.5	Pruebas de comparación	504
9.6	Pruebas de las proporciones y de la raíz	509
9.7	Series alternantes	512
9.8	Series de potencias	519
9.9	Representación de funciones mediante series de potencias	523
9.10	Serie de Taylor	529
9.11	Serie del binomio	540
	Revisión del capítulo 9	544

Apéndice AP-1

Demostraciones de teoremas seleccionados AP-1

Fórmulas matemáticas FM-1

Repaso de álgebra	FM-1
Fórmulas de geometría	FM-2
Gráficas y funciones	FM-4
Revisión de trigonometría	FM-5
Funciones exponencial y logarítmica	FM-7
Diferenciación	FM-8
Fórmulas de integración	FM-9

Respuestas de la autoevaluación RES-1

Respuestas de los problemas impares seleccionados RES-2

Índice analítico IND-1

Créditos de fotografías C-1

Autoevaluación

Las respuestas a todas las preguntas están en la página RES-1.

Como preparación para el cálculo

Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. _____
2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. _____
3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \frac{1}{x^{2/3}}$. _____
4. (Falso/verdadero) $\frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$. _____
5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es _____.
6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.
7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2 \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-1/2} 2x + 2x \sqrt{x^2 + 4}.$$

8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.
9. Resuelva las ecuaciones:
 $a) x^2 = 7x$ $b) x^2 + 2x = 5$ $c) \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$ $d) x + \sqrt{x-1} = 1$
10. Factorice completamente:
 $a) 10x^2 - 13x - 3$
 $b) x^4 - 2x^3 - 15x^2$
 $c) x^3 - 27$
 $d) x^4 - 16$

Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. _____
12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. _____
13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\frac{-a}{a} < 0$. _____
14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ _____ o $x =$ _____.
15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ _____.
16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?
 $a) 0.25$ $b) 8.131313 \dots$ $c) \pi$
 $d) \frac{22}{7}$ $e) \sqrt{16}$ $f) \sqrt{2}$
 $g) 0$ $h) -9$ $i) 1\frac{1}{2}$
 $j) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ $k) \frac{\sqrt{3}}{2}$ $l) \frac{-2}{11}$
17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.
 $i) (2, 4]$ $ii) [2, 4)$ $iii) (2, 4)$ $iv) [2, 4]$
 $a) |x - 3| < 1$ $b) |x - 3| \leq 1$ $c) 0 \leq x - 2 < 2$ $d) 1 < x - 1 \leq 3$
18. Expresé el intervalo $(-2, 2)$ como
 $a)$ una desigualdad y $b)$ una desigualdad que implique valores absolutos.
19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.
21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.
22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el _____ cuadrante.
24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es _____.
25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$ _____ y $y_2 =$ _____.
26. (Llene los espacios en blanco) El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:
 - a) simétrica con respecto al eje x . _____
 - b) simétrica con respecto al eje y . _____
 - c) simétrica con respecto al origen. _____
27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, _____ y _____.
28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y ?
29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.
30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.
31. Si los puntos P_1 , P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

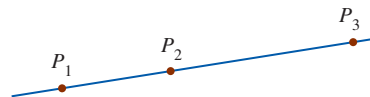


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

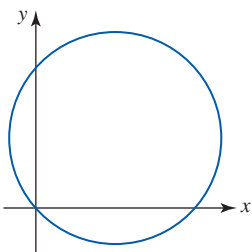


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a , b , c , d y e representan constantes diferentes de cero.
 - a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
 - b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
 - c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
 - d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$
 - e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

Rectas

33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. _____
34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ _____.
35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente _____.
36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, _____, _____, y _____.
37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es _____.
38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$.
40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.
41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

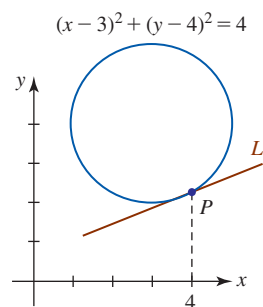


FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

i) $x + y - 1 = 0$	ii) $x + y = 0$	iii) $x - 1 = 0$
iv) $y - 1 = 0$	v) $10x + y - 10 = 0$	vi) $-10x + y + 10 = 0$
vii) $x + 10y - 10 = 0$	viii) $-x + 10y - 10 = 0$	

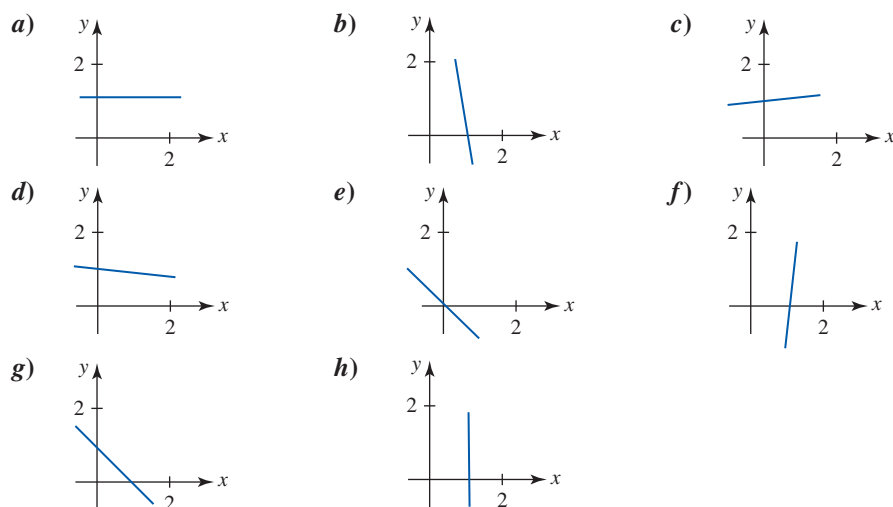


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

≡ Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$. _____
44. (Falso/verdadero) $\sin(2t) = 2 \sin t$. _____
45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a _____ radianes.
46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a _____ grados.
47. (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ _____.
48. Encuentre $\cos t$ si $\sin t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.
49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

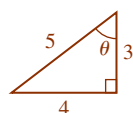


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

50. Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ .

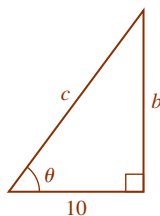


FIGURA A.6 Triángulo
para el problema 50

≡ Logaritmos

51. Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.
52. Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.
53. Exprese $\log_b 5 + 3 \log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.
54. Use una calculadora para evaluar $\frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.
55. (Llene el espacio en blanco) $b^{3 \log_b 10} = \underline{\hspace{2cm}}$.
56. (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b (y^{\log_b x})$.

La historia del cálculo

Por Roger Cooke
University of Vermont

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.



Isaac Newton



Gottfried Leibniz

¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1} . Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo,

estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco “infinitesimal”

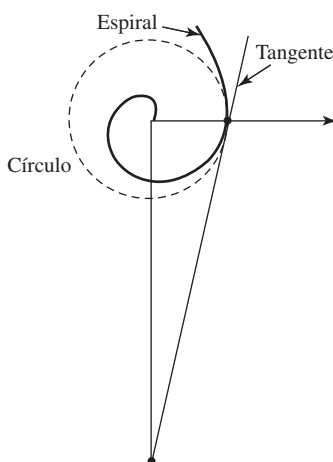


FIGURA 1 La espiral de Arquímedes. La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva “infinitamente próximos” entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza “infinitamente corta” de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases “infinitamente próximos” e “infinitamente cortos”.

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por **Pierre de Fermat (1601-1665)** y **René Descartes (1596-1650)**. Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos “infinitamente próximos”, al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1 , de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x . Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$, de modo que $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión

$x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y ; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x ; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (y_1, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo xvii se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo xvii era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x . La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangente [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo xvii: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso

sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta “rectificación” de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de “diferencia en x ”, y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x . En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número “infinitesimal”, diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos “infinitamente delgados” de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx . Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x) dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x) dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x) dx, \quad dA = f(x) dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin^3 \theta}{3 \cos^3 \theta} + \frac{\sin^5 \theta}{5 \cos^5 \theta} - \dots \right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45° . Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para $\arctan x$.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura h en un círculo de diámetro d ; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\frac{d}{2} \arcsen \frac{h}{d} \right)^2$.

Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geoméricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} \left(\frac{h}{d} \right)^n \right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L'Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito*, de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a muchos descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una “suma de diferencias infinitesimales” o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al “sumar” sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideo. En su *Principia Mathematica* escribió:

Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

. . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como “fantasmas de cantidades”. Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque “epsilon-delta” de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado “análisis no estándar”, no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v , el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t . Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v , ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? Res. $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:
 - a) Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B .
 - b) Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB , permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C .
 - c) Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C .
 - d) En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.
 - e) Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.
 - f) Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

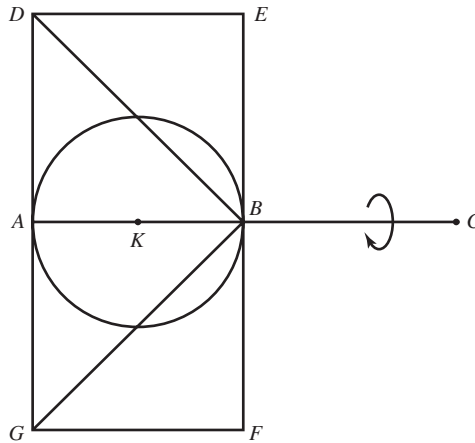


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

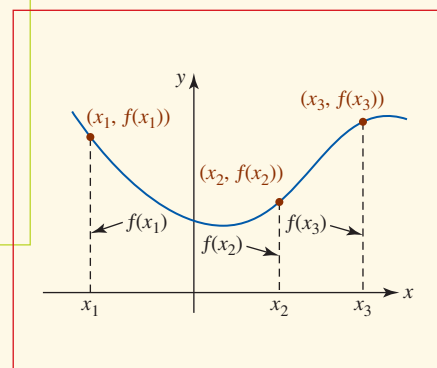
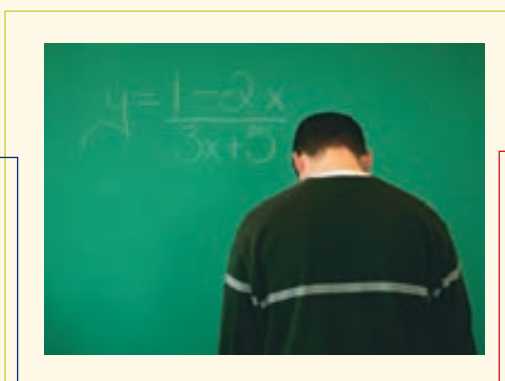
A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

- Si el radio de la esfera es r , el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.
- Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

- La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.
 - En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.
 - Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.
 - En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.
4. Proporcione un razonamiento “infinitesimal” de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides “infinitamente delgadas” donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [Sugerencia: parta del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Funciones



En este capítulo ¿Ha escuchado frases como “el éxito está un función del trabajo arduo” y “la demanda está un función del precio”? La palabra *función* se usa a menudo para sugerir una relación o una dependencia de una cantidad con respecto a otra. Como tal vez sepa, en matemáticas el concepto de una función posee una interpretación similar pero ligeramente más especializada.

El cálculo trata, en esencia, sobre funciones. Así, resulta conveniente empezar su estudio con un capítulo dedicado a un repaso de este importante concepto.

- 1.1 Funciones y gráficas
- 1.2 Combinación de funciones
- 1.3 Funciones polinomiales y racionales
- 1.4 Funciones trascendentes
- 1.5 Funciones inversas
- 1.6 Funciones exponencial y logarítmica
- 1.7 De las palabras a las funciones
- Revisión del capítulo 1

1.1 Funciones y gráficas

■ **Introducción** Al usar los objetos e interactuar con las personas que nos rodean, resulta fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, o apareje, a los miembros o elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, para cada número de seguridad social hay una persona; para cada libro corresponde por lo menos un autor; para cada estado hay un gobernador, etcétera. En matemáticas estamos interesados en un tipo especial de correspondencia: una *correspondencia con valor único* denominada **función**.

Definición 1.1.1 Función

Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en X exactamente un elemento y en Y .

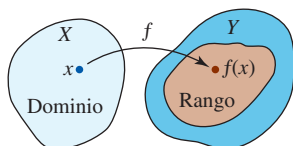


FIGURA 1.1.1 Dominio y rango de una función f

■ **Terminología** Una función suele denotarse por una letra como f , g o h . Entonces podemos representar una función f de un conjunto X en un conjunto Y por medio de la notación $f: X \rightarrow Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f . El conjunto de elementos correspondientes y en el conjunto Y se denomina **rango** de la función. El único elemento y en el rango que corresponde a un elemento x selecto en el dominio X se denomina **valor** de la función en x , o **imagen** de x , y se escribe $f(x)$. Esta expresión se lee “ f de x ” o “ f en x ”, y se escribe $y = f(x)$. Algunas veces también conviene denotar una función por $y = y(x)$. Observe en la FIGURA 1.1.1 que el rango de f no necesariamente debe ser todo el conjunto Y . A muchos profesores les agrada llamar a un elemento x en el dominio *entrada* de la función, y al elemento correspondiente $f(x)$ en el rango *salida* de la función. Puesto que el valor de y depende de la elección de x , y se denomina **variable dependiente**; x se denomina **variable independiente**. A partir de este momento consideraremos que los conjuntos X y Y constan de números reales; así, la función f se denomina **función con valor real de una sola variable real**.

En todos los análisis y ejercicios de este texto, las funciones se representan de varias formas:

- *analítica*, es decir, por medio de una fórmula como $f(x) = x^2$;
- *verbal*, es decir, mediante una descripción con palabras;
- *numérica*, es decir, mediante una tabla de valores numéricos; y
- *visual*, es decir, con una gráfica.

EJEMPLO 1 Función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real está dada por la ecuación $f(x) = x^2$ o $y = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen al sustituir x , a la vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$.

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7.$$

EJEMPLO 2 Correspondencia estudiante y escritorio

Una correspondencia natural ocurre entre un conjunto de 20 estudiantes y un conjunto de, por ejemplo, 25 escritorios en un salón de clases cuando cada estudiante escoge y se sienta en un escritorio diferente. Si el conjunto de 20 estudiantes es el conjunto X y el conjunto de 25 escritorios es el conjunto Y , entonces esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y , en el supuesto de que ningún estudiante se sienta en dos escritorios al mismo tiempo. El conjunto de 20 escritorios ocupados realmente por los estudiantes constituye el rango de la función.

Algunas veces, para destacar el argumento, escribiremos una función representada por una fórmula usando paréntesis en lugar del símbolo x . Por ejemplo, al escribir la función elevar al cuadrado $f(x) = x^2$ como

$$f(\quad) = (\quad)^2. \quad (1)$$

Entonces, para evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, escribimos $3 + h$ entre paréntesis y realizamos las operaciones algebraicas correspondientes:

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$



Correspondencia estudiante/escritorio

Consulte la sección *Páginas de recursos*, al final del libro, para tener un repaso del desarrollo del binomio.

Si una función f está definida por medio de una fórmula o ecuación, entonces por lo regular el dominio de $y = f(x)$ no se plantea explícitamente. Por lo general es posible deducir el dominio de $y = f(x)$ ya sea a partir de la estructura de la ecuación o del contexto del problema.

EJEMPLO 3 Dominio y rango

En el ejemplo 1, puesto que cualquier número real x puede elevarse al cuadrado y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R en R ; es decir, $f: R \rightarrow R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Al usar notación de intervalos, el dominio también puede escribirse como $(-\infty, \infty)$. Debido a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x , es fácil ver que el rango de f es el conjunto de números reales no negativos o $[0, \infty)$. ■

■ **Dominio de una función** Como ya se mencionó, el dominio de una función $y = f(x)$ que está definido por una fórmula no suele especificarse. A menos que se indique o implique lo contrario, se entiende que

- El **dominio** de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

Este conjunto a veces se refiere como **dominio implícito** o **dominio natural** de la función. Por ejemplo, no es posible calcular $f(0)$ para la **función recíproca** $f(x) = 1/x$ puesto que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Puesto que todo número real diferente de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto cero. Por el mismo razonamiento, la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ ni en $x = 2$, de modo que su dominio es el conjunto de números reales sin los números -2 y 2 . La **función raíz cuadrada** $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definida en el sistema de números reales, debe pedirse que el **radicando**, en este caso simplemente x , sea no negativo. A partir de la desigualdad $x \geq 0$ observamos que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de la **función constante** $f(x) = -1$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es el conjunto que consta sólo del número -1 .

EJEMPLO 4 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, de modo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Luego, como el símbolo $\sqrt{}$ denota la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y en consecuencia $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x = 3$ y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ aumentan cuando x crece, se concluye que $y \geq 4$. Por consiguiente, el rango de f es $[4, \infty)$. ■

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15} \qquad b) g(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x - 4}.$$

Solución

- Como en el ejemplo 4, la expresión dentro del radical —el radicando— debe ser no negativa; es decir, el dominio de f es el conjunto de números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ es también el dominio de f .
- Una función que está dada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores x para los cuales el denominador es igual a 0. Puesto que el denominador de $g(x)$ se factoriza como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, vemos que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. Éstos son los *únicos* números para los cuales g no está definida. Por tanto, el dominio de la función g es el conjunto de números reales, a excepción de $x = -1$ y $x = 4$. ■

◀ En precálculo se suelen resolver desigualdades cuadráticas como $(x - 3)(x + 5) \geq 0$ utilizando una tabla de signos.

Al usar notación de intervalos, el dominio de g en el inciso b) del ejemplo 5 puede escribirse como $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$. Como alternativa para esta desgarrada unión de intervalos ajenos, este dominio también puede escribirse usando notación de construcción de conjuntos $\{x \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

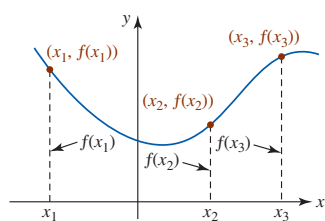


FIGURA 1.1.2 Puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

■ **Gráficas** En campos como ciencia, ingeniería y negocios, a menudo se usa una función para describir los fenómenos. A fin de interpretar y utilizar datos, es útil representar estos datos en forma de gráfica. En el **sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares**, la gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f . En el plano xy , un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, de modo que la gráfica de una función es un conjunto de puntos. Si una función se define por medio de una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener los puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$, escogemos prudentemente números $x_1, x_2, x_3, \dots$ en su dominio, calculamos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$, trazamos los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \dots$, y luego unimos estos puntos con una curva suave (en caso de ser posible). Vea la FIGURA 1.1.2. No olvide que

- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y , y
- un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x .

A continuación se hacen algunos comentarios sobre las figuras en este texto. Con pocas excepciones, suele ser imposible representar la gráfica completa de una función, por lo que a menudo sólo se muestran las características más importantes de la gráfica. En la FIGURA 1.1.3a) observe que la gráfica se dirige hacia abajo en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, puede asumirse que no hay sorpresas mayores más allá de lo que se ha mostrado y que la gráfica continúa simplemente de la manera indicada. La gráfica en la figura 1.1.3a) indica el denominado **comportamiento extremo o comportamiento global** de la función. Si una gráfica termina ya sea en su extremo derecho o izquierdo, este hecho se indica por medio de un punto cuando es necesario. Para representar el hecho de que el punto extremo está incluido en la gráfica se usa un punto sólido, y para indicar que el punto extremo no está incluido en la gráfica se usa un punto vacío.

■ **Prueba de la recta vertical** A partir de la definición de una función se sabe que para toda x en el dominio de f corresponde un solo valor $f(x)$ en el rango. Esto significa que una recta vertical que corta la gráfica de una función $y = f(x)$ (esto equivale a escoger una x) puede cortar a la gráfica de una función en cuanto mucho un punto. A la inversa, si *toda* recta vertical que corte la gráfica de una ecuación lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la gráfica es la gráfica de una función. La última declaración se denomina **prueba de la recta vertical** para una función. Por otra parte, si *alguna* recta vertical corta la gráfica de una ecuación más de una vez, entonces la gráfica no es la gráfica de una función. Vea las figuras 1.1.3a)-c). Cuando una recta vertical corta una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y , en contradicción con la definición de función.

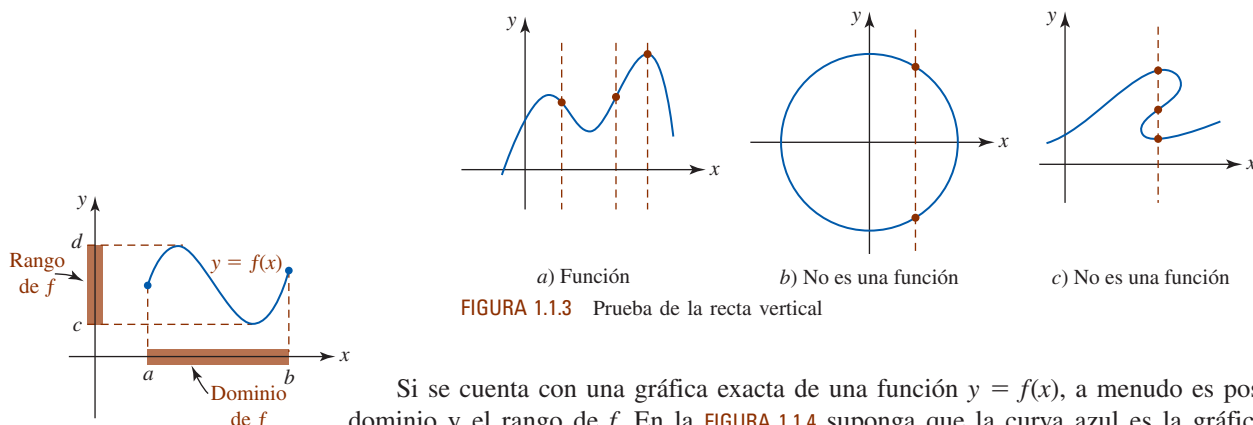


FIGURA 1.1.3 Prueba de la recta vertical

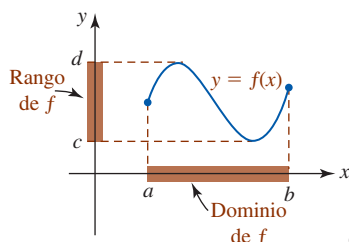


FIGURA 1.1.4 Dominio y rango interpretados gráficamente

Si se cuenta con una gráfica exacta de una función $y = f(x)$, a menudo es posible *ver* el dominio y el rango de f . En la FIGURA 1.1.4 suponga que la curva azul es la gráfica entera, o completa, de alguna función f . Así, el dominio de f es el intervalo $[a, b]$ sobre el eje x , y el rango es el intervalo $[c, d]$ sobre el eje y .

EJEMPLO 6 Otra perspectiva del ejemplo 4

A partir de la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x-3}$ dada en la FIGURA 1.1.5, podemos ver que el dominio y el rango de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 4.

■ **Intersecciones** Para graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, una buena idea suele ser determinar primero si la gráfica de f tiene intersecciones. Recuerde que todos los puntos sobre el eje y son de la forma $(0, y)$. Entonces, si 0 es el dominio de una función f , la **intersección y** es el punto sobre el eje y cuya coordenada y es $f(0)$; en otras palabras, $(0, f(0))$. Vea la FIGURA 1.1.6a). De manera semejante, todos los puntos sobre el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Esto significa que para encontrar las **intersecciones x** de la gráfica de $y = f(x)$, se determinan los valores de x que hacen $y = 0$. Es decir, es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$ para x . Un número c para el que $f(c) = 0$ se denomina **cero** de la función f o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los **ceros reales** de una función f son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f . En la figura 1.1.6b) se ha ilustrado una función que tiene tres ceros x_1, x_2 y x_3 porque $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres intersecciones x correspondientes son los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ y $(x_3, 0)$. Por supuesto, la gráfica de la función puede no tener intersecciones. Este hecho se ilustra en la figura 1.1.5.

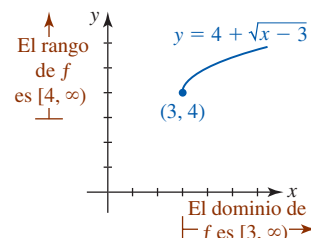


FIGURA 1.1.5 Gráfica de la función f en el ejemplo 6

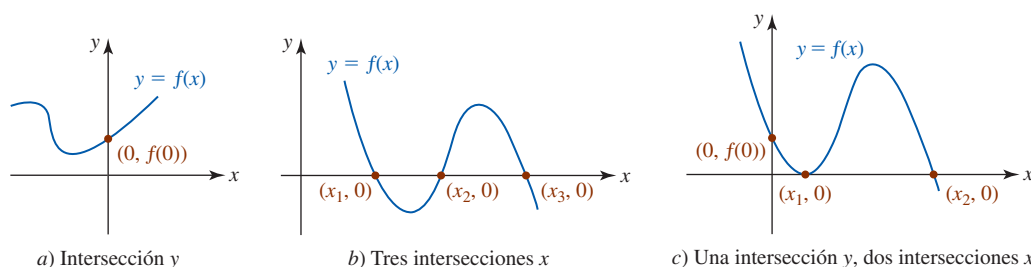


FIGURA 1.1.6 Intersecciones de la gráfica de una función f

Una gráfica no necesariamente tiene que *cruzar* un eje de coordenadas en una intersección; una gráfica puede simplemente tocar, o ser *tangente*, a un eje. En la figura 1.1.6c), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$.

EJEMPLO 7 Intersecciones

Encuentre, de ser posible, las intersecciones x y y de la función dada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución

- a) Puesto que 0 está en el dominio de f , $f(0) = -2$ y así la intersección y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones x , es necesario determinar si f tiene ceros reales, es decir, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores evidentes, se usa la fórmula general para polinomios cuadráticos para obtener $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Las intersecciones x son los puntos $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.
- b) Debido a que 0 no está en el dominio de f , la gráfica de f no posee intersección y . Ahora, puesto que f es una expresión fraccionaria, la única forma en que es posible que $f(x) = 0$ es que el numerador sea igual a cero y el denominador sea diferente de cero al evaluar la función en el mismo número. Al factorizar el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$ se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. En consecuencia, los ceros de f son los números -1 y 3 . Las intersecciones x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ■

■ **Funciones definidas por partes** Una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de f . Una función definida de esta manera se denomina **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números reales no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, puesto que $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número: $f(-4) = (-4)^2 = 16$; por otra parte, puesto que $6 \geq 0$ se suma 1 al número: $f(6) = 6 + 1 = 7$.

EJEMPLO 8 Gráfica de una función definida por partes

Considere la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Aunque el dominio de f consta de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función está definida sobre una parte diferente de su dominio. Se grafican

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$ y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.1.7.

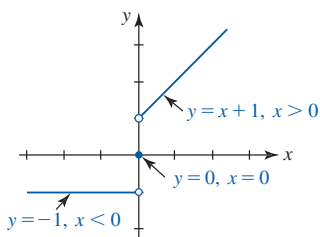


FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

■ **Semicírculos** Como se muestra en la figura 1.1.3b), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (por lo menos) dos funciones de x . Si esta ecuación se resuelve para y en términos de x , se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{}$, ambas ecuaciones $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$ definen funciones. La primera ecuación define un **semicírculo superior**, y la segunda un **semicírculo inferior**. Con base en las gráficas mostradas en la FIGURA 1.1.8, el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.

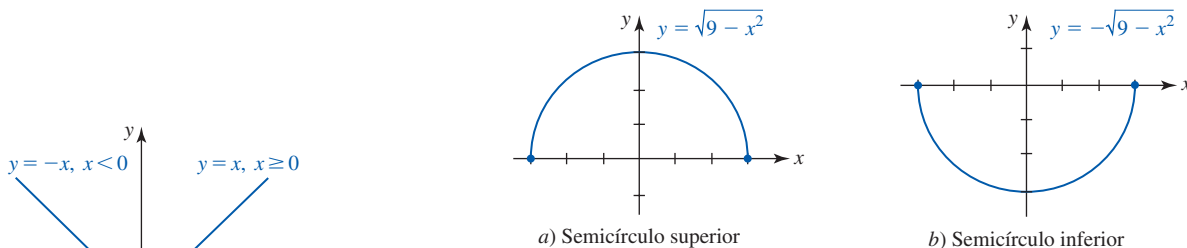


FIGURA 1.1.8 Estos semicírculos son gráficas de funciones

■ **Función valor absoluto** La función $f(x) = |x|$, denominada **función valor absoluto**, aparece a menudo en el análisis de capítulos posteriores. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. En otras palabras, para cualquier número real x , los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Por ejemplo,

$$f(3) = |3| = 3, \quad f(0) = |0| = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por definición del valor absoluto de x , observamos que f es una función definida por partes o pedazos, que consta de dos partes

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Su gráfica, mostrada en la FIGURA 1.1.9a), consta de dos semirrectas perpendiculares. Puesto que $f(x) \geq 0$ para toda x , otra forma de graficar (3) consiste en simplemente trazar la recta $y = x$ y luego reflejar en el eje x esa porción de la recta que está abajo del eje x . Vea la figura 1.1.9b).

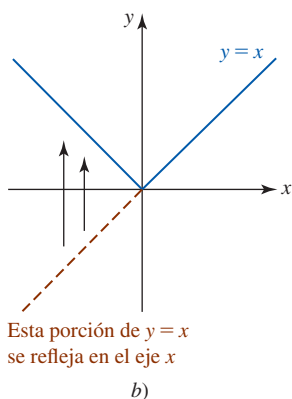
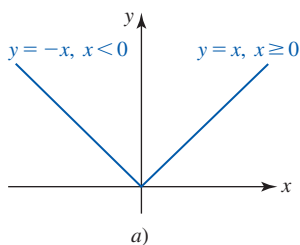


FIGURA 1.1.9 Función valor absoluto (3)

■ **Función entero mayor** A continuación se considerará una función f definida por partes denominada **función entero mayor**. Esta función, que tiene muchas notaciones, se denotará aquí por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y está definida por la regla

$$\lfloor x \rfloor = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \quad (4)$$

La expresión (4), traducida a lenguaje coloquial, significa lo siguiente:

- El valor funcional $f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x .

Por ejemplo,

$$f(-1.5) = -2, f(0.4) = 0, f(\pi) = 3, f(5) = 5,$$

y así en lo sucesivo. El dominio de f es el conjunto de números reales y consta de la unión de una infinidad de intervalos ajenos; en otras palabras, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es una función definida por partes dada por

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases} \quad (5)$$

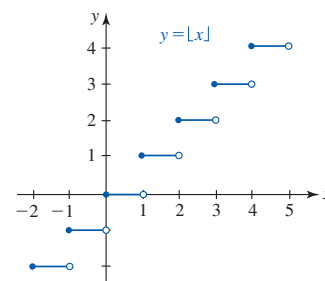


FIGURA 1.1.10 Función mayor entero

El rango de f es el conjunto de enteros. La porción de la gráfica de f sobre el intervalo cerrado $[-2, 5]$ se proporciona en la FIGURA 1.1.10.

En informática la función entero mayor se conoce como **función redondeo hacia el entero inferior anterior**. Una función relacionada denominada **función redondeo hacia el entero superior siguiente*** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x . Vea los problemas 57 a 59 en los ejercicios 1.1.

■ **Un modelo matemático** A menudo resulta aconsejable describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, ya sea físico, sociológico e incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático** y puede ser tan complicada como cientos de ecuaciones simultáneas o tan sencilla como una sola función. Esta sección concluye con una ilustración del mundo real de una función definida por partes denominada *función timbre postal*. Esta función es semejante a $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en el sentido de que ambos son ejemplos de *funciones escalón*; cada función es constante sobre un intervalo y luego salta a otro valor constante al siguiente intervalo colindante.

Al momento de escribir esto, la tarifa de primera clase del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el porte de una carta en un sobre de tamaño normal dependía de su peso en onzas:

$$\text{Porte} = \begin{cases} \$0.42, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.59, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.76, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas} \\ \vdots & \\ \$2.87, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas.} \end{cases} \quad (6)$$

La regla en (6) es una función de P que consta de 14 partes (las cartas que pesan más de 13 onzas se envían como correo prioritario). Un valor de la función $P(w)$ es una de 14 constantes; la constante cambia dependiendo del peso w (en onzas) de la carta.[†] Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.42, P(1.7) = \$0.59, P(2.2) = \$0.76, P(2.9) = \$0.76 \text{ y } P(12.1) = \$2.87.$$

El dominio de la función P es la unión de los intervalos:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13].$$

* Las funciones redondeo hacia el entero inferior anterior y redondeo hacia el entero superior siguiente y sus notaciones se deben al renombrado científico canadiense Kenneth E. Iverson (1920-2004).

† En (6) no se muestra que el porte de una carta cuyo peso se encuentra en el intervalo $(3, 4]$ es determinado por si su peso está en $(3, 3.5]$ o en $(3.5, 4]$. Éste es el único intervalo dividido de esta manera.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se traza la gráfica de una función, nunca se debe acudir a graficar muchos puntos manualmente. Esto es algo que una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (SAC) hacen bien. Por otra parte, usted no debe volverse dependiente de una calculadora para obtener una gráfica. Lo crea o no, hay muchos profesores de cálculo que no permiten el uso de calculadoras gráficas al aplicar cuestionarios o exámenes. Por lo general, no hay objeción para que usted use calculadoras o computadoras como ayuda para comprobar algunos problemas de tarea, pero en el salón de clases los maestros desean ver el producto de su propio esfuerzo, es decir, su capacidad de analizar. Así, está usted fuertemente motivado a desarrollar sus habilidades para graficar hasta el punto en que pueda trazar a mano rápidamente la gráfica de una función a partir de alguna propiedad conocida de tipos de funciones y trazar un mínimo de puntos bien escogidos.

Ejercicios 1.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre los valores funcionales indicados.

- Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5)$, $f(-\sqrt{3})$, $f(3)$ y $f(6)$
- Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$ y $f(7)$
- Si $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(5)$
- Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$; $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$ y $f(4)$
- Si $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{2})$
- Si $f(x) = \frac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$

En los problemas 7 y 8, encuentre

$$f(x), f(2a), f(a^2), f(-5x), f(2a+1), f(x+h)$$

para la función dada f y simplifique lo más que pueda.

- $f(\) = -2(\)^2 + 3(\)$
- $f(\) = (\)^3 - 2(\)^2 + 20$
- ¿Para qué valores de x $f(x) = 6x^2 - 1$ es igual a 23?
- ¿Para qué valores de x $f(x) = \sqrt{x-4}$ es igual a 4?

En los problemas 11-26, encuentre el dominio de la función f dada.

11. $f(x) = \sqrt{4x-2}$	12. $f(x) = \sqrt{15-5x}$
13. $f(x) = \frac{10}{\sqrt{1-x}}$	14. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x-1}}$
15. $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-3)}$	16. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
17. $f(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}$	18. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x-12}$
19. $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$	20. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-1}$
21. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$	22. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$	24. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$
25. $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$	26. $f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x}}$

En los problemas 27-30, determine si la gráfica en la figura es la gráfica de una función.

27.

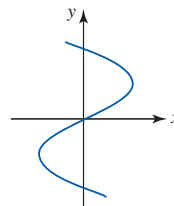


FIGURA 1.1.11 Gráfica para el problema 27

28.

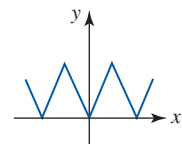


FIGURA 1.1.12 Gráfica para el problema 28

29.

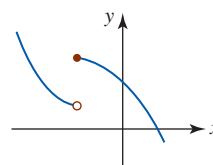


FIGURA 1.1.13 Gráfica para el problema 29

30.

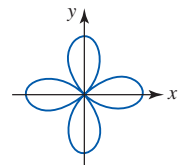


FIGURA 1.1.14 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, use el rango de la función f dada en la figura para encontrar su dominio y rango.

31.

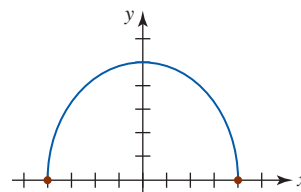


FIGURA 1.1.15 Gráfica para el problema 31

32.

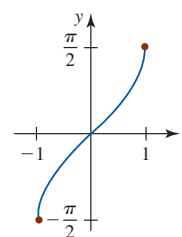


FIGURA 1.1.16 Gráfica para el problema 32

33.

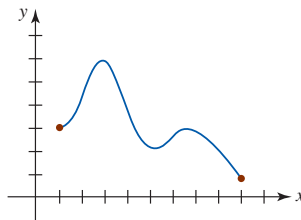


FIGURA 1.1.17 Gráfica para el problema 33

34.

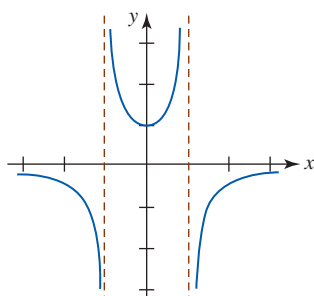


FIGURA 1.1.18 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-44, encuentre las intersecciones x y y de la gráfica de la función dada f , en caso de haberlas. No grafique.

35. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

36. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

37. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

38. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

39. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

40. $f(x) = x^4 - 1$

41. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

42. $f(x) = \frac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

43. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

44. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 45 y 46, use la gráfica de la función f dada en la figura para estimar los valores $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$. Calcule la intersección y .

45.

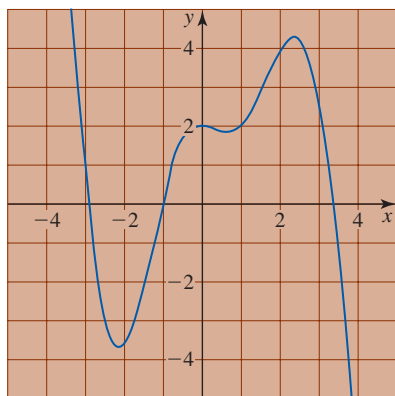


FIGURA 1.1.19 Gráfica para el problema 45

46.

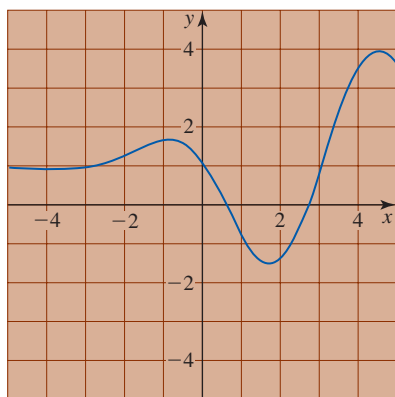


FIGURA 1.1.20 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 y 48, use la gráfica de la función f dada en la figura para estimar los valores $f(-2)$, $f(-1.5)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3.2)$. Calcule las intersecciones x .

47.

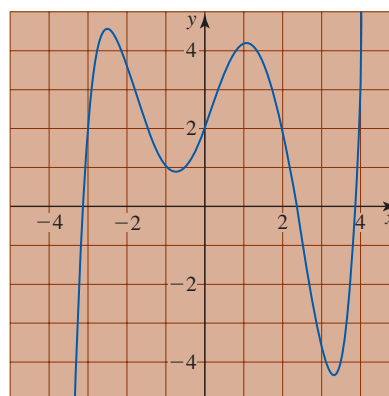


FIGURA 1.1.21 Gráfica para el problema 47

48.

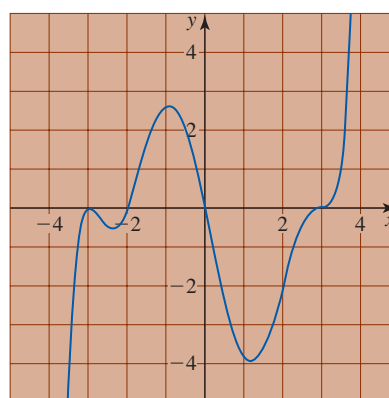


FIGURA 1.1.22 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación dada. Encuentre el dominio de las funciones f_1 y f_2 .

49. $x = y^2 - 5$

50. $x^2 - 4y^2 = 16$

51. Algunas de las funciones que encontrará después en este texto tienen como dominio el conjunto de enteros positivos n . La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los n primeros enteros positivos; es decir,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

a) Evalúe $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.b) Demuestre que $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1)$.c) Simplifique $f(5)/f(4)$ y $f(7)/f(5)$.d) Simplifique $f(n + 3)/f(n)$.

52. Otra función de un entero positivo n proporciona la suma de los n primeros enteros positivos al cuadrado:

$$S(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

a) Encuentre el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.b) Encuentre n tal que $300 < S(n) < 400$. [Sugerencia: Use calculadora.]

≡ Piense en ello

53. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio es
a) $[3, \infty)$ **b)** $(3, \infty)$.
54. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es
a) $[3, \infty)$ **b)** $(3, \infty)$.
55. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ dada en la FIGURA 1.1.23, determine el rango y dominio de la función $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Explique su razonamiento en una o dos frases.

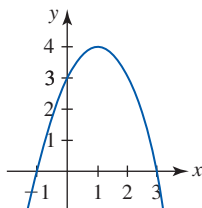


FIGURA 1.1.23 Gráfica para el problema 55

56. Sea P cualquier punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de una función f . Suponga que los segmentos de recta PT y PS son perpendiculares a los ejes x y y . Sean M_1 , M_2 y M_3 , respectivamente, los puntos medios de PT , PS y ST como se muestra en la FIGURA 1.1.24. Encuentre una función que describa la ruta de los puntos M_1 . Repita lo anterior para los puntos M_2 y M_3 .

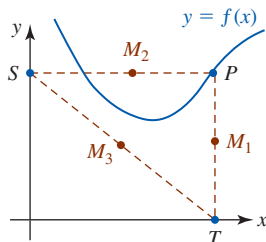


FIGURA 1.1.24 Gráfica para el problema 56

57. En la página 7 se vio que la **función redondeo hacia el entero superior siguiente** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x . Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots & \\ \text{_____}, & -3 < x \leq -2 \\ \text{_____}, & -2 < x \leq -1 \\ \text{_____}, & -1 < x \leq 0 \\ \text{_____}, & 0 < x \leq 1 \\ \text{_____}, & 1 < x \leq 2 \\ \text{_____}, & 2 < x \leq 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

58. Grafique la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 57.
59. La función definida por partes

$$\text{int}(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

se denomina **función entero**. Grafique $\text{int}(x)$.

60. Analice cómo graficar la función $f(x) = |x| + |x - 3|$. Lleve a cabo sus ideas.

En los problemas 61 y 62, describa con palabras cómo difieren las gráficas de las funciones dadas.

61. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$,
 $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$

62. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$,
 $g(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

1.2 Combinación de funciones

■ **Introducción** Dos funciones f y g pueden combinarse en varias formas para obtener nuevas funciones. En esta sección se analizarán dos formas en que es posible combinar funciones: mediante operaciones aritméticas y a través de la operación de composición de funciones.

■ **Funciones potencia** Una función de la forma

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

se denomina **función potencia**. En esta sección consideraremos que n es un número racional. El dominio de la función potencia depende de la potencia n . Por ejemplo, para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente,

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales o $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ es el conjunto R de números reales excepto $x = 0$.

Las funciones potencia simples, o versiones modificadas de estas funciones, ocurren tan a menudo en problemas en cálculo que no es conveniente desperdiciar tiempo valioso trazando sus gráficas. Se sugiere conocer (memorizar) el breve catálogo de gráficas de funciones potencia que se proporciona en la FIGURA 1.2.1. Usted debe reconocer la gráfica en el inciso a) de la figura 1.2.1 como una **recta** y la gráfica en el inciso b) como una **parábola**.

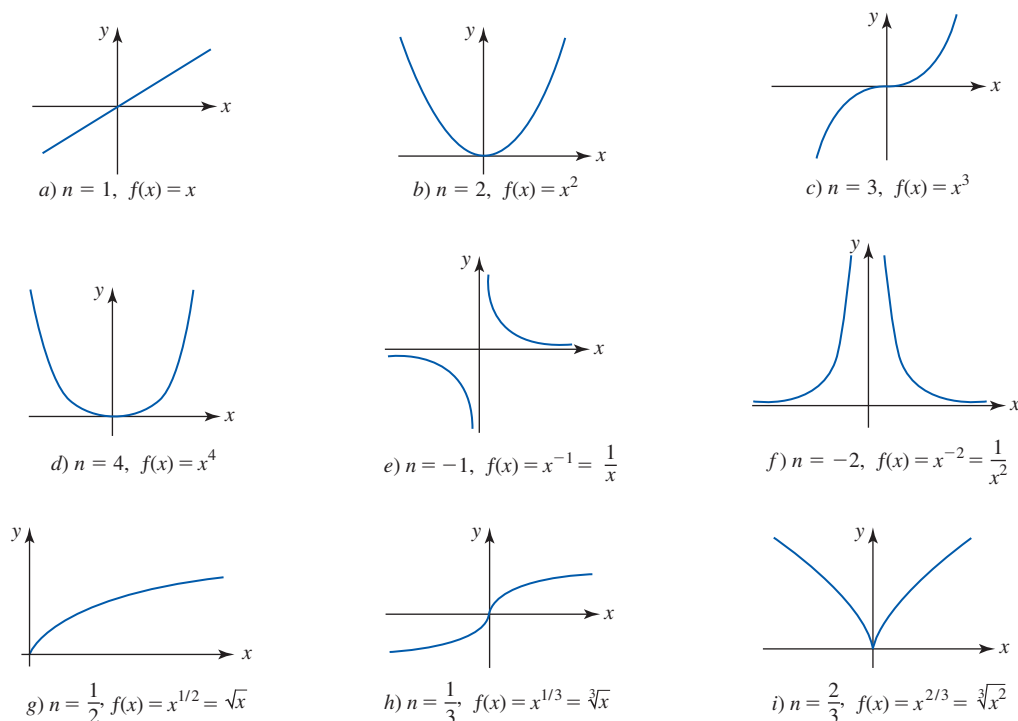


FIGURA 1.2.1 Breve catálogo de gráficas de funciones potencia

■ **Combinaciones aritméticas** Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

Definición 1.2.1 Combinaciones aritméticas

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (2)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad (3)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad (4)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ da } g(x) \neq 0. \quad (5)$$

■ **Dominio de una combinación aritmética** Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas f y g estén definidas en el mismo número x . Por tanto, el **dominio** de las funciones $f + g$, $f - g$ y fg es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g . En el caso del cociente f/g , el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también es necesario excluir cualquier valor de x para el que el denominador $g(x)$ sea cero. En otras palabras, si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2 , entonces el dominio de $f + g$, $f - g$ y fg es $X_1 \cap X_2$, y el dominio de f/g es $\{x | x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 1 Suma de dos funciones potencia

Ya se ha visto que el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales, o $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. En consecuencia, el dominio de la suma

$$f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

es la intersección de los dos dominios: $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. ■

■ **Funciones polinomiales** Muchas de las funciones con las que se trabaja en cálculo se construyen al realizar operaciones aritméticas sobre funciones potencia. De especial interés son las funciones potencia (1) donde n es un entero no negativo. Para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, la función $f(x) = x^n$ se denomina **función polinomial de un solo término**. Al usar las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación es posible construir funciones polinomiales con muchos términos. Por ejemplo, si $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x$ y $f_4(x) = 1$, entonces

$$f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

En general, una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (6)$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ son números reales. El **dominio** de cualquier función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. Las siguientes funciones *no son* polinomiales:

no es un entero no negativo

$$y = 5x^2 - 3x^{-1}$$

y

no es un entero no negativo

$$y = 2x^{1/2} - 4.$$

EJEMPLO 2 Suma, diferencias, producto y cociente

Considere las funciones polinomiales $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$.

- a) Con base en los numerales (2)-(4) de la definición 1.2.1 es posible producir tres nuevas funciones polinomiales:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x.$$

- b) Finalmente, con base en el numeral (5) de la definición 1.2.1,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$

Observe en el ejemplo 2, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, que el dominio del cociente $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$ con $x = 3$ y $x = -3$ excluidos; en otras palabras, el dominio de $(f/g)(x)$ es la unión de tres intervalos: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

■ **Funciones racionales** La función en el inciso b) del ejemplo 2 es un caso de funciones racionales. En general, una **función racional** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (7)$$

donde p y q son funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \quad y = \frac{x^3 - x + 7}{x + 3}, \quad y = \frac{1}{x},$$

polinomio
↓
polinomio

Las funciones polinomiales y racionales se analizarán con más detalle en la sección 1.3.

son funciones racionales. La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional.

Composición de funciones Otro método para combinar las funciones f y g se denomina **composición de funciones**. Para ilustrar la idea, se supondrá que para una x dada en el dominio de g el valor funcional $g(x)$ es un número en el dominio de la función f . Esto significa que es posible evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, $f(g(x))$. Por ejemplo, suponga $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces, para $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 es el dominio de f , es posible escribir $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En efecto, para estas dos funciones particulares resulta que es posible evaluar f en cualquier valor funcional $g(x)$; es decir,

$$f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

A continuación se define la función resultante, denominada **composición de f y g** .

Definición 1.2.2 Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la **composición de f y g** , denotada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \quad (8)$$

La **composición de g y f** , denotada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \quad (9)$$

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encuentre

$$a) (f \circ g)(x) \quad \text{y} \quad b) (g \circ f)(x).$$

Solución

- a) Para hacer énfasis se sustituye x por el conjunto de paréntesis $()$ y f se escribe en la forma $f(x) = ()^2 + 3()$. Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$, cada conjunto de paréntesis se llena con $g(x)$. Se encuentra

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1) \\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) \\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1 \\ &= 4x^4 + 10x^2 + 4. \end{aligned}$$

- b) En este caso, g se escribe en la forma $g(x) = 2()^2 + 1$. Así,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x) \\ &= 2(x^2 + 3x)^2 + 1 \\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1 \\ &= 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1. \end{aligned}$$

Los incisos a) y b) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Es decir, en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

EJEMPLO 4 Escritura de una función como una composición

Expresa $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones f y g .

Solución Si f y g se definen como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

Hay otras dos soluciones para el ejemplo 4. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, observe entonces que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

■ Dominio de una composición Para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f . Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. Observe que no es posible evaluar $f(g(1))$ porque $g(1) = -1$ y -1 no está en el dominio de f . Para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$, $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define al dominio de f , a saber: $g(x) \geq 0$. Esta última desigualdad es la misma que $x - 2 \geq 0$ o $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una porción del dominio original $(-\infty, \infty)$ de g . En general, el **dominio de la composición** $f \circ g$ es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f .

Para una constante $c > 0$, las funciones definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La función $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. Las funciones definidas por $y = f(x + c)$, $y = f(x - c)$ y $y = f(cx)$ son las *composiciones* de $f(x)$ con las funciones polinomiales $g(x) = x + c$, $g(x) = x - c$ y $g(x) = cx$, respectivamente. Como veremos dentro de poco, la gráfica de cada una de éstas no es una **transformación rígida** ni una **transformación no rígida** de la gráfica de $y = f(x)$.

■ Transformaciones rígidas Una **transformación rígida** de una gráfica es una transformación que cambia sólo la *posición* de la gráfica en el plano xy , pero no su forma. Para la gráfica de una función $y = f(x)$ se analizan cuatro tipos de desplazamientos o traslaciones.

Traslaciones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia arriba** c unidades,
- $y = f(x) - c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia abajo** c unidades,
- $y = f(x + c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la izquierda** c unidades,
- $y = f(x - c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la derecha** c unidades.

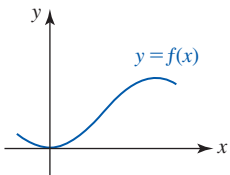
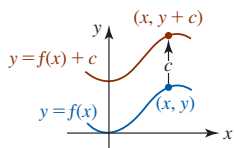
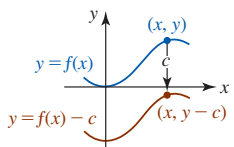


FIGURA 1.2.2 Gráfica de $y = f(x)$

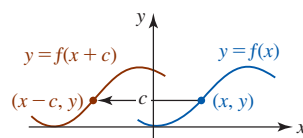


a) Desplazamiento vertical hacia arriba

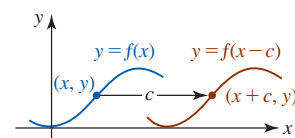


b) Desplazamiento vertical hacia abajo

FIGURA 1.2.3 Desplazamientos vertical y horizontal de $y = f(x)$ por una cantidad $c > 0$



c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda



d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ en la FIGURA 1.2.4a) al desplazar esta gráfica, a la vez, 1 unidad hacia arriba (figura 1.2.4b)), 1 unidad hacia abajo (figura 1.2.4c)), 1 unidad hacia la izquierda (figura 1.2.4d)) y 1 unidad hacia la derecha (figura 1.2.4e)).

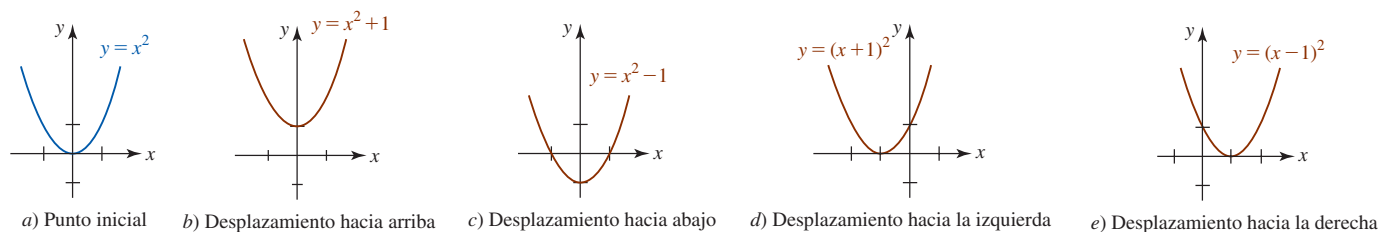


FIGURA 1.2.4 Gráficas desplazadas en el ejemplo 5

Combinación de desplazamientos

En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2, \quad (10)$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (a la izquierda o a la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda seguida por un desplazamiento vertical 1 unidad hacia abajo. La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.2.5.

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es por medio de una **reflexión** en un eje de coordenadas.

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante.

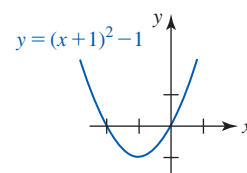


FIGURA 1.2.5 Gráfica obtenida por desplazamientos horizontal y vertical

Reflexiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función. Entonces la gráfica de

- $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el eje x ,
- $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el eje y .

En la FIGURA 1.2.6a) se ha reproducido la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la figura 1.2.2. Las reflexiones de esta gráfica en los ejes x y y se ilustran en las figuras 1.2.6b) y 1.2.6c). Cada una de estas reflexiones es una **imagen especular** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



Reflexión o imagen especular

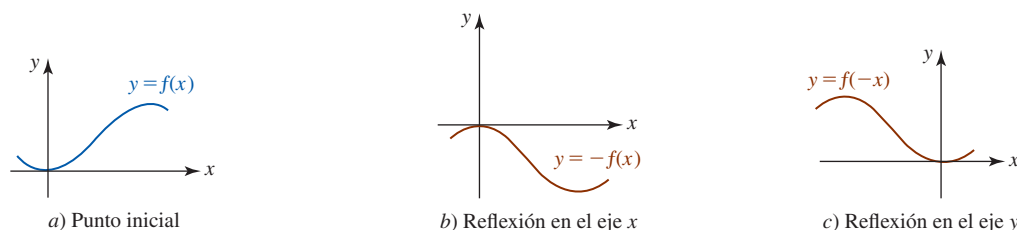


FIGURA 1.2.6 Reflexiones con respecto a los ejes coordenados

EJEMPLO 6 Reflexiones

Grafique

a) $y = -\sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{-x}$.

Solución El punto inicial es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ dada en la FIGURA 1.2.7a).

- a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x . Observe en la figura 1.2.7b) que como $(1, 1)$ está en la gráfica de f , el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.
- b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y . Observe en la figura 1.2.7c) que como $(1, 1)$ está en la gráfica de f , el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ parece algo extraña, pero no olvide que su dominio está determinado por el requerimiento de que $-x \geq 0$, o, de manera equivalente, $x \leq 0$, y así la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

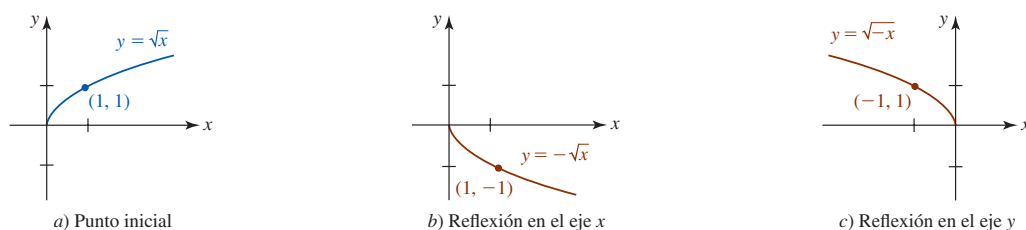


FIGURA 1.2.7 Gráficas en el ejemplo 6

Transformaciones no rígidas Si una función f se multiplica por una constante $c > 0$, la forma de la gráfica cambia pero retiene, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ distorsionada verticalmente; la gráfica de f se estira (o elonga) verticalmente o se comprime (o aplana) verticalmente, dependiendo del valor de c . En otros términos, un estiramiento vertical es un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje x , mientras que una compresión vertical es una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje x . La gráfica de la función $y = f(cx)$ está distorsionada horizontalmente, ya sea por un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje y o por una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje y . El estiramiento o la compresión de una gráfica constituyen ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

Estiramientos y compresiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y que c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **estirada verticalmente** por un factor de c si $c > 1$,
- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **comprimida verticalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **estirada horizontalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **comprimida horizontalmente** por un factor de c si $c > 1$.

EJEMPLO 7 Dos compresiones

Dada $f(x) = x^2 - x$, compare las gráficas de

a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ y b) $y = f(2x)$.

Solución La gráfica de la función polinomial dada f se muestra en la FIGURA 1.2.8.

- a) Con la identificación $c = \frac{1}{2}$, la gráfica de $y = \frac{1}{2}f(x)$ es la gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8a), observe en la figura 1.2.8b) que las coordenadas y de los tres puntos correspondientes miden la mitad. La gráfica original está girada hacia el eje x .
- b) Con la identificación $c = 2$, la gráfica de $y = f(2x)$ es la gráfica de f comprimida horizontalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8a), en la figura 1.2.8c) las coordenadas x de los tres puntos correspondientes están divididos entre 2. La gráfica original está girada hacia el eje y .

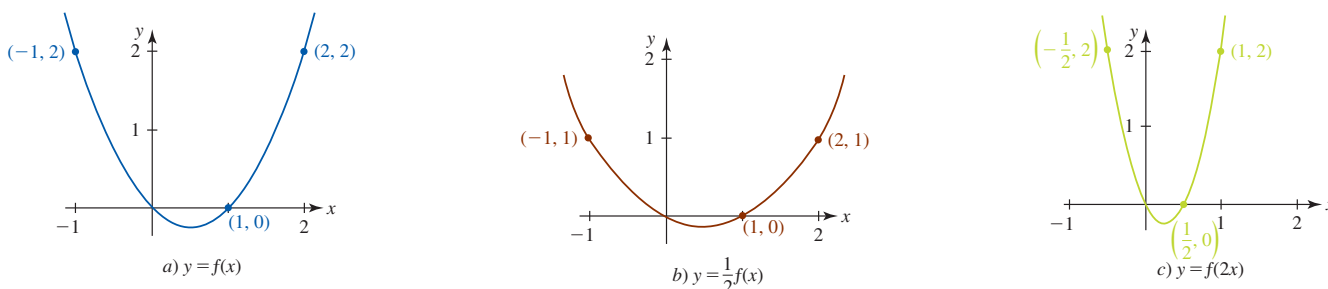


FIGURA 1.2.8 Gráficas de las funciones en el ejemplo 7

b) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, ya que por (11) y las leyes de los exponentes,

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3} x^{2/3} = (\sqrt[3]{-1})^2 x^{2/3} = (-1)^2 x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

la raíz cúbica de -1 es -1

En la figura 1.2.1i) observamos que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y . Por ejemplo, $(8, 4)$ y $(-8, 4)$ son puntos sobre la gráfica de $y = x^{2/3}$.

c) $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. Con base en

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se observa que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. ■

Las gráficas en la figura 1.2.1, con el inciso g) como única excepción, presenta simetría con respecto al eje y o al origen. Las funciones en las figuras 1.2.1b), d), f) e i) son pares, mientras que las funciones en las figuras 1.2.1a), c), e) y h) son impares.

Ejercicios 1.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g .

1. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -4x + 8$

2. $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 7x - 9$

3. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, $g(x) = \frac{x-3}{4x+2}$

5. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

En los problemas 7-10, sean $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

7. $f + g$ 8. fg 9. f/g 10. g/f

En los problemas 11-16, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.

11. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x + 6$

12. $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$

13. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + x^2$

14. $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \frac{1}{2x+4}$

15. $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x+1}$

16. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

En los problemas 17 y 18, sean $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$. Encuentre el dominio de la función dada.

17. $f \circ g$ 18. $g \circ f$

En los problemas 19 y 20, sean $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 2 - \sqrt{x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

19. $g \circ f$ 20. $f \circ g$

En los problemas 21 y 22, encuentre $f \circ (2f)$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x^3$ 22. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

La composición de tres funciones f , g y h es la función

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

En los problemas 23 y 24, encuentre $f \circ g \circ h$.

23. $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$

24. $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = \sqrt{2x+1}$

En los problemas 25 y 26, encuentre una función de g .

25. $f(x) = 2x - 5$, $(f \circ g)(x) = -4x + 13$

26. $f(x) = \sqrt{2x+6}$, $(f \circ g)(x) = 4x^2$

En los problemas 27 y 28, exprese la función F como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g .

27. $F(x) = 2x^4 - x^2$ 28. $F(x) = \frac{1}{x^2+9}$

En los problemas 29-36, los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -4)$ están sobre la gráfica de la función $y = f(x)$. Encuentre los puntos correspondientes sobre la gráfica, obtenidos por las transformaciones dadas.

29. La gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.

30. La gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.

31. La gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

32. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.

33. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

34. La gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

35. La gráfica de f reflejada en el eje y .

36. La gráfica de f reflejada en el eje x .

En los problemas 37-40, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 2$

b) $y = f(x) - 2$

c) $y = f(x + 2)$

d) $y = f(x - 5)$

e) $y = -f(x)$

f) $y = f(-x)$

37.

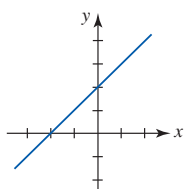


FIGURA 1.2.12 Gráfica para el problema 37

38.

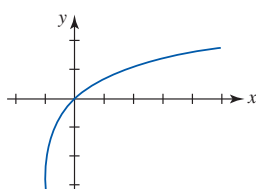


FIGURA 1.2.13 Gráfica para el problema 38

39.

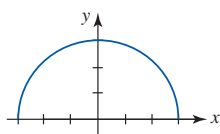


FIGURA 1.2.14 Gráfica para el problema 39

40.

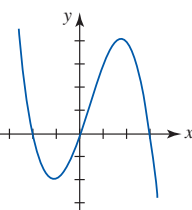


FIGURA 1.2.15 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 1$

b) $y = f(x) - 1$

c) $y = f(x + \pi)$

d) $y = f(x - \pi/2)$

e) $y = -f(x)$

f) $y = f(-x)$

g) $y = 3f(x)$

h) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

41.

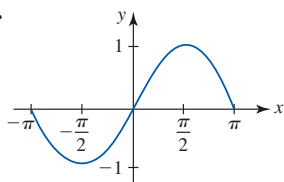


FIGURA 1.2.16 Gráfica para el problema 41

42.

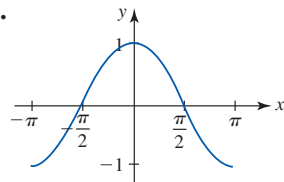


FIGURA 1.2.17 Gráfica para el problema 42

En los problemas 43-46, encuentre la ecuación de la gráfica final después que las transformaciones dadas se aplican a la gráfica de $y = f(x)$.

43. La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

44. La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ estirada verticalmente por un factor de 3 unidades y luego desplazada 2 unidades a la derecha.

45. La gráfica de $f(x) = x^4$ reflejada en el eje x y luego desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

46. La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ reflejada en el eje y , luego desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

En los problemas 47 y 48, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si

a) f es una función par y b) f es una función impar.

47.

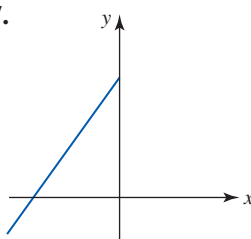


FIGURA 1.2.18 Gráfica para el problema 47

48.

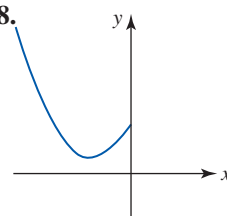


FIGURA 1.2.19 Gráfica para el problema 48

49. Complete la tabla, donde f es una función par.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	-3	0	1	-4
$(f \circ g)(x)$					

50. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

Un clásico matemático En el análisis matemático de circuitos o señales, resulta conveniente definir una función especial que es 0 (apagado) hasta cierto número y luego es 1 (encendido) después de lo anterior. La **función de Heaviside**

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

recibe su nombre en honor al brillante y controvertido ingeniero eléctrico y matemático inglés **Oliver Heaviside** (1850-1925). La función U también se denomina **función escalón unitario**.

En los problemas 51 y 52, trace la función dada. La función en el problema 52 algunas veces se denomina **función vagón o ventana**.

51. $y = 2U(x - 1) + U(x - 2)$

52. $y = U(x + \frac{1}{2}) - U(x - \frac{1}{2})$

53. Encuentre la ecuación para la función f ilustrada en la FIGURA 1.2.20 en términos de $U(x - a)$.

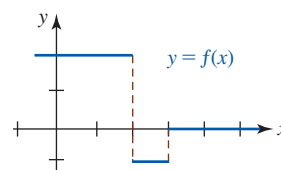


FIGURA 1.2.20 Gráfica para el problema 53

54. La función de Heaviside $U(x - a)$ suele combinarse con otras funciones por adición y multiplicación. Dado que $f(x) = x^2$, compare las gráficas de $y = f(x - 3)$ y $y = f(x - 3)U(x - 3)$.

En los problemas 55 y 56, trace la función dada.

55. $y = (2x - 5)U(x - 1)$ 56. $y = x - xU(x - 3)$

≡ Piense en ello

57. Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es falsa o verdadera.
58. Suponga que $[-1, 1]$ es el dominio de $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el dominio de $y = f(x - 2)$?
59. Explique por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje x .
60. ¿Cuáles puntos, en caso de haber, sobre la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos; es decir, los mismos sobre la gráfica resultante después de un estiramiento o compresión vertical? ¿Después de una reflexión en el eje x ? ¿Después de una reflexión en el eje y ?
61. Suponga que el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. ¿Cuál es la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?
62. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ en la figura 1.2.1. Luego analice cómo obtener la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ para la función f cuya gráfica se proporciona en la figura 1.2.15.
63. Suponga que $f(x) = x$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior. La diferencia de f y g es la función $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ denominada **parte fraccionaria de x** . Explique el nombre y luego grafique $\text{frac}(x)$.
64. Use la notación de la reflexión de una gráfica en un eje para expresar la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ en términos de la función redondeo hacia el entero inferior anterior $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (consulte las páginas 7 y 15).

1.3 Funciones polinomiales y racionales

■ **Introducción** En esta sección continúa el repaso de las funciones polinomiales y de las funciones racionales. Funciones como $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$, donde la variable x se eleva a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de funciones polinomiales. En la sección precedente se vio que una **función polinomial** general $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

donde n es un entero no negativo. Una **función racional** es el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (2)$$

donde p y q son funciones polinomiales.

■ **Funciones polinomiales** Las constantes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ en (1) se denominan **coeficientes**; el número a_n se llama **coeficiente principal** y a_0 se denomina **término constante** del polinomio. Se dice que la mayor potencia de x en un polinomio es el **grado** de éste. De modo que si $a_n \neq 0$, entonces se dice que $f(x)$ en (1) es de **grado n** . Por ejemplo,

$$f(x) = \overset{\text{grado } 5 \downarrow}{3x^5} - 4x^3 - 3x + \overset{\text{término constante} \uparrow}{8}$$

coeficiente principal término constante

es una función polinomial de grado 5.

Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$f(x) = a,$	función constante,
$f(x) = ax + b,$	función lineal,
$f(x) = ax^2 + bx + c,$	función cuadrática,
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$	función cúbica.

La función constante $f(x) = 0$ se denomina **polinomio cero**.

■ **Rectas** Sin duda, usted está familiarizado con el hecho de que las gráficas de una función constante y una función lineal son **rectas**. Puesto que el concepto de recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial, resulta conveniente revisar las ecuaciones de las rectas. En el plano xy hay tres tipos de rectas; rectas horizontales, rectas verticales y rectas inclinadas u oblicuas.

■ **Pendiente** Se empezará con la recolección de geometría plana de que por dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano pasa una sola recta L . Si $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Suele acostumbrarse denotar el **cambio en y** o **ascenso vertical** de la recta por $\Delta y = y_2 - y_1$ y el **cambio en x** o **recorrido horizontal** de la recta por $\Delta x = x_2 - x_1$, de modo que (3) se escribe $m = \Delta y / \Delta x$. Vea la FIGURA 1.3.1. Como se indica en la FIGURA 1.3.2, cualquier par de puntos distintos sobre una recta con pendiente, por ejemplo, por (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , determina la misma pendiente. En otras palabras, la pendiente de una recta es independiente de la elección de los puntos sobre la recta.

En la FIGURA 1.3.3 se comparan las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 1.3.3a) vemos, al leer la gráfica de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) asciende cuando x crece. La figura 1.3.3b) muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) cae cuando x crece. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y así su ascenso vertical es $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$. Por tanto, con base en (3) la pendiente es cero ($m = 0$). Vea la figura 1.3.3c). Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y así su recorrido horizontal es $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$. En este caso se dice que la pendiente de la recta está **indefinida** o que la recta no tiene pendiente. Vea la figura 1.3.3d). Sólo rectas con pendiente son gráficas de funciones.

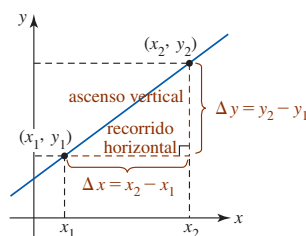


FIGURA 1.3.1 Pendiente de una recta

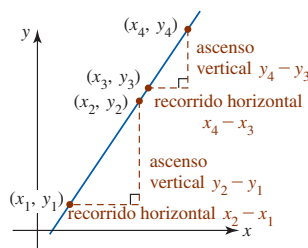


FIGURA 1.3.2 Triángulos semejantes

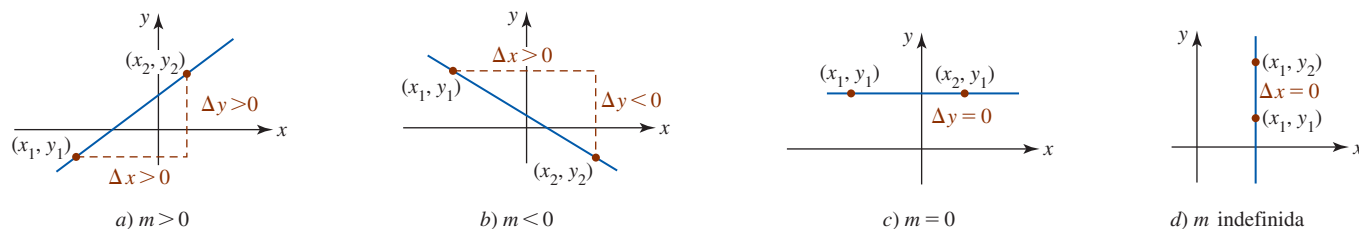


FIGURA 1.3.3 Rectas con pendiente a)-c); recta sin pendiente d)

■ **Ecuaciones de rectas** Para encontrar la ecuación de una recta L con pendiente m , se supone que (x_1, y_1) está sobre la recta. Si (x, y) representa cualquier otro punto sobre L , entonces (3) proporciona

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Al multiplicar ambos miembros de la última igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante. La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (4)$$

Cualquier recta que no sea vertical debe cruzar el eje y . Si la intersección y es $(0, b)$, entonces con $x_1 = 0, y_1 = b$, (4) proporciona $y - b = m(x - 0)$. La última ecuación se reduce a la **ecuación pendiente-intercepto** de la recta

$$y = mx + b. \quad (5)$$

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, 3)$ y $(-2, 5)$.

Solución Primero se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Con base en (3),

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Luego, la ecuación (4) de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen proporciona $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ o $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ■

Una ecuación de *cualquier* recta en el plano es un caso especial de la **ecuación lineal** general

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

donde A , B y C son constantes reales. La característica que proporciona a (6) su nombre *lineal* es que las variables x y y sólo aparecen a la primera potencia. Los casos de interés especial son

$$A = 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{C}{B}, \quad (7)$$

$$A \neq 0, B = 0, \text{ da } x = -\frac{C}{A}, \quad (8)$$

$$A \neq 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (9)$$

De estas ecuaciones, la primera y la tercera definen funciones. Al volver a identificar a $-C/B$ en (7) como a se obtiene una función constante $y = a$. Al reidentificar a $-A/B$ y $-C/B$ en (9) como a y b , respectivamente, se obtiene la forma de una función lineal $f(x) = ax + b$ que, excepto por algunos símbolos, es la misma que (5). Al volver a identificar $-C/A$ en (8) como a se obtiene la ecuación de una recta vertical $x = a$, que no es una función.

■ **Funciones crecientes-decrecientes** Recién acabamos de ver en las figuras 1.3.3a) y 1.3.3b) que si $a > 0$ (lo cual, desempeña la parte de m), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando x crece, mientras que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando x crece. Los conceptos creciente y decreciente pueden extenderse a *cualquier* función. Se dice que una función f es

- **creciente** sobre un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (10)

- **decreciente** sobre un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (11)

En la FIGURA 1.3.4a) la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, mientras f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ en la figura 1.3.4b). Una función lineal $f(x) = ax + b$ crece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 0$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a < 0$.

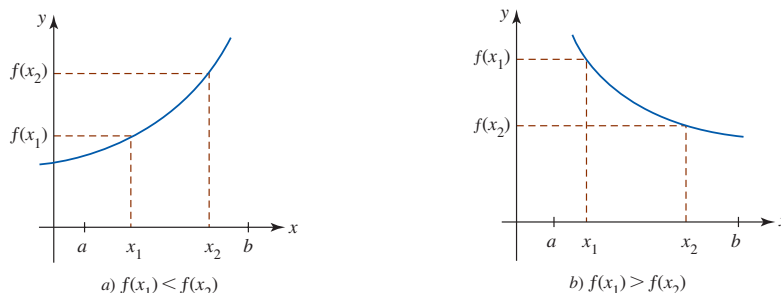


FIGURA 1.3.4 Función creciente en a); función decreciente en b)

Esta suposición significa que L_1 y L_2 son rectas no verticales.

■ **Rectas paralelas y perpendiculares** Si L_1 y L_2 son dos rectas distintas *con pendiente*, entonces necesariamente L_1 y L_2 son paralelas o se cortan. Si las rectas se cortan formando un ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Es posible determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares al examinar sus pendientes.

Rectas paralelas y perpendiculares

Suponga que L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2 , respectivamente. Entonces

- L_1 es **paralela** a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$, y
- L_1 es **perpendicular** a L_2 si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

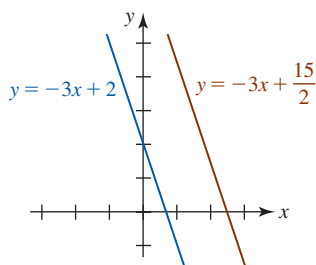


FIGURA 1.3.5 Rectas paralelas en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden volver a escribirse en las formas de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = -3x + 2$ y $y = -3x + \frac{15}{2}$, respectivamente. Como se anotó en azul y rojo, la pendiente de cada recta es -3 . En consecuencia, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se muestran en la FIGURA 1.3.5.

EJEMPLO 3 Rectas perpendiculares

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Al despejar y , la ecuación lineal dada produce la forma de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica se proporciona en azul en la FIGURA 1.3.6, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, a saber: $-\frac{3}{4}$. Puesto que $(0, -3)$ es la intersección y de la recta requerida, por (5) se concluye que su ecuación es $y = -\frac{3}{4}x - 3$. La gráfica de la última ecuación es la recta roja en la figura 1.3.6.

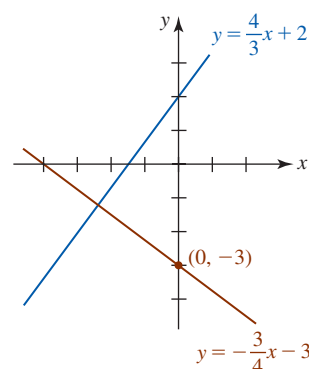


FIGURA 1.3.6 Rectas perpendiculares en el ejemplo 3

Funciones cuadráticas La función elevar al cuadrado $y = x^2$ que se abordó en las secciones 1.1 y 1.2 es un elemento de una familia de funciones denominadas **funciones cuadráticas**; es decir, funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, b y c son constantes. Las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**, simplemente son transformaciones rígidas y no rígidas de la gráfica de $y = x^2$ mostrada en la FIGURA 1.3.7.

Vértice y eje Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba $a > 0$ (o hacia abajo $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) sobre la parábola se denomina **vértice**. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k) . La recta $x = h$ se denomina **eje** de la parábola. Vea la FIGURA 1.3.8.

Forma normal El vértice (h, k) de una parábola puede determinarse al volver a plantear la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \quad (12)$$

La forma (12) se obtiene a partir de $f(x) = ax^2 + bx + c$ al completar el cuadrado en x . Con la ayuda del cálculo diferencial es posible encontrar el vértice de la parábola sin completar el cuadrado.

Como se muestra con el siguiente ejemplo, al trazar las intersecciones y el vértice puede obtenerse un bosquejo razonable de la parábola. La forma en (12) indica que su gráfica es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada horizontalmente $|h|$ unidades y desplazada verticalmente $|k|$ unidades.

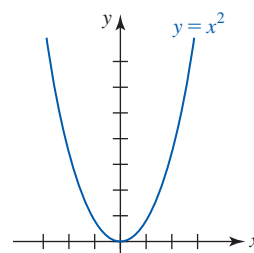


FIGURA 1.3.7 Gráfica de la parábola más simple

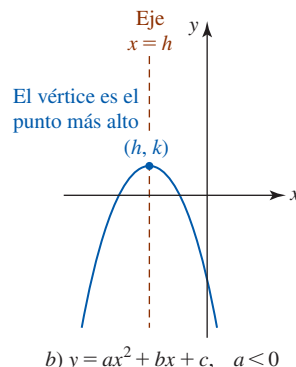
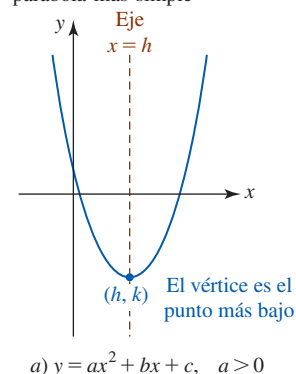


FIGURA 1.3.8 Vértice y eje de una parábola

EJEMPLO 4 Gráfica usando las intersecciones y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Puesto que $a = 1 > 0$, se sabe que la parábola se abre hacia arriba. A partir de $f(0) = -3$ obtenemos la intersección $(0, -3)$. Para averiguar si hay alguna intersección x , resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ por factorización o aplicando la fórmula cuadrática. Con base en $(x + 1)(x - 3) = 0$ encontramos las soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones x son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. Para localizar el vértice, se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

Así, la forma estándar es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Al comparar la última ecuación con (12) se identifica $h = 1$ y $k = -4$. Podemos concluir que el vértice se encuentra en el punto $(1, -4)$. Al usar esta información se traza una parábola que pasa por estos cuatro puntos como se muestra en la FIGURA 1.3.9.

Al encontrar el vértice de una parábola, de manera automática se determina el rango de la función cuadrática. Como se muestra claramente en la figura 1.3.9, el rango de f es el intervalo $[-4, \infty)$ sobre el eje y . En la figura 1.3.9 también se muestra que f es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 1]$, pero creciente sobre $[1, \infty)$.

Funciones polinomiales de orden superior La gráfica de toda función lineal $f(x) = ax + b$ es una recta y la gráfica de toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Estas declaraciones descriptivas definitivas no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de orden superior. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas posibles. En general, graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ demanda el uso

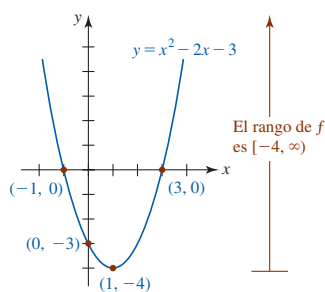


FIGURA 1.3.9 Parábola en el ejemplo 4

de un instrumento de cálculo o graficador. No obstante, al tener en cuenta el desplazamiento, el comportamiento extremo, las intersecciones y la simetría, es posible en muchos casos trazar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de orden superior a la vez que el trazado de puntos se mantiene en un mínimo.

■ **Comportamiento final** En términos aproximados, el **comportamiento final** de cualquier función f es simplemente la forma en que f se comporta para valores muy grandes de $|x|$. En el caso de una función polinomial f de grado n , su gráfica semeja la gráfica de $y = a_n x^n$ para valores grandes de $|x|$. Para ver por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica de la función polinomial con un solo término $y = -2x^3$ cuando $|x|$ es grande, se factorizará la potencia más alta de x ; es decir, x^3 :

$$f(x) = x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right). \quad (13)$$

estos dos términos se vuelven
despreciables cuando $|x|$ es grande

Al dejar que $|x|$ crezca sin límite, tanto $4/x$ como $5/x^3$ pueden aproximarse a cero tanto como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (13) son muy bien aproximados por los valores de $y = -2x^3$. En general, sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento extremo para funciones polinomiales. Para interpretar las flechas en la FIGURA 1.3.10 se analizarán las flechas en, por ejemplo, la figura 1.3.10c), donde se supone que n es impar y que $a_n > 0$. La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección negativa, los valores de $f(x)$ son decrecientes. Planteado en otros términos, la gráfica está apuntando hacia abajo. En forma semejante, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección positiva, los valores de $f(x)$ son crecientes (la gráfica apunta hacia arriba). El comportamiento extremo ilustrado en las figuras 1.3.10a) y 1.3.10c) puede verse en las gráficas que se muestran en la FIGURA 1.3.11 y FIGURA 1.3.12, respectivamente. Las gráficas de las funciones $y = -x$, $y = -x^2$, $y = -x^3$, $\dots$, $y = -x^8$ son las gráficas en las figuras 1.3.11 y 1.3.12 reflejadas en el eje x , de modo que su comportamiento extremo es como se muestra en las figuras 1.3.10b) y 1.3.10d).

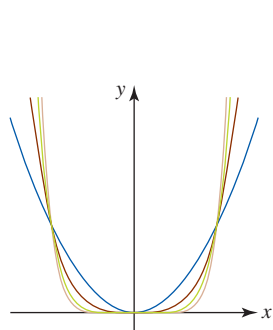


FIGURA 1.3.11 Gráficas de $y = x^2$ (azul), $y = x^4$ (rojo) y $y = x^6$ (verde), $y = x^8$ (dorado)

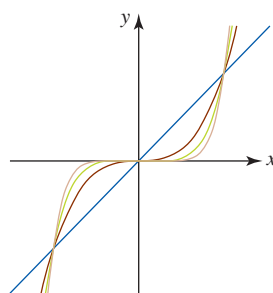


FIGURA 1.3.12 Gráficas de $y = x^3$ (azul), $y = x^5$ (rojo) y $y = x^7$ (verde), $y = x^9$ (dorado)

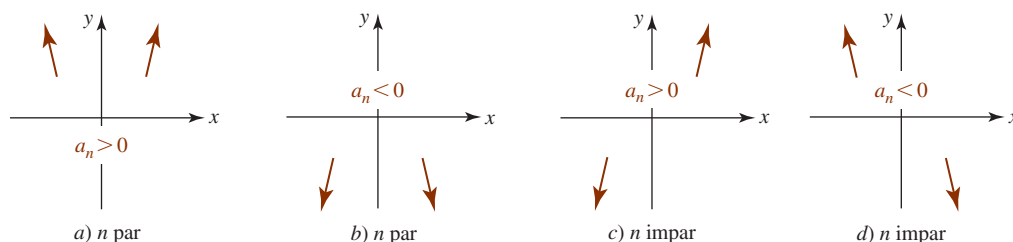


FIGURA 1.3.10 El comportamiento extremo de una función polinomial f depende de su grado n y el signo de su coeficiente principal

■ **Simetría de las funciones polinomiales** Resulta fácil identificar por inspección las funciones polinomiales cuyas gráficas poseen **simetría** con respecto al eje y o al origen. Las palabras *par* e *impar* tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$ se cumplen para funciones polinomiales donde todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lll} \text{potencias pares} & \text{potencias impares} & \text{potencias mixtas} \\ f(x) = 5x^4 - 7x^2 & f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x & f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2 \\ \text{función par} & \text{función impar} & \text{ni par ni impar} \end{array}$$

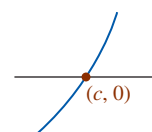
Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es una función par porque todas las potencias son enteros pares; el término constante 6 es en realidad $6x^0$, y 0 es un entero no negativo par.

■ **Intersecciones de las funciones polinomiales** La gráfica de toda función polinomial f pasa por el eje y y puesto que $x = 0$ está en el dominio de la función. La intersección y es el punto

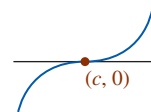
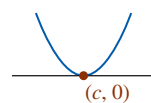
$(0, f(0))$). Los **ceros** reales de una función polinomial son las coordenadas x de las **intersecciones x** de su gráfica. Un número c es un cero de una función polinomial f de grado n si y sólo si $x - c$ es un factor de f ; es decir, $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $(x - c)^m$ es un factor de f , donde $m > 1$ es un entero positivo, y $(x - c)^{m+1}$ no es un factor de f , entonces se dice que c es un **cero repetido** o **cero de multiplicidad m** . Cuando $m = 1$, c se denomina **cero simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son ceros simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$ puesto que f puede escribirse como $f(x) = 6(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$, mientras que 5 es un cero repetido o un cero de multiplicidad 2 para $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. El comportamiento de la gráfica de f en una intersección $x(c, 0)$ depende de si c es un cero simple o un cero de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero impar o par. Vea la FIGURA 1.3.13.

Intersecciones x de polinomios

- Si c es un cero simple, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13a).
- Si c es un cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \dots$, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x pero se achata en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13b).
- Si c es un cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \dots$, entonces la gráfica de f no pasa por el eje x , sino que es tangente a éste, o lo toca, el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13c).



a) Cero simple

b) Cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \dots$ c) Cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \dots$ FIGURA 1.3.13 Intersecciones x de una función polinomial f

En el caso en que c es un cero simple o un cero de multiplicidad impar, $f(x)$ cambia de signo en $(c, 0)$, mientras que si c es un cero de multiplicidad par, $f(x)$ no cambia de signo en $(c, 0)$. Observamos que dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio, las gráficas en la figura 1.3.13 pueden estar reflejadas en el eje x .

EJEMPLO 5 Gráficas de funciones polinomiales

Gráfique

$$a) f(x) = x^3 - 9x \quad b) g(x) = (1 - x)(x + 1)^2 \quad c) h(x) = -(x + 4)(x - 2)^3.$$

Solución

- a) Al ignorar todos los términos menos el primero observamos que la gráfica de f semeja la gráfica de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de f se muestra en la figura 1.3.10c). Puesto que todas las potencias son enteros impares, f es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. Al hacer $f(x) = 0$, a partir de

$$x(x^2 - 9) = 0 \quad \text{o bien} \quad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

↓
diferencia de dos cuadrados

notamos que los ceros de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Puesto que estos números son ceros simples, la gráfica pasa directamente por las intersecciones x en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ como se muestra en la FIGURA 1.3.14.

- b) Al distribuir la multiplicación de los factores, g es la misma que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ de modo que se observa que la gráfica de g semeja la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo opuesto del comportamiento final de la función en el inciso a). Debido a que hay potencias pares e impares de x , g no es par ni impar; su gráfica no posee simetría con respecto al eje y o al origen. En virtud de que -1 es un cero de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Puesto que 1 es un cero simple, la gráfica pasa directamente por el eje x en $(1, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.15.

- c) Al inspeccionar h se observa que su gráfica semeja la gráfica de $y = -x^4$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de h se muestra en la figura 1.3.10b). La función h no es par ni impar. A partir de la forma factorizada de $h(x)$, se ve que -4 es un cero simple y así la gráfica de h pasa directamente por el eje x en $(-4, 0)$. Puesto que 2 es un cero de multiplicidad 3, su gráfica se achata cuando pasa por la intersección $x(2, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.16.

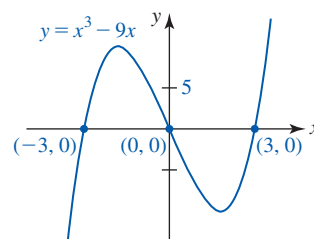


FIGURA 1.3.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5a)

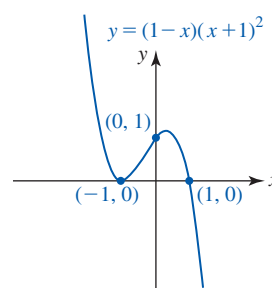


FIGURA 1.3.15 Gráfica de la función en el ejemplo 5b)

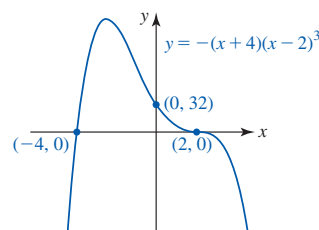


FIGURA 1.3.16 Gráfica de la función en el ejemplo 5c)

■ **Funciones racionales** Graficar una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es un poco más complicado que graficar una función polinomial porque además de estar atento a las intersecciones, simetría y desplazamiento/reflexión/estiramiento de gráficas conocidas, también es necesario prestar atención al dominio de f y los grados de $p(x)$ y $q(x)$. Estas dos últimas cuestiones son importantes para determinar si la gráfica de una función racional posee *asíntotas*.

■ **Intersecciones de funciones racionales** La **intersección y** de la gráfica de $f(x) = p(x)/q(x)$ es el punto $(0, f(0))$ en el supuesto de que 0 está en el dominio de f . Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y puesto que $f(0)$ no está definido. Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las **intersecciones x** de la gráfica de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ son los puntos cuyas coordenadas x son los ceros reales del numerador $p(x)$. En otras palabras, la única forma en que es posible que $f(x) = p(x)/q(x) = 0$ es cuando $p(x) = 0$. Así, para $f(x) = (1 - x)/x$, $1 - x = 0$ se obtiene $x = 1$ y entonces $(1, 0)$ es una intersección x de la gráfica de f .

■ **Asíntotas** La gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener asíntotas. Para los objetivos de este libro, las asíntotas pueden ser una recta horizontal, una recta vertical o una recta inclinada. En un nivel práctico, las asíntotas vertical y horizontal de la gráfica de una función racional f pueden determinarse por inspección. Así, por el bien del análisis se supondrá que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0, \quad (14)$$

representa una función racional general. El grado de $p(x)$ es n y el grado de $q(x)$ es m .

Asíntotas de gráficas de funciones racionales

Suponga que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) *no tienen factores comunes*.

- Si a es un cero real de $q(x)$, entonces $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de f .
- Si $n = m$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los coeficientes principales) es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f .
- Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f .
- Si $n > m$, entonces la gráfica de f *no* tiene **asíntota horizontal**.
- Si $n = m + 1$, entonces el cociente $y = mx + b$ de $p(x)$ y $q(x)$ es una **asíntota inclinada** para la gráfica de f .

Con base en la lista anterior observamos que las asíntotas horizontal e inclinada son mutuamente excluyentes. En otras palabras, la gráfica de una función racional f no puede tener una asíntota inclinada y una asíntota horizontal.

EJEMPLO 6 Gráficas de funciones racionales

Grafique

$$a) \quad f(x) = \frac{x}{1 - x^2} \qquad b) \quad g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 5}.$$

Solución

- a) Se empieza con la observación de que el numerador $p(x) = x$ y el denominador $q(x) = 1 - x^2$ no tienen factores comunes. También, puesto que $f(-x) = -f(x)$, la función f es impar. En consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Debido a que $f(0) = 0$, la intersección y es $(0, 0)$. Además, $p(x) = x = 0$ implica $x = 0$, de modo que la única intersección es $(0, 0)$. Los ceros del denominador $q(x) = 1 - x^2$ son ± 1 . Así, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Puesto que el grado del numerador x es 1 y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), se concluye que $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f . La gráfica consta de tres ramas distintas: una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y una a la derecha de la recta $x = 1$. Vea la FIGURA 1.3.17.

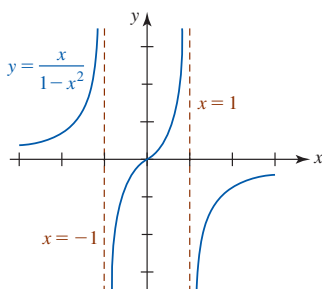


FIGURA 1.3.17 Gráfica de la función en el ejemplo 6a)

- b) De nuevo, observe que el numerador $p(x) = x^2 - x - 6$ y el denominador $q(x) = x - 5$ de g no tienen factores comunes. Asimismo, f no es impar ni par. A partir de $f(0) = \frac{6}{5}$ se obtiene la intersección y $(0, \frac{6}{5})$. Con base en $p(x) = x^2 - x - 6 = 0$ o $(x + 2)(x - 3) = 0$ observamos que -2 y 3 son ceros de $p(x)$. Las intersecciones x son $(-2, 0)$ y $(3, 0)$. Resulta evidente que el cero de $q(x) = x - 5$ es 5 , de modo que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical. Por último, a partir del hecho de que el grado de $p(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) es exactamente mayor por uno que el grado de $q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota inclinada. Para encontrarla, $p(x)$ se divide entre $q(x)$. Ya sea por división larga o división sintética, el resultado

$$\begin{array}{l} y = x + 4 \text{ es la asíntota inclinada} \\ \downarrow \\ \frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = x + 4 + \frac{14}{x - 5} \end{array}$$

muestra que la asíntota inclinada es $y = x + 4$. La gráfica consta de dos ramas: una a la izquierda de la recta $x = 5$ y otra a la derecha de la recta $x = 5$. Vea la FIGURA 1.3.18.

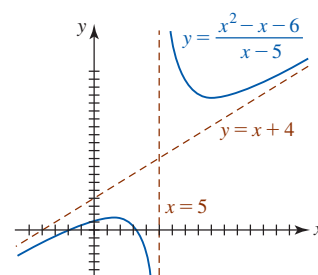


FIGURA 1.3.18 Gráfica de la función en el ejemplo 6b)

■ **Posdata: Gráfica con un hueco** En todo el análisis de las asíntotas se supuso que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) no tenían factores comunes. Se sabe que si $q(a) = 0$ y $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ necesariamente es una asíntota vertical para la gráfica de f . Sin embargo, cuando $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces $x = a$ puede no ser una asíntota; en la gráfica puede haber simplemente un **hueco**.

► Si $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces por el teorema de factorización del álgebra, $x - a$ es un factor tanto de p como de q .

EJEMPLO 7 Gráfica con un hueco

Grafique la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque los ceros de $x^2 - 1 = 0$ son ± 1 , sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Observe que el numerador $p(x)$ y el denominador $q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que puede cancelarse en el supuesto de que $x \neq -1$:

$$\begin{array}{l} \text{la igualdad se cumple para } x \neq -1 \\ \downarrow \\ f(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x - 3}{x - 1} \end{array} \quad (15)$$

Graficamos $y = \frac{x - 3}{x - 1}$, $x \neq -1$, al observar que la intersección y es $(0, 3)$, una intersección x es $(3, 0)$, una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. Aunque $x = -1$ no es una asíntota vertical, el hecho de que f no está definida en ese número se representa al dibujar un círculo o hueco abierto en la gráfica en el punto correspondiente a $(-1, 2)$. Vea la FIGURA 1.3.19.

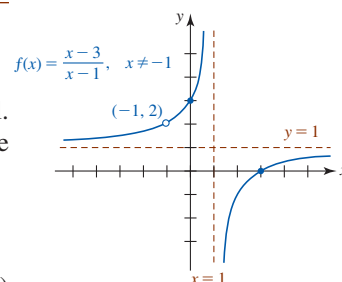


FIGURA 1.3.19 Gráfica de la función en el ejemplo 7

► La coordenada y del hueco es el valor de la fracción reducida (15) en $x = -1$.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

En las dos últimas secciones hemos trabajado principalmente con funciones polinomiales. Las funciones polinomiales constituyen los objetos fundamentales de una clase conocida como **funciones algebraicas**. En esta sección vimos que una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. En general, una función algebraica implica un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas de funciones polinomiales. Así,

$$y = 2x^2 - 5x, \quad y = \sqrt[3]{x^2}, \quad y = x^4 + \sqrt{x^2 + 5} \quad y \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x^2 + 7}$$

son funciones algebraicas. Empezando con la siguiente sección consideraremos funciones que pertenecen a una clase diferente conocida como **funciones trascendentes**. Una función trascendente f se define como una función que *no* es algebraica. Las seis funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica son ejemplos de funciones trascendentes.

Ejercicios 1.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación de la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente indicada.

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{10}$
3. 0
4. -2
5. -1
6. indefinida

En los problemas 7-10, encuentre la pendiente y las intersecciones x y y de la recta dada. Grafique la recta.

7. $3x - 4y + 12 = 0$
8. $\frac{1}{2}x - 3y = 3$
9. $2x - 3y = 9$
10. $-4x - 2y + 6 = 0$

En los problemas 11-16, encuentre una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

11. Pasa por (2, 3) y (6, -5)
12. Pasa por (5, -6) y (4, 0)
13. Pasa por (-2, 4) y es paralela a $3x + y - 5 = 0$
14. Pasa por (5, -7) y es paralela al eje y .
15. Pasa por (2, 3) y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$
16. Pasa por (-5, -4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 11).

En los problemas 17 y 18, encuentre una función lineal $f(x) = ax + b$ que cumpla las dos condiciones dadas.

17. $f(-1) = 5, f(1) = 6$
18. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 19 y 20, encuentre una ecuación de la recta roja L que se muestra en la figura dada.

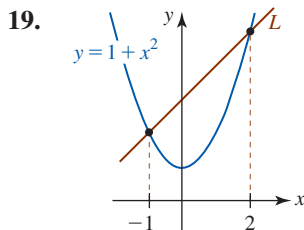


FIGURA 1.3.20 Gráfica para el problema 19

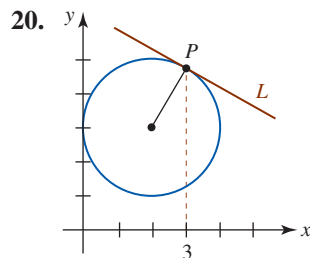


FIGURA 1.3.21 Gráfica para el problema 20

En los problemas 21-26, considere la función cuadrática f .

- a) Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de f .
 - b) Exprese la función f en forma normal.
 - c) Encuentre el vértice y el eje de simetría.
 - d) Trace la gráfica de f .
 - e) ¿Cuál es el rango de f ?
 - f) ¿En qué intervalo es creciente f ? ¿Y decreciente?
21. $f(x) = x(x + 5)$
 22. $f(x) = -x^2 + 4x$
 23. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$
 24. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$
 25. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
 26. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

En los problemas 27-32, describa con palabras la forma en que es posible obtener la gráfica de la función dada a partir de $y = x^2$ por medio de transformaciones rígidas o no rígidas.

27. $f(x) = (x - 10)^2$
28. $f(x) = (x + 6)^2$
29. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$
30. $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$
31. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$
32. $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 33-42, proceda como en el ejemplo 5 y trace la gráfica de la función polinomial dada f .

33. $f(x) = x^3 - 4x$
34. $f(x) = 9x - x^3$
35. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$
36. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$
37. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$
38. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$
39. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
40. $f(x) = x^2(x - 2)^2$
41. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$
42. $f(x) = x^5 - 4x^3$

En los problemas 43-48, relacione la gráfica dada con una de las funciones polinomiales en a)-f).

- a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$
- b) $f(x) = -x^3(x - 1)$
- c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$
- d) $f(x) = -x(x - 1)^3$
- e) $f(x) = -x^2(x - 1)$
- f) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

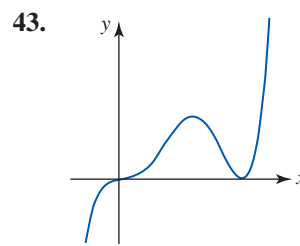


FIGURA 1.3.22 Gráfica para el problema 43

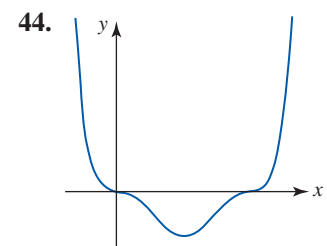


FIGURA 1.3.23 Gráfica para el problema 44

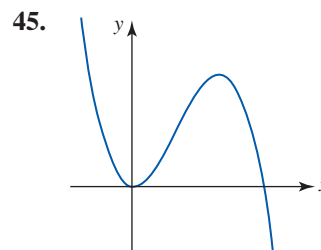


FIGURA 1.3.24 Gráfica para el problema 45

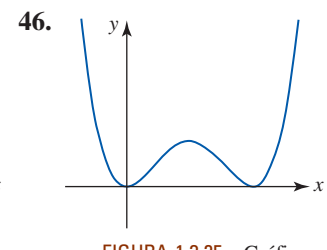


FIGURA 1.3.25 Gráfica para el problema 46

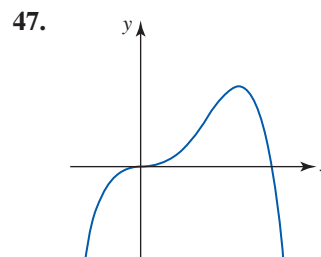


FIGURA 1.3.26 Gráfica para el problema 47

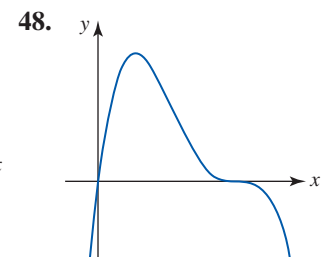


FIGURA 1.3.27 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49-62, encuentre todas las asíntotas para la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones x y y de la gráfica. Trace la gráfica de f .

49. $f(x) = \frac{4x - 9}{2x + 3}$

50. $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 2}$

51. $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

52. $f(x) = \frac{4}{(x + 2)^3}$

53. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

54. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

55. $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$

56. $f(x) = \frac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

57. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$

58. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x}$

59. $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

60. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 2}$

61. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

62. $f(x) = \frac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

63. Determine si los números -1 y 2 están en el rango de la función racional $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4}$.

64. Determine los puntos donde la gráfica de $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$ corta su asíntota horizontal.

Modelos matemáticos

65. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es lineal. Exprese T_F como una función de T_C si $(0^\circ\text{C}, 32^\circ\text{F})$ y $(60^\circ\text{C}, 140^\circ\text{F})$ están en la gráfica de T_F . Muestre que 100°C es equivalente al punto de ebullición Fahrenheit 212°F . Vea la FIGURA 1.3.28.

66. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y unidades kelvin T_K es lineal. Exprese T_K como una función de T_C dado que $(0^\circ\text{C}, 273\text{ K})$ y $(27^\circ\text{C}, 300\text{ K})$ están en la gráfica de T_K . Exprese el punto de ebullición 100°C en unidades kelvin. El cero absoluto se define como 0 K . ¿A qué es igual esto en grados Celsius? Exprese T_K como una función lineal de T_F . ¿A qué es igual 0 K en grados Fahrenheit? Vea la figura 1.3.28.

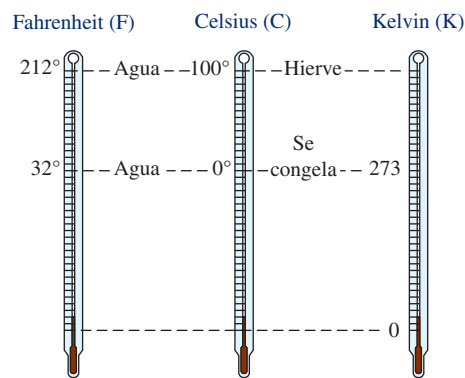


FIGURA 1.3.28 Termómetros para los problemas 65 y 66

67. Interés simple En interés simple la cantidad A devengada con el paso del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como un decimal). Calcule A al cabo de 20 años si el capital es $P = 1\,000$ y la tasa de interés anual es 3.4% . ¿En qué instante se cumple que $A = 2\,000$?

68. Depreciación lineal La depreciación de línea recta, o depreciación lineal, consta de un artículo que pierde toda su utilidad inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad A/n anual. Si un artículo que cuesta $\$20\,000$ cuando está nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine la función lineal que proporciona el valor V después de x años, donde $0 \leq x \leq 25$. ¿Cuál es el valor del artículo al cabo de 10 años?

69. Una pelota se lanza hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 96 pies/s. La altura que alcanza la pelota con respecto al suelo está dada por la función cuadrática $s(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instante la pelota está en el suelo? Grafique s sobre el intervalo de tiempo para el cual $s(t) \geq 0$.

70. En el problema 69, ¿en qué instante la pelota está a 80 pies por arriba del piso? ¿Cuán alto asciende la pelota?

Piense en ello

71. Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x se cambia por 1 unidad, ¿cuántas unidades cambia y ? ¿Si x se cambia por 2 unidades? ¿Si x se cambia por n unidades (n un entero positivo)?

72. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geoméricamente para $a > 0$.

73. ¿Cómo encontraría una ecuación de la recta que es perpendicular a la bisectriz del segmento de recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 10)$ y $(\frac{3}{2}, 4)$?

74. Usando sólo los conceptos presentados en esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el triángulo con vértices $(2, 3)$, $(-1, -3)$ y $(4, 2)$ es rectángulo?

1.4 Funciones trascendentes

■ **Introducción** En las dos primeras secciones de este capítulo analizamos varias propiedades y gráficas de **funciones algebraicas**. En las tres secciones siguientes estudiaremos las **funciones trascendentes**. Básicamente, una función trascendente f es una función que no es algebraica. Una función trascendente puede ser tan simple como la función potencia $y = x^n$, donde la potencia es un número irracional, pero las conocidas funciones trascendentes de precálculo en matemáticas son las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponencial y logarítmica. En esta sección se analizan las seis funciones trigonométricas y sus gráficas. En la sección 1.5 se considerarán las funciones trigonométricas inversas y en la sección 1.6, las funciones exponencial y logarítmica.

■ **Gráficas del seno y coseno** Recuerde de precálculo en matemáticas que las funciones trigonométricas seno y coseno tienen **periodo** 2π :

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \quad \text{y} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (1)$$

Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica sobre un intervalo de longitud igual a su periodo es un **ciclo** de su gráfica. La gráfica de una función periódica se obtiene fácilmente al trazar de manera repetida un ciclo de su gráfica. En la FIGURA 1.4.1 se muestra un ciclo de la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ (en rojo); la gráfica de f sobre, por ejemplo, el intervalo $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$ (en azul) es exactamente la misma que la gráfica sobre $[0, 2\pi]$. Debido a que $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$, la función seno es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

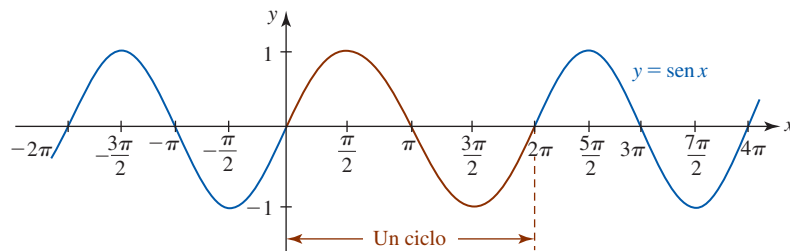


FIGURA 1.4.1 Gráfica de $y = \text{sen } x$

La FIGURA 1.4.2 muestra un ciclo (en rojo) de $g(x) = \cos x$ sobre $[0, 2\pi]$ junto con la extensión de ese ciclo (en azul) hacia los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, para la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La función coseno es una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$, de modo que en la figura 1.4.2 puede verse que su gráfica es simétrica con respecto al eje y .

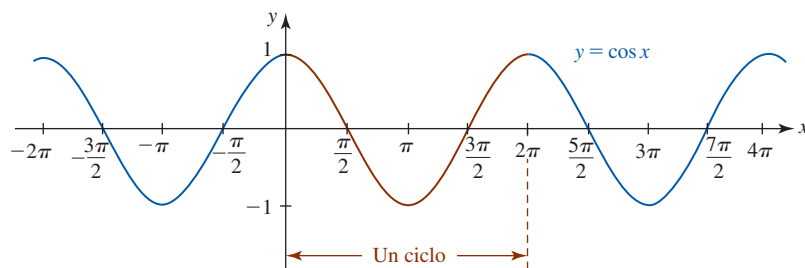


FIGURA 1.4.2 Gráfica de $y = \cos x$

Las funciones seno y coseno están definidas para todos los números reales x . También, resulta evidente en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 que

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad (2)$$

o bien, de manera equivalente, $|\text{sen } x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. En otras palabras,

- el dominio de $\text{sen } x$ y $\cos x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango de $\text{sen } x$ y $\cos x$ es $[-1, 1]$.

Para un repaso de las bases de la circunferencia unitaria y trigonometría de triángulos rectángulos, vea las Páginas de recursos al final del texto.

■ **Intersecciones** En este curso y en cursos subsecuentes de matemáticas es importante conocer las coordenadas x de las intersecciones x de las gráficas seno y coseno; en otras palabras, los ceros de $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$. A partir de la gráfica seno de la figura 1.4.1 observamos que los ceros de la función seno, o los números para los cuales $\sin x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Estos números son múltiplos enteros de π . A partir de la gráfica coseno de la figura 1.4.2 notamos que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$. Estos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si n representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. En consecuencia, los **ceros** de $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ pueden escribirse en forma breve como:

- $\sin x = 0$ para $x = n\pi$, n un entero, (3)

- $\cos x = 0$ para $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n un entero. (4)

Valores numéricos adicionales importantes de las funciones seno y coseno sobre el intervalo $[0, \pi]$ se proporcionan en la tabla siguiente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

(5)

Usted debe poder discernir los valores $\sin x$ y $\cos x$ sobre $[\pi, 2\pi]$ a partir de esta tabla usando el concepto de circunferencia unitaria y un ángulo de referencia. Por supuesto, fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ es posible determinar valores funcionales correspondientes usando periodicidad.

■ **Otras funciones trigonométricas** Cuatro funciones trigonométricas adicionales se definen en términos de cocientes o recíprocos de las funciones seno y coseno. La **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se definen, respectivamente, por

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad (6)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}. \quad (7)$$

El dominio de cada función en (6) y (7) es el conjunto de números reales excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. A partir de (4) se observa que

- el dominio de $\tan x$ y de $\sec x$ es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

De manera semejante, a partir de (3) se concluye que

- el dominio de $\cot x$ y de $\csc x$ es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Además, a partir de (2),

$$|\sec x| = \left| \frac{1}{\cos x} \right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \quad (8)$$

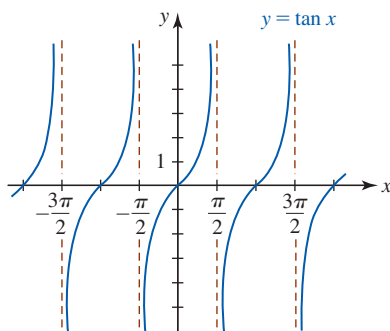
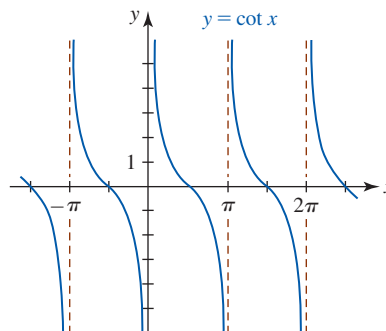
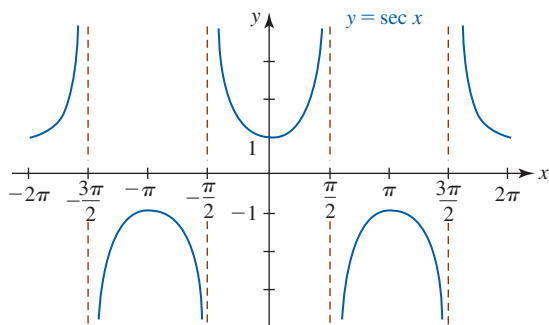
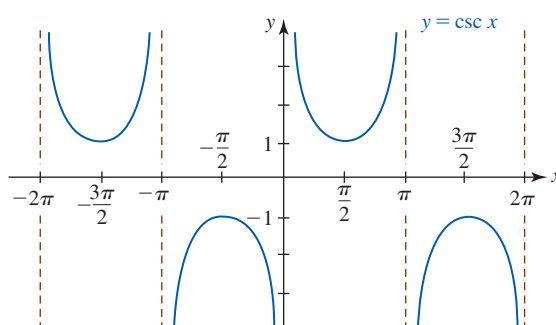
y

$$|\csc x| = \left| \frac{1}{\sin x} \right| = \frac{1}{|\sin x|} \geq 1. \quad (9)$$

Recuerde que una desigualdad con valor absoluto como (8) significa $\sec x \geq 1$ o $\sec x \leq -1$. Por tanto, el rango de las funciones secante y cosecante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las funciones tangente y cotangente tienen el mismo rango: $(-\infty, \infty)$. Al usar (5) pueden determinarse algunos valores numéricos de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$. Por ejemplo,

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \frac{\sin(2\pi/3)}{\cos(2\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}.$$

■ **Gráficas** Los números que hacen cero los denominadores de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ corresponden a asíntotas verticales de sus gráficas. En virtud de (4), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$. Por otra parte, a partir de (3), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Estas asíntotas son las rectas discontinuas rojas en las FIGURAS 1.4.3–1.4.6.

FIGURA 1.4.3 Gráfica de $y = \tan x$ FIGURA 1.4.4 Gráfica de $y = \cot x$ FIGURA 1.4.5 Gráfica de $y = \sec x$ FIGURA 1.4.6 Gráfica de $y = \csc x$

Porque las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π , $\sec x$ y $\csc x$ también son periódicas con periodo 2π . Pero a partir de las figuras 1.4.3 y 1.4.4 debe resultar evidente que el periodo de las funciones tangente y cotangente es π :

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{y} \quad \cot(x + \pi) = \cot x. \quad (10)$$

También, $\tan x$, $\cot x$ y $\csc x$ son funciones impares; $\sec x$ es una función par.

■ **Transformación y gráficas** Es posible obtener variaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas por medio de transformaciones rígidas y no rígidas. Gráficas de funciones de la forma

$$y = D + A \operatorname{sen}(Bx + C) \quad \text{o bien,} \quad y = D + A \cos(Bx + C), \quad (11)$$

donde A , $B > 0$, C y D son constantes reales, representan desplazamientos, compresiones y estiramientos de las gráficas seno y coseno básicas. Por ejemplo,

$$y = D + A \operatorname{sen}(Bx + C).$$

desplazamiento vertical ↓ estiramiento/compresión/reflexión vertical ↑
estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo ↑ desplazamiento horizontal ↑

El número $|A|$ se denomina **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. El **periodo** de cada función en (11) es $2\pi/B$, $B > 0$, y la porción de la gráfica de cada función en (11) sobre el intervalo $[0, 2\pi/B]$ se denomina un **ciclo**.

EJEMPLO 1 Periodos

- a) El periodo de $y = \sin 2x$ es $2\pi/2 = \pi$, y en consecuencia un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$.
- b) Antes de determinar el periodo de $\sin(-\frac{1}{2}x)$ primero es necesario que volvamos a escribir la función como $\sin(-\frac{1}{2}x) = -\sin(\frac{1}{2}x)$ (el seno es una función impar). Ahora, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$, y por consiguiente un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, 4\pi]$. ■

EJEMPLO 2 Gráficas de transformaciones verticales

Grafique

- a) $y = -\frac{1}{2} \cos x$ b) $y = 1 + 2 \sin x$.

Solución

- a) La gráfica de $y = -\frac{1}{2} \cos x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de 2, y el signo menos indica que luego la gráfica es reflejada en el eje x . Con la identificación $A = -\frac{1}{2}$ se observa que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2} \cos x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en rojo en la FIGURA 1.4.7.
- b) La gráfica de $y = 2 \sin x$ es la gráfica de $y = \sin x$ estirada verticalmente por un factor de 2. La amplitud de la gráfica es $|A| = |2| = 2$. La gráfica de $y = 1 + 2 \sin x$ es la gráfica de $y = 2 \sin x$ desplazada una unidad hacia arriba. Vea la FIGURA 1.4.8. ■

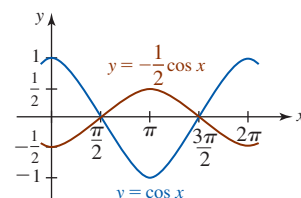


FIGURA 1.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 2a)

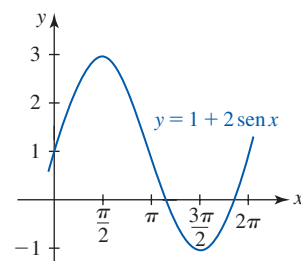


FIGURA 1.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 2b)

EJEMPLO 3 Gráfica coseno comprimida horizontalmenteEncuentre el periodo de $y = \cos 4x$ y grafique la función.

Solución Con la identificación de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se concluye que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función, se traza un ciclo de la gráfica coseno con amplitud 1 sobre el intervalo $[0, \pi/2]$ y luego se usa la periodicidad para extender la gráfica. La FIGURA 1.4.9 muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico en rojo y la gráfica extendida en azul) y un ciclo de $y = \cos x$ (mostrado en verde) sobre $[0, 2\pi]$. Observe que $y = \cos 4x$ alcanza su mínimo en $x = \pi/4$ puesto que $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$ y su máximo en $x = \pi/2$ puesto que $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ■

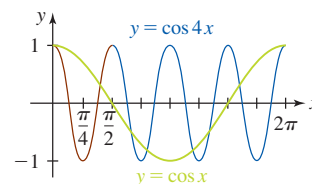


FIGURA 1.4.9 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Por la sección 1.2 se sabe que la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica coseno básica desplazada hacia la derecha. En la FIGURA 1.4.10 la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ (en rojo) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (en azul) desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades a la derecha. En forma semejante, las gráficas de $y = \sin(x + \pi/2)$ y $y = \sin(x - \pi/2)$ son las gráficas seno básicas desplazadas horizontalmente $\pi/2$ unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Vea la FIGURA 1.4.11 y la FIGURA 1.4.12.

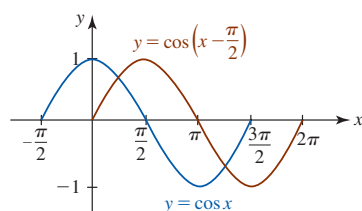


FIGURA 1.4.10 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

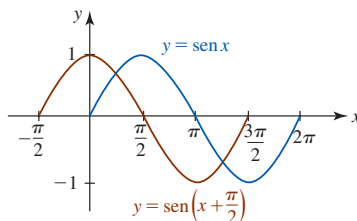


FIGURA 1.4.11 Gráfica seno desplazada horizontalmente

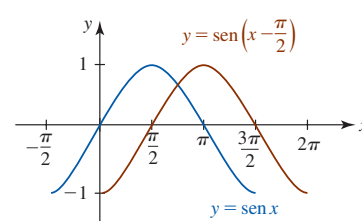


FIGURA 1.4.12 Gráfica seno desplazada horizontalmente

Al comparar las gráficas rojas en las figuras 1.4.10-1.4.12 con las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 se observa que

- la gráfica coseno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica seno,
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda es la gráfica coseno, y
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica coseno reflejada en el eje x .

En otras palabras, se han comprobado gráficamente las siguientes identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{y} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \quad (12)$$

Suponga que $f(x) = A \sin Bx$. Entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \sin B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \sin(Bx + C). \quad (13)$$

El resultado en (13) muestra que la gráfica de $y = A \sin(Bx + C)$ puede obtenerse al desplazar la gráfica de $f(x) = A \sin Bx$ horizontalmente una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se denomina **desplazamiento de fase** de las gráficas de las funciones en (3).

EJEMPLO 4 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades a la derecha. Encuentre su ecuación.

Solución Al escribir $f(x) = 10 \cos 4x$ y usar (13) encontramos

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identifica $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ■

Nota: Como cuestión práctica, el desplazamiento de fase para $y = A \sin(Bx + C)$ o $y = A \cos(Bx + C)$ puede obtenerse al factorizar el número B a partir de $Bx + C$. Por ejemplo,

$$y = A \sin(Bx + C) = A \sin B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas horizontalmente

Grafique

$$a) \quad y = 3 \sin(2x - \pi/3) \quad b) \quad y = 2 \cos(\pi x + \pi).$$

Solución

- a) Para efectos de comparación, primero graficaremos $y = 3 \sin 2x$. La amplitud de $y = 3 \sin 2x$ es $|A| = 3$ y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3 \sin 2x$ se completa sobre el intervalo $[0, \pi]$. Luego, extendemos esta gráfica hacia el intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$ como se muestra en azul en la FIGURA 1.4.13. A continuación, volvemos a escribir $y = 3 \sin(2x - \pi/3)$ al factorizar 2 de $2x - \pi/3$:

$$y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

A partir de la forma de la última expresión vemos que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, mostrada en rojo en la figura 1.4.13, se obtiene al desplazar la gráfica de $y = 3 \sin 2x$ (en azul) $\pi/6$ unidades a la derecha.

- b) La amplitud de $y = 2 \cos \pi x$ es $|A| = 2$ y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Así, un ciclo de $y = 2 \cos \pi x$ se completa sobre el intervalo $[0, 2]$. En la FIGURA 1.4.14 se muestran (en azul) dos ciclos de la gráfica de $y = 2 \cos \pi x$. Las intersecciones x de esta gráfica corresponden a los valores de x para los que $\cos \pi x = 0$. Por (4), esto implica $\pi x = (2n + 1)\pi/2$ o $x = (2n + 1)/2$, con n un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots$ obtenemos $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Luego, al volver a escribir la función dada como

$$y = 2 \cos \pi(x + 1)$$

observamos que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2 \cos(\pi x + \pi)$ mostrada en rojo en la figura 1.4.14 se obtiene al desplazar 1 unidad a la izquierda la gráfica de $y = 2 \cos \pi x$ (en azul). Esto significa que las intersecciones x son las mismas para ambas gráficas. ■

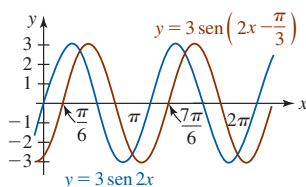


FIGURA 1.4.13 Gráfica de la función en el ejemplo 5a)

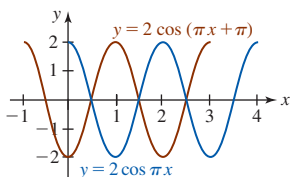


FIGURA 1.4.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5b)

En matemáticas aplicadas, las funciones trigonométricas sirven como modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos.

EJEMPLO 6 Corriente alterna

Un modelo matemático para la corriente I (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alterna está dado por $I(t) = 30 \sin 120\pi t$, donde t es el tiempo medido en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

Solución La gráfica tiene una amplitud 30 y periodo $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. En consecuencia, trazamos un ciclo de la curva seno básica sobre el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$, como se muestra en la FIGURA 1.4.15. A partir de la figura, resulta evidente que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes y ocurre en el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$ en $t = \frac{1}{240}$ puesto que

$$I\left(\frac{1}{240}\right) = 30 \sin\left(120\pi \cdot \frac{1}{240}\right) = 30 \sin \frac{\pi}{2} = 30.$$

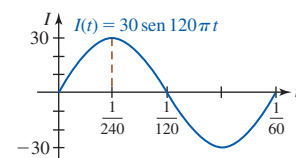


FIGURA 1.4.15 La gráfica de la corriente en el ejemplo 6, muestra que hay 60 ciclos en un segundo

■ **Para referencia futura** Las identidades trigonométricas se usan en todo el cálculo, especialmente en el estudio del cálculo integral. Para facilitar las referencias, a continuación se enumeran algunas identidades que revisten particular importancia.

Identidades pitagóricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (14)$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (15)$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad (16)$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2 \quad (17)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2 \quad (18)$$

Fórmulas para el doble de un ángulo

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (19)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (20)$$

Fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x) \quad (21)$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \quad (22)$$

Identidades adicionales pueden encontrarse en las *Páginas de recursos* al final de este texto.

Ejercicios 1.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-5.

Fundamentos

En los problemas 1-6, use técnicas de desplazamiento, estimamiento, compresión y reflexión para dibujar por lo menos un ciclo de la gráfica de la función dada.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos x$

2. $y = -1 + \cos x$

3. $y = 2 - \sin x$

4. $y = 3 + 3 \sin x$

5. $y = -2 + 4 \cos x$

6. $y = 1 - 2 \sin x$

En los problemas 7-14, encuentre la amplitud y el periodo de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

7. $y = 4 \sin \pi x$

8. $y = -5 \sin \frac{x}{2}$

9. $y = -3 \cos 2\pi x$

10. $y = \frac{5}{2} \cos 4x$

11. $y = 2 - 4 \sin x$

12. $y = 2 - 2 \sin \pi x$

13. $y = 1 + \cos \frac{2x}{3}$

14. $y = -1 + \sin \frac{\pi x}{2}$

En los problemas 15-18, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y D y escriba una ecuación de la forma $y = D + A \sin x$ o $y = D + A \cos x$ para la gráfica.

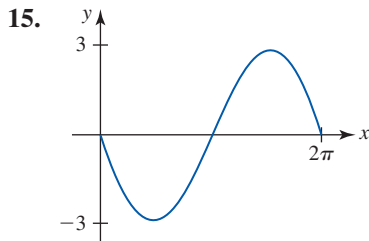


FIGURA 1.4.16 Gráfica para el problema 15

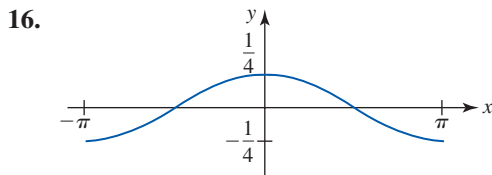


FIGURA 1.4.17 Gráfica para el problema 16

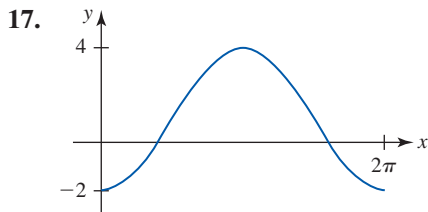


FIGURA 1.4.18 Gráfica para el problema 17

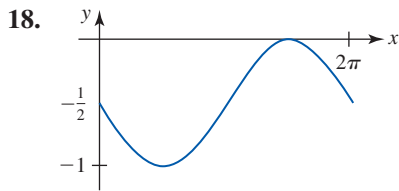


FIGURA 1.4.19 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-24, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y B y escriba una ecuación de la forma $y = A \sin Bx$ o $y = A \cos Bx$ para la gráfica.

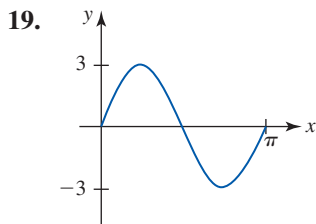


FIGURA 1.4.20 Gráfica para el problema 19

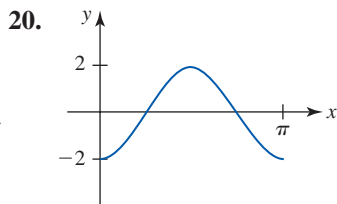


FIGURA 1.4.21 Gráfica para el problema 20

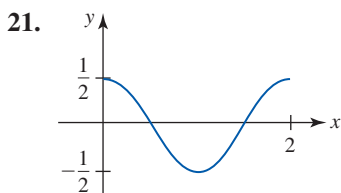


FIGURA 1.4.22 Gráfica para el problema 21

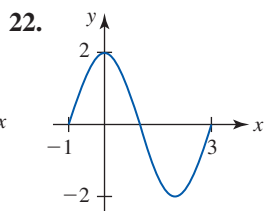


FIGURA 1.4.23 Gráfica para el problema 22

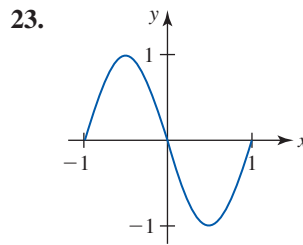


FIGURA 1.4.24 Gráfica para el problema 23

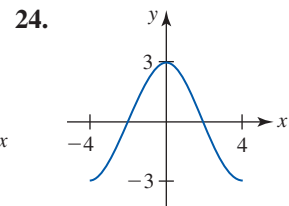


FIGURA 1.4.25 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-34, encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

26. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

27. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

28. $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

29. $y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$

30. $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

31. $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

32. $y = -\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

33. $y = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

34. $y = 2\cos\left(-2\pi x - \frac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 35 y 36, escriba una ecuación de la función cuya gráfica se describe con palabras.

35. La gráfica de $y = \sin \pi x$ está estirada verticalmente hacia arriba por un factor de 5 y está desplazada $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha.

36. La gráfica de $y = 4\cos \frac{x}{2}$ está desplazada 8 unidades hacia abajo y está desplazada $2\pi/3$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 37 y 38, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, use periodicidad para encontrar todas las intersecciones.

37. $y = -1 + \sin x$

38. $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 39-44, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada. No grafique.

39. $y = \sin \pi x$

40. $y = -\cos 2x$

41. $y = 10\cos \frac{x}{2}$

42. $y = 3\sin(-5x)$

43. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

44. $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 45-52, encuentre el periodo, las intersecciones x y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

45. $y = \tan \pi x$

46. $y = \tan \frac{x}{2}$

47. $y = \cot 2x$

48. $y = -\cot \frac{\pi x}{3}$

49. $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

50. $y = \frac{1}{4}\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

51. $y = -1 + \cot \pi x$

52. $y = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 53-56, encuentre el periodo y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

53. $y = 3 \csc \pi x$

54. $y = -2 \csc \frac{x}{3}$

55. $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

56. $y = \csc(4x + \pi)$

Modelos matemáticos

57. Profundidad del agua La profundidad del agua d a la entrada de un puerto pequeño en el instante t es modelada por una función de la forma

$$d(t) = D + A \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, $2\pi/B$, $B > 0$ es el periodo de mareas y D es la profundidad media. Suponga que el periodo de mareas es 12 horas, la profundidad media en la marea alta es 18 pies y que la profundidad en la marea baja es 6 pies. Dibuje dos ciclos de la gráfica de d .

58. Temperatura Fahrenheit Suponga que

$$T(t) = 50 + 10 \sin \frac{\pi}{12}(t - 8), \quad 0 \leq t \leq 24$$

es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante un cierto día de la semana.

- ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
- ¿A qué hora(s) se cumple $T(t) = 60$?
- Trace la gráfica de T .
- Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas a que ocurren.

Problemas con calculadora/SAC

59. Aceleración debida a la gravedad Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la forma de ésta no es esférica, sino que se elonga en el ecuador y se achata en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad no es la constante 980 cm/s^2 , sino que varía con la latitud θ . Estudios satelitales han sugerido que la aceleración debida a la gravedad g es aproximada por el modelo matemático

$$g = 978.0309 + 5.18552 \sin^2 \theta - 0.00570 \sin^2 2\theta.$$

Encuentre g

- en el ecuador ($\theta = 0^\circ$),
- en el polo norte y
- a 45° latitud norte.

60. Lanzamiento de bala El alcance de una bala soltada desde una altura h por arriba del nivel del piso con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal puede aproximarse por el modelo matemático

$$R = \frac{v_0 \cos \phi}{g} [v_0 \sin \phi + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \phi + 2gh}],$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Vea la FIGURA 1.4.26.

- Si $v_0 = 13.7 \text{ m/s}$, $\phi = 40^\circ$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, compare los alcances que se obtienen para las alturas $h = 2.0 \text{ m}$ y $h = 2.4 \text{ m}$.
- Explique por qué un incremento en h produce un incremento en el alcance R si los otros parámetros se mantienen fijos.
- ¿Qué implica lo anterior respecto a la ventaja que la altura otorga a un lanzador de bala?

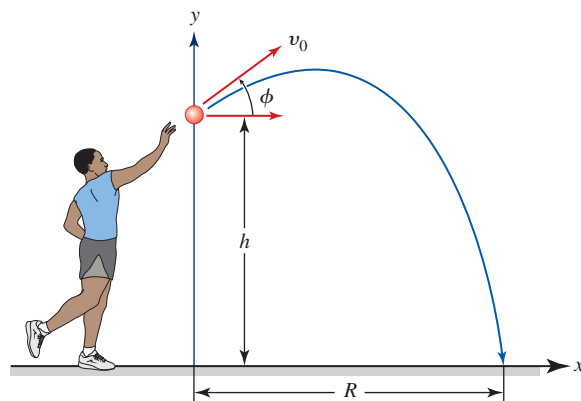


FIGURA 1.4.26 Proyectil en el problema 60

Piense en ello

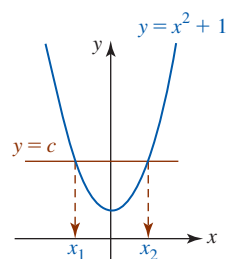
- La función $f(x) = \sin \frac{1}{2}x + \sin 2x$ es periódica. ¿Cuál es el periodo de f ?
- Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\sin x|$ y $y = |\cos x|$.
- Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.
- ¿Es posible que la solución de la ecuación dada sea un número real?
 - $9 \csc x = 1$
 - $7 + 10 \sec x = 0$
 - $\sec x = -10.5$

En los problemas 65 y 66, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para encontrar números A y C para los que se cumpla la igualdad dada.

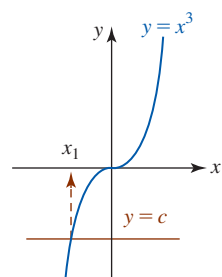
- $\cot x = A \tan(x + C)$
- $\csc x = A \sec(x + C)$

1.5 Funciones inversas

Introducción En la sección 1.1 vimos que una función f es una regla de correspondencia que a cada valor x en su dominio X asigna un solo valor o un valor único y en su rango. Esta regla no excluye el hecho de que el mismo número y se asocie con varios valores diferentes de x . Por ejemplo, para $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, el valor $y = 4$ en el rango de f ocurre en $x = 0$ o en $x = 2$ en el

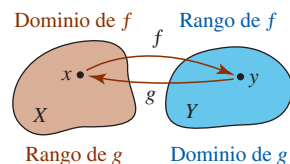


a) No es uno a uno



b) Uno a uno

FIGURA 1.5.1 Dos tipos de funciones en el ejemplo 1

FIGURA 1.5.2 Una función f y su función inversa g

dominio de f . Por otra parte, para la función $f(x) = 2x + 3$, el valor $y = 4$ sólo ocurre en $x = \frac{1}{2}$. En efecto, para cada valor y en el rango de $f(x) = 2x + 3$, corresponde sólo un valor de x en el dominio. A las funciones de este último tipo se ha asignado el nombre especial de **uno a uno**.

Definición 1.5.1 Función uno a uno

Se dice que una función es **uno a uno** si cada número en el rango de f se asocia con exactamente un número en su dominio X .

■ **Prueba de la recta horizontal** Cuando la definición 1.5.1 se interpreta geométricamente, significa que una recta horizontal ($y = \text{constante}$) puede cortar la gráfica de una función uno a uno en cuanto mucho un punto. Además, si *toda* recta horizontal que corta la gráfica de una función lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la función necesariamente es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Prueba de la recta horizontal

- En la FIGURA 1.5.1a) se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ y una recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica. La figura indica claramente que hay dos números x_1 y x_2 en el dominio de f para los cuales $f(x_1) = f(x_2) = c$. Por tanto, la función f no es uno a uno.
- Al analizar la figura 1.5.1b) se encuentra que para toda recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica de $f(x) = x^3$, sólo hay un número x_1 en el dominio de f tal que $f(x_1) = c$. La función f es uno a uno. ■

■ **Inversa de una función uno a uno** Suponga que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y . Puesto que todo número y en Y corresponde a precisamente un número x en X , la función f debe realmente determinar una función “reversa” g cuyo dominio es Y y cuyo rango es X . Como se muestra en la FIGURA 1.5.2, f y g deben satisfacer

$$f(x) = y \quad y \quad g(y) = x. \quad (1)$$

Las ecuaciones en (1) son en realidad composiciones de las funciones f y g :

$$f(g(y)) = y \quad y \quad g(f(x)) = x. \quad (2)$$

La función g se denomina **inversa** de f o **función inversa** de f . Al seguir la convención de que cada elemento del dominio se denota por el símbolo x , la primera ecuación en (2) vuelve a escribirse como $f(g(x)) = x$. A continuación se resumen los resultados proporcionados en (2).

Definición 1.5.2 Función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio X y rango Y . La **inversa** de f es la función g con dominio Y y rango X para la cual

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y, \quad (3)$$

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X. \quad (4)$$

Por supuesto, si una función no es uno a uno, entonces no tiene función inversa.

■ **Notación** La inversa de una función f suele escribirse como f^{-1} y se lee “ f inversa”. Esta última notación, aunque es estándar, es algo desafortunada. De inmediato se señala que en el símbolo $f^{-1}(x)$ el “ -1 ” *no es* un exponente. En términos de la nueva notación, (3) y (4) se vuelven, respectivamente,

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad y \quad f^{-1}(f(x)) = x. \quad (5)$$

En (3) y (4), el símbolo g desempeña la parte del símbolo f^{-1} .

■ **Propiedades** Antes de analizar un método para encontrar la inversa de una función uno a uno f , se enumeran algunas propiedades importantes sobre f y su inversa f^{-1} .

Teorema 1.5.1 Propiedades de la función inversa

- i) Dominio de $f^{-1} =$ rango de f .
- ii) Rango de $f^{-1} =$ dominio de f .
- iii) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
- iv) La inversa de f^{-1} es f .
- v) La inversa de f es única.

■ **Método para encontrar f^{-1}** Si f^{-1} es la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, entonces por (1), $x = f^{-1}(y)$. Por tanto, basta hacer las dos cosas siguientes para encontrar f^{-1} .

Directrices para encontrar la función inversa

Suponga que $y = f(x)$ es una función uno a uno. Entonces para encontrar f^{-1} :

- Se resuelve $y = f(x)$ para el símbolo x en términos de y (en caso de ser posible). Así se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- La variable x vuelve a etiquetarse como y y la variable y como x . Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

Nota: Algunas veces resulta conveniente intercambiar los pasos en las directrices anteriores:

- Volver a etiquetar x y y en la ecuación $y = f(x)$ y despejar (de ser posible) $x = f(y)$ para y . Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 2 Inversa de una función

Encuentre la inversa de $f(x) = x^3$.

Solución En el ejemplo 1 se vio que esta función es uno a uno. Para empezar, la función se vuelve a escribir como $y = x^3$. Al despejar x se obtiene $x = y^{1/3}$. Luego las variables vuelven a etiquetarse para obtener $y = x^{1/3}$. Así $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ o, de manera equivalente, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ■

Encontrar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$ algunas veces es difícil y otras imposible. Por ejemplo, la FIGURA 1.5.3 sugiere (y es posible demostrar) que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno, por lo que tiene una inversa f^{-1} . Pero al despejar x en la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todo mundo (incluyendo su profesor). Puesto que f es una función polinomial, su dominio es $(-\infty, \infty)$ y, debido a que su comportamiento extremo es el de $y = x^3$, el rango de f es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el rango de f^{-1} son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando f^{-1} no se conoce explícitamente, tiene perfecto sentido hablar sobre los valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, observe que $f(0) = 3$. Esto significa que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Puede imaginar el valor de $f^{-1}(5)$?

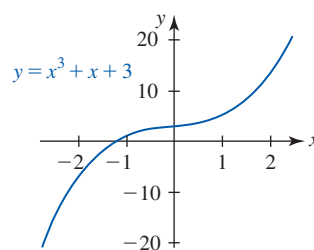
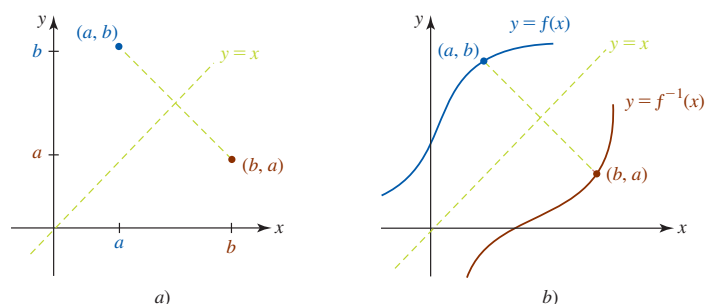


FIGURA 1.5.3 La gráfica sugiere que f es uno a uno

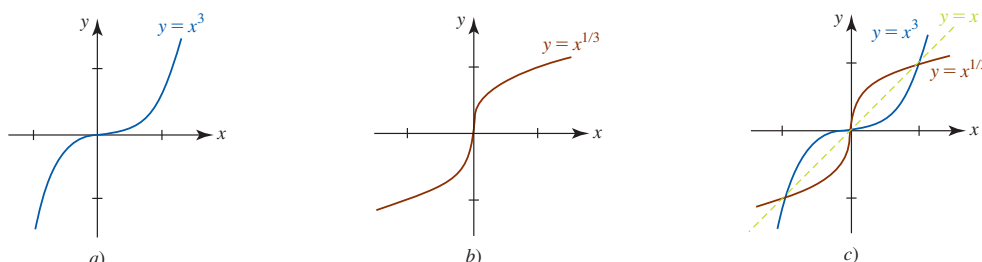
■ **Gráficas de f y f^{-1}** Suponga que (a, b) representa cualquier punto sobre la gráfica de una función uno a uno f . Entonces $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1} . Como se muestra en la FIGURA 1.5.4a), los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones uno del otro en la recta $y = x$. Esto significa que la recta $y = x$ es la bisectriz perpendicular del segmento de recta que va de (a, b) a (b, a) . Debido a que cada punto sobre una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente sobre la otra gráfica, en la figura 1.5.4b) se observa que las gráficas de f^{-1} y f son **reflexiones** entre sí con respecto a la recta $y = x$. Además se dice que las gráficas de f^{-1} y f son **simétricas** con respecto a la recta $y = x$.

FIGURA 1.5.4 Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$ **EJEMPLO 3** Gráficas de f y f^{-1}

En el ejemplo 2 vimos que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las FIGURAS 1.5.5a) y 1.5.5b) se muestran las gráficas de estas funciones; en la figura 1.5.5c), las gráficas están superpuestas en el mismo sistema de coordenadas para ilustrar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.

FIGURA 1.5.5 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 3

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es uno a uno.

EJEMPLO 4 Inversa de una función

Encuentre la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

Solución Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, por la prueba de la recta horizontal se concluye que f es una función uno a uno. Para encontrar f^{-1} , x se despeja en $y = 5x - 7$:

$$5x = y + 7 \quad \text{implica} \quad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al reetiquetar las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. En consecuencia, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la FIGURA 1.5.6.

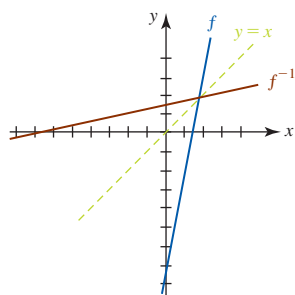
Ninguna función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, no es uno a uno.

■ Dominios restringidos Para una función f que no es uno a uno, puede ser posible restringir su dominio de modo que la nueva función que consta de f definida sobre este dominio restringido sea uno a uno y así tenga una inversa. En la mayor parte de los casos es aconsejable restringir el dominio de modo que la nueva función retenga su rango original. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

EJEMPLO 5 Dominio restringido

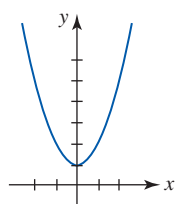
En el ejemplo 1 se demostró gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y como se observa en la FIGURA 1.5.7a), el rango de f es $[1, \infty)$. Luego, al definir $f(x) = x^2 + 1$ sólo en el intervalo $[0, \infty)$, vemos dos cosas en la figura 1.5.7b): el rango de f se preserva y $f(x) = x^2 + 1$ confinada al dominio $[0, \infty)$ pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene como de costumbre. Al despejar x de $y = x^2 + 1$ y volviendo a etiquetar las variables se obtiene

$$x = \pm\sqrt{y-1} \quad \text{y así} \quad y = \pm\sqrt{x-1}.$$

FIGURA 1.5.6 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 4

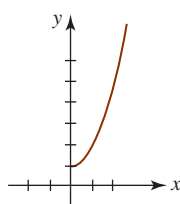
El signo algebraico idóneo en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y rango de f^{-1} son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Esto obliga a escoger $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ como la inversa de f . Vea la figura 1.5.7c).

$$y = x^2 + 1 \text{ sobre } (-\infty, \infty)$$



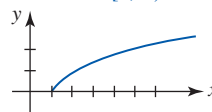
a) No es una función uno a uno

$$y = x^2 + 1 \text{ sobre } [0, \infty)$$



b) Función uno a uno

$$y = \sqrt{x-1} \text{ sobre } [1, \infty)$$



c) Inversa de la función en el inciso b)

FIGURA 1.5.7 Función inversa en el ejemplo 5

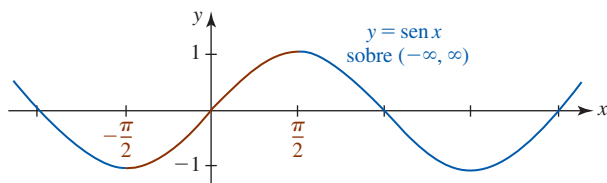
Funciones trigonométricas inversas Aunque ninguna de las funciones trigonométricas es uno a uno, al restringir convenientemente cada uno de sus dominios es posible definir seis funciones trigonométricas inversas.

Función seno inverso A partir de la FIGURA 1.5.8a) se observa que la función $y = \sin x$ sobre el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su rango $[-1, 1]$. Observe que cualquier recta horizontal trazada para cortar la porción roja de la gráfica puede hacerlo cuanto mucho una vez. Por tanto, la función seno sobre este dominio restringido es uno a uno y tiene una inversa. Entre los matemáticos hay dos notaciones de uso común para denotar la inversa de la función que se muestra en la figura 1.5.8b):

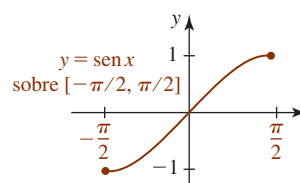
$$\sin^{-1} x \quad \text{o} \quad \arcsen x,$$

que se leen **seno inverso de x** y **arcseno de x** , respectivamente.

El sistema algebraico computacional *Mathematica* usa la notación *arcseno*.



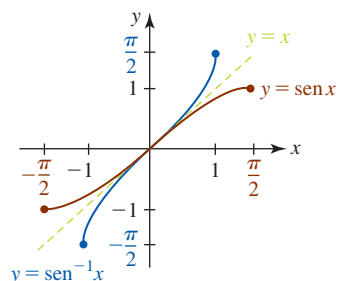
a) No es una función uno a uno



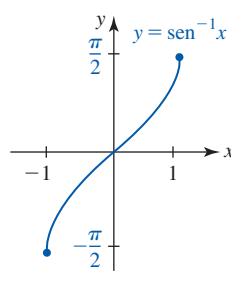
b) Función uno a uno

FIGURA 1.5.8 Restricción del dominio de $y = \sin x$ para obtener una función uno a uno

En la FIGURA 1.5.9a) se ha reflejado la porción de la gráfica de $y = \sin x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (la gráfica roja en la figura 1.5.8b) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \sin^{-1} x$ (en azul). Por razones de claridad, esta gráfica azul se ha reproducido en la figura 1.5.9b). Como se muestra en esta gráfica, el dominio de la función seno inverso es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.



a)



b)

FIGURA 1.5.9 La gráfica de la función seno inverso es la curva azul

Definición 1.5.3 Función seno inverso

La **función seno inverso**, o **función arcoseno**, se define por

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y, \quad (6)$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

En palabras:

- El seno inverso del número x es el número y (o ángulo medido en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x .

Los símbolos $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ son sinónimos en matemáticas y sus aplicaciones, de modo que se alternará su uso para que usted se sienta cómodo con ambas notaciones.

EJEMPLO 6 Evaluación de la función seno inverso

Encuentre

$$a) \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} \quad b) \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad c) \operatorname{sen}^{-1}(-1).$$

Solución

- a) Si se hace $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$, entonces por (6) es necesario encontrar el número y (o ángulo medido en radianes) que satisface $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Puesto que $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ satisface la desigualdad $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se concluye que

$$y = \frac{\pi}{6}.$$

- b) Si se hace $y = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$, entonces $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. Puesto que es necesario escoger y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, encontramos que $y = -\pi/6$.

- c) Al hacer $y = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$, tenemos que $\operatorname{sen} y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por tanto, $y = -\pi/2$. ■

Lea este párrafo varias veces.

► En los incisos b) y c) del ejemplo 6 se tuvo cuidado para escoger y de modo que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por ejemplo, un error común suele ser pensar que como $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, entonces necesariamente $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ puede tomarse como $3\pi/2$. Recuerde: si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces y está sujeto a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, y $3\pi/2$ no satisface esta desigualdad.

EJEMPLO 7 Evaluación de una composición

Sin usar calculadora, encuentre $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4})$.

Solución Es necesario encontrar la tangente del ángulo de t radianes con seno igual a $\frac{1}{4}$, es decir, $\tan t$ donde $t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}$. El ángulo t se muestra en la FIGURA 1.5.10. Puesto que

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

queremos determinar el valor de $\cos t$. A partir de la figura 1.5.10 y la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, vemos que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \quad \text{o bien,} \quad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Por tanto,

$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así

$$\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}. \quad \blacksquare$$

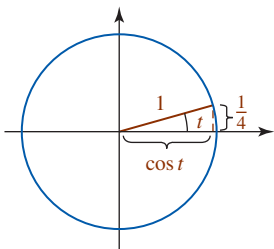


FIGURA 1.5.10 El ángulo $t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}$ en el ejemplo 7

El procedimiento que se ilustra en el ejemplo 10 constituye un método alternativo para resolver el ejemplo 7.

■ **Función coseno inverso** Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno y entonces tiene una inversa. Esta inversa se denota por

$$\cos^{-1}x \quad \text{o bien,} \quad \arccos x,$$

lo cual proporciona la siguiente definición.

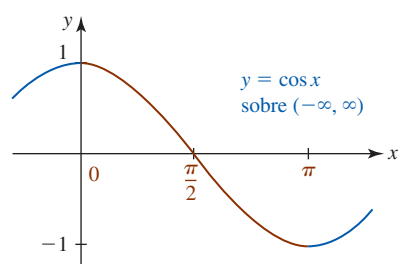
Definición 1.5.4 Función coseno inverso

La **función coseno inverso**, o **función arccoseno**, se define por

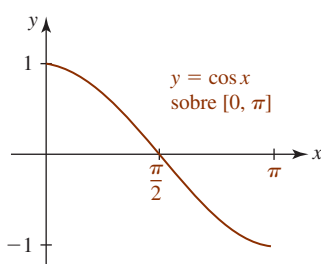
$$y = \cos^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y, \quad (7)$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

La gráfica mostrada en la FIGURA 1.5.11 ilustra la forma en que la función $y = \cos x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$ se vuelve una función uno a uno.



a) No es una función uno a uno



b) Función uno a uno

FIGURA 1.5.11 Restricción del dominio de $y = \cos x$ para obtener una función uno a uno

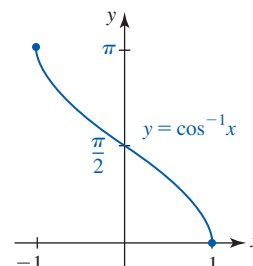


FIGURA 1.5.12 Gráfica de la función coseno inverso

Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 1.5.11b) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \cos^{-1}x$ mostrada en la FIGURA 1.5.12. La figura muestra con toda claridad que el dominio y el rango de $y = \cos^{-1}x$ son $[-1, 1]$ y $[0, \pi]$, respectivamente.

EJEMPLO 8 Evaluación de la función coseno inverso

Evalúe $\arccos(-\sqrt{3}/2)$.

Solución Si $y = \arccos(-\sqrt{3}/2)$, entonces $\cos y = -\sqrt{3}/2$. El único número en $[0, \pi]$ para el cual se cumple esto es $y = 5\pi/6$. Es decir,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

EJEMPLO 9 Evaluación de composición de funciones

Escriba $\sin(\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x .

Solución En la FIGURA 1.5.13 se ha construido un ángulo de t radianes cuyo coseno es igual a x . Así, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$. Luego, para encontrar $\sin(\cos^{-1}x) = \sin t$, usamos la identidad $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Así

$$\begin{aligned} \sin^2 t + x^2 &= 1 \\ \sin^2 t &= 1 - x^2 \\ \sin t &= \sqrt{1 - x^2} \\ \sin(\cos^{-1}x) &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada positiva de $1 - x^2$, puesto que el rango de $\cos^{-1}x$ es $[0, \pi]$, y el seno del ángulo t en los cuadrantes primero o segundo es positivo.

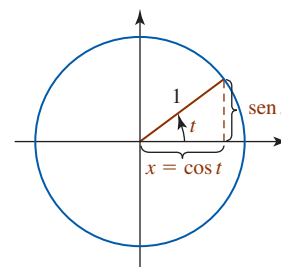


FIGURA 1.5.13 El ángulo $t = \cos^{-1}x$ en el ejemplo 9

■ **Función tangente inversa** Si el dominio de $\tan x$ se restringe al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces la función resultante es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Ésta se denota por

$$\tan^{-1}x \quad \text{o bien,} \quad \arctan x.$$

Definición 1.5.5 Función arctangente

La **función tangente inversa**, o **función arctangente**, se define por

$$y = \tan^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y, \quad (8)$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas mostradas en la FIGURA 1.5.14 ilustran cómo la función $y = \tan x$ restringida al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se vuelve una función uno a uno. Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 1.5.14b) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ mostrada en la FIGURA 1.5.15. En la figura se observa que el dominio y el rango de $y = \tan^{-1} x$ son, respectivamente, los intervalos $(-\infty, \infty)$ y $(-\pi/2, \pi/2)$. Por ejemplo, $y = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$ puesto que $-\pi/4$ es el único número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para el cual $\tan(-\pi/4) = -1$.

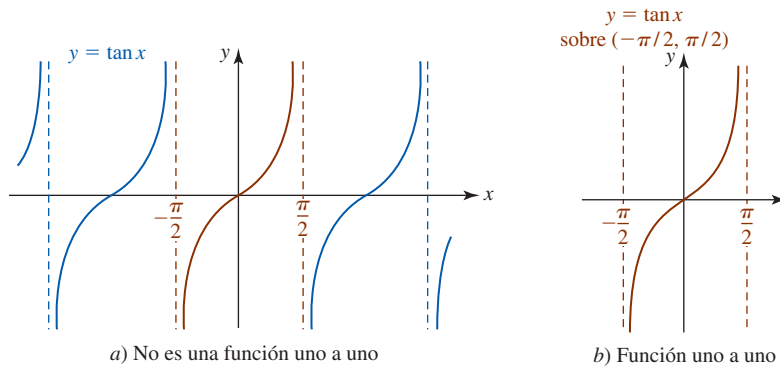


FIGURA 1.5.14 Restricción del dominio de $y = \tan x$ para obtener una función uno a uno

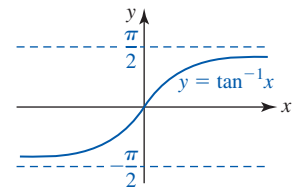


FIGURA 1.5.15 Gráfica de la función tangente inversa

EJEMPLO 10 Evaluación de composiciones de funciones

Sin usar calculadora, encuentre $\cos(\arctan \frac{2}{3})$.

Solución Si se hace $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Al usar el triángulo rectángulo en la FIGURA 1.5.16 como ayuda, se ve que

$$\cos\left(\arctan \frac{2}{3}\right) = \cos y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

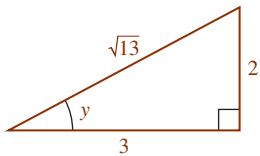


FIGURA 1.5.16 Triángulo en el ejemplo 10

■ **Propiedades de las inversas** Recuerde por (5) que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ se cumplen para cualquier función f y su inversa si hay restricciones idóneas sobre x . Por tanto, para las funciones trigonométricas inversas tenemos las siguientes propiedades.

Teorema 1.5.2 Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

- i) $\sin^{-1}(\sin x) = \arcsin(\sin x) = x$ si $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
- ii) $\sin(\sin^{-1} x) = \sin(\arcsin x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$
- iii) $\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x$ si $0 \leq x \leq \pi$
- iv) $\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$
- v) $\tan^{-1}(\tan x) = \arctan(\tan x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$
- vi) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

EJEMPLO 11 Aplicación de las propiedades inversas

Sin usar calculadora, evalúe

$$a) \cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) \quad b) \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right).$$

Solución

a) Por el teorema 1.5.2iv), $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

b) En este caso *no es posible* aplicar la propiedad v), puesto que $3\pi/4$ no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Si primero se evalúa $\tan(3\pi/4) = -1$, entonces se tiene

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

■ **Inversas de otras funciones trigonométricas** Con los dominios restringidos de manera conveniente, las funciones trigonométricas restantes $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ también tienen inversas.

Definición 1.5.6 Otras funciones trigonométricas inversas

- i) $y = \cot^{-1} x$ si y sólo si $x = \cot y$, $-\infty < x < \infty$ y $0 < y < \pi$
- ii) $y = \sec^{-1} x$ si y sólo si $x = \sec y$, $|x| \geq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$
- iii) $y = \csc^{-1} x$ si y sólo si $x = \csc y$, $|x| \geq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$

Las gráficas de $y = \cot^{-1} x$, $y = \sec^{-1} x$ y $y = \csc^{-1} x$, así como sus dominios y rangos, se resumen en la FIGURA 1.5.17.

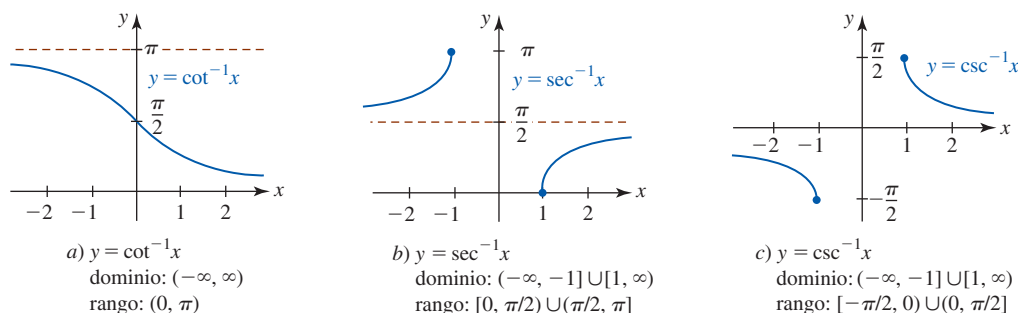


FIGURA 1.5.17 Gráficas de las funciones cotangente inversa, secante inversa y cosecante inversa

f(x) NOTAS DESDE EL AULA

Los rangos especificados en las definiciones 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5 y 1.5.6i) son reconocidos internacionalmente y surgieron de la limitación más lógica y conveniente de la función original. Así, cuando vemos arcos x o $\tan^{-1} x$ en cualquier contexto, sabemos que $0 \leq \arccos x \leq \pi$ y $-\pi/2 < \tan^{-1} x < \pi/2$. Estas convenciones son las mismas que las usadas en calculadoras cuando se usan las teclas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\text{cos}^{-1}}$ y $\boxed{\text{tan}^{-1}}$. Sin embargo, no existe ningún acuerdo universal sobre los rangos de $y = \sec^{-1} x$ o $y = \csc^{-1} x$. Los rangos especificados en ii) y iii) en la definición 1.5.6 son cada vez más populares porque se trata de los rangos empleados en sistemas algebraicos computacionales como *Mathematica* y *Maple*. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que hay textos conocidos de cálculo que definen el dominio y el rango de $y = \sec^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad \text{rango: } [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2),$$

y el dominio y el rango de $y = \csc^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad \text{rango: } (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2].$$

Ejercicios 1.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-6.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, vuelva a leer la introducción de esta sección. Luego explique por qué la función f dada no es uno a uno.

1. $f(x) = 1 + x(x - 5)$ 2. $f(x) = x^4 + 2x^2$

En los problemas 3-8, determine si la función dada es uno a uno al analizar su gráfica.

3. $f(x) = 5$ 4. $f(x) = 6x - 9$

5. $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ 6. $f(x) = |x + 1|$

7. $f(x) = x^3 - 8$ 8. $f(x) = x^3 - 3x$

En los problemas 9-12, la función f dada es uno a uno. Encuentre f^{-1} .

9. $f(x) = 3x^3 + 7$

10. $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$

11. $f(x) = \frac{2 - x}{1 - x}$

12. $f(x) = 5 - \frac{2}{x}$

En los problemas 13 y 14, compruebe que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

13. $f(x) = 5x - 10, f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

14. $f(x) = \frac{1}{x + 1}, f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{x}$

En los problemas 15-18, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el dominio y el rango de f^{-1} .

15. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

16. $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$

17. $f(x) = \frac{1}{x + 3}$

18. $f(x) = \frac{x - 1}{x - 4}$

En los problemas 19 y 20, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el punto sobre la gráfica de f^{-1} correspondiente al valor indicado de x en el dominio de f .

19. $f(x) = 2x^3 + 2x; x = 2$

20. $f(x) = 8x - 3; x = 5$

En los problemas 21 y 22, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre x en el dominio de f^{-1} que satisface la ecuación indicada.

21. $f(x) = x + \sqrt{x}; f^{-1}(x) = 9$

22. $f(x) = \frac{4x}{x + 1}; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$

En los problemas 23 y 24, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f .

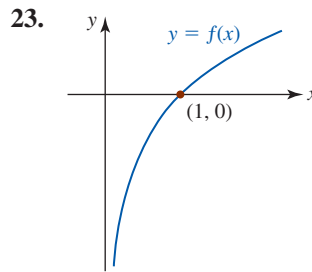


FIGURA 1.5.18 Gráfica para el problema 23

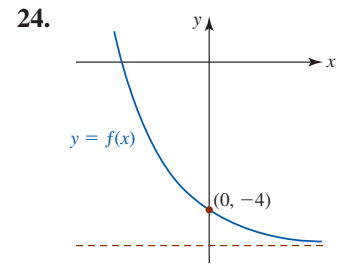


FIGURA 1.5.19 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25 y 26, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1} .

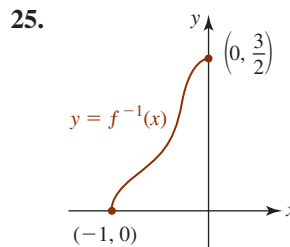


FIGURA 1.5.20 Gráfica para el problema 25

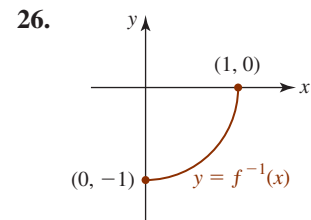


FIGURA 1.5.21 Gráfica para el problema 26

En los problemas 27-30, encuentre una función inversa f^{-1} cuyo rango sea el mismo que el de la función dada al restringir de manera conveniente el dominio de f .

27. $f(x) = (5 - 2x)^2$

28. $f(x) = 3x^2 + 9$

29. $f(x) = x^2 + 2x + 4$

30. $f(x) = -x^2 + 8x$

31. Si las funciones f y g tienen inversas, puede demostrarse que

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Compruebe esto para $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x + 5$.

32. La ecuación $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ define una función uno a uno $y = f(x)$. Encuentre $f^{-1}(x)$.

En los problemas 33-34, obtenga el valor exacto de la expresión dada. No use calculadora.

33. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

34. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$

35. $\arctan(1)$

36. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

37. $\cot^{-1}(-1)$

38. $\sec^{-1}(-1)$

39. $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

40. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

41. $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$

42. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{5}\right)$

43. $\tan\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)$

44. $\csc\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$

En los problemas 45-48, evalúe la expresión dada por medio de una identidad trigonométrica idónea.

45. $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$ 46. $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$
 47. $\sin\left(\arcsen\frac{\sqrt{3}}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$ 48. $\cos(\tan^{-1}4 - \tan^{-1}3)$

En los problemas 49-52, escriba la expresión dada como una cantidad algebraica en x .

49. $\cos(\sin^{-1}x)$ 50. $\tan(\sin^{-1}x)$
 51. $\sec(\tan^{-1}x)$ 52. $\sin(\sec^{-1}x), x \geq 1$

En los problemas 53 y 54, compruebe gráficamente las identidades por una reflexión y un desplazamiento vertical.

53. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
 54. $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$
 55. Demuestre que $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.
 56. Demuestre que $\csc^{-1}x = \sin^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.
 57. Si $t = \sin^{-1}(-2/\sqrt{5})$, encuentre los valores exactos de $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.
 58. Si $\theta = \arctan\frac{1}{2}$, encuentre los valores exactos de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$.

Problemas con calculadora/SAC

La mayoría de las calculadoras carece de teclas para $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$. En los problemas 59 y 60, use una calculadora y las identidades en los problemas 55 y 56 para calcular la cantidad dada.

59. a) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ b) $\csc^{-1}2$
 60. a) $\sec^{-1}(3.5)$ b) $\csc^{-1}(-1.25)$
 61. Use una calculadora para comprobar:
 a) $\tan(\tan^{-1}1.3) = 1.3$ y $\tan^{-1}(\tan 1.3) = 1.3$
 b) $\tan(\tan^{-1}5) = 5$ y $\tan^{-1}(\tan 5) = -1.2832$
 Explique por qué $\tan^{-1}(\tan 5) \neq 5$.
 62. Sea $x = 1.7$ radianes. Compare, de ser posible, los valores de $\sin^{-1}(\sin x)$ y $\sin(\sin^{-1}x)$. Explique las diferencias.

Aplicaciones

63. Considere una escalera de longitud L apoyada en un muro con una carga en el punto P como se muestra en la FIGURA 1.5.22. El ángulo β , al que la escalera está al borde de deslizarse, está definido por

$$\frac{x}{L} = \frac{c}{1 + c^2} (c + \tan \beta),$$

donde c es el coeficiente de fricción entre la escalera y el piso.

- a) Encuentre β cuando $c = 1$ y la carga está en la parte superior de la escalera.

- b) Encuentre β cuando $c = 0.5$ y la carga está a $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera empezando desde el piso.

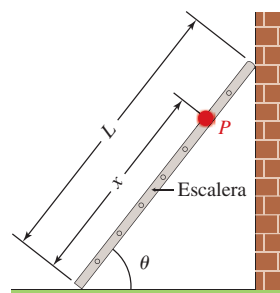


FIGURA 1.5.22 Escalera en el problema 63

64. Un avión se desplaza hacia el oeste a velocidad constante v_1 cuando sopla viento desde el norte a velocidad constante v_2 . El rumbo del avión al sur del oeste está dado por $\theta = \tan^{-1}(v_2/v_1)$. Vea la FIGURA 1.5.23. Encuentre el rumbo de un avión que se desplaza hacia el oeste a 300 km/h si sopla viento desde el norte a 60 km/h.

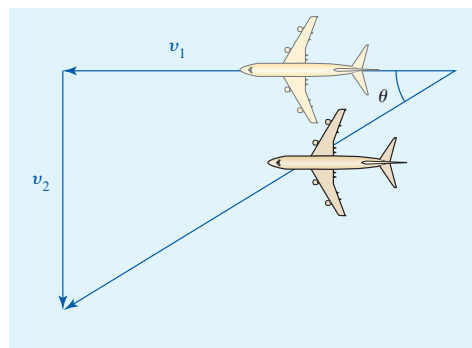


FIGURA 1.5.23 Avión en el problema 64

Piense en ello

En los problemas 65 y 66, use calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de la función dada donde x es cualquier número real. Explique por qué las gráficas no violan los teoremas 1.5.2i) y 1.5.2iii).

65. $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ 66. $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$
 67. Analice: ¿es posible que una función uno a uno sea periódica?
 68. ¿Cómo están relacionadas las funciones uno a uno $y = f(x)$ en las FIGURAS 1.5.24a) y 1.5.24b) con las funciones inversas $y = f^{-1}(x)$? Encuentre por lo menos tres funciones explícitas con esta propiedad.

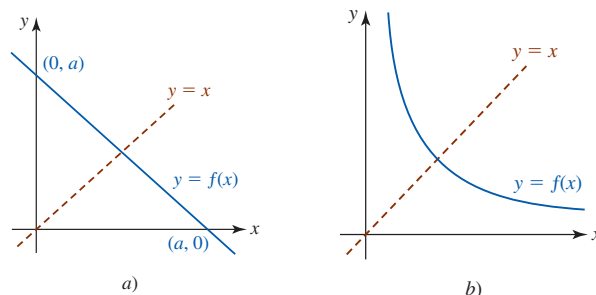


FIGURA 1.5.24 Gráfica para el problema 68

1.6 Funciones exponencial y logarítmica

■ **Introducción** En las secciones precedentes se consideraron funciones como $f(x) = x^2$; es decir, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante 2. A continuación abordaremos funciones como $f(x) = 2^x$ con una base constante 2 y exponente variable x .

Definición 1.6.1 Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces una **función exponencial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = b^x. \quad (1)$$

El número b se denomina **base** y x se denomina **exponente**.

En (1), la base b se restringe a números positivos para garantizar que b^x sea un número real. También, $b = 1$ carece de interés puesto que $f(x) = 1^x = 1$.

El **dominio** de una función exponencial f definida en (1) es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

■ **Exponentes** Debido a que el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de números reales, el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base $b = 3$ y el exponente x es un *número racional*, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

La función (1) también está definida para todo *número irracional* x . El siguiente procedimiento ilustra una forma para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. A partir de la representación decimal $\sqrt{2} = 1.414213562 \dots$ se observa que los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots$$

Una definición de b^x , para x irracional, está dada por son sucesivamente mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Al usar estos números racionales como exponentes, es de esperar que los números

$$b^x = \lim_{t \rightarrow x} b^t,$$

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \dots$$

donde t es racional. Esto se lee “ b^x es el **límite** de b^t cuando t tiende a x ”. Los límites se estudiarán en detalle en el capítulo 2.

sean sucesivamente mejores aproximaciones a $3^{\sqrt{2}}$. De hecho, puede demostrarse que esto es cierto con una definición precisa de b^x para un valor irracional de x . Pero a nivel práctico es posible usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora para obtener la aproximación 4.728804388 para $3^{\sqrt{2}}$.

■ **Leyes de los exponentes** Puesto que b^x está definido para todos los números reales x cuando $b > 0$, puede demostrarse que las leyes de los exponentes se cumplen para todos los exponentes que sean números reales. Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 denotan números reales, entonces

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2} & \text{ii)} \quad \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2} & \text{iii)} \quad (b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2} \\ \text{iv)} \quad \frac{1}{b^{x_2}} = b^{-x_2} & \text{v)} \quad (ab)^x = a^x b^x & \text{vi)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \end{array}$$

■ **Gráficas** Para (1) se distinguen dos tipos de gráficas, dependiendo de si la base b satisface $b > 1$ o $0 < b < 1$. El siguiente ejemplo ilustra las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Antes de graficar es posible hacer algunas observaciones intuitivas sobre ambas funciones. Puesto que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de 3^x y $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ son positivos para todo número real x . Además, ni 3^x ni $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ pueden ser 0 para ninguna x , de modo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ no tienen intersecciones x . También, $3^0 = 1$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ significan que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ tienen la misma intersección y $(0, 1)$.

EJEMPLO 1 Gráficas de funciones exponenciales

Grafique las funciones

$$\text{a)} \quad f(x) = 3^x, \quad \text{b)} \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Solución

- a) Primero se elabora una tabla de algunos valores funcionales correspondientes a valores de x seleccionados de antemano. Como se muestra en la FIGURA 1.6.1a), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

y se unen con una curva continua. La gráfica muestra que f es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

- b) Procediendo como en el inciso a), se elabora una tabla de algunos valores

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

de la función correspondientes a valores de x seleccionados de antemano. Observe, por ejemplo, por las leyes de los exponentes $f(-2) = (\frac{1}{3})^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$. Como se muestra en la figura 1.6.1b), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla y se unen con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que f es una función decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. ■

Nota: Las funciones exponenciales con bases que satisfacen $0 < b < 1$, como $b = \frac{1}{3}$, a menudo se escriben en forma alterna. Al escribir $y = (\frac{1}{3})^x$ como $y = (3^{-1})^x$ y usando *iii*) de las leyes de los exponentes se observa que $y = (\frac{1}{3})^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$.

■ **Asíntota horizontal** La FIGURA 1.6.2 ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Pero hay un aspecto más importante de todas estas gráficas. Observe en la figura 1.6.2 que para $0 < b < 1$, los valores de la función $f(x)$ tienden a 0 cuando x crece sin cota en la dirección positiva (la gráfica roja), y para $b > 1$ los valores funcionales $f(x)$ tienden a 0 cuando x se crece sin cota en la dirección negativa (la gráfica azul). En otras palabras, la recta $y = 0$ (el eje x) es una **asíntota horizontal** para ambos tipos de gráficas exponenciales.

■ **Propiedades de una función exponencial** La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial f con base b . Vuelva a analizar las gráficas en la figura 1.6.2 mientras lee la lista.

- El dominio de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- La intersección y de f es $(0, 1)$. La gráfica no tiene intersección x .
- La función f es creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje x , es decir $y = 0$, es una asíntota horizontal para la gráfica de f .
- La función f es uno a uno.

Aunque todas las gráficas de $y = b^x$ cuando $b > 1$ comparten la misma forma básica y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras más grande es la base b , el ascenso de la gráfica es más pronunciado cuando x crece. En la FIGURA 1.6.3 se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$ en verde, azul, dorado y rojo, respectivamente, sobre los mismos ejes de coordenadas. A partir de esta gráfica observamos que los valores de $y = (1.2)^x$ crecen lentamente cuando x crece.

El hecho de que (1) es una función uno a uno se concluye a partir de la prueba de la recta horizontal que se analizó en la sección 1.5.

■ **El número e** La mayoría de los estudiantes de matemáticas ha escuchado acerca del famoso número irracional $\pi = 3.141592654 \dots$, y quizás haya trabajado con él. En cálculo y matemáticas aplicadas, podría decirse que el número irracional

$$e = 2.718281828459 \dots \quad (2)$$

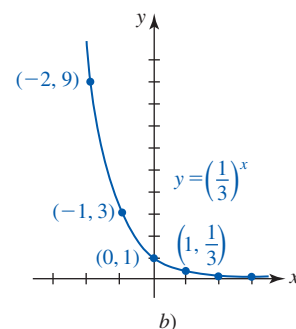
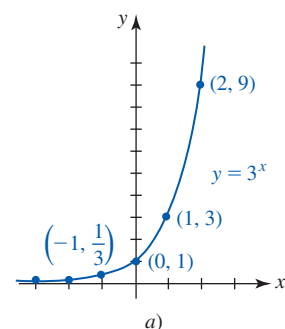


FIGURA 1.6.1 Gráfica de las funciones en el ejemplo 1

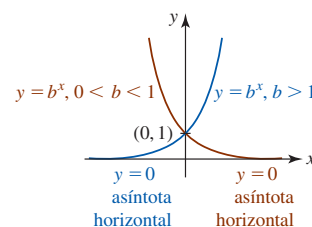


FIGURA 1.6.2 f creciente para $b > 1$; f decreciente para $0 < b < 1$

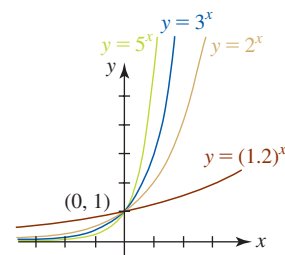


FIGURA 1.6.3 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3, 5$

desempeña un papel más importante que el número π . La definición usual del número e es que se trata del número al que se acerca la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando se deja que x crezca sin cota en la dirección positiva. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la expresión *se acerca*, entonces el hecho de que $f(x) \rightarrow e$ cuando $x \rightarrow \infty$ es evidente en la tabla de valores numéricos de f

x	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$(1 + 1/x)^x$	2.704814	2.716924	2.718146	2.718268	2.718280

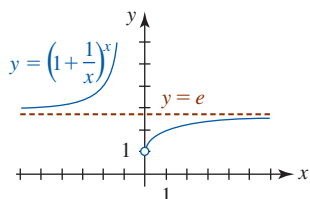


FIGURA 1.6.4 $y = e$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f

y a partir de la gráfica en la FIGURA 1.6.4. En la figura, la recta horizontal discontinua roja $y = e$ es un asíntota horizontal de la gráfica de f . También se dice que e es el *límite* de $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando $x \rightarrow \infty$ y se escribe

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (3)$$

A menudo observará una definición alterna del número e . Si en (3) se hace $h = 1/x$, entonces cuando $x \rightarrow \infty$ tendremos simultáneamente $h \rightarrow 0$. Por tanto, una forma equivalente de (3) es

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}. \quad (4)$$

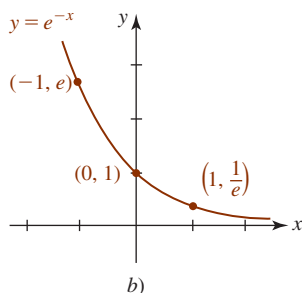
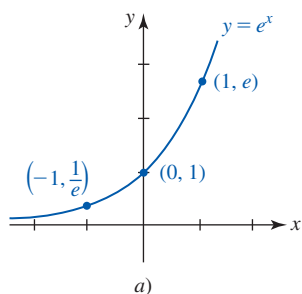


FIGURA 1.6.5 Función exponencial natural en a)

■ **La función exponencial natural** Cuando la base en (1) se escoge como $b = e$, la función $f(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Puesto que $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ se proporcionan en la FIGURA 1.6.5. A la vista de ello, $f(x) = e^x$ no cuenta con ninguna característica observable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene ninguna propiedad especial diferente a las que se proporcionaron en la lista de la página 49. Preguntas de por qué $f(x) = e^x$ es una función “natural” y francamente la función exponencial más importante, se responderán en los siguientes capítulos y en sus cursos más allá de cálculo.

■ **Inversa de la función exponencial** Puesto que una función exponencial $y = b^x$ es uno a uno, se sabe que tiene una función inversa. Para encontrar su inversa, se intercambian las variables x y y para obtener $x = b^y$. Esta última fórmula define a y como una función de x :

- y es el exponente de la base b que produce x .

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, la línea precedente puede volver a escribirse como:

- y es el logaritmo de la base b que produce x .

La última línea se abrevia usando la notación $y = \log_b x$ y se denomina **función logarítmica**.

Definición 1.6.2 Función logarítmica

La **función logarítmica** con base $b > 0, b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y. \quad (5)$$

Para $b > 0$ no hay ningún número real y para el cual b^y sea 0 o negativo. Así, a partir de $x = b^y$ se concluye que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de números reales positivos $(0, \infty)$.

Para enfatizar, todo lo que se ha dicho en las frases precedentes es:

- La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes.

es decir, significan lo mismo. Como una consecuencia, dentro de un contexto específico como al resolver un problema, es posible usar cualquier forma que sea la más conveniente. La lista siguiente ilustra varios ejemplos de declaraciones logarítmicas y exponenciales equivalentes:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$

■ **Gráficas** Debido a que una función logarítmica es la inversa de una función exponencial, es posible obtener la gráfica de la primera al reflejar la gráfica de la segunda en la recta $y = x$. A medida que inspeccione las dos gráficas en la FIGURA 1.6.6, recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se vuelven, a su vez, el rango $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. Observe que la intersección y $(0, 1)$ de la función exponencial (gráfica azul) se vuelve la intersección x $(1, 0)$ de la función logarítmica (gráfica roja). También, cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ para la gráfica de $y = b^x$ se vuelve una asíntota vertical para la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 1.6.6 se observa que para $b > 1$, $x = 0$, que es la ecuación del eje y , es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = \log_b x$.

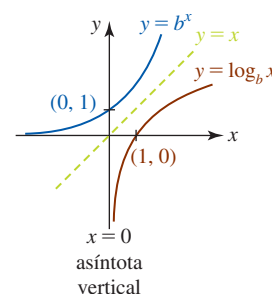


FIGURA 1.6.6 Gráfica de la función logarítmica con base $b > 1$

■ **Propiedades de la función logarítmica** En la lista siguiente se resumen algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$:

- El dominio de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- La intersección x de f es $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección y .
- La función f es creciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje y , es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para la gráfica de f .
- La función f es uno a uno.

Se pide su atención especial para el tercer elemento de la lista anterior

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad b^0 = 1. \quad (6)$$

También, $\log_b b = 1 \quad \text{puesto que} \quad b^1 = b. \quad (7)$

El resultado en (7) significa que además de $(1, 0)$, la gráfica de cualquier función logarítmica (5) con base b también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también produce dos identidades útiles algunas veces. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y luego $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{y} \quad y = \log_b b^y. \quad (8)$$

Por ejemplo, a partir de $2^{\log_2 10} = 10$ y $\log_3 3^7 = 7$.

■ **Logaritmo natural** Los logaritmos con base $b = 10$ se denominan **logaritmos comunes** y los logaritmos con base $b = e$ se llaman **logaritmos naturales**. Además, suele ser costumbre escribir el logaritmo natural $\log_e x$ como $\ln x$. Puesto que $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma logarítmica característica que se muestra en rojo en la figura 1.6.6. Para la base $b = e$, (5) se vuelve

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y. \quad (9)$$

Los análogos de (6) y (7) para el logaritmo natural son

$$\ln 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad e^0 = 1. \quad (10)$$

$$\ln e = 1 \quad \text{puesto que} \quad e^1 = e. \quad (11)$$

Las identidades en (8) se vuelven

$$x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y. \quad (12)$$

Por ejemplo, a partir de (12), $e^{\ln 25} = 25$.

Leyes de los logaritmos Las leyes de los exponentes pueden volver a plantearse de manera equivalente como las leyes de los logaritmos. Por ejemplo, si $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$, entonces por (5), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$. Por i) de las leyes de los exponentes, $MN = b^{x_1+x_2}$. Esto, expresado como un logaritmo, es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Al sustituir x_1 y x_2 se obtiene $\log_b M + \log_b N = \log_b MN$. Las partes restantes del siguiente teorema pueden demostrarse de la misma manera.

Teorema 1.6.1 Leyes de los logaritmos

Para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$, y números enteros positivos M y N :

i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

ii) $\log_b \left(\frac{M}{N} \right) = \log_b M - \log_b N$

iii) $\log_b M^c = c \log_b M$, para cualquier número real c .

EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplifique y escriba $\frac{1}{2} \ln 36 + 2 \ln 4$ como un logaritmo único.

Solución Por iii) de las leyes de los logaritmos, puede escribirse

$$\frac{1}{2} \ln 36 + 2 \ln 4 = \ln(36)^{1/2} + \ln 4^2 = \ln 6 + \ln 16.$$

Entonces, por i) de las leyes de los logaritmos,

$$\frac{1}{2} \ln 36 + 2 \ln 4 = \ln 6 + \ln 16 = \ln(6 \cdot 16) = \ln 96. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Reescribir expresiones logarítmicas

Use las leyes de los logaritmos para volver a escribir cada expresión y evalúe.

a) $\ln \sqrt{e}$ b) $\ln 5e$ c) $\ln \frac{1}{e}$

Solución

a) Puesto que $\sqrt{e} = e^{1/2}$ por iii) de las leyes de los logaritmos se tiene:

$$\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{a partir de (11), } \ln e = 1$$

b) Por i) de las leyes de los logaritmos y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094. \quad \leftarrow \text{a partir de (11), } \ln e = 1$$

c) Por ii) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1. \quad \leftarrow \text{a partir de (10) y (11)}$$

Observe que iii) de las leyes de los logaritmos también puede usarse aquí:

$$\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1) \ln e = -1. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones

a) Resuelva la ecuación logarítmica $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para x .

b) Resuelva la ecuación exponencial $e^{10k} = 7$ para k .

Solución

- a) Por i) de las leyes de los logaritmos, el miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Entonces, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) - \ln(2x + 5) = 0 \quad \text{o bien} \quad \ln \frac{8x - 2}{2x + 5} = 0.$$

Por (9) se concluye que

$$\frac{8x - 2}{2x + 5} = e^0 = 1 \quad \text{o bien} \quad 8x - 2 = 2x + 5.$$

A partir de la última ecuación encontramos que $x = \frac{7}{6}$.

- b) Se usa (9) para volver a escribir la expresión exponencial $e^{10k} = 7$ como la expresión logarítmica $10k = \ln 7$. En consecuencia, con ayuda de una calculadora

$$k = \frac{1}{10} \ln 7 \approx 0.1946. \quad \blacksquare$$

■ Cambio de base La gráfica de $y = 2^x - 5$ es la gráfica de $y = 2^x$ desplazada 5 unidades hacia abajo. Como se observa en la FIGURA 1.6.7, la gráfica tiene una intersección x . Al hacer $y = 0$ vemos que x es la solución de la ecuación $2^x - 5 = 0$ o $2^x = 5$. Así, una solución perfectamente válida es $x = \log_2 5$. Pero desde un punto de vista computacional (es decir, el hecho de expresar x como un número), la última respuesta no es aconsejable porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica con base 2. Podemos calcular la respuesta al cambiar $\log_2 5$ al logaritmo natural al tomar simplemente el log natural de ambos miembros de la ecuación exponencial $2^x = 5$:

$$\begin{aligned} \ln 2^x &= \ln 5 \\ x \ln 2 &= \ln 5 \\ \text{Nota: En realidad dividimos los logaritmos aquí} \rightarrow x &= \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219. \end{aligned}$$

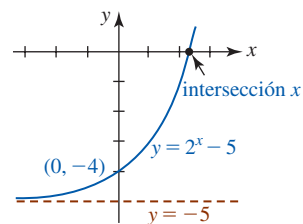


FIGURA 1.6.7 Intersección x de $y = 2^x - 5$

Por cierto, puesto que se empezó con $x = \log_2 5$, el último resultado también demuestra la igualdad $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$. Entonces, la intersección x de la gráfica es $(\log_2 5, 0) = (\ln 5 / \ln 2, 0) \approx (2.32, 0)$.

En general, para convertir un logaritmo con cualquier base $b > 0$ en logaritmo natural, primero reescribimos la expresión logarítmica $x = \log_b N$ como una expresión exponencial equivalente $b^x = N$. Luego se toma el logaritmo natural a ambos miembros de la última igualdad $x \ln b = \ln N$ y se despeja x . Esto produce la **fórmula general de cambio de base**:

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}. \quad (13)$$

Ejercicios 1.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-6.

■ Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función dada. Encuentre la intersección y y la asíntota horizontal de la gráfica.

1. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

2. $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

3. $f(x) = -2^x$

4. $f(x) = -2^{-x}$

5. $f(x) = -5 + e^x$

6. $f(x) = 2 + e^{-x}$

En los problemas 7-10, encuentre una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

7. $(3, 216)$

8. $(-1, 5)$

9. $(-1, e^2)$

10. $(2, e)$

En los problemas 11-14, use una gráfica para resolver la desigualdad dada para x .

11. $2^x > 16$

12. $e^x \leq 1$

$$13. e^{x-2} < 1 \qquad 14. \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$$

En los problemas 15 y 16, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función dada es par. Trace la gráfica de f .

$$15. f(x) = e^{x^2} \qquad 16. f(x) = e^{-|x|}$$

En los problemas 17 y 18, use la gráfica obtenida en los problemas 15 y 16 como ayuda para trazar la gráfica de la función f dada.

$$17. f(x) = 1 - e^{x^2} \qquad 18. f(x) = 2 + 3e^{-|x|}$$

19. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de f .

20. Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de f .

En los problemas 21 y 22, trace la gráfica de la función f dada definida por partes.

$$21. f(x) \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad 22. f(x) \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$$

En los problemas 23-26, vuelva a escribir la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica equivalente.

$$23. 4^{-1/2} = \frac{1}{2} \qquad 24. 9^0 = 1$$

$$25. 10^4 = 10\,000 \qquad 26. 10^{0.3010} = 2$$

En los problemas 27-30, vuelva a escribir la expresión logarítmica dada como una expresión exponencial equivalente.

$$27. \log_2 128 = 7 \qquad 28. \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

$$29. \log_{\sqrt{3}} 81 = 8 \qquad 30. \log_{16} 2 = \frac{1}{4}$$

En los problemas 31 y 32, encuentre una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

$$31. (49, 2) \qquad 32. \left(4, \frac{1}{3}\right)$$

En los problemas 33-38, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

$$33. \ln e^e \qquad 34. \ln(e^4 e^9)$$

$$35. 10^{\log_{10} 6^2} \qquad 36. 25^{\log_5 8}$$

$$37. e^{-\ln 7} \qquad 38. e^{\frac{1}{2} \ln \pi}$$

En los problemas 39-42, encuentre el dominio de la función f dada. Encuentre la intersección x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de f .

$$39. f(x) = -\ln x \qquad 40. f(x) = -1 + \ln x$$

$$41. f(x) = -\ln(x+1) \qquad 42. f(x) = 1 + \ln(x-2)$$

En los problemas 43 y 44, encuentre el dominio de la función f dada.

$$43. f(x) = \ln(9 - x^2) \qquad 44. f(x) = \ln(x^2 - 2x)$$

45. Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f . Encuentre las intersecciones x y la asíntota vertical de la gráfica.

46. Use la gráfica obtenida en el problema 45 para trazar la gráfica de $y = \ln|x-2|$. Encuentre las intersecciones x y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 47-50, use las leyes de los logaritmos para volver a escribir la expresión dada como un logaritmo.

$$47. \ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2) \qquad 48. \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$$

$$49. \ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6 \qquad 50. 5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$$

En los problemas 51-54, use las leyes de los logaritmos de modo que $\ln y$ no contenga productos, cocientes ni potencias.

$$51. y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^3+2}} \qquad 52. y = \sqrt{\frac{(2x+1)(3x+2)}{4x+3}}$$

$$53. y = \frac{(x^3-3)^5(x^4+3x^2+1)^8}{\sqrt{x}(7x+5)^9}$$

$$54. y = 64x^6\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x^2+2}$$

En los problemas 55 y 56, use el logaritmo natural para encontrar x en el dominio de la función dada para el que f asume el valor indicado.

$$55. f(x) = 6^x; \quad f(x) = 51 \qquad 56. f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad f(x) = 7$$

En los problemas 57-60, use el logaritmo natural para despejar x .

$$57. 2^{x+5} = 9 \qquad 58. 4 \cdot 7^{2x} = 9$$

$$59. 5^x = 2e^{x+1} \qquad 60. 3^{2(x-1)} = 2^{x-3}$$

En los problemas 61 y 62, despeje x .

$$61. \ln x + \ln(x-2) = \ln 3$$

$$62. \ln 3 + \ln(2x-1) = \ln 4 + \ln(x+1)$$

Modelos matemáticos

63. Crecimiento exponencial Un modelo exponencial para el número de bacterias en un cultivo en el instante t está dado por $P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial y $k > 0$ es la constante de crecimiento.

- Después de 2 horas, se observa que el número inicial de bacterias en un cultivo se ha duplicado. Encuentre un modelo de crecimiento exponencial $P(t)$.
- Según el modelo del inciso a), ¿cuál es el número de bacterias presentes en el cultivo al cabo de 5 horas?
- Encuentre el tiempo necesario para que el cultivo crezca hasta 20 veces su tamaño inicial.

64. Desintegración exponencial Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante t está dado por $A(t) = A_0 e^{kt}$, donde A_0 es la cantidad inicial y $k < 0$ es la constante de desintegración.

- Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había decrecido 3%. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de t horas.

- b) Encuentre la cantidad remanente después de 24 horas.
 c) Encuentre el instante en que $A(t) = \frac{1}{2}A_0$ se denomina **vida media** de la sustancia. ¿Cuál es la vida media de la sustancia en el inciso a)?

65. Crecimiento logístico Un estudiante contagiado con el virus de influenza vuelve a un campus aislado de una universidad donde hay 2 000 estudiantes. El número de estudiantes infectados después de t días del regreso del estudiante se pronostica por medio de la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

- a) Según este modelo matemático, ¿cuántos estudiantes estarán contagiados por la influenza después de 5 días?
 b) ¿En cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población de estudiantes?
 c) ¿Cuántos estudiantes pronostica el modelo que estarán infectados al cabo de un muy largo periodo?
 d) Trace la gráfica de $P(t)$.

66. Ley de enfriamiento de Newton Si un objeto o cuerpo se coloca en un medio (como aire, agua, etc.) que se mantiene a temperatura constante T_m , y si la temperatura inicial del objeto es T_0 , entonces la ley de enfriamiento de Newton pronostica que la temperatura del

objeto en el instante t está dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}, k < 0.$$

- a) Un pastel se retira de un horno donde la temperatura era 350 °F y se coloca en una cocina donde la temperatura es constante a 75 °F. Un minuto después se mide que la temperatura del pastel es 300 °F. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 6 minutos?
 b) ¿En qué instante la temperatura del pastel es 80 °F?

≡ Piense en ello

67. Analice: ¿cómo es posible obtener las gráficas de las funciones dadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ por medio de una transformación rígida (desplazamiento o reflexión)?

- a) $y = \ln 5x$ b) $y = \ln \frac{x}{4}$
 c) $y = \ln x^{-1}$ d) $y = \ln(-x)$

- 68. a)** Use un instrumento de graficado para obtener la gráfica de la función $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
b) Demuestre que f es una función impar; es decir, $f(-x) = -f(x)$.

1.7 De las palabras a las funciones

■ Introducción En los capítulos 4 y 6 hay varias instancias en las que se espera que usted traduzca las palabras que describen una *función* o una *ecuación* en símbolos matemáticos.

En esta sección el centro de atención lo constituyen problemas que implican funciones. Se empieza con una descripción verbal sobre el producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 5. Expresé el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números.

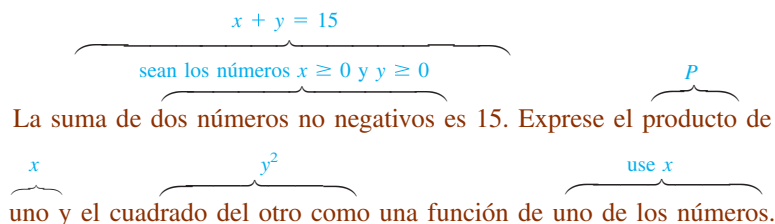
Solución Primero, los números se representan por los símbolos x y y y se recuerda que *no negativos* significa que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Al usar estos símbolos, las palabras “la suma. . . es 5” se traduce en la ecuación $x + y = 5$; ésta *no* es la función que se busca. La palabra *producto* en la segunda oración sugiere el uso del símbolo P para denotar la función que se quiere. Así, P es el producto de uno de los números; por ejemplo, x y el cuadrado del otro, por ejemplo, y^2 :

$$P = xy^2. \quad (1)$$

No, aún no hemos terminado porque se supone que P “es una función de *uno* de los números”. Ahora usamos el hecho de que los números x y y están relacionados por $x + y = 5$. A partir de esta última ecuación, sustituimos $y = 5 - x$ en (1) para obtener el resultado deseado:

$$P(x) = x(5 - x)^2. \quad (2) \blacksquare$$

A continuación se muestra un diagrama simbólico del análisis del problema dado en el ejemplo 1:



Observe que la segunda oración es vaga respecto a cuál número se eleva al cuadrado. Esto implica que en realidad no importa: (1) también podría escribirse como $P = yx^2$. También hubiéramos podido usar $x = 5 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (5 - y)y^2$. En un entorno de cálculo no importaría si trabajamos con $P(x)$ o $P(y)$ porque al encontrar *uno* de los números automáticamente hallamos el otro a partir de la ecuación $x + y = 5$. Esta última ecuación se denomina **restricción**. Una restricción no sólo define una relación entre las variables x y y , sino que a menudo impone una limitación sobre la forma en que pueden variar x y y . Como veremos en el siguiente ejemplo, las restricciones ayudan a determinar el dominio de la función.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Tomado fuera del contexto del planteamiento del problema en el ejemplo 1, podría concluirse que puesto que

$$P(x) = x(5 - x)^2 = 25x - 10x^2 + x^3$$

es una función polinomial, su dominio es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. Pero en el contexto del problema original, los números eran no negativos. A partir del requerimiento de que $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ se obtiene $x \geq 0$ y $x \leq 5$, lo cual significa que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 5$. Al usar notación de intervalos, el dominio de la función producto P en (2) es el intervalo cerrado $[0, 5]$.

A menudo en problemas que requieren la traducción de palabras en una función, una buena idea es trazar una curva o imagen e identificar cantidades dadas en el dibujo. Éste debe ser sencillo.

EJEMPLO 3 Cantidad de valla

Un ranchero desea cercar un terreno rectangular cuya área es de $1\,000\text{ m}^2$. El terreno será cercado y dividido en porciones iguales mediante una cerca paralela a dos lados del terreno. Exprese la cantidad de valla usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno.

Solución El dibujo debe ser un rectángulo con una recta trazada en su parte media, semejante a la FIGURA 1.7.1. Como se muestra en la figura, sea $x > 0$ la longitud del terreno rectangular y sea $y > 0$ su ancho. La función que se busca es la “cantidad de valla”. Si el símbolo F representa esta cantidad, entonces la suma de las longitudes de las *cinco* porciones —dos horizontales y tres verticales— de la valla es

$$F = 2x + 3y. \quad (4)$$

Pero el área del terreno cercado debe ser de $1\,000\text{ m}^2$, de modo que x y y deben estar relacionados por la restricción $xy = 1\,000$. A partir de la última ecuación se obtiene $y = 1\,000/x$, que puede usarse para eliminar y en (4). Así, la cantidad de valla F como una función de la longitud x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, o bien,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \quad (5)$$

Puesto que x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, se concluye que es positiva. Pero además de esta restricción, sobre x no hay ninguna otra. Entonces, a diferencia del ejemplo previo, la función (5) no está definida sobre un intervalo cerrado. El dominio de $F(x)$ es el intervalo $(0, \infty)$.

EJEMPLO 4 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$. Vea la FIGURA 1.7.2a). Exprese el área del rectángulo como una función de x .

Solución Si (x, y) , $x > 0$, $y > 0$, denota el vértice de un rectángulo sobre el círculo en el primer cuadrante, entonces como se muestra en la figura 1.7.2b), el área A es longitud $\times$ ancho, o bien,

$$A = (2x) \times y = 2xy. \quad (6)$$

Si se permite $x > 5$, entonces $y = 5 - x < 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $y > 0$.

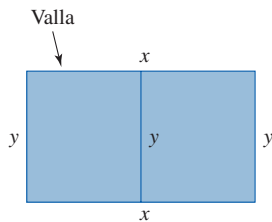


FIGURA 1.7.1 Terreno rectangular en el ejemplo 3

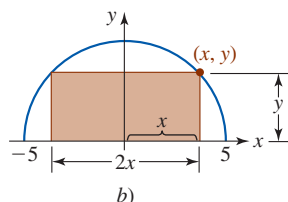
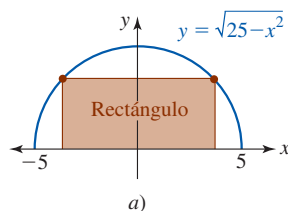


FIGURA 1.7.2 Rectángulo en el ejemplo 4

La ecuación del semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ es la restricción en este problema. Esta ecuación se usa para eliminar y en (6) y obtener el área del rectángulo como una función de x ,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}. \quad (7)$$

El dominio implícito de (7) es el intervalo cerrado $[-5, 5]$, pero debido a que asumimos que (x, y) era un punto sobre el semicírculo en el primer cuadrante, debemos tener $x > 0$. Así, el dominio de (7) es el intervalo $(0, 5)$. ■

EJEMPLO 5 Distancia

Expresa la distancia de un punto (x, y) en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ hasta el punto $(2, 4)$ como una función de x .

Solución Sea (x, y) un punto en el primer cuadrante sobre el círculo y sea d la distancia de (x, y) a $(2, 4)$. Vea la FIGURA 1.7.3. Entonces, a partir de la fórmula de la distancia,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \quad (8)$$

La restricción en este problema es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. A partir de esta ecuación es posible sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (8) por el número 1. Además, al usar la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ es posible eliminar el símbolo y en (8). Así, la distancia d como una función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \quad (9)$$

Puesto que (x, y) es un punto sobre el círculo en el primer cuadrante, la variable x puede variar entre 0 y 1; es decir, el dominio de la función en (9) es el intervalo abierto $(0, 1)$. ■

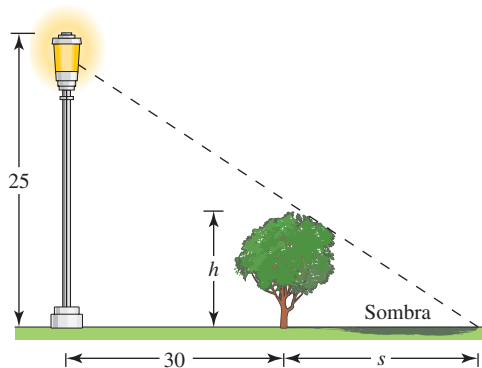
Si un problema en lenguaje coloquial implica triángulos, es necesario estudiar el problema con cuidado y determinar qué es aplicable: el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría con triángulos rectángulos.

EJEMPLO 6 Longitud de una sombra

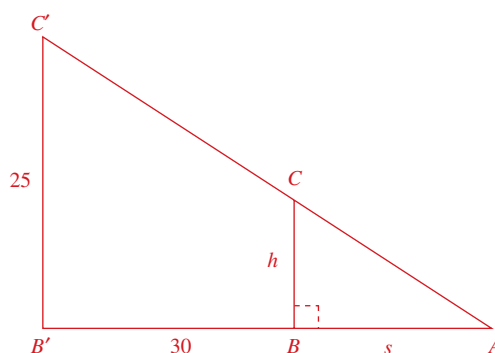
Un árbol se planta a 30 pies de la base de un poste que mide 25 pies de altura. Expresa la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.

Solución Como se muestra en la FIGURA 1.7.4a), h y s denotan la altura del árbol y la longitud de su sombra, respectivamente. Debido a que los triángulos mostrados en la figura 1.7.4b) son rectángulos, podría pensarse en utilizar el teorema de Pitágoras. Para este problema, no obstante, el teorema de Pitágoras llevaría por mal camino. La cuestión importante que debe observarse aquí es que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes. Luego aplicamos el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales para escribir

$$\frac{h}{s} = \frac{25}{s + 30} \quad \text{o bien} \quad (s + 30)h = 25s.$$

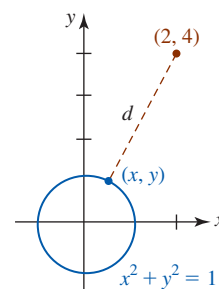


a)



b)

FIGURA 1.7.4 Poste y árbol en el ejemplo 6

FIGURA 1.7.3 Distancia d en el ejemplo 5

◀ Se considera que un punto en el eje x o en el eje y no está en ningún cuadrante.

Al despejar s en la última ecuación en términos de h se obtiene la función racional

$$s(h) = \frac{30h}{25 - h}. \quad (10)$$

Tiene sentido físico tomar el dominio de la función (10) definido por $0 \leq h < 25$. Si $h > 25$, entonces $s(h)$ es negativo, lo cual no tiene sentido en el contexto físico del problema. ■

EJEMPLO 7 Longitud de una escalera

Una pared de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio. Una escalera, sostenida por la pared, se coloca en el piso como se muestra en la FIGURA 1.7.5. Exprese la longitud de la escalera en términos de la distancia x entre la base de la pared y la base de la escalera.

Solución Sea L la longitud de la escalera. Con las variables x y y definidas en la figura 1.7.5, de nuevo se observa que hay dos triángulos rectángulos; el mayor tiene tres lados con longitudes L , y y $x + 5$, y el menor tiene dos lados de longitudes x y 10. La escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, de modo que por el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2. \quad (11)$$

Los triángulos rectángulos en la figura 1.7.5 son semejantes porque ambos contienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo común que la escalera forma con el piso. De nuevo se usa el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Esto permite escribir lo siguiente:

$$\frac{y}{x + 5} = \frac{10}{x} \quad \text{de modo que} \quad y = \frac{10(x + 5)}{x}.$$

Al usar el último resultado, (11) se vuelve

$$\begin{aligned} L^2 &= (x + 5)^2 + \left[\frac{10(x + 5)}{x} \right]^2 \\ &= (x + 5)^2 \left[1 + \frac{100}{x^2} \right] \\ &= (x + 5)^2 \left[\frac{x^2 + 100}{x^2} \right]. \end{aligned}$$

Al tomar la raíz cuadrada se obtiene L como una función de x ,

$$L(x) = \frac{x + 5}{x} \sqrt{x^2 + 100}. \quad (12) \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Distancia

Un avión vuela a una altura constante de 3 000 pies sobre el nivel del suelo alejándose de un observador que está en tierra. Exprese la distancia horizontal entre el avión y el observador como una función del ángulo de elevación del plano medido por el observador.

Solución Como se muestra en la FIGURA 1.7.6, sea x la distancia horizontal entre el avión y el observador, y sea θ el ángulo de elevación. El triángulo en la figura es rectángulo. Así, por trigonometría de triángulos rectos, el cateto opuesto a θ está relacionado con el cateto adyacente a θ por $\tan \theta = \text{op}/\text{ady}$. En consecuencia,

$$\tan \theta = \frac{3\,000}{x} \quad \text{o bien} \quad x(\theta) = 3\,000 \cot \theta, \quad (13)$$

donde $0 < \theta < \pi/2$. ■

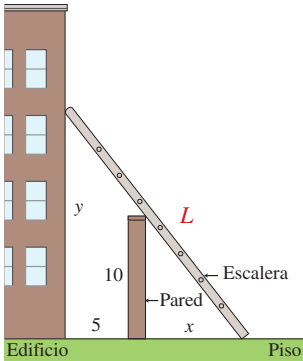


FIGURA 1.7.5 Escalera en el ejemplo 7

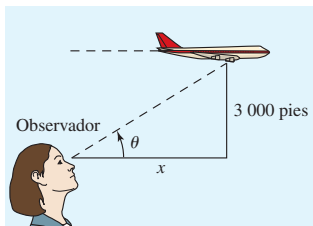


FIGURA 1.7.6 Avión en el ejemplo 8

Ejercicios 1.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-7.

Fundamentos

En los problemas 1-32, traduzca las palabras en una función idónea. Proporcione el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.
2. Exprese la suma de dos números diferentes de cero y su recíproco como una función del número.
3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro como una función de uno de los números.
4. Sean m y n enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S . Exprese el producto de la m -ésima potencia de uno y la n -ésima potencia del otro como una función de uno de los números.
5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.
6. El área de un rectángulo es 400 pulg². Exprese el perímetro del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.
7. Exprese el área del rectángulo sombreado en la FIGURA 1.7.7 como una función de x .

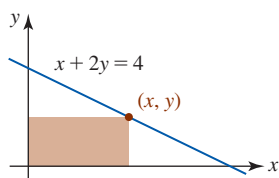


FIGURA 1.7.7 Rectángulo en el problema 7

8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto $(2, 4)$ mostrado en la FIGURA 1.7.8 como una función de x .

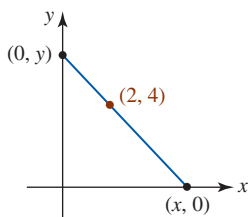


FIGURA 1.7.8 Segmento de recta en el problema 8

9. Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto $(2, 3)$.
10. Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ al punto $(0, 1)$.
11. Exprese el perímetro de un cuadrado como una función de su área A .
12. Exprese el área de un círculo como una función de su diámetro d .
13. Exprese el diámetro de un círculo como una función de su circunferencia C .

14. Exprese el volumen de un cubo como una función del área A de su base.
15. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de su altura h .
16. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de uno de sus lados.
17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de círculo. Exprese el área del círculo como una función de x .
18. A un alambre de longitud L se cortan x unidades desde un extremo. Una parte del alambre se dobla en forma de cuadrado y la otra parte se dobla en forma de círculo. Exprese la suma de las áreas como una función de x .
19. Un rancho desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1 000 pies² usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$1.60 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$4 por pie.
20. El marco de un cometa consta de seis partes de plástico ligero. El marco externo del cometa consta de cuatro partes cortadas de antemano; dos partes de longitud 2 pies y dos partes de longitud 3 pies. Exprese el área del cometa como una función de x , donde $2x$ es la longitud de la barra transversal horizontal mostrada en la FIGURA 1.7.9.

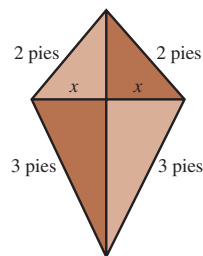


FIGURA 1.7.9 Cometa en el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta con un volumen de 450 pulg³, de modo que la longitud de su base sea tres veces su ancho. Exprese el área superficial de la caja como una función de su ancho.
22. Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, tiene un radio de 5 pies y una altura de 15 pies. Vea la FIGURA 1.7.10. Hacia el tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua como una función de su profundidad. [Sugerencia: El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

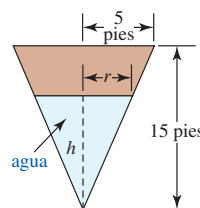


FIGURA 1.7.10 Tanque cónico en el problema 22

23. El automóvil A pasa por el punto O en dirección al este a velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto 1 hora después en dirección al norte a velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los automóviles como una función del tiempo t , donde t se mide empezando cuando el automóvil B pasa por el punto O . Vea la FIGURA 1.7.11.

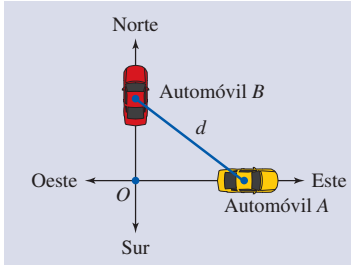


FIGURA 1.7.11 Automóviles en el problema 23

24. En el instante $t = 0$ (medido en horas), dos aviones con una separación vertical de 1 mi pasan uno encima del otro, volando en direcciones opuestas. Vea la FIGURA 1.7.12. Los aviones vuelan horizontalmente a velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h.

- a) Exprese la distancia horizontal entre los aviones como una función de t . [Sugerencia: Distancia = velocidad $\times$ tiempo.]
b) Exprese la distancia diagonal entre los aviones como una función de t .

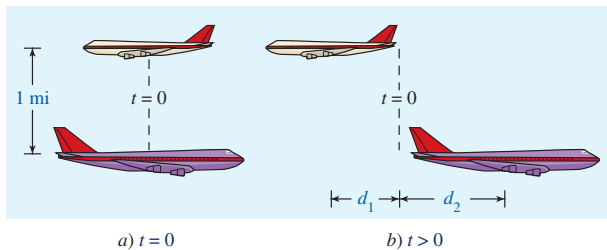


FIGURA 1.7.12 Aviones en el problema 24

25. La piscina que se muestra en la FIGURA 1.7.13 mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo. [Sugerencia: El volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leq h \leq 8$.]

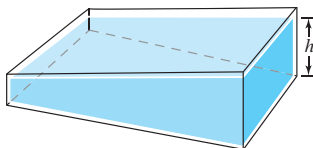


FIGURA 1.7.13 Piscina en el problema 25

26. Las regulaciones del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el envío de paquetes postales estipulan que la longitud más la circunferencia (el perímetro de un extremo) de un paquete no debe exceder 108 pulg.

Exprese el volumen del paquete como una función del ancho x mostrado en la FIGURA 1.7.14.

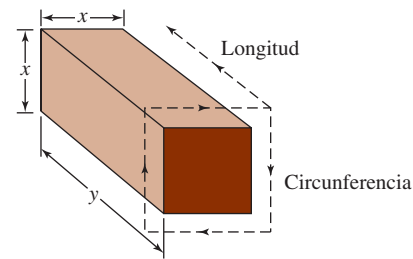


FIGURA 1.7.14 Paquete en el problema 26

27. Exprese la altura del globo mostrado en la FIGURA 1.7.15 como una función de su ángulo de elevación.

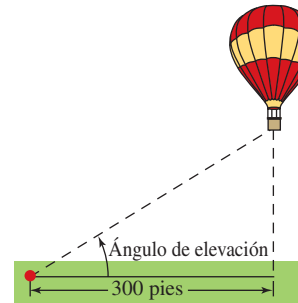


FIGURA 1.7.15 Globo en el problema 27

28. A una gran plancha metálica de 40 pulg de ancho se da forma de V al doblarla por la mitad a lo largo de su longitud. Exprese el área de la sección transversal triangular del canal como una función del ángulo θ en el vértice de la V. Vea la FIGURA 1.7.16.

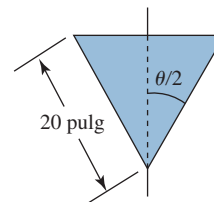


FIGURA 1.7.16 Sección transversal triangular en el problema 28

29. Como se muestra en la FIGURA 1.7.17, un tablón está apoyado en un burro, de modo que un extremo está apoyado en el suelo y el otro contra una construcción. Exprese la longitud L del tablón como una función del ángulo θ indicado. [Sugerencia: Use dos triángulos rectángulos.]

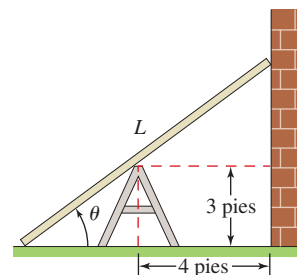


FIGURA 1.7.17 Tablón en el problema 29

30. Un rancharo desea cercar un terreno de pasto en forma de triángulo rectángulo usando 2 000 pies de valla a la mano. Vea la FIGURA 1.7.18. Expresé el área de ese terreno como una función del ángulo θ . [Sugerencia: Use los símbolos en la figura para formar $\cot \theta$ y $\csc \theta$.]

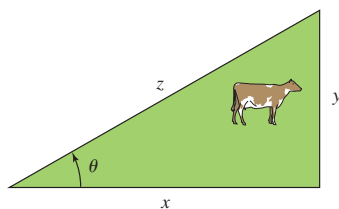


FIGURA 1.7.18 Terreno de pasto en el problema 30

31. Una estatua se coloca en un pedestal como se muestra en la FIGURA 1.7.19. Expresé el ángulo de visión θ como una función de la distancia x desde el pedestal.

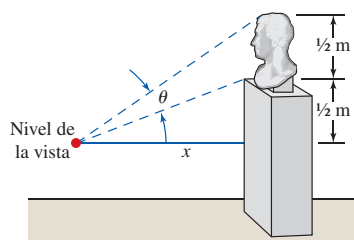


FIGURA 1.7.19 Estatua en el problema 31

32. Una mujer en una isla desea llegar a un punto R en una costa recta desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 mi de la costa y a 15 mi del punto R . Vea la FIGURA 1.7.20. Si la mujer rema en un bote a una velocidad de 3 mi/h hacia un punto Q en tierra, y luego camina el resto del camino a una velocidad de 5 mi/h, exprese el tiempo total

necesario para que la mujer llegue al punto R como una función del ángulo θ indicado. [Sugerencia: Distancia = velocidad $\times$ tiempo.]

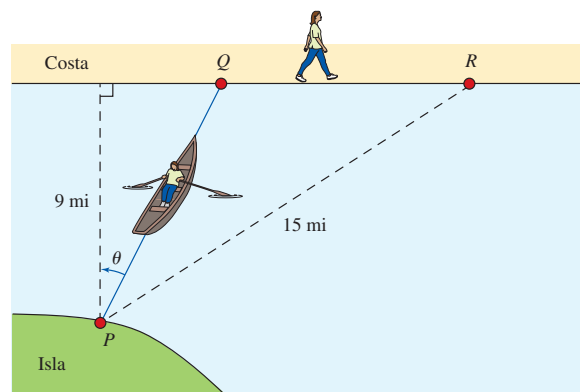


FIGURA 1.7.20 Mujer remando hacia la costa en el problema 32

≡ Piense en ello

33. Suponga que la altura en el ejemplo 7 es 60 pies. ¿Cuál es el dominio de la función $L(x)$ dada en (12)?
34. En un texto de ingeniería, el área del octágono mostrado en la FIGURA 1.7.21 está dada por $A = 3.31r^2$. Demuestre que esta fórmula es en realidad una aproximación al área; es decir, encuentre el área exacta A del octágono como una función de r .

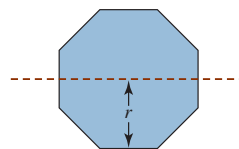


FIGURA 1.7.21 Octágono en el problema 34

Revisión del capítulo 1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-7.

A. Falso/Verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

- Si f es una función y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _____
- La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar. _____
- La gráfica de la función $f(x) = 5x^2 \cos x$ es simétrica con respecto al eje y . _____
- La gráfica de la función $y = f(x + 3)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha. _____
- La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ no tiene intersección x . _____
- Una asíntota es una recta a la que tiende la gráfica de una función pero sin cruzarla jamás. _____
- La gráfica de una función puede tener cuanto mucho dos asíntotas horizontales. _____
- Si $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional y $q(a) = 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f . _____
- La función $y = -10 \sec x$ tiene amplitud 10. _____
- El rango de la función $f(x) = 2 + \cos x$ es $[1, 3]$. _____

11. Si $f(x) = 1 + x + 2e^x$ es uno a uno, entonces $f^{-1}(3) = 0$. _____
12. Si $\tan(5\pi/4) = -1$, entonces $\tan^{-1}(-1) = 5\pi/4$. _____
13. Ninguna función par puede ser uno a uno. _____
14. Un punto de intersección de las gráficas de f y f^{-1} debe estar sobre la recta $y = x$. _____
15. La gráfica de $y = \sec x$ no corta el eje x . _____
16. La función $f(x) = \sin^{-1} x$ no es periódica. _____
17. $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. _____
18. $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ _____
19. $\ln \frac{e^b}{e^a} = b - a$ _____
20. El punto $(b, 1)$ está sobre la gráfica de $f(x) = \log_b x$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

1. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+2}/x$ es _____.
2. Si $f(x) = 4x^2 + 7$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(f \circ g)(1) =$ _____, $(g \circ f)(1) =$ _____ y $(f \circ f)(1) =$ _____.
3. El vértice de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 16x + 70$ es _____.
4. Las intersecciones x de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 35$ son _____.
5. La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^3(x-1)^2(x-5)$ es tangente al eje x en _____ y pasa por el eje x en _____.
6. El rango de la función $f(x) = 10/(x^2 + 1)$ es _____.
7. La intersección y de la gráfica de $f(x) = (2x-4)/(5-x)$ es _____.
8. Una función racional cuya gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 1$ e intersección x $(3, 0)$ es $f(x) =$ _____.
9. El periodo de la función $y = 2\sin \frac{\pi}{3}x$ es _____.
10. La gráfica de la función $y = \sin(3x - \pi/4)$ es la gráfica de $f(x) = \sin 3x$ desplazada _____ unidades a la _____.
11. $\sin^{-1}(\sin \pi) =$ _____.
12. Si f es una función uno a uno tal que $f^{-1}(3) = 1$, entonces un punto sobre la gráfica de f es _____.
13. Por transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ sobre la gráfica de $y = e^x$ se mueve hacia el punto _____ sobre la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.
14. $e^{3 \ln 10} =$ _____.
15. Si $3^x = 5$, entonces $x =$ _____.
16. Si $3e^x = 4e^{-3x}$, entonces $x =$ _____.
17. Si $\log_3 x = -2$, entonces $x =$ _____.
18. Al escribir $\log_9 27 = 1.5$ como declaración exponencial, se encuentra que es equivalente a _____.
19. La inversa de $y = e^x$ es _____.
20. Si $f(x) = e^x - 3$, entonces $f(-\ln 2) =$ _____.

C. Ejercicios _____

1. Estime el valor funcional haciendo uso de la gráfica de la función $y = f(x)$ en la FIGURA 1.R.1.

a) $f(-4)$	b) $f(-3)$
c) $f(-2)$	d) $f(-1)$
e) $f(0)$	f) $f(1)$
g) $f(1.5)$	h) $f(2)$
i) $f(3.5)$	j) $f(4)$

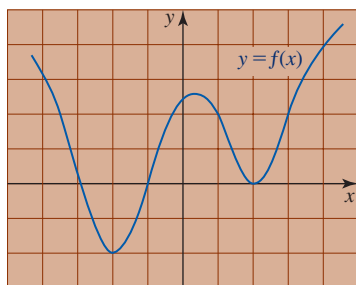


FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 1

2. Dado que

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & -1 < t \leq 1 \\ 2t, & t \leq -1 \text{ o bien, } t > 1 \end{cases}$$

Encuentre para $0 < a < 1$:

a) $g(1 + a)$	b) $g(1 - a)$
c) $g(1.5 - a)$	d) $g(a)$
e) $g(-a)$	f) $g(2a)$

3. Determine si los números 1, 5 y 8 están en el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

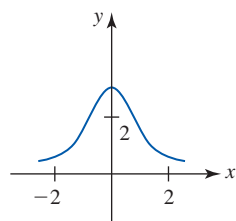
4. Suponga que $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = \sqrt{5 - x}$ y $h(x) = x^2$. Encuentre el dominio de cada una de las funciones dadas.

a) $f \circ h$	b) $g \circ h$
c) $f \circ f$	d) $g \circ g$
e) $f + g$	f) f/g

En los problemas 5 y 6, calcule $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, y simplifique.

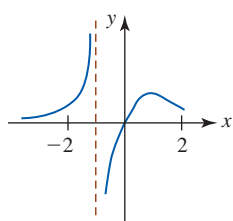
5. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$ 6. $f(x) = 1 + 2x - \frac{3}{x}$

En los problemas 7-16, relacione la función racional dada con una de las gráficas a)-j).



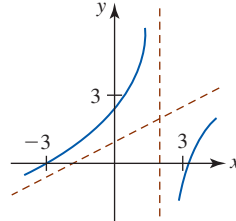
a)

FIGURA 1.R.2



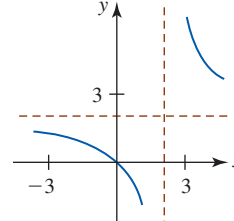
b)

FIGURA 1.R.3



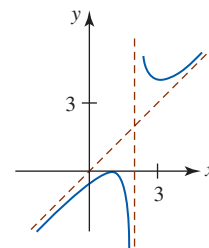
c)

FIGURA 1.R.4



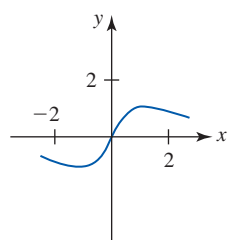
d)

FIGURA 1.R.5



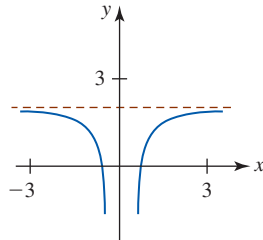
e)

FIGURA 1.R.6



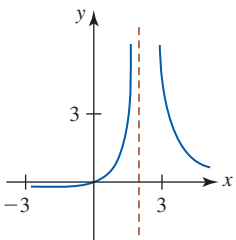
f)

FIGURA 1.R.7



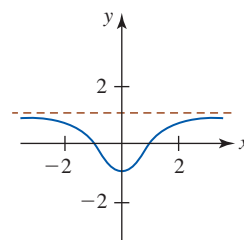
g)

FIGURA 1.R.8



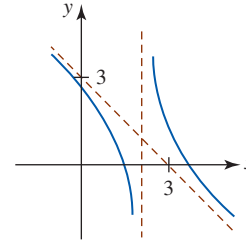
h)

FIGURA 1.R.9



i)

FIGURA 1.R.10



j)

FIGURA 1.R.11

7. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

9. $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$

11. $f(x) = \frac{x}{(x - 2)^2}$

13. $f(x) = \frac{x^2 - 10}{2x - 4}$

15. $f(x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$

8. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

10. $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

12. $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x - 2}$

14. $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

16. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 17 y 18, encuentre la pendiente de la recta roja L en cada figura.

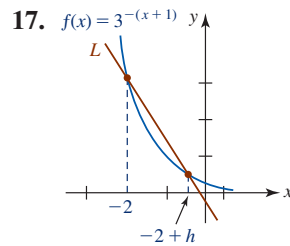


FIGURA 1.R.12 Gráfica para el problema 17

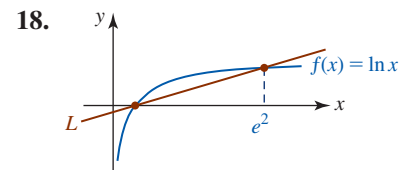


FIGURA 1.R.13 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $2^t = a$ y $6^t = b$. Use las leyes de los exponentes dadas en la sección 1.6 para encontrar el valor de la cantidad dada.

19. a) 12^t b) 3^t c) 6^{-t}

20. a) 6^{3t} b) $2^{-3t}2^{7t}$ c) 18^t

21. Encuentre una función $f(x) = ae^{kx}$ si $(0, 5)$ y $(6, 1)$ son puntos sobre la gráfica de f .

22. Encuentre una función $f(x) = a10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

23. Encuentre una función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de f tiene una asíntota horizontal $y = 5$.

24. Encuentre una función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = 2$.

En los problemas 25-30, relacione las siguientes funciones con las gráficas dadas.

a) $y = \ln(x - 2)$

b) $y = 2 - \ln x$

c) $y = 2 + \ln(x + 2)$

d) $y = -2 - \ln(x + 2)$

e) $y = -\ln(2x)$

f) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

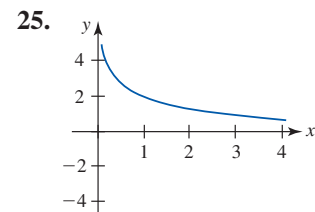


FIGURA 1.R.14 Gráfica para el problema 25

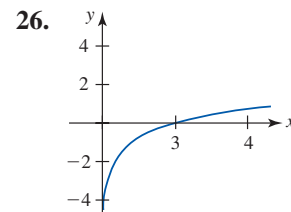


FIGURA 1.R.15 Gráfica para el problema 26

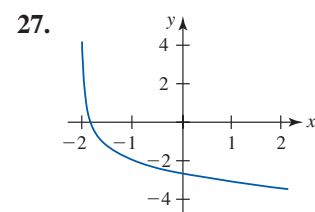


FIGURA 1.R.16 Gráfica para el problema 27

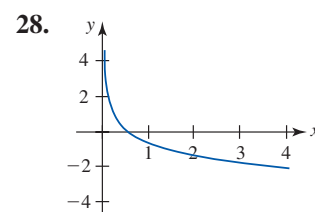


FIGURA 1.R.17 Gráfica para el problema 28

29.

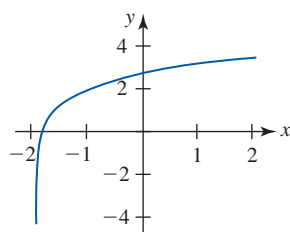


FIGURA 1.R.18 Gráfica para el problema 29

30.

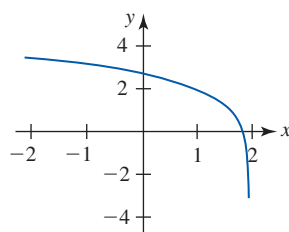


FIGURA 1.R.19 Gráfica para el problema 30

31. El ancho de una caja rectangular es tres veces su longitud, y su altura es dos veces su longitud.

- Expresar el volumen V de la caja como una función de su longitud l .
- Como una función de su ancho w .
- Como una función de su altura h .

32. Se piensa construir una caja cerrada en forma de cubo usando dos materiales distintos. El material para los lados cuesta 1 centavo por centímetro cuadrado y el material para las caras superior e inferior cuesta 2.5 centavos por centímetro cuadrado. Expresar el costo total C de construcción como una función de la longitud x de un lado.

33. Expresar el volumen V de la caja que se muestra en la FIGURA 1.R.20 como una función del ángulo θ indicado.

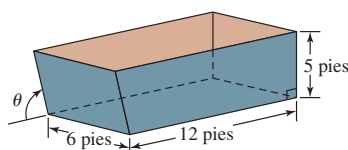


FIGURA 1.R.20 Caja en el problema 33

34. Considere el círculo de radio h con centro (h, h) mostrado en la FIGURA 1.R.21. Expresar el área de la región sombreada A como una función de h .

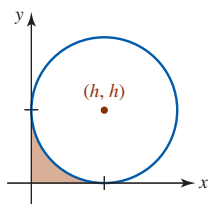


FIGURA 1.R.21 Círculo en el problema 34

35. Se construirá un canalón con una lámina metálica de 30 cm de ancho al doblar los bordes de ancho 10 cm a lo largo de cada lado, de modo que los lados formen ángulos ϕ con la vertical. Vea la FIGURA 1.R.22. Expresar el área de la sección transversal del canalón como una función del ángulo ϕ .

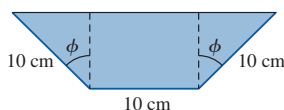


FIGURA 1.R.22 Canalón en el problema 35

36. Un tubo metálico se instalará horizontalmente alrededor de una esquina en forma de ángulo recto desde un vestíbulo de 8 pies de ancho hacia un vestíbulo de 6 pies de ancho. Vea la FIGURA 1.R.23. Expresar la longitud L del tubo como una función del ángulo θ que se muestra en la figura.

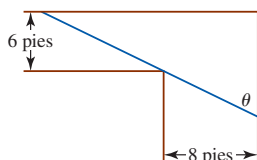


FIGURA 1.R.23 Tubo en el problema 36

37. En la FIGURA 1.R.24 se muestra un prisma cuyas caras paralelas son triángulos equiláteros. La base rectangular del prisma es perpendicular al eje x y está inscrita en el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Exprese el volumen V del prisma como una función de x .

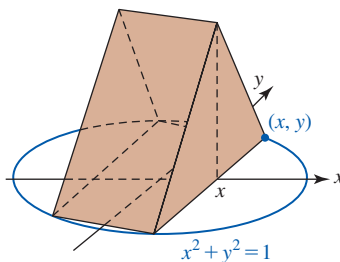


FIGURA 1.R.24 Prisma en el problema 37

38. El contenedor que se muestra en la FIGURA 1.R.25 consta de un cono invertido (abierto en su parte superior) sujeto a la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio fijo R . El volumen V del contenedor es fijo. Exprese el área superficial total S del contenedor como una función del ángulo θ indicado. [Sugerencia: El área superficial lateral de un cono está dada por $\pi R \sqrt{R^2 + h^2}$.]

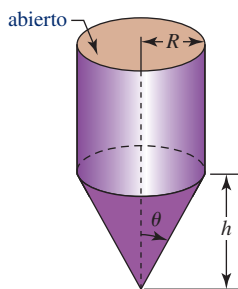


FIGURA 1.R.25 Contenedor en el problema 38

Límite de una función



En este capítulo En un curso típico de cálculo se incluyen muchos temas. Sin embargo, los tres temas más importantes en este estudio son los conceptos de *límite*, *derivada* e *integral*. Cada uno de estos conceptos está relacionado con las funciones, razón por la cual empezamos con una revisión de algunos hechos importantes sobre funciones y sus gráficas.

Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del cálculo se han usado dos problemas: el *problema de la recta tangente* y el *problema del área*. En este capítulo y en capítulos posteriores veremos que la solución de ambos problemas implica el concepto de límite.

- 2.1 Límites: un enfoque informal
- 2.2 Teoremas sobre límites
- 2.3 Continuidad
- 2.4 Límites trigonométricos
- 2.5 Límites que involucran el infinito
- 2.6 Límites: un enfoque formal
- 2.7 El problema de la recta tangente
- Revisión del capítulo 2

2.1 Límites: un enfoque informal

■ **Introducción** Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*, se basan en el concepto fundamental de *límite*. En esta sección, el enfoque que haremos a este importante concepto será intuitivo, centrado en la comprensión de *qué* es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. En la siguiente sección nuestro enfoque será analítico; es decir, usaremos métodos algebraicos para *calcular* el valor del límite de una función.

■ **Límite de una función: enfoque informal** Considere la función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} \quad (1)$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto -4 . Aunque no es posible evaluar f en -4 porque al sustituir -4 por x se obtiene la cantidad indefinida $0/0$, $f(x)$ puede calcularse en cualquier número x que esté muy *próximo* a -4 . Las dos tablas

x	-4.1	-4.01	-4.001	x	-3.9	-3.99	-3.999
$f(x)$	8.1	8.01	8.001	$f(x)$	7.9	7.99	7.999

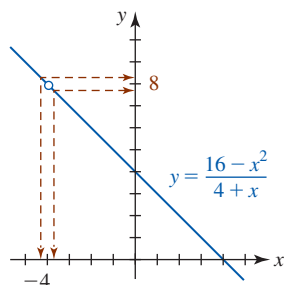
(2)


FIGURA 2.1.1 Cuando x está próxima a -4 , $f(x)$ está cerca de 8

muestran que cuando x tiende a -4 por la izquierda o por la derecha, parece que los valores de la función $f(x)$ tienden a 8 ; en otras palabras, cuando x está próxima a -4 , $f(x)$ está cerca de 8 . Para interpretar de manera gráfica la información numérica en (1), observe que para todo número $x \neq -4$, la función f puede simplificarse por cancelación:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x.$$

Como se ve en la FIGURA 2.1.1, la gráfica de f es esencialmente la gráfica de $y = 4 - x$ con la excepción de que la gráfica de f tiene un *hueco* en el punto que corresponde a $x = -4$. Para x suficientemente cerca de -4 , representado por las dos puntas de flecha sobre el eje x , las dos puntas de flecha sobre el eje y , que representan los valores de la función $f(x)$, simultáneamente se aproximan cada vez más al número 8 . En efecto, en vista de los resultados numéricos en (2), las puntas de flecha pueden hacerse *tan próximas como se quiera* al número 8 . Se dice que 8 es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a -4 .

■ **Definición informal** Suponga que L denota un número finito. El concepto de $f(x)$ que tiende a L a medida que x tiende a un número a puede definirse informalmente de la siguiente manera.

- Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de, pero diferente de un número a , por la izquierda y por la derecha de a , entonces el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L .

■ **Notación** El análisis del concepto de límite se facilita al usar una notación especial. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la palabra *tiende*, entonces el simbolismo

$$x \rightarrow a^- \text{ indica que } x \text{ tiende al número } a \text{ por la } \textit{izquierda},$$

es decir, a través de los números que son menores que a , y

$$x \rightarrow a^+ \text{ significa que } x \text{ tiende a } a \text{ por la } \textit{derecha},$$

es decir, a través de los números que son mayores que a . Finalmente, la notación

$$x \rightarrow a \text{ significa que } x \text{ tiende a } a \text{ desde } \textit{ambos lados},$$

en otras palabras, por la izquierda y por la derecha de a sobre una recta numérica. En la tabla izquierda en (2) se hace $x \rightarrow -4^-$ (por ejemplo, -4.001 está a la izquierda de -4 sobre la recta numérica), mientras en la tabla derecha $x \rightarrow -4^+$.

■ **Límites laterales** En general, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_1 al tomar x suficientemente cerca, pero sin que sea igual, a un número a por la *izquierda*; entonces se escribe

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ cuando } x \rightarrow a^- \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1. \quad (3)$$

Se dice que el número L_1 es el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a a** . De manera semejante, si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_2 al tomar x suficientemente cerca a a , pero diferente de, un número a por la *derecha*, entonces L_2 es el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$f(x) \rightarrow L_2 \text{ cuando } x \rightarrow a^+ \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2. \quad (4)$$

Las cantidades en (3) y (4) también se denominan **límites laterales**.

■ **Límites por dos lados** Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen y tienen un valor común L ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

entonces se dice que L es el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (5)$$

Se dice que un límite como (5) es **por los dos lados**. Vea la FIGURA 2.1.2. Puesto que las tablas numéricas en (2) sugieren que

$$f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4^- \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4^+, \quad (6)$$

es posible sustituir las dos declaraciones simbólicas en (6) por la declaración

$$f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4 \quad \text{o, en forma equivalente,} \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8. \quad (7)$$

■ **Existencia o no existencia** Por supuesto, un límite (por un lado o por dos lados) no tiene por qué existir. Pero es importante no olvidar lo siguiente:

- La existencia de un límite de una función f cuando x tiende a a (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si f está definida en a , sino sólo de si está definida para x cerca del número a .

Por ejemplo, si la función en (1) se modifica de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16 - x^2}{4 + x}, & x \neq -4 \\ 5, & x = -4, \end{cases}$$

entonces $f(-4)$ está definida y $f(-4) = 5$, pero $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$. Vea la FIGURA 2.1.3. En general, el límite por los dos lados $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **no existe**

- si alguno de los dos límites laterales, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ no existe, o
- si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$, pero $L_1 \neq L_2$.

EJEMPLO 1 Un límite que existe

La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ se muestra en la FIGURA 2.1.4. Como se observa en la gráfica y en las tablas acompañantes, parece válido que

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -6$$

y, en consecuencia, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -6$.

$x \rightarrow 4^-$	3.9	3.99	3.999
$f(x)$	-5.41000	-5.94010	-5.99400

$x \rightarrow 4^+$	4.1	4.01	4.001
$f(x)$	-6.61000	-6.06010	-6.00600

Observe que en el ejemplo 1 la función dada ciertamente está definida en 4, pero en ningún momento se sustituye $x = 4$ en la función para encontrar el valor de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

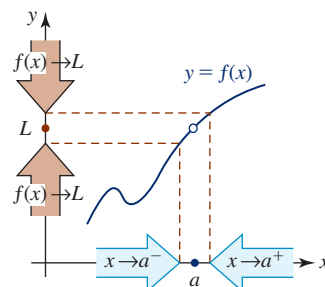


FIGURA 2.1.2 $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$ si y sólo si $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a^-$ y $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a^+$

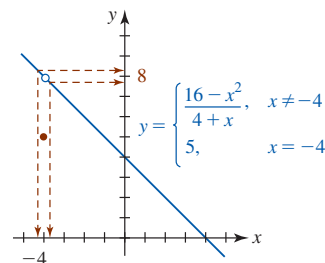


FIGURA 2.1.3 El hecho de que f esté definida o no en a es irrelevante con respecto a la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

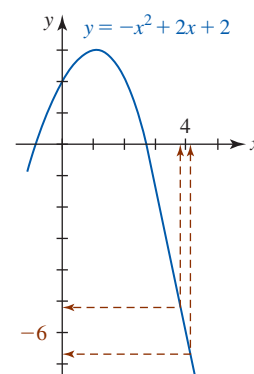


FIGURA 2.1.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

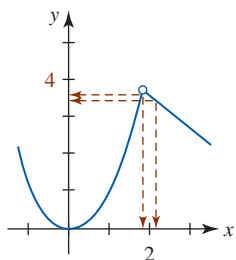


FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Un límite que existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.5. Observe que $f(2)$ no está definido, aunque esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes,

$x \rightarrow 2^-$	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.61000	3.96010	3.99600

$x \rightarrow 2^+$	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3.90000	3.99000	3.99900

observamos que cuando x se hace próxima a 2, $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a 4, y así

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4.$$

Es decir, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

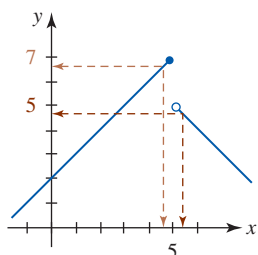


FIGURA 2.1.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 5 \\ -x + 10, & x > 5 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.6. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes, parece que cuando x se hace próxima a 5 a través de números menores que 5, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 7$. Luego, cuando x tiende a 5 a través de números mayores que 5 parece que $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5$. Pero puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x),$$

se concluye que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ no existe.

$x \rightarrow 5^-$	4.9	4.99	4.999
$f(x)$	6.90000	6.99000	6.99900

$x \rightarrow 5^+$	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	4.90000	4.99000	4.99900

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

La función entero mayor se analizó en la sección 1.1.

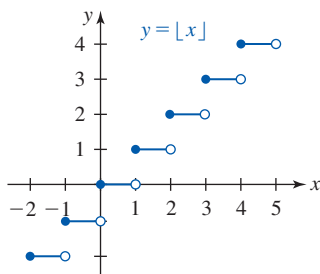


FIGURA 2.1.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

Recuerde que la **función entero mayor** o **parte entera** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se define como el mayor entero que es menor o igual que x . El dominio de f es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. A partir de la gráfica en la FIGURA 2.1.7 vemos que $f(n)$ está definida para todo entero n ; a pesar de ello, para cada entero n , $\lim_{x \rightarrow n} f(x)$ no existe. Por ejemplo, cuando x tiende, por ejemplo, al número 3, los dos límites laterales existen pero sus valores son diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3. \quad (8)$$

En general, para un entero n ,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

EJEMPLO 5 Un límite por la derecha

A partir de la FIGURA 2.1.8 debe resultar evidente que $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Sería incorrecto escribir $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ puesto que esta notación implica la connotación de que los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales a 0. En este caso $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ no existe puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$.

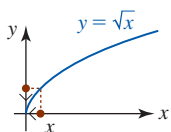


FIGURA 2.1.8 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nunca existe porque los valores de la función $f(x)$ deben volverse sin límite desde por lo menos un lado de la recta $x = a$.

EJEMPLO 6 Un límite que no existe

Una asíntota vertical siempre corresponde a una ruptura infinita en la gráfica de la función f . En la FIGURA 2.1.9 observamos que el eje y o $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x$. Las tablas

$x \rightarrow 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-10	-100	-1 000

$x \rightarrow 0^+$	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	10	100	1 000

muestran claramente que los valores de la función $f(x)$ se vuelven sin límite en valor absoluto cuando se tiende a 0. En otras palabras, $f(x)$ no tiende a un número real cuando $x \rightarrow 0^-$ ni cuando $x \rightarrow 0^+$. En consecuencia, ni el límite por la izquierda ni el límite por la derecha existen cuando x tiende a 0. Por tanto, es posible concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe. ■

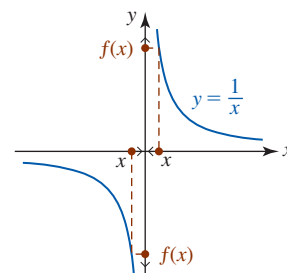


FIGURA 2.1.9 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 7 Un límite trigonométrico importante

Para calcular las funciones trigonométricas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc., es importante darse cuenta de que la variable x es un número real o un ángulo medido en radianes. Con eso en mente, considere los valores numéricos de $f(x) = (\sin x)/x$ cuando $x \rightarrow 0^+$ dados en la tabla siguiente.

$x \rightarrow 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	0.99833416	0.99998333	0.99999983	0.99999999

Resulta fácil ver que se cumplen los mismos resultados proporcionados en la tabla cuando $x \rightarrow 0^-$. Debido a que $\sin x$ es una función impar, para $x > 0$ y $-x < 0$, se tiene $\sin(-x) = -\sin x$ y en consecuencia,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Como puede verse en la FIGURA 2.1.10, f es una función par. La tabla de valores numéricos, así como la gráfica de f sugieren fuertemente el siguiente resultado:

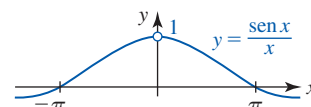


FIGURA 2.1.10 Gráfica de la función en el ejemplo 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (9) \quad \blacksquare$$

El límite en (9) es un resultado muy importante que se usará en la sección 3.4. Otro límite trigonométrico que se le pedirá comprobar como ejercicio está dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (10)$$

Vea el problema 43 en los ejercicios 2.1. Debido a su importancia, tanto (9) como (10) se demostrarán en la sección 2.4.

■ **Una forma indeterminada** Se dice que el límite de un cociente $f(x)/g(x)$, donde tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \rightarrow a$, tiene una **forma indeterminada** $0/0$. El límite (7) en el análisis inicial tenía esta forma indeterminada. Muchos límites importantes, como (9) y (10), y el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que constituye la columna vertebral del cálculo diferencial, también tienen la forma indeterminada $0/0$.

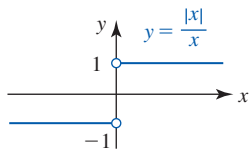


FIGURA 2.1.11 Gráfica de la función en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Una forma indeterminada

El límite $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ tiene la forma indeterminada $0/0$, pero, a diferencia de (7), (9) y (10), este límite no existe. Para ver por qué, analizaremos la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. Para $x \neq 0$, $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ y así reconocemos a f como la función definida por partes

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

A partir de (11) y de la gráfica de f de la FIGURA 2.1.11 debe resultar evidente que los dos límites de f , izquierdo y derecho, existen y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Debido a que estos límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ no existe. ■

NOTAS DESDE EL AULA

Aunque las gráficas y tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, usted ciertamente está enterado de que todas las calculadoras y computadoras funcionan sólo con aproximaciones, y que las gráficas pueden trazarse de manera inexacta. Un uso ciego de las calculadoras también puede conducir a una conclusión falsa. Por ejemplo, se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi/x)$ no existe, pero a partir de los valores tabulares

$x \rightarrow 0$	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	0	0	0

podría concluirse en forma natural que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi/x) = 0$. Por otra parte, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \quad (12)$$

existe y es igual a $\frac{1}{4}$. Vea el ejemplo 11 en la sección 2.2. Con calculadora se obtiene

$x \rightarrow 0$	± 0.00001	± 0.000001	± 0.0000001
$f(x)$	0.200000	0.000000	0.000000

El problema al calcular (12) para toda x próxima a 0 es que en forma correspondiente, $\sqrt{x^2 + 4}$ está muy próximo a 2. Cuando se restan dos números casi iguales en una calculadora, es posible que ocurra una pérdida de cifras significativas debido al error por redondeo.

Ejercicios 2.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - x}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ -x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

12. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

13. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ donde } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

$$a) f(1) \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

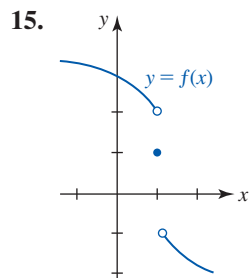


FIGURA 2.1.12 Gráfica para el problema 15

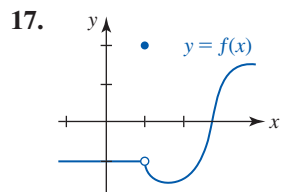


FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 17

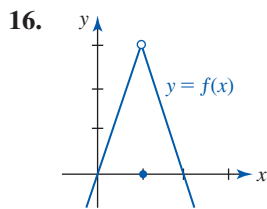


FIGURA 2.1.13 Gráfica para el problema 16

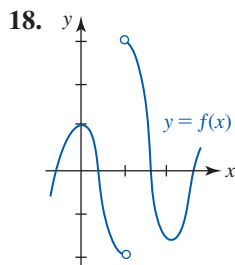


FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-28, cada límite tiene el valor 0, pero alguna notación es incorrecta. Si la notación es incorrecta, escriba la declaración correcta.

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x} = 0$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x+2} = 0$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = 0$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = 0$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \cos^{-1} x = 0$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

En los problemas 29 y 30, use la gráfica dada para encontrar cada límite, o concluya que no existe.

$$29. a) \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ e) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad f) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

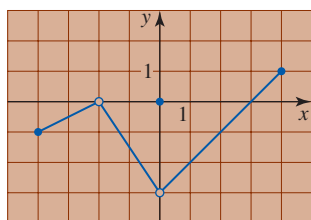


FIGURA 2.1.16 Gráfica para el problema 29

$$30. a) \lim_{x \rightarrow -5} f(x) \\ c) \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \\ d) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \\ f) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

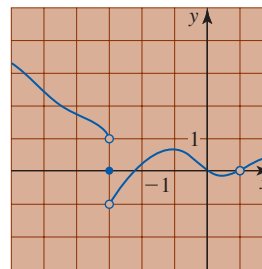


FIGURA 2.1.17 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, trace una gráfica de la función f con las propiedades dadas.

$$31. f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

$$32. f(-2) = 3, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, f(1) = -2$$

$$33. f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, f(1) \text{ está indefinido}, f(3) = 0$$

$$34. f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \leq x \leq 1, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}, f(2) = 3$$

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 35-40, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada f sobre el intervalo $[-0.5, 0.5]$. Use la gráfica para conjeturar el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, o concluya que el límite no existe.

$$35. f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

$$36. f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

$$37. f(x) = \frac{2 - \sqrt{4+x}}{x}$$

$$38. f(x) = \frac{9}{x} [\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}]$$

$$39. f(x) = \frac{e^{-2x} - 1}{x}$$

$$40. f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$$

En los problemas 41-50, proceda como en los ejemplos 3, 6 y 7 y use una calculadora para construir tablas de valores funcionales. Conjeture el valor de cada límite o concluya que no existe.

$$41. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{2x-1}}{x-1}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{6\sqrt{x-2}}{x^2 - 9} \right]$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x - 2}{x - 1}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

2.2 Teoremas sobre límites

■ Introducción La intención del análisis informal en la sección 2.1 fue proporcionarle una comprensión intuitiva de cuándo un límite existe o no. Sin embargo, no es aconsejable ni práctico, en ninguna instancia, llegar a una conclusión respecto a la existencia de un límite con base en una gráfica o tabla de valores numéricos. Debe ser posible evaluar un límite, o concluir su no existencia, de alguna forma mecánica. Los teoremas que se considerarán en esta sección establecen tales mecanismos. Las demostraciones de algunos de estos resultados se muestran en el apéndice.

El primer teorema proporciona dos resultados básicos que se usarán en todo el análisis de esta sección.

Teorema 2.2.1 Dos límites fundamentales

- i) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, donde c es una constante.
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Aunque ambas partes del teorema 2.2.1 requieren una demostración formal, el teorema 2.2.1ii) es casi tautológico cuando se plantea verbalmente:

- El límite de x cuando x tiende a a es a .

En el apéndice se proporciona una demostración del teorema 2.2.1i).

EJEMPLO 1 Uso del teorema 2.2.1

- a) A partir del teorema 2.2.1i),

$$\lim_{x \rightarrow 2} 10 = 10 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \pi = \pi.$$

- b) A partir del teorema 2.2.1ii),

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad \blacksquare$$

El límite de una constante por una función f es la constante por el límite de f cuando x tiende a un número a .

Teorema 2.2.2 Límite de una función multiplicada por una constante

Si c es una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Ahora es posible empezar a usar los teoremas combinados.

EJEMPLO 2 Uso de los teoremas 2.2.1 y 2.2.2

A partir de los teoremas 2.2.1ii) y 2.2.2,

- a) $\lim_{x \rightarrow 8} 5x = 5 \lim_{x \rightarrow 8} x = 5 \cdot 8 = 40$
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3. \quad \blacksquare$

El siguiente teorema es particularmente importante porque constituye un medio para calcular límites de manera algebraica.

Teorema 2.2.3 Límites de una suma, un producto y un cociente

Suponga que a es un número real y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2,$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = L_1 L_2, \text{ y}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

El teorema 2.2.3 puede plantearse coloquialmente como

- Si ambos límites existen, entonces
 - i) el límite de una suma es la suma de los límites,
 - ii) el límite de un producto es el producto de los límites y
 - iii) el límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.

Nota: Si todos los límites existen, entonces el teorema 2.2.3 también es válido para límites laterales; es decir, la notación $x \rightarrow a$ en el teorema 2.2.3 puede sustituirse por $x \rightarrow a^-$ o por $x \rightarrow a^+$. Además, el teorema 2.2.3 puede extenderse a diferencias, sumas, productos y cocientes que impliquen más de dos funciones. Consulte el apéndice para ver una demostración del teorema 2.2.3.

EJEMPLO 3 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 5} (10x + 7)$.

Solución Por los teoremas 2.2.1 y 2.2.2, sabemos que $\lim_{x \rightarrow 5} 7$ y $\lim_{x \rightarrow 5} 10x$ existen. Por tanto, a partir del teorema 2.2.3i),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (10x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 5} 10x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57. \end{aligned}$$

■

■ **Límite de una potencia** El teorema 2.2.3ii) puede usarse para calcular el límite de una potencia entera positiva de una función. Por ejemplo, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces por el teorema 2.2.3ii) con $g(x) = f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot f(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = L^2.$$

Por el mismo razonamiento es posible aplicar el teorema 2.2.3ii) al caso general en que $f(x)$ es un factor n veces. Este resultado se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 Límites de una potencia

Sean $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right]^n = L^n.$$

Para el caso especial $f(x) = x^n$, el resultado proporcionado en el teorema 2.2.4 produce

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n. \quad (1)$$

EJEMPLO 4 Uso de (1) y el teorema 2.2.3

Evalúe

$$a) \lim_{x \rightarrow 10} x^3 \qquad b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{x^2}.$$

Solución

a) Por (1),

$$\lim_{x \rightarrow 10} x^3 = 10^3 = 1\,000.$$

b) Por el teorema 2.2.1 y (1) sabemos que $\lim_{x \rightarrow 4} 5 = 5$ y $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16 \neq 0$. En consecuencia, por el teorema 2.2.3iii),

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 5}{\lim_{x \rightarrow 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

EJEMPLO 5 Uso del teorema 2.2.3Evalúe $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6)$.**Solución** Debido a los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y (1), todos los límites existen. En consecuencia, por el teorema 2.2.3i),

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 5x + \lim_{x \rightarrow 3} 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0.$$

EJEMPLO 6 Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.4Evalúe $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)^{10}$.**Solución** Primero, por el teorema 2.2.3i) se observa que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2.$$

Luego, por el teorema 2.2.4 se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)^{10} = \left[\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) \right]^{10} = 2^{10} = 1\,024.$$

■ **Límite de funciones polinomiales** Algunos límites pueden evaluarse por *sustitución directa*. Para calcular el límite de una función polinomial general pueden usarse (1) y el teorema 2.2.3i). Si

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} c_n x^n + \lim_{x \rightarrow a} c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} c_1 x + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0. \end{aligned}$$

← f está definida en $x = a$ y este límite es $f(a)$

En otras palabras, para evaluar el límite de una función polinomial f cuando x tiende a un número real a , sólo es necesario evaluar la función en $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2)$$

Al revisar el ejemplo 5 observamos que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, donde $f(x) = x^2 - 5x + 6$ está dada por $f(3) = 0$.Debido a que una función racional f es el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, por (2) y por el teorema 2.2.3iii) se concluye que el límite de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ también puede encontrarse al evaluar f en $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}. \quad (3)$$

Por supuesto, es necesario agregar a (3) el siempre importante requisito de que el límite del denominador no sea cero; es decir, $q(a) \neq 0$.

EJEMPLO 7 Uso de (2) y (3)

Evalúe $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2}$.

Solución $f(x) = \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2}$ es una función racional, de modo que si se identifican los polinomios $p(x) = 3x - 4$ y $q(x) = 8x^2 + 2x - 2$, entonces por (2)

$$\lim_{x \rightarrow -1} p(x) = p(-1) = -7 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -1} q(x) = q(-1) = 4.$$

Puesto que $q(-1) \neq 0$, por (3) se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2} = \frac{p(-1)}{q(-1)} = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Usted no debe quedarse con la impresión de que *siempre* es posible encontrar el límite de una función al sustituir el número a *directamente en la función*.

EJEMPLO 8 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$.

Solución En este límite la función es racional, pero si en la función sustituimos $x = 1$, se observa que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. No obstante, si *primero* se simplifica, después puede aplicarse el teorema 2.2.3iii):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 2)} \quad \leftarrow \text{cancelar es válido en el supuesto que } x \neq 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Si un límite de una función racional tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \rightarrow a$, entonces por el teorema del factor del álgebra $x - a$ debe ser un factor tanto del numerador como del denominador. Estas cantidades se factorizan y se cancela el factor $x - a$.

Algunas veces es posible afirmar a primera vista *cuándo no existe un límite*.

Teorema 2.2.5 Un límite que no existe

Sean $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

DEMOSTRACIÓN Se proporcionará una demostración indirecta de este resultado, basada en el teorema 2.2.3. Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, y también que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ existe y que es igual a L_2 . Entonces

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right), \quad g(x) \neq 0, \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0 \cdot L_2 = 0. \end{aligned}$$

El teorema se ha demostrado por contradicción de la hipótesis $L_1 \neq 0$.

EJEMPLO 9 Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.5

Evalúe

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-5} \quad b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} \quad c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25}.$$

Solución Cada función en los tres incisos del ejemplo es racional.

- a) Puesto que el límite del denominador x es 5, pero el límite del denominador $x - 5$ es 0, concluimos del teorema 2.2.5 que el límite no existe.
- b) Al sustituir $x = 5$, tanto el denominador como el numerador se hacen iguales a 0, de modo que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Por el teorema del factor del álgebra, $x - 5$ es un factor tanto del numerador como del denominador. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+1)} \quad \leftarrow \text{se cancela el factor } x-5 \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x+1} \\ &= \frac{0}{6} = 0. \quad \leftarrow \text{el límite existe} \end{aligned}$$

- c) De nuevo, el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Después de factorizar el denominador y cancelar los factores, por la manipulación algebraica

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \end{aligned}$$

se ve que el límite no existe puesto que el límite del numerador en la última expresión ahora es 1, pero el límite del denominador es 0. ■

■ **Límite de una raíz** El límite de la raíz n -ésima de una función es la raíz n -ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz n -ésima real. El siguiente teorema resume este hecho.

Teorema 2.2.6 Límite de una raíz

Sean $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

en el supuesto que $L \geq 0$ cuando n es par.

Un caso especial inmediato del teorema 2.2.6 es

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \quad (4)$$

en el supuesto que $a \geq 0$ cuando n es par. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = [\lim_{x \rightarrow 9} x]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$.

EJEMPLO 10 Uso de (4) y del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10}.$

Solución Puesto que $\lim_{x \rightarrow -8} (2x + 10) = -6 \neq 0$, por el teorema 2.2.3iii) y (4) observamos que

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10} = \frac{\lim_{x \rightarrow -8} x - [\lim_{x \rightarrow -8} x]^{1/3}}{\lim_{x \rightarrow -8} (2x + 10)} = \frac{-8 - (-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1. \quad \blacksquare$$

Cuando el límite de una función algebraica que implica radicales tiene la forma indeterminada $0/0$, algo que puede intentarse es racionalizar el numerador o el denominador.

EJEMPLO 11 Racionalización de un numerador

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$.

Solución Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)} = 2$ por inspección vemos que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$. Sin embargo, al racionalizar el numerador obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}. \quad \leftarrow \text{el límite ya no es } 0/0 \end{aligned}$$

Ahora ya es posible que apliquemos los teoremas 2.2.3 y 2.2.6:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)} + \lim_{x \rightarrow 0} 2} \\ &= \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En caso de que alguien se pregunte si puede haber más de un límite de una función $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$, para que quede registro se plantea el último teorema.

Teorema 2.2.7 Existencia implica unicidad

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, entonces es único.

lím **NOTAS DESDE EL AULA**

En matemáticas es tan importante saber lo que un teorema o una definición *no* dice, así como saber lo que dice.

- i) La propiedad i) del teorema 2.2.3 no dice que el límite de una suma *siempre* es la suma de los límites. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)$ no existe, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

A pesar de ello, puesto que $1/x - 1/x = 0$ para $x \neq 0$, el límite de la diferencia existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- ii) En forma semejante, el límite de un producto puede existir y no obstante no ser igual al producto de los límites. Por ejemplo, $x/x = 1$, para $x \neq 0$, y así

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

pero
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) \neq \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \right)$$

puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)$ no existe.

iii) El teorema 2.2.5 no afirma que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero. El ejemplo 8 es un contraejemplo de esa interpretación. No obstante, el teorema 2.2.5 establece que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero y el límite del numerador no es cero.

Ejercicios 2.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-52, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x \rightarrow -4} 15$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \pi$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} (-4)x$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 9)$
5. $\lim_{x \rightarrow -2} x^2$
6. $\lim_{x \rightarrow 5} (-x^3)$
7. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4x + 1)$
8. $\lim_{x \rightarrow 6} (-5x^2 + 6x + 8)$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 4}{x - 7}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 5}{3x}$
11. $\lim_{t \rightarrow 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$
12. $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 4)^2$
13. $\lim_{s \rightarrow 7} \frac{s^2 - 21}{s + 2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$
15. $\lim_{x \rightarrow -1} (x + x^2 + x^3)^{135}$
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 4)^{40}}{(x^2 - 2)^{36}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{2x - 5}$
18. $\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})$
19. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}}{t^2 + t - 2}$
20. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \sqrt{x^2 + 5x + 2}$
21. $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2 - 25}{y + 5}$
22. $\lim_{u \rightarrow 8} \frac{u^2 - 5u - 24}{u - 8}$
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
24. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$
25. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 8)}$
26. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 6}{4x^2 - 36}$
27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x - 2}$
28. $\lim_{x \rightarrow 1.5} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x - 1.5}$
29. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 2t + 1}{t^3 + t^2 - 2}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3(x^4 + 2x^3)^{-1}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 2)(x^5 - 1)^3}{(\sqrt{x} + 4)^2}$
32. $\lim_{x \rightarrow -2} x\sqrt{x + 4} \sqrt[3]{x - 6}$
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x} + \frac{1}{x} \right]$
34. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x - 2} - \frac{6}{x^2 + 2x - 8} \right]$
35. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x + 3)^2}{\sqrt{x} - 3}$
36. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 4)^{99}(x^2 - 7)^{10}$
37. $\lim_{x \rightarrow 10} \sqrt{\frac{10x}{2x + 5}}$
38. $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(r^2 + 3r - 2)^3}}{\sqrt[3]{(5r - 3)^2}}$

39. $\lim_{h \rightarrow 4} \sqrt{\frac{h}{h + 5}} \left(\frac{h^2 - 16}{h - 4} \right)^2$
40. $\lim_{t \rightarrow 2} (t + 2)^{3/2} (2t + 4)^{1/3}$
41. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[5]{\frac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$
42. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(8x + \frac{2}{x} \right)^5$
43. $\lim_{t \rightarrow 1} (at^2 - bt)^2$
44. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{u^2 x^2 + 2xu + 1}$
45. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8 + h)^2 - 64}{h}$
46. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(1 + h)^3 - 1]$
47. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} \right)$
48. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \quad (x > 0)$
49. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$
50. $\lim_{u \rightarrow 5} \frac{\sqrt{u + 4} - 3}{u - 5}$
51. $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 + v} - 5}{\sqrt{1 + v} - 1}$
52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

En los problemas 53-60, suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$. Encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

53. $\lim_{x \rightarrow a} [5f(x) + 6g(x)]$
54. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^3$
55. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$
56. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$
57. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x) - 2g(x)}$
58. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$
59. $\lim_{x \rightarrow a} x f(x) g(x)$
60. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{6x + 3}{x f(x) + g(x)}, a \neq -\frac{1}{2}$

Piense en ello

En los problemas 61 y 62, use el primer resultado para encontrar los límites en los incisos a)-c). Justifique cada paso de su trabajo citando la propiedad idónea de los límites.

61. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$
 a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 - \sin x}{x}$
63. Use $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.
64. Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2.3 Continuidad

■ Introducción En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase “estos puntos se unen con una curva suave”. Esta frase invoca la imagen que es una curva *continua* agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

En la sección 2.2 vimos que el valor funcional $f(a)$ no desempeñaba ningún papel en la determinación de la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Pero en la sección 2.2 observamos que los límites cuando $x \rightarrow a$ de funciones polinomiales y ciertas funciones racionales pueden encontrarse simplemente al evaluar la función en $x = a$. La razón por la que puede hacerse lo anterior en algunas instancias es el hecho de que la función es *continua* en un número a . En esta sección veremos que tanto el valor de $f(a)$ como el límite de f cuando x tiende a un número a desempeñan papeles primordiales al definir el concepto de continuidad. Antes de proporcionar la definición, en la FIGURA 2.3.1 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que *no* son continuas en a .

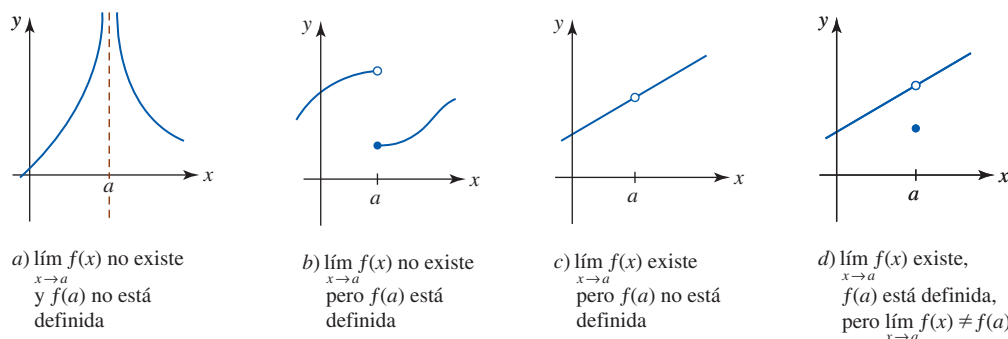


FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f no continua en a

■ Continuidad en un número La figura 2.3.1 sugiere la siguiente condición tripartita de continuidad de una función f en un número a .

Definición 2.3.1 Continuidad en a

Se dice que una función f es **continua** en un número a si

- i) $f(a)$ está definido, ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que f es **discontinua** en el número a .

EJEMPLO 1 Tres funciones

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

Solución

- a) f es discontinua en 1 puesto que al sustituir $x = 1$ en la función se obtiene $0/0$. Se afirma que $f(1)$ no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 2.3.1.
- b) Debido a que g está definida en 1, es decir, $g(1) = 2$, a continuación se determina si $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe. Por

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad (1)$$

Recuerde de sus conocimientos de álgebra que

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b) \\ &\quad (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe y es igual a 3. Puesto que este valor no es el mismo que $g(1) = 2$, se viola la segunda condición de la definición 2.3.1. La función g es discontinua en 1.

- c) Primero, $h(1)$ está definida; en este caso, $h(1) = 3$. Segundo, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$ por (1) del inciso b). Tercero, se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1) = 3$. Por tanto, se cumplen las tres condiciones en la definición 2.3.1 y así la función h es continua en 1.

Las gráficas de las tres funciones se comparan en la FIGURA 2.3.2.

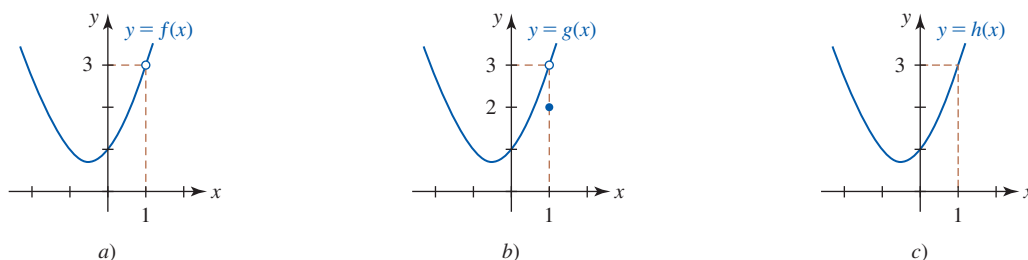


FIGURA 2.3.2 Gráficas de las funciones en el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Función definida por partes

Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

Solución Primero, observe que $f(2)$ está definida y es igual a 5. Luego, por

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 6) = 4 \end{aligned} \right\} \text{ implica } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

observamos que el límite de f existe cuando $x \rightarrow 2$. Por último, debido a que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) = 5$, por iii) de la definición 2.3.1 se concluye que f es discontinua en 2. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.3.3.

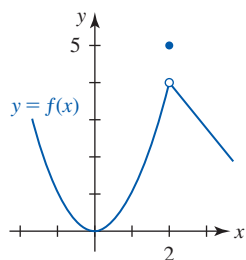


FIGURA 2.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 2

■ **Continuidad sobre un intervalo** A continuación veremos que el concepto de continuidad en un número a se extiende a **continuidad sobre un intervalo**.

Definición 2.3.2 Continuidad sobre un intervalo

Una función f es continua

- i) sobre un **intervalo abierto** (a, b) si es continua en todo número en el intervalo; y
- ii) sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b) y, además,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Si se cumple la condición límite por la derecha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ dada por ii) de la definición 2.3.1, se dice que f es **continua por la derecha en a** ; si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, entonces f es **continua por la izquierda en b** .

Extensiones de estos conceptos a intervalos como $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$ se hacen como se espera. Por ejemplo, f es continua en $[1, 5)$ si es continua en el intervalo abierto $(1, 5)$ y es continua por la derecha en 1.

EJEMPLO 3 Continuidad sobre un intervalo

a) Como observamos en la FIGURA 2.3.4a), $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ es continua sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$ pero no es continua sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$, ya que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidos.

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua sobre $[-1, 1]$. Observe por la figura 2.3.4b) que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua sobre el intervalo no acotado $[1, \infty)$, ya que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (x-1)} = \sqrt{a-1} = f(a),$$

para cualquier número real a que cumpla $a > 1$, y f es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = f(1) = 0.$$

Vea la figura 2.3.4c).

Una revisión de las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestra que $y = \sin x$ y $y = \cos x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. Las figuras 1.4.3 y 1.4.5 muestran que $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son discontinuas en $x = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, mientras las figuras 1.4.4 y 1.4.6 muestran que $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son discontinuas en $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Las funciones trigonométricas inversas $y = \sin^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Vea las figuras 1.5.9 y 1.5.12. La función exponencial natural $y = e^x$ es continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que la función logaritmo natural $y = \ln x$ es continua sobre $(0, \infty)$. Vea las figuras 1.6.5 y 1.6.6.

■ **Continuidad de una suma, producto y cociente** Cuando dos funciones f y g son continuas en un número a , entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en a . En el caso de la división f/g es necesario, por supuesto, requerir que $g(a) \neq 0$.

Teorema 2.3.1 Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones f y g son continuas en un número a , entonces la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g ($g(a) \neq 0$) son continuos en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO fg Como una consecuencia de la hipótesis de que las funciones f y g son continuas en un número a , podemos decir que ambas funciones están definidas en $x = a$, los límites de las dos funciones existen cuando x tiende a a y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Debido a que el límite existe, sabemos que el límite de un producto es el producto de los límites:

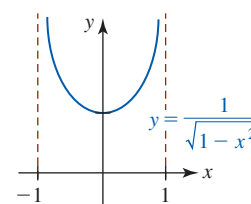
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = f(a)g(a).$$

Las demostraciones de las partes restantes del teorema 2.3.1 se obtienen de manera semejante. ■

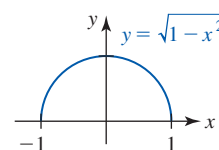
Puesto que la definición 2.3.1 implica que $f(x) = x$ es continua en cualquier número real x , a partir de aplicaciones sucesivas del teorema 2.3.1 se observa que las funciones $x, x^2, x^3, \dots, x^n$ también son continuas para cualquier x en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Debido a que una función polinomial es justo una suma de potencias de x , otra aplicación del teorema 2.3.1 muestra lo siguiente:

- Una función polinomial f es continua en $(-\infty, \infty)$.

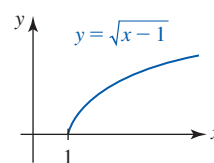
Se dice que las funciones, como las polinomiales, el seno y el coseno, que son continuas para todos los números reales, es decir, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, son **continuas en todas partes**. De una función que es continua en todas partes también se dice que es **continua**. Luego,



a)



b)



c)

FIGURA 2.3.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

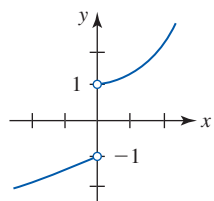
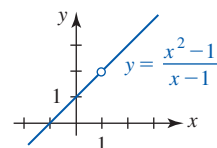
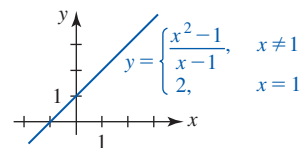


FIGURA 2.3.5 Discontinuidad tipo salto en $x = 0$



a) No es continua en 1



b) Continua en 1

FIGURA 2.3.6 Discontinuidad removible en $x = 1$

si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, por el teorema 2.3.1 también se concluye directamente que

- Una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua excepto en números en los que el denominador $q(x)$ es cero.

■ **Terminología** Una discontinuidad de una función f a menudo se denomina de manera especial.

- Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en a .

La figura 2.3.1a) ilustra una función con una discontinuidad infinita en a .

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en a .

La función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 2.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ tiene una discontinuidad de tipo salto en todo valor entero de x .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe pero f no está definida en $x = a$ o $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** en a .

Por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en $x = 1$ pero $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Al definir $f(1) = 2$, la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 2.3.6.

■ **Continuidad de f^{-1}** La validez del siguiente teorema se concluye del hecho de que la gráfica de la función inversa f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

Teorema 2.3.2 Continuidad de una función inversa

Si f es una función continua uno a uno sobre un intervalo $[a, b]$, entonces f^{-1} es continua ya sea sobre $[f(a), f(b)]$ o sobre $[f(b), f(a)]$.

La función seno, $f(x) = \sin x$, es continua sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, y como ya se observó, la inversa de f , $y = \sin^{-1} x$, es continua sobre el intervalo cerrado $[f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$.

■ **Límite de una función compuesta** El siguiente teorema establece que si una función es continua, entonces el límite de esa función es la función del límite. La demostración del teorema 2.3.3 se proporciona en el apéndice.

Teorema 2.3.3 Límite de una función compuesta

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y f es continua en L , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L).$$

El teorema 2.3.3 es útil en la demostración de otros teoremas. Si la función g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces vemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Acabamos de demostrar que la composición de dos funciones continuas es continua.

Teorema 2.3.4 Continuidad de una función compuesta

Si g es continua en un número a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a .

EJEMPLO 4 Continuidad de una función compuesta

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre el intervalo $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2 + 2$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$. Pero, puesto que $g(x) \geq 0$ para toda x , la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

es continua en todas partes.

Si una función f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, como se ilustra en la FIGURA 2.3.7, f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Dicho de otra manera, una función continua f no omite ningún valor.

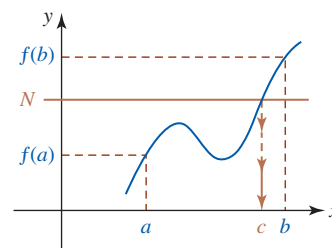


FIGURA 2.3.7 Una función continua f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Teorema 2.3.5 Teorema del valor intermedio

Si f denota una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = N$.

EJEMPLO 5 Consecuencia de la continuidad

La función polinomial $f(x) = x^2 - x - 5$ es continua sobre el intervalo $[-1, 4]$ y $f(-1) = -3$, $f(4) = 7$. Para cualquier número N para el cual $-3 \leq N \leq 7$, el teorema 2.3.5 garantiza que hay una solución para la ecuación $f(c) = N$, es decir, $c^2 - c - 5 = N$ en $[-1, 4]$. Específicamente, si se escoge $N = 1$, entonces $c^2 - c - 5 = 1$ es equivalente a

$$c^2 - c - 6 = 0 \quad \text{o bien,} \quad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, sólo el valor $c = 3$ está entre -1 y 4 .

El ejemplo anterior sugiere un corolario al teorema del valor intermedio.

- Si f satisface las hipótesis del teorema 2.3.5 y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe un número x entre a y b para el que $f(x) = 0$.

Este hecho se usa a menudo para localizar ceros reales de una función continua f . Si los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay por lo menos un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras, si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero c en el intervalo (a, b) . La validez de esta conclusión se ilustra en la FIGURA 2.3.8.

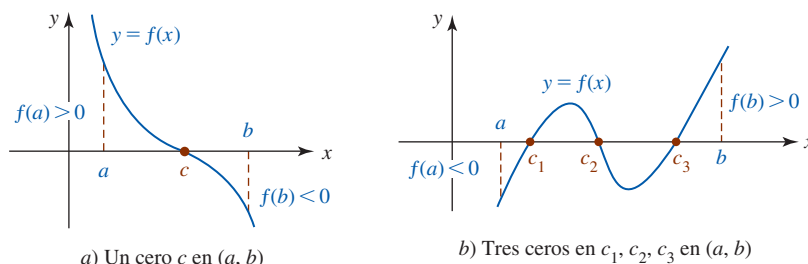


FIGURA 2.3.8 Localización de ceros de funciones usando el teorema del valor intermedio

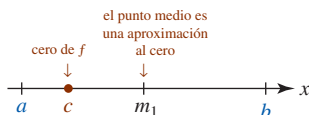


FIGURA 2.3.9 El número m_1 es una aproximación al número c

■ Método de bisección Como una consecuencia directa del teorema del valor intermedio, es posible concebir un medio para aproximar los ceros de una función continua hasta cualquier grado de precisión. Suponga que $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos. Luego, como acabamos de ver, f tiene un cero en $[a, b]$. Suponga que el intervalo $[a, b]$ se biseca encontrando el punto medio $m_1 = (a + b)/2$. Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es un cero de f y ya no se continúa, pero si $f(m_1) \neq 0$, entonces puede afirmarse lo siguiente:

- Si $f(a)$ y $f(m_1)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces f tiene un cero c en $[a, m_1]$.
- Si $f(m_1)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces f tiene un cero c en $[m_1, b]$.

Es decir, si $f(m_1) \neq 0$, entonces f tiene un cero en un intervalo que mide la mitad del intervalo original. Vea la FIGURA 2.3.9. A continuación se repite el proceso al bisecar este nuevo intervalo al encontrar su punto medio m_2 . Si m_2 es un cero de f , entonces detenemos el proceso, pero si $f(m_2) \neq 0$, hemos localizado un cero en un intervalo que mide la cuarta parte del intervalo $[a, b]$. Continuamos este proceso de localizar un cero en f de manera indefinida en intervalos cada vez más cortos. Este método de aproximar un cero de una función continua por medio de una sucesión de puntos medios se denomina **método de bisección**. Al volver a inspeccionar la figura 2.3.9 se observa que el error en una aproximación a un cero en un intervalo es menos de la mitad de la longitud del intervalo.

EJEMPLO 6 Ceros de una función polinomial

- Demuestre que los ceros de la función polinomial $f(x) = x^6 - 3x - 1$ tiene un cero real en $[-1, 0]$ y en $[1, 2]$.
- Aproxime el cero en $[1, 2]$ hasta dos cifras decimales.

Solución

- Observe que $f(-1) = 3 > 0$ y $f(0) = -1 < 0$. Este cambio de signo indica que la gráfica de f debe cruzar el eje x por lo menos una vez en el intervalo $[-1, 0]$. En otras palabras, hay por lo menos un cero en $[-1, 0]$.

De manera semejante, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 57 > 0$ implican que hay por lo menos un cero de f en el intervalo $[1, 2]$.

- Una primera aproximación al cero en $[1, 2]$ es el punto medio del intervalo:

$$m_1 = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \text{error} < \frac{1}{2}(2 - 1) = 0.5.$$

Luego, puesto que $f(m_1) = f(\frac{3}{2}) > 0$ y $f(1) < 0$, se sabe que el cero está en el intervalo $[1, \frac{3}{2}]$.

La segunda aproximación al cero es el punto medio de $[1, \frac{3}{2}]$:

$$m_2 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1.25, \quad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 0.25.$$

Puesto que $f(m_2) = f(\frac{5}{4}) < 0$, el cero está en el intervalo $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$.

La tercera aproximación al cero es el punto medio de $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$:

$$m_3 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8} = 1.375, \quad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) = 0.125.$$

Después de ocho cálculos, encontramos que $m_8 = 1.300781$ con error menor que 0.005. Por tanto, 1.30 es una aproximación al cero de f en $[1, 2]$ que es precisa hasta dos cifras decimales. La gráfica de f se proporciona en la FIGURA 2.3.10. ■

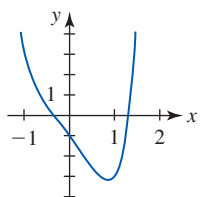


FIGURA 2.3.10 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Si se desea que la aproximación sea precisa hasta tres cifras decimales, continuamos hasta que el error se vuelva menor que 0.0005, y así sucesivamente.

Ejercicios 2.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre los números, en caso de haberlos, en que la función f dada es discontinua.

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ 2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

3. $f(x) = (x^2 - 9x + 18)^{-1}$ 4. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

5. $f(x) = \frac{x - 1}{\sin 2x}$ 6. $f(x) = \frac{\tan x}{x + 3}$

$$7. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases} \quad 8. f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$11. f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$$

$$12. f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

En los problemas 13-24, determine si la función f es continua en el intervalo indicado.

$$13. f(x) = x^2 + 1$$

$$a) [-1, 4]$$

$$b) [5, \infty)$$

$$14. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$a) (-\infty, \infty)$$

$$b) (0, \infty)$$

$$15. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$a) (0, 4]$$

$$b) [1, 9]$$

$$16. f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$a) [-3, 3]$$

$$b) [3, \infty)$$

$$17. f(x) = \tan x$$

$$a) [0, \pi]$$

$$b) [-\pi/2, \pi/2]$$

$$18. f(x) = \csc x$$

$$a) (0, \pi)$$

$$b) (2\pi, 3\pi)$$

$$19. f(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$$

$$a) [-4, -3]$$

$$b) (-\infty, \infty)$$

$$20. f(x) = \frac{1}{|x| - 4}$$

$$a) (-\infty, -1]$$

$$b) [1, 6]$$

$$21. f(x) = \frac{x}{2 + \sec x}$$

$$a) (-\infty, \infty)$$

$$b) [\pi/2, 3\pi/2]$$

$$22. f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$a) [1/\pi, \infty)$$

$$b) [-2/\pi, 2/\pi]$$

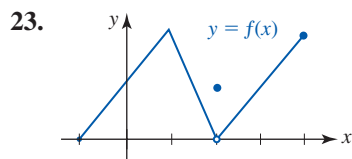


FIGURA 2.3.11 Gráfica para el problema 23

$$a) [-1, 3]$$

$$b) (2, 4]$$

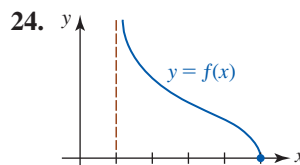


FIGURA 2.3.12 Gráfica para el problema 24

$$a) [2, 4]$$

$$b) [1, 5]$$

En los problemas 25-28, encuentre los valores de m y n de tal manera que la función f sea continua.

$$25. f(x) = \begin{cases} mx, & x < 4 \\ x^2, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ m, & x = 2 \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} mx, & x < 3 \\ n, & x = 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$$

En los problemas 29 y 30, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que no excede a x . Trace una gráfica para determinar los puntos en que la función dada es discontinua.

$$29. f(x) = \lfloor 2x - 1 \rfloor$$

$$30. f(x) = \lfloor x \rfloor - x$$

En los problemas 31 y 32, determine si la función dada tiene una discontinuidad removible en el número dado a . Si la discontinuidad es removible, defina una nueva función que sea continua en a .

$$31. f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, \quad a = 9 \quad 32. f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad a = 1$$

En los problemas 33-42, use el teorema 2.3.3 para encontrar el límite dado.

$$33. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin(2x + \pi/3)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \pi^2} \cos \sqrt{x}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(\cos x)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos(\cos x))$$

$$37. \lim_{t \rightarrow \pi} \cos\left(\frac{t^2 - \pi^2}{t - \pi}\right)$$

$$38. \lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi t}{t^2 + 3t}\right)$$

$$39. \lim_{t \rightarrow \pi} \sqrt{t - \pi + \cos^2 t}$$

$$40. \lim_{t \rightarrow 1} (4t + \sin 2\pi t)^3$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -3} \sin^{-1}\left(\frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}\right)$$

$$42. \lim_{x \rightarrow \pi} e^{\cos 3x}$$

En los problemas 43 y 44, determine el (los) intervalo(s) donde $f \circ g$ es continua.

$$43. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}, \quad g(x) = x + 4$$

$$44. f(x) = \frac{5x}{x - 1}, \quad g(x) = (x - 2)^2$$

En los problemas 45-48, compruebe el teorema del valor intermedio para f en el intervalo dado. Encuentre un número c en el intervalo para el valor indicado de N .

45. $f(x) = x^2 - 2x$, $[1, 5]$; $N = 8$

46. $f(x) = x^2 + x + 1$, $[-2, 3]$; $N = 6$

47. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $[-2, 2]$; $N = 1$

48. $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$, $[0, 1]$; $N = 8$

49. Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 50$.

50. Dado que f y g son continuas sobre $[a, b]$ de modo que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, demuestre que hay un número c en (a, b) tal que $f(c) = g(c)$. [Sugerencia: Considere la función $f - g$.]

En los problemas 51-54, muestre que la ecuación dada tiene una solución en el intervalo indicado.

51. $2x^7 = 1 - x$, $(0, 1)$

52. $\frac{x^2 + 1}{x + 3} + \frac{x^4 + 1}{x - 4} = 0$, $(-3, 4)$

53. $e^{-x} = \ln x$, $(1, 2)$

54. $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$, $(\pi/2, \pi)$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 55 y 56, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de bisección para aproximar, con precisión de dos cifras decimales, los ceros reales de f que descubra a partir de la gráfica.

55. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$ 56. $f(x) = x^5 + x - 1$

57. Use el método de bisección para aproximar el valor de c en el problema 49 hasta una precisión de dos cifras decimales.

58. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 51 hasta una precisión de dos cifras decimales.

59. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 52 hasta una precisión de dos cifras decimales.

60. Suponga que un cilindro circular recto cerrado tiene un volumen V y un área superficial S (lado lateral, tapa y base).

a) Demuestre que el radio r del cilindro debe satisfacer la ecuación $2\pi r^3 - Sr + 2V = 0$.

b) Suponga que $V = 3\,000$ pies³ y $S = 1\,800$ pies². Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(r) = 2\pi r^3 - 1\,800r + 6\,000.$$

c) Use la gráfica en el inciso b) y el método de bisección para encontrar las dimensiones del cilindro correspondientes al volumen y área superficial dadas en el inciso b). Use una precisión de dos cifras decimales.

≡ Piense en ello

61. Dado que f y g son continuas en un número a , demuestre que $f + g$ es continua en a .

62. Dado que f y g son continuas en un número a y $g(a) \neq 0$, demuestre que f/g es continua en a .

63. Sean $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor y $g(x) = \cos x$. Determine los puntos en que $f \circ g$ es discontinua.

64. Considere las funciones

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Determine si $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

65. **Un clásico matemático** La función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

recibe su nombre en honor del matemático alemán **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859). A Dirichlet se debe la definición de una función como se conoce actualmente.

a) Demuestre que f es discontinua en todo número real a . En otras palabras, f no es una función continua en ninguna parte.

b) ¿Cómo se ve la gráfica de f ?

c) Si r es un número racional positivo, demuestre que f es r -periódica; es decir, $f(x + r) = f(x)$.

2.4 Límites trigonométricos

■ **Introducción** En esta sección se analizan límites que implican funciones trigonométricas. Como se ilustrará con los ejemplos de esta sección, el cálculo de límites trigonométricos supone manipulaciones algebraicas y conocimiento de algunas identidades trigonométricas básicas. Empezaremos con algunos resultados simples sobre límites que son consecuencia de la continuidad.

■ **Uso de la continuidad** En la sección precedente vimos que las funciones seno y coseno son continuas en todas partes. Por la definición 2.3.1 se concluye que para cualquier número real a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a. \quad (2)$$

En forma semejante, para un número a en el dominio de la función trigonométrica dada

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \csc x = \csc a. \quad (4)$$

EJEMPLO 1 Uso de (1) y (2)

A partir de (1) y (2) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1. \quad (5) \blacksquare$$

Los resultados en (5) se obtendrán en el siguiente análisis sobre el cálculo de otros límites trigonométricos. Pero primero se considera un teorema que reviste una utilidad particular cuando se trabaja con límites trigonométricos.

■ **Teorema de compresión** El siguiente teorema posee muchos nombres, algunos de éstos son: **teorema de compresión**, **teorema del pellizco**, **teorema del emparedado**, **teorema del juego de compresión** y **teorema de Flyswatter**. Como se muestra en la FIGURA 2.4.1, si la gráfica de $f(x)$ se “comprime” entre las gráficas de otras dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ para toda x próxima a a , y si las funciones g y h tienen un límite común L cuando $x \rightarrow a$, tiene sentido afirmar que f también tiende a L cuando $x \rightarrow a$. La demostración del teorema 2.4.1 se proporciona en el apéndice.

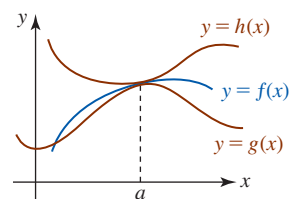


FIGURA 2.4.1 Gráfica de f oprimida entre las gráficas de g y h

Teorema 2.4.1 Teorema de compresión

Suponga que f , g y h son funciones para las cuales $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a un número a , excepto posiblemente al mismo a . Si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

◀ Un colega ruso dijo que este resultado se denominaba **teorema de los dos soldados** cuando estaba en la escuela. Piense en ello.

Antes de aplicar el teorema 2.4.1 se considerará un límite trigonométrico que no existe.

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ no existe. La función $f(x) = \sin(1/x)$ es impar pero no es periódica. La gráfica oscila entre -1 y 1 cuando $x \rightarrow 0$:

$$\sin \frac{1}{x} = \pm 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por ejemplo, $\sin(1/x) = 1$ para $n = 500$ o $x \approx 0.00064$, y $\sin(1/x) = -1$ para $n = 501$ o $x \approx 0.00063$. Esto significa que cerca del origen la gráfica de f se vuelve tan comprimida que parece ser una mancha continua de color. Vea la FIGURA 2.4.2.

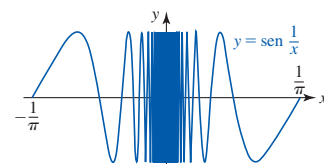


FIGURA 2.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Uso del teorema de compresión

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Solución Primero observe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \neq \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \right)$$

porque en el ejemplo 2 acabamos de ver que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ no existe. Pero para $x \neq 0$ tenemos $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$. En consecuencia,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Luego, si hacemos las identificaciones $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, por (1) de la sección 2.2 se sigue que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Así, por el teorema de compresión concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

En la FIGURA 2.4.3 observe la pequeña escala en los ejes x y y .

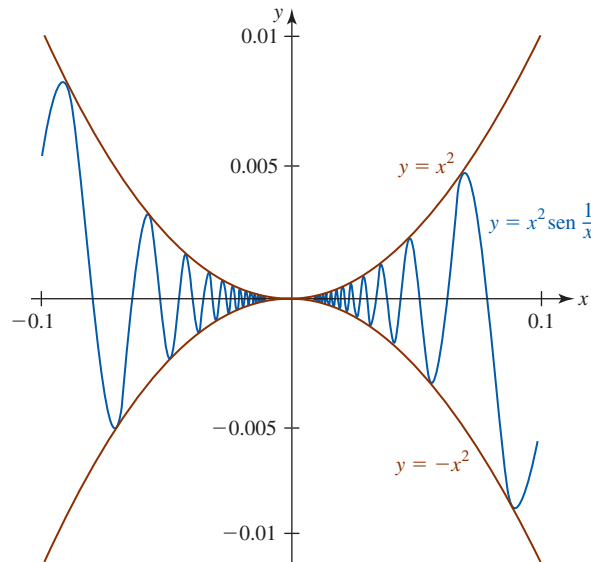


FIGURA 2.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 3

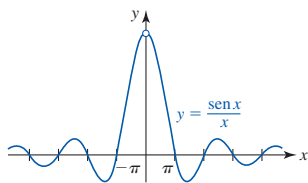


FIGURA 2.4.4 Gráfica de $f(x) = (\sin x)/x$

■ **Un límite trigonométrico importante** Aunque la función $f(x) = (\sin x)/x$ no está definida en $x = 0$, la tabla numérica en el ejemplo 7 de la sección 2.1 y la gráfica en la FIGURA 2.4.4 sugieren que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ existe. Ahora ya es posible demostrar esta conjetura usando el teorema de compresión.

Considere un círculo con centro en el origen O y radio 1. Como se muestra en la FIGURA 2.4.5a), sea la región sombreada OPR un sector del círculo con ángulo central t tal que $0 < t < \pi/2$. A partir de los incisos b), c) y d) de la figura 2.4.5 se observa que

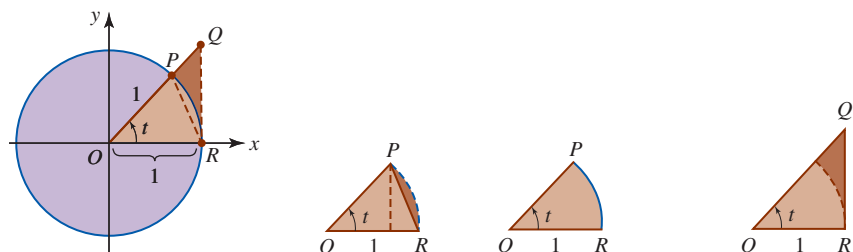
$$\text{área de } \triangle OPR \leq \text{área del sector } OPR \leq \text{área de } \triangle OQR. \quad (6)$$

Por la figura 2.4.5b), la altura de $\triangle OPR$ es $\overline{OP} \sin t = 1 \cdot \sin t = \sin t$, y así

$$\text{área de } \triangle OPR = \frac{1}{2} \overline{OR} \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin t = \frac{1}{2} \sin t. \quad (7)$$

Por la figura 2.4.5d), $\overline{QR}/\overline{OR} = \tan t$ o $\overline{QR} = \tan t$, de modo que

$$\text{área de } \triangle OQR = \frac{1}{2} \overline{OR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan t = \frac{1}{2} \tan t. \quad (8)$$



a) Circunferencia unitaria b) Triángulo OPR c) Sector OPR d) Triángulo rectángulo OQR

FIGURA 2.4.5 Circunferencia unitaria junto con dos triángulos y un sector circular

Por último, el área de un sector del círculo es $\frac{1}{2}r^2\theta$, donde r es el radio y θ es el ángulo central medido en radianes. Así,

$$\text{área del sector } OPR = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t = \frac{1}{2}t. \quad (9)$$

Al usar (7), (8) y (9) en la desigualdad (6) se obtiene

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t \quad \text{o bien,} \quad 1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}.$$

Por las propiedades de las desigualdades, la última desigualdad puede escribirse como

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

Ahora se hace $t \rightarrow 0^+$ en el último resultado. Puesto que $(\sin t)/t$ está “comprimada” entre 1 y $\cos t$ (del cual se sabe por (5) que tiende a (1), a partir del teorema 2.4.1 se concluye que $(\sin t)/t \rightarrow 1$. Aunque se ha supuesto $0 < t < \pi/2$, el mismo resultado se cumple para $t \rightarrow 0^-$ cuando $-\pi/2 < t < 0$. Al usar el símbolo x en lugar de t , el resultado se resume como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (10)$$

Como se ilustra con los siguientes ejemplos, los resultados en (1), (2), (3) y (10) se usan a menudo para calcular otros límites. Observe que el límite (10) es de la forma indeterminada $0/0$.

EJEMPLO 4 Uso de (10)

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x}$.

Solución La expresión fraccionaria vuelve a escribirse como dos fracciones con el mismo denominador x :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{10x}{x} - \frac{3\sin x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{puesto que ambos límites existen,} \\ \text{las } x \text{ también se cancelan en la} \\ \text{primera expresión} \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 10 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \leftarrow \text{ahora se usa (10)} \\ &= 10 - 3 \cdot 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Uso de la fórmula del ángulo doble

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

Solución Para evaluar el límite dado se usan la fórmula del ángulo doble $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ de la sección 1.4, y el hecho de que el límite existe:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

Por (5) y (10) se sabe que $\cos x \rightarrow 1$ y $(\sin x)/x \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0$, de modo que la línea precedente se vuelve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

EJEMPLO 6 Uso de (5) y (10)

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

Solución Al usar $\tan x = (\sin x)/\cos x$ y el hecho de que el límite existe, puede escribirse

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)/\cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 = 1. \quad \leftarrow \text{por (5) y (10)}\end{aligned}$$

■ **Uso de una sustitución** A menudo se tiene interés en límites semejantes a los considerados en el ejemplo 5. Pero si queremos encontrar, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$, el procedimiento empleado en el ejemplo 5 deja de funcionar a nivel práctico puesto que no se cuenta con una identidad trigonométrica a la mano para $\sin 5x$. Hay un procedimiento alternativo que permite encontrar rápidamente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$, donde $k \neq 0$ es cualquier constante real, al simplemente cambiar la variable por medio de una **sustitución**. Si se hace $t = kx$, entonces $x = t/k$. Observe que cuando $x \rightarrow 0$ entonces necesariamente $t \rightarrow 0$. Así, es posible escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t/k} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{1} \cdot \frac{k}{t} \right) = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = k. \quad \begin{matrix} \text{por (10)} \\ \downarrow \end{matrix}$$

Por tanto, se ha demostrado el resultado general

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (11)$$

Por (11), con $k = 2$, se obtiene el mismo resultado $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ que se obtuvo en el ejemplo 5.

EJEMPLO 7 Una sustitución

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3}$.

Solución Antes de empezar, observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \rightarrow 1$. Al factorizar $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ el límite dado puede expresarse como un límite de un producto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right]. \quad (12)$$

Luego, si se hace $t = x - 1$, veremos que $x \rightarrow 1$ implica $t \rightarrow 0$. En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad \leftarrow \text{por (10)}$$

Al volver a (12) es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)\end{aligned}$$

puesto que ambos límites existen. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} = \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 8 Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Solución Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en la forma $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}. \end{aligned}$$

Para el siguiente paso de nuevo se acude al álgebra para volver a escribir la expresión fraccionaria como un producto, y luego se usan los resultados en (5):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right). \end{aligned}$$

Debido a que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/(1 + \cos x) = 0/2 = 0$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (13)$$

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\cos x - 1)}{x} = (-1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Luego, al dividir entre -1 se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \quad (14)$$

En la FIGURA 2.4.6 se muestra la gráfica de $f(x) = (\cos x - 1)/x$. Los resultados en (10) y (14) se usarán en los ejercicios 2.7 y también en la sección 3.4.

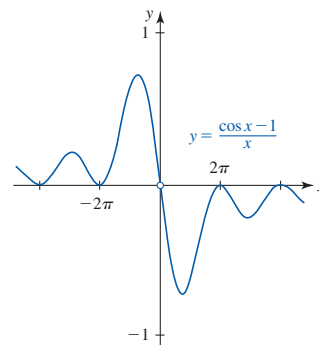


FIGURA 2.4.6 Gráfica de $f(x) = (\cos x - 1)/x$

Ejercicios 2.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-36, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{2t}$

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-4t)}{t}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4 + \cos x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x}$

7. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t \sec t \csc 4t}$

9. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{t \cos^2 t}$

11. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6t}{t^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}$

8. $\lim_{t \rightarrow 0} 5t \cot 2t$

10. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t/2)}{\sin t}$

12. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{\sin^2 3t}$

14. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x - 2\pi}{\sin x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$
16. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x - \pi/2)}{x}$
18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(5x + 10)}{4x + 8}$
19. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{\sin 7t}$
20. $\lim_{t \rightarrow 0} \sin 2t \csc 3t$
21. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$
22. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$
23. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 5t \sin t}{t^2}$
24. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 4t}{\cos 8t}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 2\sqrt{\sin x})^2}{x}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{x}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{x^2}$
30. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t}$
31. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 + 2x - 8}$
32. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sin(x - 3)}$
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x + 1 - \cos x}{x}$
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2 \sin x}{x}$
35. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \sin x}$
36. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$
37. Suponga que $f(x) = \sin x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (17) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

38. Suponga que $f(x) = \cos x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (18) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

En los problemas 39 y 40, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

39. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 40. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{\pi}{x} = 0$

41. Use las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 para demostrar que

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} = 0.$

42. Si $|f(x)| \leq B$ para toda x en un intervalo que contiene a 0, demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$.

En los problemas 43 y 44, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

43. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ donde $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 3, x \neq 2$

44. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ donde $|f(x) - 1| \leq x^2, x \neq 0$

≡ Piense en ello

En los problemas 45-48, use una sustitución idónea para encontrar el límite dado.

45. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$

46. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan 2x}$

47. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi/x)}{x - 1}$

48. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x - 2}$

49. Analice: ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0?

50. La existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ no implica la existencia de

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x}$. Explique por qué el segundo límite no existe.

En algunos textos se usa el símbolo $+\infty$ y las palabras *más infinito* en lugar de ∞ e *infinito*.

2.5 Límites que involucran el infinito

■ **Introducción** En las secciones 1.2 y 1.3 se consideraron algunas funciones cuyas gráficas poseían asíntotas. En esta sección se verá que las asíntotas vertical y horizontal de una gráfica están definidas en términos de límites que implican el concepto de *infinito*. Recuerde, los **símbolos de infinito**, $-\infty$ (“menos infinito”) y ∞ (“más infinito”) son herramientas de notación usadas para indicar, a su vez, que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano cartesiano esto significa a la izquierda para x y hacia abajo para y) y en la dirección positiva (a la derecha para x y hacia arriba para y).

Aunque la terminología y notación usadas cuando se trabaja con $\pm\infty$ son estándar, lamentablemente son ligeramente desafortunadas y pueden ser confusas. Así, desde el principio se advierte que se considerarán dos tipos de límites. Primero se analizarán

- **límites infinitos.**

La expresión *límites infinitos* siempre se refiere a un *límite que no existe* porque la función f exhibe un comportamiento no acotado: $f(x) \rightarrow -\infty$ o $f(x) \rightarrow \infty$. Luego se considerarán

- **límites en el infinito.**

La expresión *en el infinito* significa que se está intentando determinar si una función f posee un límite cuando se deja que el valor de la variable x disminuya o aumente sin límite: $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow \infty$. Estos límites pueden o no existir.

◀ A lo largo de todo el análisis, no olvide que $-\infty$ y ∞ no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como se hace con los números.

■ **Límites infinitos** El límite de una función f no existe cuando x tiende a un número a siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de la función $f(x)$ crecen sin límite cuando x tiende a a se expresa simbólicamente por

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \quad (1)$$

Si los valores de la función decrecen sin límite cuando x tiende a a , se escribe

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \quad (2)$$

Recuerde que el uso del símbolo $x \rightarrow a$ significa que f muestra el mismo comportamiento —en este caso, sin límite— a ambos lados del número a sobre el eje x . Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^- \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+.$$

Vea la FIGURA 2.5.1.

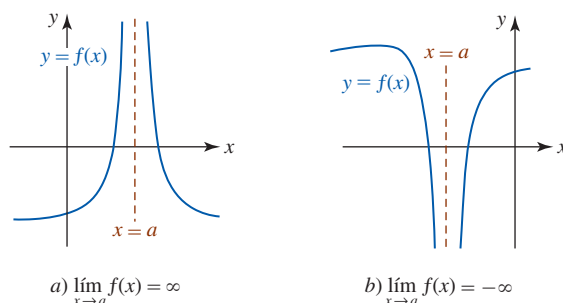


FIGURA 2.5.1 Dos tipos de límites infinitos

En forma semejante, la FIGURA 2.5.2 muestra el comportamiento sin límite de una función f cuando x tiende a a por un lado. Observe en la figura 2.5.2c) que no es posible describir el comportamiento de f cerca de a usando un solo símbolo de límite.

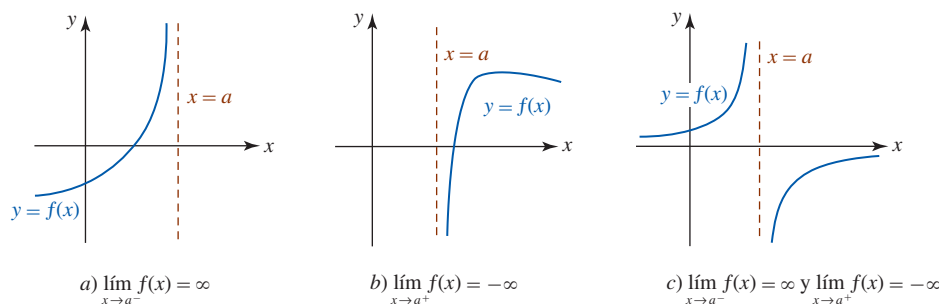


FIGURA 2.5.2 Tres tipos más de límites infinitos

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

se denomina **límite infinito**. De nuevo, en cada caso de (3) simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función f cerca del número a . Ninguno de los límites en (3) existe.

En la sección 1.3 se repasó cómo identificar una asíntota vertical para la gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$. Ahora ya podemos definir una asíntota vertical de cualquier función en términos del concepto de límite.

Definición 2.5.1 Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

Vea la figura 1.2.1. ▶

En el repaso de las funciones en el capítulo 1 se vio que las gráficas de funciones racionales a menudo poseen asíntotas. Se vio que las gráficas de las funciones racionales $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ eran semejantes a las gráficas en la figura 2.5.2c) y 2.5.1a), respectivamente. El eje y , es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para cada una de estas funciones. Las gráficas de

$$y = \frac{1}{x - a} \quad y \quad y = \frac{1}{(x - a)^2} \quad (4)$$

se obtienen al desplazar las gráficas $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ horizontalmente $|a|$ unidades. Como se observa en la FIGURA 2.5.3, $x = a$ es una asíntota vertical para las funciones racionales en (4). Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x - a} = -\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = \infty \quad (5)$$

$$y \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^2} = \infty. \quad (6)$$

Los límites infinitos en (5) y (6) son justo casos especiales del siguiente resultado general:

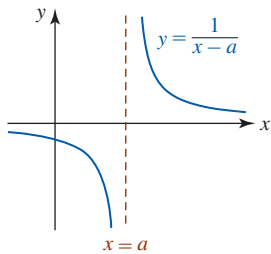
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x - a)^n} = -\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x - a)^n} = \infty, \quad (7)$$

para n un entero positivo impar y

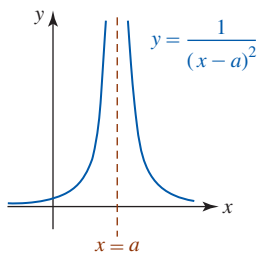
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^n} = \infty, \quad (8)$$

para n un entero positivo par. Como consecuencia de (7) y (8), la gráfica de una función racional $y = 1/(x - a)^n$ se asemeja a la gráfica en la figura 2.5.3a) para n impar o la de la figura 2.5.3b) para n par.

Para una función racional general $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q no tienen factores comunes, por este análisis debe resultar evidente que cuando q contiene un factor $(x - a)^n$, n un entero positivo, entonces la forma de la gráfica cerca de la recta vertical $x = a$ debe ser alguna de las que se muestran en la figura 2.5.3 o su reflexión en el eje x .



a)



b)

FIGURA 2.5.3 Gráfica de las funciones en (4)

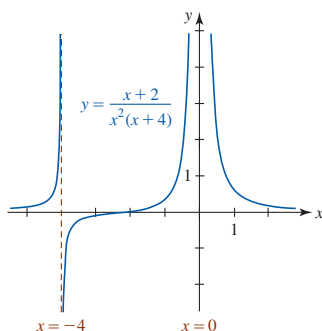


FIGURA 2.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Asíntotas verticales de una función racional

Al inspeccionar la función racional

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2(x + 4)}$$

se observa que $x = -4$ y $x = 0$ son asíntotas verticales para la gráfica de f . Puesto que el denominador contiene los factores $(x - (-4))^1$ y $(x - 0)^2$, es de esperar que la gráfica de f cerca de la recta $x = -4$ se asemeje a la figura 2.5.3a) o a su reflexión en el eje x , y la gráfica de f cerca de $x = 0$ se asemeje a la figura 2.5.3b) o a su reflexión en el eje x .

Para x próxima a 0 por cualquier lado, resulta fácil ver que $f(x) > 0$. Pero para x cerca de -4 , por ejemplo $x = -4.1$ y $x = -3.9$, se tiene $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, respectivamente. Al usar la información adicional de que sólo hay una intersección x simple $(-2, 0)$, se obtiene la gráfica de f en la FIGURA 2.5.4. ■

EJEMPLO 2 Límite por un lado

En la figura 1.6.6 se vio que el eje y , o la recta $x = 0$, es una asíntota vertical para la función logarítmica natural $f(x) = \ln x$ puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

La gráfica de la función logarítmica $y = \ln(x + 3)$ es la gráfica de $f(x) = \ln x$ desplazada 3 unidades a la izquierda. Por tanto, $x = -3$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = \ln(x + 3)$ puesto que $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x + 3) = -\infty$. ■

EJEMPLO 3 Límite por un lado

Grafique la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

Solución Al inspeccionar f se observa que su dominio es el intervalo $(-2, \infty)$ y la intersección con el eje y es $(0, 0)$. A partir de la tabla siguiente se concluye que f decrece

$x \rightarrow -2^+$	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999
$f(x)$	-6.01	-19.90	-63.21	-199.90

sin límite cuando x tiende a -2 por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. La gráfica de f se proporciona en la FIGURA 2.5.5. ■

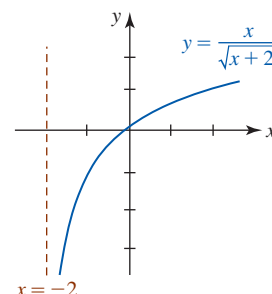


FIGURA 2.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

■ **Límites en el infinito** Si una función f tiende a un valor constante L cuando la variable independiente x crece sin límite ($x \rightarrow \infty$) o cuando x decrece ($x \rightarrow -\infty$) sin límite, entonces se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad (9)$$

y se dice que f posee un **límite en el infinito**. A continuación se presentan todas las posibilidades para límites en el infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$:

- Un límite existe pero el otro no.
- Tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existen y son iguales al mismo número.
- Tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existen pero son números diferentes.
- Ni $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existen.

Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ cuando x crece en la dirección positiva.

Definición 2.5.2 Asíntota horizontal

Se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si por lo menos una de las dos declaraciones en (9) es verdadera.

En la FIGURA 2.5.6 se han ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se observa, junto con la figura 2.5.6d) que, en general, la gráfica de una función puede tener como máximo *dos* asíntotas horizontales, aunque la gráfica de una *función racional* $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener cuando mucho *una*. Si la gráfica de una función racional f posee una asíntota horizontal $y = L$, entonces su comportamiento final es como se muestra en la figura 2.5.6c); es decir:

$$f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

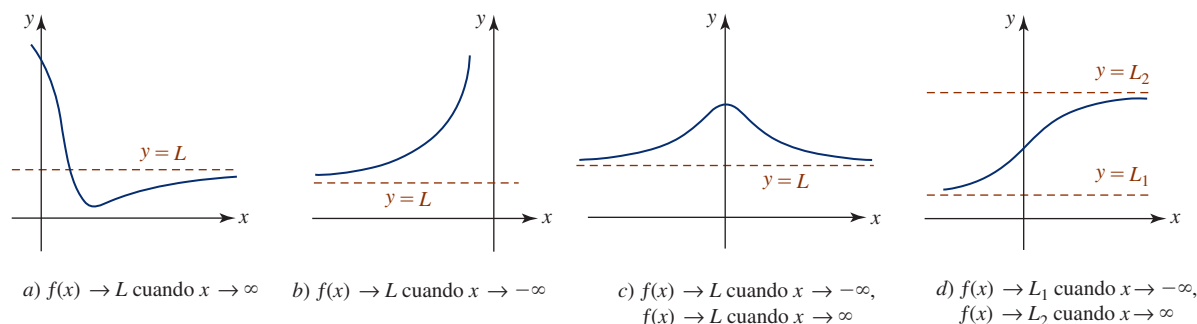


FIGURA 2.5.6 $y = L$ es una asíntota horizontal en a), b) y c); $y = L_1$ y $y = L_2$ son asíntotas horizontales en d)

Por ejemplo, si x se vuelve sin límite en la dirección positiva o en la negativa, las funciones en (4) tienden a 0 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-a} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-a} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0. \quad (10)$$

En general, si r es un número racional positivo, y si $(x-a)^r$ está definido, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^r} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-a)^r} = 0. \quad (11)$$

Estos resultados también son verdaderos cuando $x-a$ se sustituye por $a-x$, en el supuesto que $(a-x)^r$ esté definido.

EJEMPLO 4 Asíntotas horizontal y vertical

El dominio de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}}$ es el intervalo $(-\infty, 2)$. En virtud de (11) puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = 0.$$

Observe que no es posible considerar el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$ porque la función no está definida para $x \geq 2$. No obstante, $y = 0$ es una asíntota horizontal. Luego, por el límite en infinito

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = \infty$$

se concluye que $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f . Vea la FIGURA 2.5.7. ■

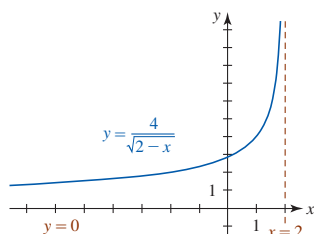


FIGURA 2.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

En general, si $F(x) = f(x)/g(x)$, entonces en la siguiente tabla se resumen los resultados para límites de las formas $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. El símbolo L denota un número real.

forma límite: $x \rightarrow a, \infty, -\infty$	$\frac{L}{\pm \infty}$	$\frac{\pm \infty}{L}, L \neq 0$	$\frac{L}{0}, L \neq 0$
el límite es:	0	infinito	infinito

(12)

Se dice que límites de la forma $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \pm \infty$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \pm \infty$ son **límites infinitos en el infinito**. Además, las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 se cumplen al sustituir el símbolo a por ∞ o $-\infty$ en el supuesto de que los límites existen. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}, \quad (13)$$

siempre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existan. En el caso del límite de un cociente, también debe tenerse $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$.

■ **Comportamiento final** En la sección 1.3 vimos que la forma en que una función f se comporta cuando $|x|$ es muy grande se denomina **comportamiento final**. Como ya se analizó, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ para grandes valores positivos de x . La gráfica de una función polinomial,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y = a_n x^n$ para $|x|$ muy grande. En otras palabras, para

$$f(x) = a_n x^n + \boxed{a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \quad (14)$$

Los términos encerrados en el rectángulo azul en (14) son irrelevantes cuando la gráfica de una función polinomial se observa globalmente; es decir, para $|x|$ muy grande. Así, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), \quad (15)$$

cundo (15) es ∞ o $-\infty$ dependiendo de a_n y n . En otras palabras, el límite en (15) constituye un ejemplo de límite infinito en el infinito.

EJEMPLO 5 Límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$.

Solución No es posible aplicar la ley del límite de un cociente en (13) a la función dada, puesto que $\lim_{x \rightarrow \infty} (-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 - x) = \infty$. No obstante, al dividir el numerador y el denominador entre x^4 podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)}{2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)\right]}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)\right]} \\ &= \frac{-6 + 0 + 0}{2 - 0} = -3. \end{aligned}$$

El límite del numerador existe, así como el límite del denominador, y el límite del denominador no es cero

Esto significa que la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función.

Solución alterna En virtud de (14) es posible descartar todas las potencias de x , menos la más alta:

descartar términos de los recuadros azules

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + \boxed{x^2 + 1}}{2x^4 - \boxed{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{2} = -3. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Límite infinito en el infinito

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2}$.

Solución Por (14),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{3x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = -\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

Grafique la función $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$.

Solución Al inspeccionar la función f se observa que su gráfica es simétrica con respecto al eje y , la intersección con el eje y es $(0, 0)$ y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Luego, a partir del límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -\lim_{x \rightarrow \infty} 1 = -1$$

se concluye que la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.5.8. ■

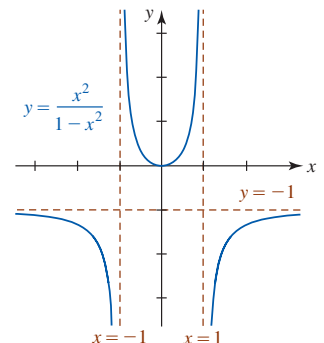


FIGURA 2.5.8 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Otra ley de los límites que se cumple para límites en el infinito es que el límite de una raíz n -ésima de una función es la raíz n -ésima del límite, siempre que el límite exista y la raíz n -ésima esté definida. En símbolos, si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \sqrt[n]{L}, \quad (16)$$

en el supuesto de que $L \geq 0$ cuando n es par. El resultado también se cumple para $x \rightarrow -\infty$.

EJEMPLO 8 Límite de una raíz cuadrada

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}}$.

Solución Debido a que el límite de la función racional en el radical existe y es positivo, puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{6x^3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ tiene asíntotas horizontales.

Solución Puesto que la función no es racional, es necesario investigar el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Primero, recuerde del álgebra que $\sqrt{x^2}$ es no negativa, o más al punto,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Luego, volvemos a escribir f como

$$f(x) = \frac{\frac{5x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{\frac{5x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}.$$

Los límites de f cuando $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$ son, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{5}{1} = 5,$$

$$\text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{-x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{-5}{1} = -5.$$

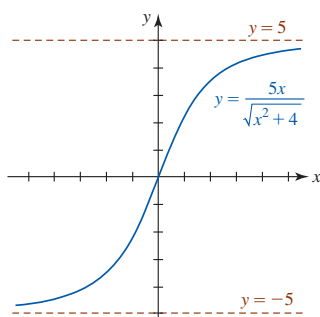


FIGURA 2.5.9 Gráfica de la función en el ejemplo 9

Por tanto, la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales $y = 5$ y $y = -5$. La gráfica de f , que es semejante a la figura 2.5.6d), se proporciona en la **FIGURA 2.5.9**. $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo se ve que la forma del límite dado es $\infty - \infty$, pero el límite existe y *no es* 0.

EJEMPLO 10 Uso de racionalización

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})$.

Solución Debido a que $f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$ es una función par (compruebe que $f(-x) = f(x)$) con dominio $(-\infty, \infty)$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe, debe ser el mismo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Primero racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})}{1(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - (x^4 + 7x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Luego, el numerador y el denominador se dividen entre $\sqrt{x^4} = x^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-7x^2}{\sqrt{x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^4}}}{\frac{x^2}{\sqrt{x^4}} + \frac{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-7 - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}} \\&= \frac{-7}{1 + 1} = -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

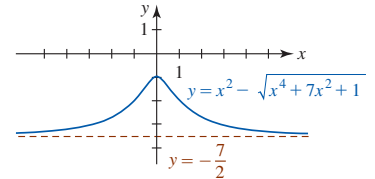


FIGURA 2.5.10 Gráfica de la función en el ejemplo 10

Con ayuda de un SAC, la gráfica de la función f se proporciona en la FIGURA 2.5.10. La recta $y = -\frac{7}{2}$ es una asíntota horizontal. Observe la simetría de la gráfica con respecto al eje y . ■

Cuando se trabaja con funciones que contienen la función exponencial natural, los cuatro siguientes límites ameritan una atención especial:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty. \quad (17)$$

Como se analizó en la sección 1.6 y se comprobó por los límites segundo y tercero en (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$. Vea la FIGURA 2.5.11.

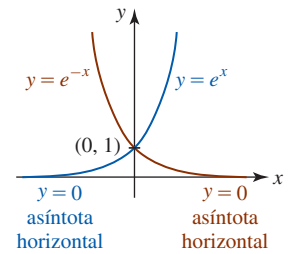


FIGURA 2.5.11 Gráficas de funciones exponenciales

EJEMPLO 11 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x) = \frac{6}{1 + e^{-x}}$ tiene alguna asíntota horizontal.

Solución Debido a que f no es una función racional, es necesario analizar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Primero, en virtud del tercer resultado proporcionado en (17) podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 6}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x})} = \frac{6}{1 + 0} = 6.$$

Así, $y = 6$ es una asíntota horizontal. Luego, debido a que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ por la tabla en (12) se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = 0.$$

En consecuencia, $y = 0$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.5.12. ■

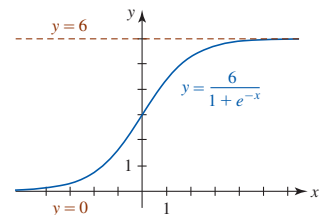


FIGURA 2.5.12 Gráfica de la función en el ejemplo 11

■ **Funciones compuestas** El teorema 2.3.3, el límite de una función compuesta, se cumple cuando a se sustituye por $-\infty$ o ∞ y el límite existe. Por ejemplo, si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ y f es continua en L , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right) = f(L). \quad (18)$$

El resultado del límite en (16) es justo un caso especial de (18) cuando $f(x) = \sqrt[n]{x}$. El resultado en (18) también se cumple para $x \rightarrow -\infty$. El último ejemplo ilustra a (18) cuando implica un límite en ∞ .

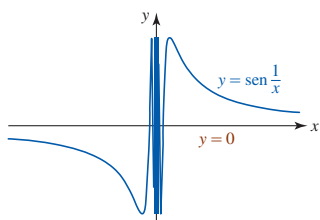


FIGURA 2.5.13 Gráfica de la función en el ejemplo 12

EJEMPLO 12 Otro repaso a una función trigonométrica

En el ejemplo 2 de la sección 2.4 vimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$ no existe. No obstante, el límite en el infinito, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$, existe. Por la ecuación (18), podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \sin 0 = 0.$$

Como se observa en la FIGURA 2.5.13, $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x) = \sin(1/x)$. Compare esta gráfica con la mostrada en la figura 2.4.2. ■

Ejercicios 2.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-24, exprese el límite dado como un número, como $-\infty$, o como ∞ .

1. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$
2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4}{(x-6)^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2}{(x+4)^3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{10}{x^2-4}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin x}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc x$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x}{4x^2+5}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^{-2}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{2}{x^4} \right)$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right)$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x+2} - \frac{x-1}{2x+6} \right)$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{3x+1} \right) \left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x} \right)^3$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+2}{6x-8}}$
18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{2x-1}{7-16x}}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+1})$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x} - x)$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{5}{x}\right)$
22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{3-6x}\right)$
23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x}{x+8}\right)$

En los problemas 25-32, encuentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ para la función dada f .

25. $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
26. $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$
27. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$
28. $f(x) = \frac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$29. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$30. f(x) = 1 + \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$31. f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$$

$$32. f(x) = \frac{|4x| + |x-1|}{x}$$

En los problemas 33-42, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función dada f . Trace la gráfica.

$$33. f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$34. f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$35. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$36. f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$$

$$37. f(x) = \frac{1}{x^2(x-2)}$$

$$38. f(x) = \frac{4x^2}{x^2+4}$$

$$39. f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$40. f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$41. f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$42. f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$$

En los problemas 43-46, use la gráfica dada para encontrar:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

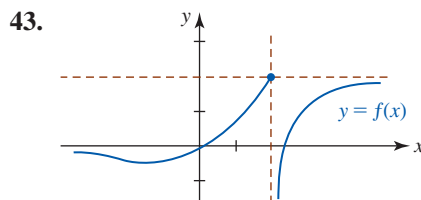


FIGURA 2.5.14 Gráfica para el problema 43

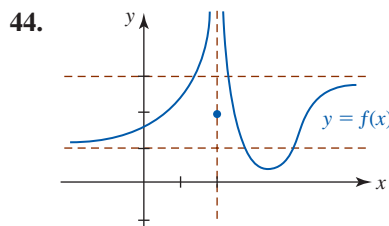


FIGURA 2.5.15 Gráfica para el problema 44

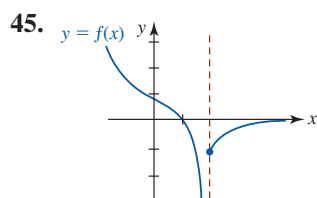


FIGURA 2.5.16 Gráfica para el problema 45

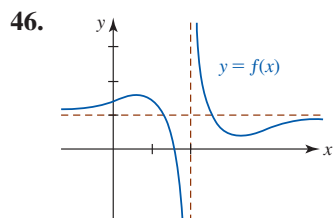


FIGURA 2.5.17 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47-50, trace una gráfica de una función f que satisfice las condiciones dadas.

47. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

48. $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$

49. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

50. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(3) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

51. Use una sustitución idónea para evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}.$$

52. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con velocidad v es $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a m cuando $v \rightarrow c^-$?

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o SAC para investigar el límite dado. Conjeture su valor.

53. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{2}{x^2}$ 54. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$

55. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Use la gráfica para conjeturar los valores de $f(x)$ cuando

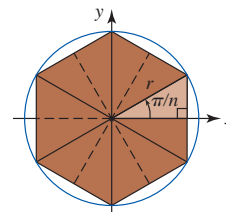
a) $x \rightarrow -1^+$, b) $x \rightarrow 0$ y c) $x \rightarrow \infty$.

56. a) Un n -gono regular es un polígono regular de n lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por n puntos equidistantes sobre el círculo. Suponga que el polígono que se muestra en la FIGURA 2.5.18 repre-

senta un n -gono regular inscrito en un círculo de radio r . Use trigonometría para demostrar que el área $A(n)$ del n -gono está dada por

$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

- b) Tiene sentido afirmar que el área $A(n)$ tiende al área del círculo a medida que aumenta el número de lados del n -gono. Use una calculadora para obtener $A(100)$ y $A(1\,000)$.
 c) Sea $x = 2\pi/n$ en $A(n)$ y observe que cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $x \rightarrow 0$. Use (10) de la sección 2.4 para demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi r^2$.

FIGURA 2.5.18 n -gono inscrito para el problema 56

Piense en ello

57. a) Suponga que $f(x) = x^2/(x+1)$ y $g(x) = x-1$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

- b) ¿Qué indica el resultado del inciso a) respecto a las gráficas de f y g , donde $|x|$ es grande?
 c) De ser posible, asigne un nombre a la función g .

58. Muy a menudo los estudiantes e incluso los profesores trazan incorrectamente gráficas desplazadas verticalmente. Por ejemplo, las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 1$ están dibujadas incorrectamente en la FIGURA 2.5.19a) pero lo están correctamente en la figura 2.5.19b). Demuestre que la figura 2.5.19b) es correcta al mostrar que la distancia horizontal entre los dos puntos P y Q en la figura tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.

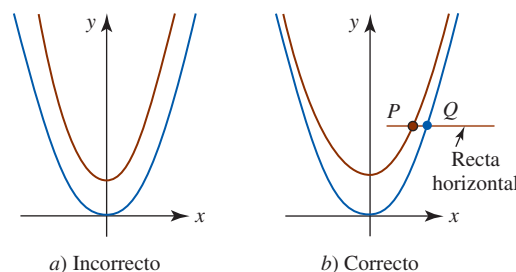


FIGURA 2.5.19 Gráficas para el problema 58

2.6 Límites: un enfoque formal

Introducción En el análisis que se presenta a continuación se considerará un enfoque alternativo a la idea de límite, que se basa en conceptos analíticos más que en conceptos intuitivos. Una **demostración** de la existencia de un límite jamás debe estar basada en la habilidad para elaborar gráficas o en tablas de valores numéricos. Aunque una buena comprensión intuitiva de

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ es suficiente para continuar con el estudio del cálculo en este texto, en general una comprensión intuitiva es algo muy vago como para usarlo en la demostración de teoremas. Para presentar una demostración rigurosa de la existencia de un límite, o para demostrar los importantes teoremas de la sección 2.2, es necesario empezar con una definición precisa de límite.

■ **Límite de una función** Se intentará demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 6) = 10$ al trabajar la siguiente idea: “Si $f(x) = 2x + 6$ puede hacerse arbitrariamente próximo a 10 al tomar x suficientemente próximo a 2, por ambos lados pero diferente de 2, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$.” Es necesario precisar los conceptos *arbitrariamente próximo* y *suficientemente próximo*. Para establecer una norma de proximidad arbitraria, se pedirá que la distancia entre los números $f(x)$ y 10 sea menor que 0.1; es decir,

$$|f(x) - 10| < 0.1 \quad \text{o} \quad 9.9 < f(x) < 10.1. \quad (1)$$

Así, ¿cuán próximo a 2 debe estar x para satisfacer (1)? Para averiguarlo, es posible usar álgebra normal para volver a escribir la desigualdad

$$9.9 < 2x + 6 < 10.1$$

cuando $1.95 < x < 2.05$. Al sumar -2 a ambos miembros de esta desigualdad simultánea se obtiene

$$-0.05 < x - 2 < 0.05.$$

Al usar valores absolutos y recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad puede escribirse como $0 < |x - 2| < 0.05$. Así, para una *cercanía arbitrariamente próxima a 10* de 0.1, *suficientemente próximo a 2* significa a menos de 0.05. En otras palabras, si x es un número diferente de 2 tal que su distancia a 2 satisface $|x - 2| < 0.05$, entonces se garantiza que la distancia de $f(x)$ a 10 satisface $|f(x) - 10| < 0.1$. Al expresarlo de otra manera, cuando x es un número diferente de 2, pero que está en el intervalo abierto $(1.95, 2.05)$ sobre el eje x , entonces $f(x)$ está en el intervalo $(9.9, 10.1)$ sobre el eje y .

Se intentará generalizar usando el mismo ejemplo. Suponga que ε (la letra griega *épsilon*) denota un *número positivo* arbitrario que constituye la medida de la proximidad arbitraria al número 10. Si se pide que

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{o} \quad 10 - \varepsilon < f(x) < 10 + \varepsilon, \quad (2)$$

entonces por $10 - \varepsilon < 2x + 6 < 10 + \varepsilon$ y por álgebra, se encuentra que

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{\varepsilon}{2} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

De nuevo, al usar valores absolutos y al recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad en (3) puede escribirse como

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Si $\varepsilon/2$ se denota por el nuevo símbolo δ (la letra griega *delta*), (2) y (4) pueden escribirse como

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Así, para un nuevo valor para ε , por ejemplo $\varepsilon = 0.001$, $\delta = \varepsilon/2 = 0.0005$ establece la proximidad correspondiente a 2. Para cualquier número x diferente de 2 en $(1.9995, 2.0005)$,* puede tenerse la certeza de que $f(x)$ está en $(9.999, 10.001)$. Vea la FIGURA 2.6.1.

■ **Una definición** El análisis anterior conduce a la **definición ε - δ de límite**.

Definición 2.6.1 Definición de límite

Suponga que una función f está definida en todas partes sobre un intervalo abierto, excepto quizás en un número a en el intervalo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

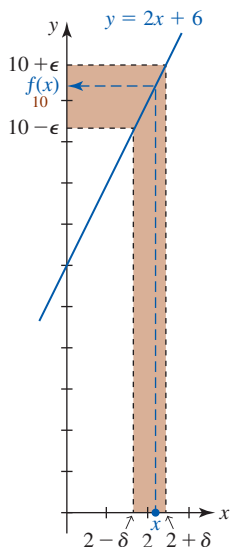


FIGURA 2.6.1 $f(x)$ está en $(10 - \varepsilon, 10 + \varepsilon)$ siempre que x esté en $(2 - \delta, 2 + \delta)$, $x \neq 2$

* Por esta razón se usa $0 < |x - 2| < \delta$ en lugar de $|x - 2| < \delta$. Al considerar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, no olvide que f en 2 carece de importancia.

Sea $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y suponga que $\delta > 0$ es el número que “funciona” en el sentido de la definición 2.6.1 para un $\varepsilon > 0$ dado. Como se muestra en la FIGURA 2.6.2a), toda x en $(a - \delta, a + \delta)$, con la posible excepción de a mismo, tendrá entonces una imagen $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Además, en la figura 2.6.2b), una elección $\delta_1 < \delta$ para la misma ε también “funciona” en el sentido de que toda x diferente a a en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ proporciona $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. No obstante, la figura 2.6.2c) muestra que al escoger un ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, más pequeño, demanda encontrar un nuevo valor de δ . Observe en la figura 2.6.2c) que x está en $(a - \delta, a + \delta)$ pero no en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$, de modo que $f(x)$ no necesariamente está en $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$.

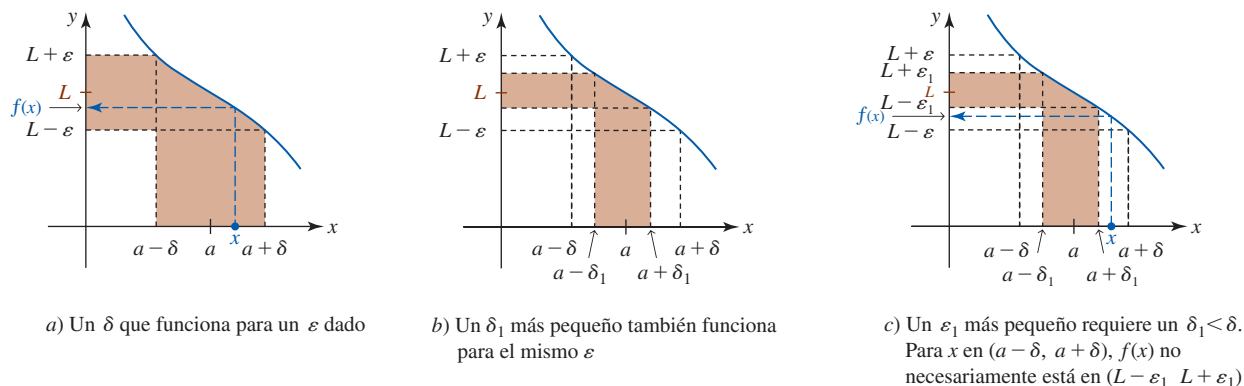


FIGURA 2.6.2 $f(x)$ está en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ siempre que x esté en $(a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$

EJEMPLO 1 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 3} (5x + 2) = 17$.

Solución Para cualquier $\varepsilon > 0$, arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un δ de modo que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacer lo anterior, considere

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así, para hacer $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$, sólo es necesario hacer $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon/5$.

Verificación Si $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$, entonces $5|x - 3| < \varepsilon$ implica

$$|5x - 15| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |f(x) - 17| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$.

Solución Para $x \neq -4$,

$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |4 - x - 8| = |-x - 4| = |x + 4| = |x - (-4)|$$

$$\text{Así,} \quad \left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |x - (-4)| < \varepsilon$$

siempre que se tiene $0 < |x - (-4)| < \varepsilon$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon$. $\blacksquare$

◀ Este límite se analizó en (1) y (2) de la sección 2.1.

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

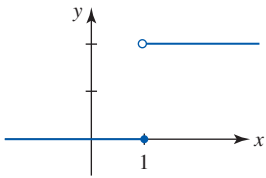


FIGURA 2.6.3 El límite de f no existe cuando x tiende a 1 en el ejemplo 3

En la **FIGURA 2.6.3** se reconoce que f tiene una discontinuidad de tipo salto en 1, de modo que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe. No obstante, para *demostrar* este último hecho, se procederá indirectamente. Suponga que el límite existe; a saber, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$. Luego, por la definición 2.6.1 sabemos que para la elección $\varepsilon = \frac{1}{2}$ debe existir un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta.$$

Luego, a la derecha de 1 se escoge $x = 1 + \delta/2$. Puesto que

$$0 < \left| 1 + \frac{\delta}{2} - 1 \right| = \left| \frac{\delta}{2} \right| < \delta$$

debe tenerse

$$\left| f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - L \right| = |2 - L| < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

A la izquierda de 1, se escoge $x = 1 - \delta/2$. Pero

$$0 < \left| 1 - \frac{\delta}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{\delta}{2} \right| < \delta$$

$$\text{implica} \quad \left| f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - L \right| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Al resolver las desigualdades en valor absoluto (5) y (6) se obtiene, respectivamente,

$$\frac{3}{2} < L < \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}.$$

Puesto que ningún número L puede satisfacer estas dos desigualdades, concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no debe existir. ■

En el siguiente ejemplo se considera el límite de una función cuadrática. Veremos que en este caso encontrar la δ requiere un poco más de ingenio que en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 4 Uso de la definición 2.6.1

► Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + 2x + 2) = -6$.

Solución Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es necesario encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| &= |(-1)(x^2 - 2x - 8)| \\ &= |(x + 2)(x - 4)| \\ &= |x + 2||x - 4|. \end{aligned} \quad (7)$$

En otras palabras, se quiere hacer $|x + 2||x - 4| < \varepsilon$. Pero puesto que hemos acordado examinar valores de x cerca de 4, sólo se consideran aquellos valores para los cuales $|x - 4| < 1$. Esta última desigualdad da $3 < x < 5$ o, de manera equivalente, $5 < x + 2 < 7$. En consecuencia, podemos escribir $|x + 2| < 7$. Entonces, por (7),

$$0 < |x - 4| < 1 \quad \text{implica} \quad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4|.$$

Si ahora δ se escoge como el mínimo de los dos números 1 y $\varepsilon/7$, escrito $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ se tiene

$$0 < |x - 4| < \delta \quad \text{implica} \quad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

El razonamiento en el ejemplo 4 es sutil. En consecuencia, merece la pena dedicar unos minutos para volver a leer el análisis que está inmediatamente después de la definición 2.6.1,

Este límite se analizó en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

volver a examinar la figura 2.3.2b) y luego volver a pensar en por qué $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ es el δ que “funciona” en el ejemplo. Recuerde que el valor de ε puede escogerse arbitrariamente; considere δ para, por ejemplo, $\varepsilon = 8$, $\varepsilon = 6$ y $\varepsilon = 0.01$.

■ **Límites laterales** A continuación se presentan las definiciones de los **límites laterales**,

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Definición 2.6.2 Límite por la izquierda

Suponga que una función f está definida sobre un intervalo abierto (c, a) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a - \delta < x < a.$$

Definición 2.6.3 Límite por la derecha

Suponga que una función f está definida sobre un intervalo abierto (a, c) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a < x < a + \delta.$$

EJEMPLO 5 Uso de la definición 2.6.3

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solución Primero, podemos escribir

$$|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}.$$

Luego, $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < 0 + \varepsilon^2$. En otras palabras, se escoge $\delta = \varepsilon^2$.

Verificación Si $0 < x < \varepsilon^2$, entonces $0 < \sqrt{x} < \varepsilon$ implica

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

■ **Límites que implican el infinito** Los dos conceptos de **límite infinito**

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ (o bien, } -\infty) \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a$$

y **límite en el infinito**

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \text{ (o bien, } -\infty)$$

se formalizan en las dos secciones siguientes.

Recuerde que un límite infinito es un límite que no existe cuando $x \rightarrow a$.

Definición 2.6.4 Límites infinitos

- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.4 se ilustran en la FIGURA 2.6.4a) y en la figura 2.6.4b), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \rightarrow \infty$ (o $-\infty$) cuando $x \rightarrow a$, entonces $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f . En el caso en que $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces $f(x)$ puede hacerse más grande que cualquier número positivo arbitrario (es decir, $f(x) > M$) al tomar x suficientemente próximo a a (es decir, $0 < |x - a| < \delta$).

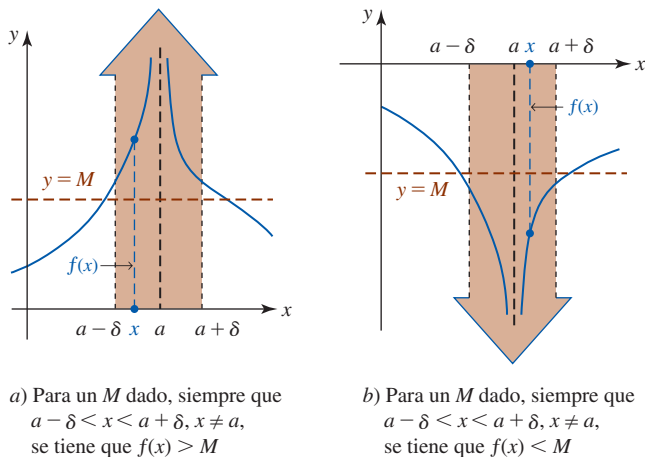


FIGURA 2.6.4 Límites infinitos cuando $x \rightarrow a$

Los cuatro límites infinitos por un lado

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-, & f(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^- \\ f(x) &\rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+, & f(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+ \end{aligned}$$

se definen de forma análoga a la proporcionada en las definiciones 2.6.2 y 2.6.3.

Definición 2.6.5 Límites en el infinito

- i*) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.
- ii*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.5 se ilustran en la FIGURA 2.6.5a) y en la figura 2.6.5b), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), entonces $y = L$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f . En el caso en que $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ (es decir, $|f(x) - L| < \varepsilon$) al tomar x suficientemente lejos sobre el eje x positivo (es decir, $x > N$).

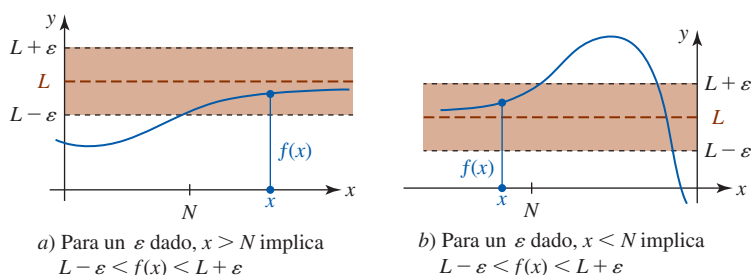


FIGURA 2.6.5 Límites en el infinito

EJEMPLO 6 Uso de la definición 2.6.5i)

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3$.

Solución Por la definición 2.6.5i), para cualquier $\varepsilon > 0$ es necesario encontrar un número $N > 0$ tal que

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Luego, al considerar $x > 0$, tenemos

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| = \left| \frac{-3}{x+1} \right| = \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \varepsilon$$

siempre que $x > 3/\varepsilon$. Entonces, se escoge $N = 3/\varepsilon$. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.01$, entonces $N = 3/(0.01) = 300$ garantiza que $|f(x) - 3| < 0.01$ siempre que $x > 300$. ■

■ **Posdata: Un poco de historia** Después de esta sección tal vez esté de acuerdo con el filósofo, predicador, historiador y científico inglés William Whewell (1794-1866), quien escribió en 1858 que “Un límite es una concepción . . . peculiar”. Durante muchos años después de la invención del cálculo en el siglo XVII, los matemáticos discutían y debatían acerca de la naturaleza de un límite. Había la percepción de que la intuición, las gráficas y ejemplos numéricos de razones de cantidades que desaparecen proporcionan cuando mucho un cimiento inestable para tal concepto fundamental. Como se verá al principio del siguiente capítulo, el concepto de límite juega un papel central en cálculo. El estudio del cálculo pasó por varios periodos de creciente rigor matemático empezando con el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y luego con el matemático alemán Karl Wilhelm Weierstrass.



Cauchy

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nació durante una época de convulsión en la historia de Francia. Cauchy estaba destinado a iniciar una revolución por sí mismo en matemáticas. Por muchas contribuciones, pero especialmente debido a sus esfuerzos por clarificar cuestiones matemáticas oscuras, su demanda incesante por contar con definiciones satisfactorias y demostraciones rigurosas de teoremas, Cauchy a menudo es denominado “padre del análisis moderno”. Escritor prolífico cuyo trabajo sólo ha sido superado por unos cuantos, Cauchy produjo casi 800 artículos sobre astronomía, física y matemáticas. Sin embargo, la misma mentalidad que siempre estaba abierta y preguntaba sobre ciencia y matemáticas también era estrecha y no cuestionaba muchas otras áreas. Franca y arrogante, la postura apasionada de Cauchy respecto a asuntos políticos y religiosos a menudo lo alejaron de sus colegas.



Weierstrass

Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) ¡Uno de los analistas matemáticos más destacados del siglo XIX sin haber tenido ningún grado académico! Después de especializarse en leyes en la Universidad de Bonn, aunque concentrado en esgrima y en beber cerveza durante cuatro años, Weierstrass se “graduó” en la vida real sin ningún título. Al necesitar trabajo, Weierstrass aprobó un examen estatal y recibió un certificado para enseñar en 1841. Durante 15 años como profesor de enseñanza secundaria, su genio matemático dormido floreció. Aunque la cantidad de sus investigaciones publicadas era modesta, especialmente en comparación con la de Cauchy, la calidad de estos trabajos impresionó tanto a la comunidad matemática alemana que se le otorgó un doctorado, *honoris causa*, de la Universidad de Königsberg, y finalmente fue contratado como profesor en la Universidad de Berlín. Una vez ahí, Weierstrass obtuvo reconocimiento internacional como matemático y como maestro de matemáticas. Una de sus estudiantes fue Sonja Kowalewski, la más grande matemática del siglo XIX. Fue Karl Weierstrass quien dotó de sólidos fundamentos al concepto de límite con la definición ε - δ .

Ejercicios 2.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-24, use las definiciones 2.6.1, 2.6.2 o 2.6.3 para demostrar el resultado sobre límites dado.

1. $\lim_{x \rightarrow 5} 10 = 10$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \pi = \pi$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
4. $\lim_{x \rightarrow 4} 2x = 8$
5. $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 6) = 5$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4) = -4$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 7) = 7$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} (9 - 6x) = 3$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{4} = \frac{1}{4}$
10. $\lim_{x \rightarrow 1/2} 8(2x + 5) = 48$
11. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$
12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -\frac{1}{2}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 + 12x^4}{x^4} = 12$
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} 8x^3 = 0$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{5x} = 0$
18. $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \sqrt{2x - 1} = 0$
19. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$
20. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$
21. $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$
22. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4) = 12$
23. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 4) = 3$
24. $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 2x) = 35$

25. Para $a > 0$, use la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

y el hecho de que $\sqrt{x} \geq 0$ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

26. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 2} (1/x) = \frac{1}{2}$. [Sugerencia: Considere sólo los números x tales que $1 < x < 3$.]

En los problemas 27-30, demuestre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

27. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1; \\ 0, & x \geq 1; \end{cases} \quad a = 1$

28. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 3; \\ -1, & x > 3; \end{cases} \quad a = 3$

29. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0; \\ 2 - x, & x > 0; \end{cases} \quad a = 0$

30. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 0$

En los problemas 31-34, use la definición 2.6.5 para demostrar el resultado de límites dado.

31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 1}{2x + 1} = \frac{5}{2}$

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x + 8} = \frac{2}{3}$

33. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{x - 3} = 10$

34. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1$

Piense en ello

35. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,
donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

2.7 El problema de la recta tangente

■ Introducción En un curso de cálculo se estudian muchas cosas diferentes, pero como se mencionó en la introducción de la sección 2.1, el tema “cálculo” por lo regular se divide en dos amplias áreas —relacionadas entre sí— denominadas **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. El análisis de cada uno de estos temas suele comenzar con un problema de motivación que implica la gráfica de una función. El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema.

- Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función f ,

mientras el estudio del cálculo integral se motiva con el siguiente problema:

- Encontrar el área bajo la gráfica de una función f .

El primer problema se abordará en esta sección, el segundo se analizará en la sección 5.3.

■ Recta tangente a una gráfica La palabra *tangente* surge del verbo latín *tangere*, que significa “tocar”. Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta L que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto P . Vea la FIGURA 2.7.1. No resulta tan fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función f . La idea de *tocar* traslada del concepto de recta tangente a la gráfica de una función, pero la idea de *cortar la gráfica en un punto* no lo hace.

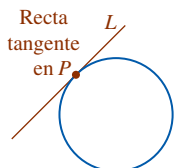


FIGURA 2.7.1 La recta tangente L toca un círculo en el punto P

Suponga que $y = f(x)$ es una función continua. Si, como se muestra en la FIGURA 2.7.2, f posee una recta tangente L a su gráfica en un punto P , entonces ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta requerimos las coordenadas de P y la pendiente $m_{\tan}$ de L . Las coordenadas de P no presentan ninguna dificultad, puesto que un punto sobre la gráfica de una función f se obtiene al especificar un valor de x en el dominio de f . Así, las coordenadas del punto de tangencia en $x = a$ son $(a, f(a))$. En consecuencia, el problema de encontrar una recta tangente se vuelve en el problema de encontrar la pendiente $m_{\tan}$ de la recta. Como medio para *aproximar* $m_{\tan}$, es fácil encontrar las pendientes $m_{\sec}$ de *rectas secantes* (del verbo latino *secare*, que significa “cortar”) que pasan por el punto P y cualquier otro punto Q sobre la gráfica. Vea la FIGURA 2.7.3.

Pendiente de rectas secantes Si las coordenadas de P son $(a, f(a))$ y las coordenadas de Q son $(a + h, f(a + h))$, entonces como se muestra en la FIGURA 2.7.4, la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{\sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

o bien,

$$m_{\sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

La expresión en el miembro derecho de la igualdad en (1) se denomina **cociente diferencial**. Cuando se hace que h asuma valores que cada vez son más próximos a cero, es decir, cuando $h \rightarrow 0$, entonces los puntos $Q(a + h, f(a + h))$ se mueven en la curva cada vez más cerca del punto $P(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que las rectas secantes tiendan a la recta tangente L , y que $m_{\sec} \rightarrow m_{\tan}$ cuando $h \rightarrow 0$. Es decir,

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\sec}$$

en el supuesto de que el límite existe. Esta conclusión se resume en una forma equivalente del límite usando el cociente diferencial (1).

Definición 2.7.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a . Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{\tan}$.

Justo como muchos de los problemas analizados antes en este capítulo, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Si el límite en (2) existe, el número $m_{\tan}$ también se denomina **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

El cálculo de (2) es esencialmente un *proceso de cuatro pasos*, tres de los cuales implican sólo precálculo matemático: álgebra y trigonometría. Si los tres primeros pasos se llevan a cabo con precisión, el cuarto, o paso de cálculo, *puede ser* la parte más sencilla del problema.

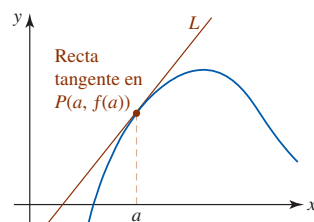
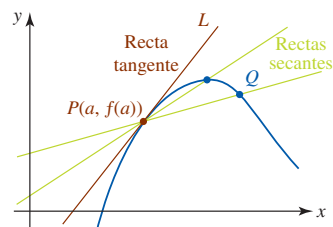


FIGURA 2.7.2 Recta tangente L a una gráfica en el punto P



(1) FIGURA 2.7.3 Pendientes de rectas secantes aproximan la pendiente $m_{\tan}$ de L

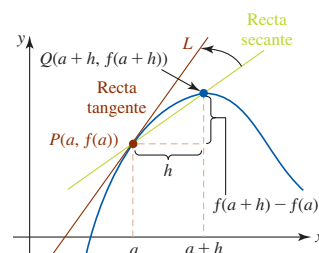


FIGURA 2.7.4 Rectas secantes giran en la recta tangente L cuando $h \rightarrow 0$

Directrices para calcular (2)

- i) Evaluar $f(a)$ y $f(a + h)$.
- ii) Evaluar la diferencia $f(a + h) - f(a)$. Simplificar.
- iii) Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- iv) Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

En muchas instancias, el cálculo de la diferencia $f(a + h) - f(a)$ en el paso *ii*) es el más importante. Resulta imperativo que usted simplifique este paso cuanto sea posible. Un consejo de cómo hacerlo: en *muchos* problemas que implican el cálculo de (2) es posible factorizar h de la diferencia $f(a + h) - f(a)$.

Nota ▶

EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a .

i) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1 + h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) \overset{\text{por el paso precedente}}{=} f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $(1, 3)$ es 2. ■

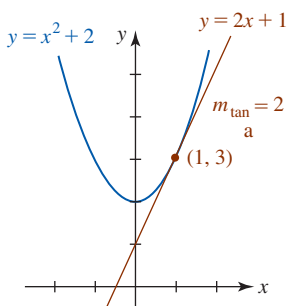


FIGURA 2.7.5 Recta tangente en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

Solución Se conocen el punto de tangencia $(1, 3)$ y la pendiente $m_{\tan} = 2$, de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones x y y de la recta roja en la FIGURA 2.7.5. ■

EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

Solución Se empieza por usar (2) para encontrar $m_{\tan}$ con a identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

i) Se tiene $f(2) = 2/2 = 1$ y $f(2 + h) = 2/(2 + h)$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(2 + h) - f(2) &= \frac{2}{2 + h} - 1 \\ &= \frac{2}{2 + h} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + h}{2 + h} \quad \leftarrow \text{un común denominador es } 2 + h \\ &= \frac{2 - 2 - h}{2 + h} \\ &= \frac{-h}{2 + h}. \quad \leftarrow \text{aquí está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado debe dividirse entre h o, más precisamente, entre $\frac{h}{1}$. Se invierte y multiplica por $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-h}{\frac{2+h}{\frac{1}{h}}} = \frac{-h}{2+h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{2+h}. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Por (2), m_{tan} es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

Como $f(2) = 1$, el punto de tangencia es $(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $(2, 1)$ es $m_{\text{tan}} = -\frac{1}{2}$. Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de $y = 2/x$ y la recta tangente en $(2, 1)$ se muestran en la FIGURA 2.7.6.

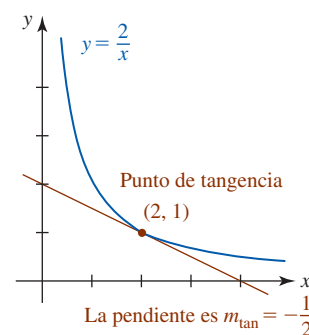


FIGURA 2.7.6 Recta tangente en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$.

Solución Al sustituir a por 5 en (2) se tiene:

$$i) \quad f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2, \text{ y}$$

$$f(5+h) = \sqrt{5+h-1} = \sqrt{4+h}.$$

ii) La diferencia es

$$f(5+h) - f(5) = \sqrt{4+h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de h en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= \frac{\sqrt{4+h} - 2}{1} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{(4+h) - 4}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{h}{\sqrt{4+h} + 2}. \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Así, el cociente diferencial $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \frac{\frac{h}{\sqrt{4+h} + 2}}{h} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}. \end{aligned}$$

iv) El límite en (2) es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $(5, 2)$ es $\frac{1}{4}$.

El resultado obtenido en el siguiente ejemplo no es sorprendente.

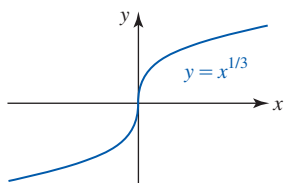


FIGURA 2.7.7 Tangente vertical en el ejemplo 6

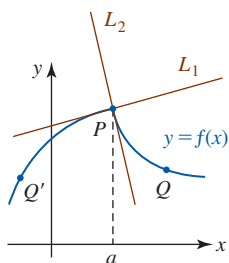
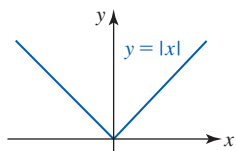
FIGURA 2.7.8 La tangente no existe en $(a, f(a))$ 

FIGURA 2.7.9 Función en el ejemplo 7

EJEMPLO 5 Recta tangente a una recta

Para cualquier función lineal $y = mx + b$, la recta tangente a su gráfica coincide con la recta misma. Así, no de manera inesperada, la pendiente de la recta tangente para cualquier número $x = a$ es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(a+h) + b - (ma + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m. \quad \blacksquare$$

■ **Tangentes verticales** El límite en (2) puede no existir para una función f en $x = a$ y aun así ser una tangente en el punto $(a, f(a))$. La recta tangente a una gráfica puede ser **vertical**, en cuyo caso su pendiente está indefinida. El concepto de tangente vertical se abordará en la sección 3.1.

EJEMPLO 6 Recta tangente vertical

Aunque por esta ocasión no se abundará en los detalles, puede demostrarse que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. En la FIGURA 2.7.7 se observa que el eje y , es decir, la recta $x = 0$, es tangente a la gráfica en el punto $(0, 0)$. ■

■ **Una tangente que puede no existir** La gráfica de una función f que es continua en un número a no tiene por qué poseer una recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Una recta tangente no existirá cuando la gráfica de f tenga un pico pronunciado en $(a, f(a))$. En la FIGURA 2.7.8 se indica qué puede ser erróneo cuando la gráfica de la función tiene un “pico”. En este caso f es continua en a , pero las rectas secantes que pasan por P y Q tienden a L_2 cuando $Q \rightarrow P$, y las rectas secantes que pasan por P y Q' tienden a una recta diferente L_1 cuando $Q' \rightarrow P$. En otras palabras, el límite en (2) no existe porque los límites laterales del cociente diferencial son diferentes (cuando $h \rightarrow 0^+$ y cuando $h \rightarrow 0^-$).

EJEMPLO 7 Gráfica con un pico

Demuestre que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en $(0, 0)$.

Solución La gráfica de la función valor absoluto en la FIGURA 2.7.9 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de f no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h, & h > 0 \\ -h, & h < 0 \end{cases}$$

observamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que el límite (2) no existe. Aunque la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, la gráfica de f no posee ninguna tangente en $(0, 0)$. ■

■ **Razón de cambio media** En contextos diferentes el cociente diferencial en (1) y (2), o pendiente de la recta secante, se escribe en términos de símbolos alternos. El símbolo h en (1) y (2) a menudo se escribe como Δx y la diferencia $f(a + \Delta x) - f(a)$ se denota por Δy , es decir, el cociente diferencial es

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Además, si $x_1 = a + \Delta x$, $x_0 = a$, entonces $\Delta x = x_1 - x_0$ y (3) es lo mismo que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4)$$

La pendiente $\Delta y / \Delta x$ de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se denomina **razón de cambio media de la función** f sobre el intervalo $[x_0, x_1]$. Así, el límite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$ se denomina **razón de cambio media instantánea de la función** con respecto a x en x_0 .

Casi todo mundo tiene una noción intuitiva de la velocidad como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto lapso. Cuando, por ejemplo, un autobús recorre 60 mi en 1 h, la

velocidad media del autobús debe haber sido 60 mi/h. Por supuesto, resulta difícil mantener la razón de 60 mi/h durante todo el recorrido porque el autobús disminuye su velocidad al pasar por poblaciones y la aumenta al rebasar a otros vehículos. En otras palabras, la velocidad cambia con el tiempo. Si el programa de la compañía de transportes demanda que el autobús recorra las 60 millas de una población a otra en 1 h, el conductor sabe instintivamente que debe compensar velocidades inferiores a 60 mi/h al conducir a velocidades superiores en otros puntos del recorrido. Saber que la velocidad media es 60 mi/h no permite, sin embargo, contestar la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?

■ **Velocidad media** En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. \quad (5)$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{\text{pro}} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

Pero suponga ahora que deseamos determinar la velocidad *exacta* v en el instante en que el corredor ya lleva media hora corriendo. Si se mide que la distancia recorrida en el intervalo de 0 h a 0.5 h es igual a 5 km, entonces

$$v_{\text{pro}} = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ km/h}.$$

De nuevo, este número no es una medida, o necesariamente incluso un indicador aceptable, de la velocidad instantánea v a que el corredor se ha movido 0.5 h en la carrera. Si determinamos que a 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es $v_{\text{pro}} = 5.7/0.6 = 9.5 \text{ km/h}$. No obstante, durante el lapso de 0.5 h a 0.6 h,

$$v_{\text{pro}} = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h}.$$

El último número es una medida más realista de la razón v . Vea la FIGURA 2.7.10. Al “estimar” el lapso entre 0.5 h y el tiempo que corresponde a la posición medida cerca de 5 km, se espera obtener incluso una mejor aproximación a la velocidad del corredor en el instante 0.5 h.

■ **Movimiento rectilíneo** Para generalizar el análisis precedente, suponga que un objeto, o partícula, en el punto P se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 2.7.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde t representa el tiempo. Los valores de s son distancias dirigidas medidas a partir de O en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando P está a la derecha o arriba de O , se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O . El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto P en el instante t_0 y un punto P' en el instante t_1 , y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 2.7.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (6)$$

EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura s por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde s se mide en pies y t en segundos. Vea la FIGURA 2.7.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

Solución El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación $s(t) = 630$ o $-16t^2 + 630 = 630$. Así se obtiene $t = 0$ s. Cuando la pelota golpea el suelo, entonces

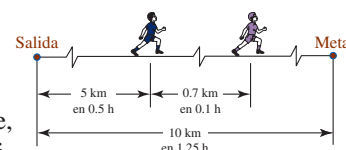


FIGURA 2.7.10 Corredor en una carrera de 10 km

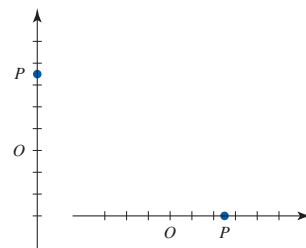


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

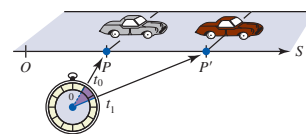


FIGURA 2.7.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

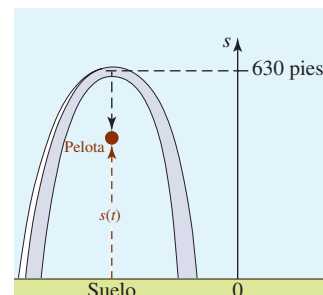


FIGURA 2.7.13 Pelota que cae en el ejemplo 8

$s(t) = 0$ o $-16t^2 + 630 = 0$. Con la última ecuación se obtiene $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$ s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo $[0, \sqrt{315/8}]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s(\sqrt{315/8}) - s(0)}{\sqrt{315/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{315/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.}$$

Si se hace $t_1 = t_0 + \Delta t$, o $\Delta t = t_1 - t_0$, y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, entonces (6) es equivalente a

$$v_{\text{pro}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (7)$$

Esto sugiere que el límite de (7) cuando $\Delta t \rightarrow 0$ proporciona la **razón de cambio instantánea** de $s(t)$ en $t = t_0$, o **velocidad instantánea**.

Definición 2.7.2 Velocidad instantánea

Sea $s = s(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (8)$$

siempre que el límite exista.

Nota: Excepto por notación e interpretación, no hay ninguna diferencia matemática entre (2) y (8). También, a menudo se omite la palabra *instantánea*, de modo que entonces se habla de la *razón de cambio* de una función o la *velocidad* de una partícula en movimiento.

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 8

Encuentre la velocidad instantánea de la pelota que cae en el ejemplo 8 en $t = 3$ s.

Solución Se usa el mismo procedimiento de cuatro pasos que en los ejemplos anteriores con $s = s(t)$ dada en el ejemplo 8.

- i) $s(3) = -16(9) + 630 = 486$. Para cualquier $\Delta t \neq 0$,
 $s(3 + \Delta t) = -16(3 + \Delta t)^2 + 630 = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486$.
- ii) $s(3 + \Delta t) - s(3) = [-16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486] - 486$
 $= -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t = \Delta t(-16\Delta t - 96)$
- iii) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-16\Delta t - 96)}{\Delta t} = -16\Delta t - 96$
- iv) Por (8),

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-16\Delta t - 96) = -96 \text{ pies/s.} \quad (9)$$

En el ejemplo 9, el número $s(3) = 486$ pies es la altura de la pelota por arriba del nivel del suelo a 3 s de haber sido soltada. El signo menos en (9) es importante porque la pelota se está moviendo en dirección opuesta a la dirección positiva (hacia arriba), es decir, se mueve hacia abajo.

Ejercicios 2.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x .

- $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$
- $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

- $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$
- $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$
- $f(x) = \sin x$, $(\pi/2, 1)$; $x = \pi/2$, $x = 2\pi/3$
- $f(x) = \cos x$, $(-\pi/3, \frac{1}{2})$; $x = -\pi/2$, $x = -\pi/3$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6, x = 3$
 8. $f(x) = -3x^2 + 10, x = -1$
 9. $f(x) = x^2 - 3x, x = 1$
 10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3, x = -2$
 11. $f(x) = -2x^3 + x, x = 2$ 12. $f(x) = 8x^3 - 4, x = \frac{1}{2}$
 13. $f(x) = \frac{1}{2x}, x = -1$ 14. $f(x) = \frac{4}{x-1}, x = 2$
 15. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, x = 0$ 16. $f(x) = 4 - \frac{8}{x}, x = -1$
 17. $f(x) = \sqrt{x}, x = 4$ 18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 1$

En los problemas 19 y 20, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente. Antes de empezar, revise los límites en (10) y (14) de la sección 2.4, así como las fórmulas de suma (17) y (18) en la sección 1.4.

19. $f(x) = \sin x, x = \pi/6$ 20. $f(x) = \cos x, x = \pi/4$

En los problemas 21 y 22, determine si la recta que pasa por los puntos rojos es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto azul.

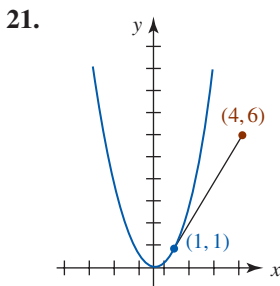


FIGURA 2.7.14 Gráfica para el problema 21

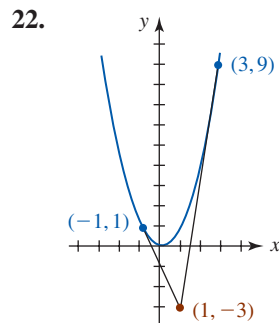


FIGURA 2.7.15 Gráfica para el problema 22

23. En la FIGURA 2.7.16, la recta roja es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre una ecuación de la recta tangente. ¿Cuál es la intersección y de la recta tangente?

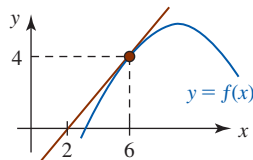


FIGURA 2.7.16 Gráfica para el problema 23

24. En la FIGURA 2.7.17, la recta roja es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre $f(-5)$.

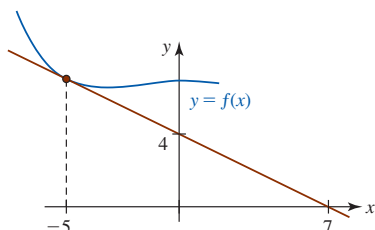


FIGURA 2.7.17 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-28, use (2) para encontrar una fórmula para m_{tan} en un punto general $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f . Use la fórmula m_{tan} para determinar los puntos en que la recta tangente a la gráfica es horizontal.

25. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ 26. $f(x) = 2x^2 + 24x - 22$
 27. $f(x) = x^3 - 3x$ 28. $f(x) = -x^3 + x^2$

≡ Aplicaciones

29. Un automóvil recorre 290 mi entre Los Ángeles y Las Vegas en 5 h. ¿Cuál es la velocidad media?
 30. Dos señalizaciones sobre una carretera recta están a una distancia de $\frac{1}{2}$ mi entre sí. Una patrulla observa que un automóvil cubre la distancia entre las marcas en 40 s. Suponiendo que la velocidad límite es 60 mi/h, ¿el automóvil será detenido por exceso de velocidad?
 31. Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer los 3 500 km que hay entre Hawaii y San Francisco. ¿En cuántas horas realiza este vuelo?
 32. Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 26 mi. La carrera empieza a mediodía. A la 1:30 p.m., un corredor cruza la marca de 10 mi y a las 3:10 p.m. el corredor pasa por la marca de 20 mi. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 p.m. y las 3:10 p.m.?

En los problemas 33 y 34, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas está dada por la función. Use (8) para encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el instante indicado.

33. $s(t) = -4t^2 + 10t + 6, t = 3$ 34. $s(t) = t^2 + \frac{1}{5t+1}, t = 0$
 35. La altura por arriba del suelo a que se suelta una pelota a una altura inicial de 122.5 m está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 122.5$, donde s se mide en metros y t en segundos.
 a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = \frac{1}{2}$?
 b) ¿En qué instante la pelota golpea el suelo?
 c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?
 36. Al ignorar la resistencia del aire, si un objeto se deja caer desde una altura inicial h , entonces su altura por arriba del nivel del suelo en el instante $t > 0$ está dada por $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$, donde g es la aceleración de la gravedad.
 a) ¿En qué instante el objeto choca contra el suelo?
 b) Si $h = 100$ pies, compare los instantes de impacto para la Tierra ($g = 32$ pies/s²), Marte ($g = 12$ pies/s²) y la Luna ($g = 5.5$ pies/s²).
 c) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t .
 d) Use los instantes encontrados en el inciso b) y la fórmula encontrada en el inciso c) para calcular las velocidades de impacto correspondientes para la Tierra, Marte y la Luna.
 37. La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por $s = -16t^2 + 256t$, donde s se mide en pies y t en segundos.
 a) Determine la altura del proyectil en $t = 2, t = 6, t = 9$ y $t = 10$.
 b) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?

- c) Demuestre que la velocidad media entre $t = 7$ y $t = 9$ es cero. Interprete físicamente.
- d) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?
- e) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t .
- f) Use el resultado del inciso d) y la fórmula encontrada en el inciso e) para aproximar la velocidad de impacto final.
- g) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
38. Suponga que la gráfica mostrada en la FIGURA 2.7.18 es la de la función de posición $s = s(t)$ de una partícula que se mueve en una línea recta, donde s se mide en metros y t en segundos.

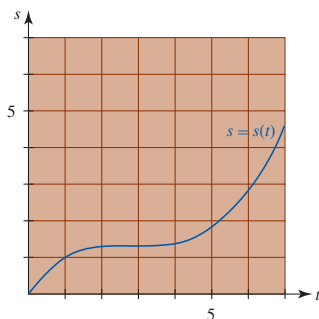


FIGURA 2.7.18 Gráfica para el problema 38

- a) Calcule la posición de la partícula en $t = 4$ y $t = 6$.
- b) Calcule la velocidad media de la partícula entre $t = 4$ y $t = 6$.
- c) Calcule la velocidad inicial de la partícula; es decir, su velocidad en $t = 0$.
- d) Calcule el instante en que la velocidad de la partícula es cero.
- e) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es decreciente.
- f) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es creciente.

≡ Piense en ello

39. Sea $y = f(x)$ una función par cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, f(a))$ es $-m$. [Sugerencia: Explique por qué $f(-a + h) = f(a - h)$.]
40. Sea $y = f(x)$ una función impar cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, -f(a))$ es m .
41. Proceda como en el ejemplo 7 y demuestre que no hay recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + |x|$ en $(0, 0)$.

Revisión del capítulo 2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-22, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$ _____
- $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 5} = 0$ _____
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$ _____
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x - x^2} = \infty$ _____
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. _____
- $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + 8z - 2}{z^2 + 9z - 10}$ no existe. _____
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ no existe. _____
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ no existe. _____
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$. _____
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$. _____
- Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. _____
- Toda función polinomial es continua sobre $(-\infty, \infty)$. _____
- Para $f(x) = x^5 + 3x - 1$ existe un número c en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$. _____
- Si f y g son continuas en el número 2, entonces f/g es continua en 2. _____
- La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ no es continua sobre el intervalo $[0, 1]$. _____
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. _____
- Si una función f es discontinua en el número 3, entonces $f(3)$ no está definido. _____
- Si una función f es discontinua en el número a , entonces $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)f(x) = 0$. _____
- Si f es continua y $f(a)f(b) < 0$, existe una raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$. _____

20. La función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 4, & x = 5 \end{cases}$ es discontinua en 5. _____
21. La función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$. _____
22. Si $y = x - 2$ es una recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en $(3, f(3))$, entonces $f(3) = 1$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 1}{3 - 10t} = \underline{\hspace{2cm}}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$
5. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(t - 1)}{t - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \underline{\hspace{2cm}}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2e^x}{4 + e^x} = \underline{\hspace{2cm}}$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 3} = -\infty$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 2) = 22$
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$
15. Si $f(x) = 2(x - 4)/|x - 4|$, $x \neq 4$, y $f(4) = 9$, entonces $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. Suponga que $x^2 - x^4/3 \leq f(x) \leq x^2$ para toda x . Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
17. Si f es continua en un número a y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 10$, entonces $f(a) = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. Si f es continua en $x = 5$, $f(5) = 2$, y $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 10$, entonces $\lim_{x \rightarrow 5} [g(x) - f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 0.5, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ es _____ (continua/discontinua) en el número $\frac{1}{2}$.
20. La ecuación $e^{-x^2} = x^2 - 1$ tiene precisamente _____ raíces en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
21. La función $f(x) = \frac{10}{x} + \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad removible en $x = 2$. Para quitar la discontinuidad, es necesario definir que $f(2)$ sea _____.
22. Si $\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = -9$ y $f(x) = x^2$, entonces $\lim_{x \rightarrow -5} f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

C. Ejercicios _____

En los problemas 1-4, trace una gráfica de la función f que satisface las condiciones dadas.

1. $f(0) = 1, f(4) = 0, f(6) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty, f(5) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, f(-1) = 3, f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, f(0) = -3, f(1) = 0, f(-x) = f(x)$

En los problemas 5-10, establezca cuáles de las condiciones a)-j) son aplicables a la gráfica de $y = f(x)$.

- a) $f(a)$ no está definida b) $f(a) = L$ c) f es continua en $x = a$ d) f es continua sobre $[0, a]$ e) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
 f) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ g) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

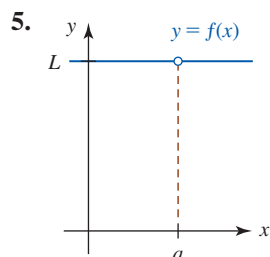


FIGURA 2.R.1 Gráfica para el problema 5

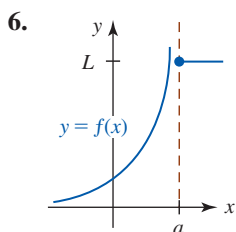


FIGURA 2.R.2 Gráfica para el problema 6

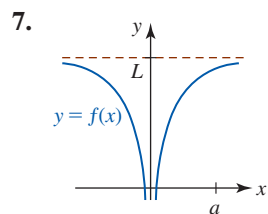


FIGURA 2.R.3 Gráfica para el problema 7

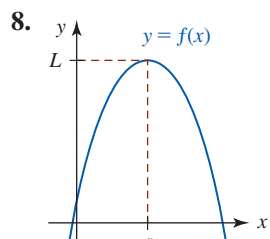


FIGURA 2.R.4 Gráfica para el problema 8

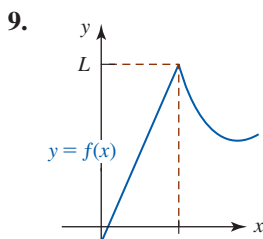


FIGURA 2.R.5 Gráfica para el problema 9

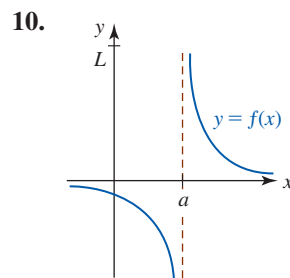


FIGURA 2.R.6 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11 y 12, trace la gráfica de la función dada. Determine los valores (números), en caso de haber alguno, en que f es continua.

11. $f(x) = |x| + x$ 12. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3, & 2 < x < 4 \\ -x + 7, & x > 4 \end{cases}$

En los problemas 13-16, determine intervalos sobre los que la función dada es continua.

13. $f(x) = \frac{x + 6}{x^3 - x}$ 14. $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 4x + 3}$
 15. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ 16. $f(x) = \frac{\csc x}{\sqrt{x}}$

17. Encuentre un número k de modo que

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 3 \\ 2 - kx, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en el número 3.

18. Encuentre números a y b tales que

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x \leq 3 \\ 3x - 8, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todas partes.

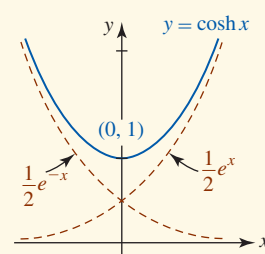
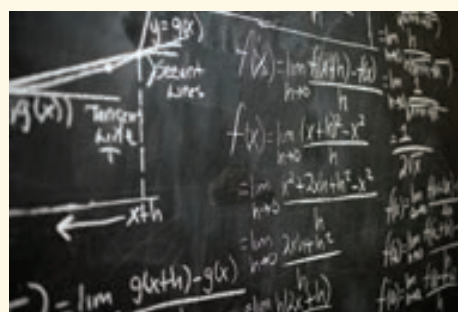
En los problemas 19-22, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

19. $f(x) = -3x^2 + 16x + 12$, $x = 2$ 20. $f(x) = x^3 - x^2$, $x = -1$
 21. $f(x) = \frac{-1}{2x^2}$, $x = \frac{1}{2}$ 22. $f(x) = x + 4\sqrt{x}$, $x = 4$

23. Encuentre una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta tangente en el punto $(1, 2)$ sobre la gráfica de $f(x) = -4x^2 + 6x$.

24. Suponga que $f(x) = 2x + 5$ y $\varepsilon = 0.01$. Encuentre un $\delta > 0$ que garantice que $|f(x) - 7| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 1| < \delta$. Al encontrar δ , ¿qué límite se ha demostrado?

La derivada



En este capítulo La palabra *calculus* es una forma diminutiva de la palabra *calx*, que significa “piedra”. En civilizaciones antiguas, piedras pequeñas o guijarros se usaban a menudo como medio de reconocimiento. En consecuencia, la palabra *calculus* se refiere a cualquier método sistemático de computación. No obstante, durante los últimos siglos la connotación de la palabra *cálculo* ha evolucionado para significar esa rama de las matemáticas relacionada con el cálculo y la aplicación de entidades conocidas como derivadas e integrales. Así, el tema conocido como **cálculo** se ha dividido en dos áreas amplias pero relacionadas: el **cálculo diferencial** y el **cálculo integral**.

En este capítulo se inicia el estudio del cálculo diferencial.

- 3.1 La derivada
- 3.2 Reglas de potencias y sumas
- 3.3 Reglas de productos y cocientes
- 3.4 Funciones trigonométricas
- 3.5 Regla de la cadena
- 3.6 Diferenciación implícita
- 3.7 Derivadas de funciones inversas
- 3.8 Funciones exponenciales
- 3.9 Funciones logarítmicas
- 3.10 Funciones hiperbólicas
- Revisión del capítulo 3

3.1 La derivada

■ **Introducción** En la última sección del capítulo 2 vimos que la recta tangente a una gráfica de una función $y = f(x)$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente dada por

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Recuerde que $m_{\tan}$ también se denomina pendiente de la curva en $(a, f(a))$.

siempre que el límite exista. Para muchas funciones suele ser posible obtener una fórmula general que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se lleva a cabo al calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

para cualquier x (para la que existe el límite). Luego sustituimos un valor de x después que se ha encontrado el límite.

■ **Una definición** El límite del cociente de la diferencia en (1) define una función: una función que se *deriva* de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina **función derivada**, o simplemente la **derivada**, de f y se denota por f' .

Definición 3.1.1 Derivada

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

siempre que el límite exista.

A continuación reconsideraremos los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.7.

EJEMPLO 1 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Así como en el cálculo de $m_{\tan}$ en la sección 2.7, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

- i) $f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$
- ii) $f(x+h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x + h)$
- iii) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$
- iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso iv) vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $f'(x) = 2x$. ■

Observe que el resultado $m_{\tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 2.7 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2$.

EJEMPLO 2 Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(1)$. Interprete.

Solución Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{en } x = -2, \quad & \begin{cases} f(-2) = 6 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-2, 6) \\ f'(-2) = -4 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (-2, 6) \text{ es } m = -4 \end{cases} \\ \text{en } x = 0, \quad & \begin{cases} f(0) = 2 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (0, 2) \\ f'(0) = 0 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (0, 2) \text{ es } m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } x = \frac{1}{2}, \quad & \begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \\ f'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases} && \begin{aligned} &\leftarrow \text{el punto de tangencia es } (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}) \\ &\leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}) \text{ es } m = 1 \end{aligned} \\ \text{en } x = 1, \quad & \begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 2 \end{cases} && \begin{aligned} &\leftarrow \text{el punto de tangencia es } (1, 3) \\ &\leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (1, 3) \text{ es } m = 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Recuerde que la pendiente de una recta horizontal es 0. Así, el hecho de que $f'(0) = 0$ significa que la recta tangente es horizontal en $(0, 2)$. ■

Por cierto, si regresa al proceso de cuatro pasos en el ejemplo 1, encontrará que la derivada de $g(x) = x^2$ también es $g'(x) = 2x = f'(x)$. Esto tiene sentido intuitivo: puesto que la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una traslación vertical rígida o desplazamiento de la gráfica de $g(x) = x^2$ para un valor dado de x , los puntos de tangencia cambian, pero no así la pendiente de la recta tangente en los puntos. Por ejemplo, en $x = 3$, $g'(3) = 6 = f'(3)$ pero los puntos de tangencia son $(3, g(3)) = (3, 9)$ y $(3, f(3)) = (3, 11)$.

EJEMPLO 3 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución Para calcular $f(x + h)$, usamos el teorema del binomio.

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x + h) &= (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ \text{ii) } f(x + h) - f(x) &= [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2) \\ \text{iii) } \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \\ \text{iv) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

◀ Recuerde de sus estudios de álgebra que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Luego, a se sustituye por x y b por h .

La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$. ■

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución Por el ejemplo 3 tenemos dos funciones $f(x) = x^3$ y $f'(x) = 3x^2$. Como vimos en el ejemplo 2, cuando estas funciones se evalúan en el mismo número $x = \frac{1}{2}$ se obtiene diferente información:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} && \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \text{ es } \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Así, por la ecuación punto-pendiente de una recta,* una ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La gráfica de la función y la recta tangente se muestran en la FIGURA 3.1.1.

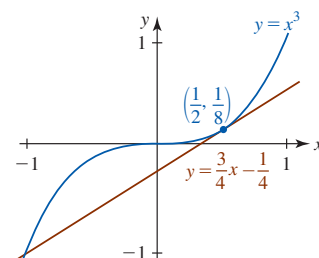


FIGURA 3.1.1 Recta tangente en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = 1/x$.

Solución En este caso usted debe poder demostrar que la diferencia es

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x + h)x}. \quad \leftarrow \begin{aligned} &\text{las fracciones se suman usando} \\ &\text{un común denominador} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x + h)x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + h)x} = \frac{-1}{x^2}. \end{aligned}$$

La derivada de $f(x) = 1/x$ es $f'(x) = -1/x^2$. ■

*N. del RT. También se le conoce como forma punto-pendiente.

■ **Notación** A continuación se presenta una lista de la **notación** común usada en la literatura matemática para denotar la derivada de una función:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad Dy, \quad D_x y.$$

Para una función como $f(x) = x^2$, escribimos $f'(x) = 2x$; si la misma función se escribe $y = x^2$, entonces utilizamos $dy/dx = 2x$, $y' = 2x$ o $D_x y = 2x$. En este texto usaremos las tres primeras formas. Por supuesto, en varias aplicaciones se usan otros símbolos. Por tanto, si $z = t^2$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = 2t \quad \text{o bien,} \quad z' = 2t.$$

La notación dy/dx tiene su origen en la forma derivada de (3) de la sección 2.7. Al sustituir h por Δx y denotar la diferencia $f(x + h) - f(x)$ por Δy en (2), a menudo la derivada se define como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

EJEMPLO 6 Una derivada donde se usa (3)

Use (3) para encontrar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

Solución En el procedimiento de cuatro pasos, la manipulación algebraica importante tiene lugar en el tercer paso:

$$\begin{aligned} i) \quad & f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x} \\ ii) \quad & \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \\ iii) \quad & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ & = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \quad \leftarrow \text{racionalización del numerador} \\ & = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ & = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ & = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ iv) \quad & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

La derivada de $y = \sqrt{x}$ es $dy/dx = 1/(2\sqrt{x})$. ■

■ **Valor de una derivada** El **valor** de la derivada en un número a se denota por los símbolos

$$f'(a), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}, \quad y'(a), \quad \left. D_x y \right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 7 Una derivada

Por el ejemplo 6, el valor de la derivada de $y = \sqrt{x}$ en, por ejemplo, $x = 9$ se escribe

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=9} = \left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=9} = \frac{1}{6}.$$

En forma alterna, para evitar la torpe barra vertical, simplemente escribimos $y'(9) = \frac{1}{6}$. ■

■ **Operadores diferenciación** El proceso de encontrar o calcular una derivada se denomina **diferenciación**. Así, la diferenciación es una operación que se lleva a cabo sobre una función

$y = f(x)$. La operación de diferenciación de una función con respecto a la variable x se representa con los símbolos d/dx y D_x . Estos símbolos se denominan **operadores diferenciación**. Por ejemplo, los resultados en los ejemplos 1, 3 y 6 pueden expresarse, a su vez, como

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El símbolo

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{entonces significa} \quad \frac{d}{dx}y.$$

■ **Diferenciabilidad** Si el límite en (2) existe para un número x dado en el dominio de f , se dice que la función es **diferenciable** en x . Si una función f es diferenciable en todo número x en los intervalos abiertos (a, b) , $(-\infty, b)$ y (a, ∞) , entonces f es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si f es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que f es **diferenciable en todas partes**. Se dice que una función f es **diferenciable sobre un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando f es diferenciable sobre el intervalo abierto (a, b) , y

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'_-(b) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \end{aligned} \quad (4)$$

ambos existen. Los límites en (4) se denominan **derivadas por la derecha y por la izquierda**, respectivamente. Una función es diferenciable sobre $[a, \infty)$ cuando es diferenciable sobre (a, ∞) y tiene derivada por la derecha en a . Una definición semejante en términos de una derivada por la izquierda se cumple para diferenciabilidad sobre $(-\infty, b]$. Además, puede demostrarse que:

- Una función es diferenciable en un número c en un intervalo (a, b) si y sólo si $f'_+(c) = f'_-(c)$. (5)

■ **Tangentes horizontales** Si $y = f(x)$ es continua en un número a y $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente en $(a, f(a))$ es **horizontal**. En los ejemplos 1 y 2 vimos que el valor de la derivada $f'(x) = 2x$ de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 0$ es $f'(0) = 0$. Por tanto, la recta tangente a la gráfica es horizontal en $(0, f(0))$ o $(0, 0)$. Se deja como ejercicio (vea el problema 7 en los ejercicios 3.1) comprobar por la definición 3.1.1 que la derivada de la función continua $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ es $f'(x) = -2x + 4$. Observe en este último caso que $f'(x) = 0$ cuando $-2x + 4 = 0$ o $x = 2$. Hay una tangente horizontal en el punto $(2, f(2)) = (2, 5)$.

■ **Dónde f no es diferenciable** Una función no tiene derivada en $x = a$ si

- la función es discontinua en $x = a$, o
- la gráfica de f tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, f no es diferenciable

- en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada f' , definido por (2), es el conjunto de números x para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de f' necesariamente es un subconjunto del dominio de f .

EJEMPLO 8 Diferenciabilidad

- La función $f(x) = x^2 + 2$ es diferenciable para todos los números reales x ; es decir, el dominio de $f'(x) = 2x$ es $(-\infty, \infty)$.
- Debido a que $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, f no es diferenciable en $x = 0$ y en consecuencia no es diferenciable sobre cualquier intervalo que contenga 0. ■

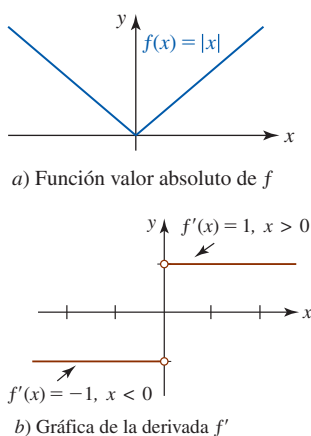


FIGURA 3.1.2 Gráficas de f y f' en el ejemplo 9

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 7 de la sección 2.7

En el ejemplo 7 de la sección 2.7 vimos que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en el origen $(0, 0)$. Así, $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Pero $f(x) = |x|$ es diferenciable sobre los intervalos abiertos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$. En el ejemplo 5 de la sección 2.7 demostramos que la derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos $f(x) = |x| = x$ y así $f'(x) = 1$. También, para $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$ y así $f'(x) = -1$. Puesto que la derivada de f es una función definida por partes,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

que podemos graficar como cualquier función. En la FIGURA 3.1.2b) observamos que f' es discontinua en $x = 0$.

Con símbolos diferentes, lo que demostramos en el ejemplo 9 es que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$. Puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ por (5) se concluye que f no es diferenciable en 0.

Tangentes verticales Sea $y = f(x)$ continua en un número a . Si $\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty$, entonces se dice que la gráfica de f tiene una **tangente vertical** en $(a, f(a))$. Las gráficas de muchas funciones con exponentes radicales tienen tangentes verticales.

En el ejemplo 6 de la sección 2.7 se mencionó que la gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene una línea tangente vertical en $(0, 0)$. Verificamos esta afirmación en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Tangente vertical

Se deja como ejercicio demostrar que la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ está dada por

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

(Vea el problema 55 en los ejercicios 3.1.) Aunque f es continua en 0, resulta evidente que f' no está definida en ese número. En otras palabras, f no es diferenciable en $x = 0$. Además, debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \infty$$

tenemos $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$. Esto es suficiente para afirmar que en $(0, f(0))$ o $(0, 0)$ hay una recta tangente y que es vertical. En la FIGURA 3.1.3 se muestra que las rectas tangentes a la gráfica a cualquier lado del origen se vuelven cada vez más pronunciadas cuando $x \rightarrow 0$.

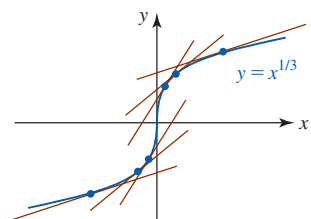


FIGURA 3.1.3 Rectas tangentes a la gráfica de la función en el ejemplo 10

La gráfica de una función f también puede tener una tangente vertical en un punto $(a, f(a))$ si f es diferenciable sólo por un lado de a , es continua por la izquierda (derecha) en a , y se cumple $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^-$ o $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^+$.

EJEMPLO 11 Tangente vertical por un lado

La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \infty)$ porque por la derivada $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ observamos que $f'_+(0)$ no existe. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre $[0, \infty)$ pero diferenciable sobre $(0, \infty)$. Además, debido a que f es continua en 0 y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$, en el origen $(0, 0)$ hay una tangente vertical. En la FIGURA 3.1.4 vemos que la tangente vertical es el eje y .

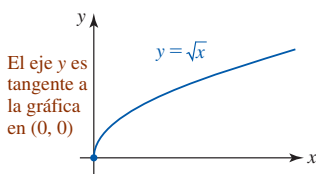


FIGURA 3.1.4 Tangente vertical en el ejemplo 11

Importante

Las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^{1/3}$ son continuas en todas partes. En particular, ambas son continuas en 0 pero ninguna es diferenciable en ese número. En otras palabras, la continuidad en un número a no es suficiente para garantizar que una función sea diferenciable en a . No obstante, si f es diferenciable en a , entonces f debe ser continua en ese número. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 Diferenciabilidad implica continuidad

Si f es diferenciable en un número a , entonces f es continua en a .

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la continuidad de f en un número a , es suficiente demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ o bien, de manera equivalente, que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$. La hipótesis es que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Si se hace $x = a + h$, entonces cuando $h \rightarrow 0$ tenemos $x \rightarrow a$. Por tanto, el límite anterior equivale a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Luego, puede escribirse

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) && \leftarrow \text{multiplicación por } \frac{x-a}{x-a} = 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) && \leftarrow \text{ambos límites existen} \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

■ **Posdata: Un poco de historia** Se sabe que **Isaac Newton** (1642-1727), matemático y físico inglés, fue el primero en establecer muchos de los principios básicos del cálculo en manuscritos no publicados sobre el *método de fluxiones*, fechado en 1665. La palabra



Newton

fluxión se originó por el concepto de cantidades que “fluyen”; es decir, cantidades que cambian a cierta razón. Newton usó la notación de punto $\dot{y}$ para representar una fluxión, o como se conoce ahora: la derivada de una función. El símbolo $\dot{y}$ nunca fue popular entre los matemáticos, de modo que en la actualidad lo usan esencialmente los físicos. Debido a razones tipográficas, la así denominada “notación flyspeck” ha sido sustituida por la notación prima. Newton alcanzó fama imperecedera con la publicación de su ley de la gravitación universal en su tratado monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Newton también fue el primero en demostrar, usando el cálculo y su ley de gravitación, las tres leyes empíricas de Johannes Kepler del movimiento planetario, y el primero en demostrar que la luz blanca está compuesta de todos los colores. Newton fue electo al Parlamento, nombrado guardián de la Real Casa de Moneda y nombrado caballero en 1705. Sir Isaac Newton dijo acerca de estos logros: “Si he visto más lejos que otros, es porque me apoyé en los hombros de gigantes.”



Leibniz

El matemático, abogado y filósofo alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) publicó una versión corta de su cálculo en un artículo en un periódico alemán en 1684. La notación dy/dx para la derivada de una función se debe a Leibniz. De hecho, fue Leibniz quien introdujo la palabra *función* en la literatura matemática. Pero, puesto que es bien sabido que los manuscritos de Newton sobre el *método de fluxiones* datan de 1665, Leibniz fue acusado de apropiarse de las ideas de Newton a partir de esta obra no publicada. Alimentado por orgullos nacionalistas, durante muchos años hubo una controversia sobre quién de los dos “inventó” el cálculo. Hoy los historiadores coinciden en que ambos llegaron a muchas de las premisas más importantes del cálculo de manera independiente. Leibniz y Newton se consideran “coinventores” del tema.

$\frac{d}{dx}$

NOTAS DESDE EL AULA

- i) En el análisis precedente vimos que la derivada de una función es en sí misma una función que proporciona la pendiente de una recta tangente. La derivada *no es*, sin embargo, una ecuación de una recta tangente. También, afirmar que $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ es una ecuación de la tangente en (x_0, y_0) es incorrecto. Recuerde que $f'(x)$ debe evaluarse en x_0 *antes* de usarla en la forma punto-pendiente. Si f es diferenciable en x_0 , entonces una ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

- ii) Aunque en esta sección se han recalcado las pendientes, no olvide el análisis sobre razones de cambio promedio y razones de cambio instantáneas en la sección 2.7. La derivada $f'(x)$ también es la **razón de cambio instantánea** de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x . En las secciones que siguen se dirá más sobre estas razones.
- iii) Los matemáticos de los siglos XVII al XIX creían que una función continua solía tener una derivada. (En esta sección hemos observado excepciones.) En 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass destruyó de manera contundente este principio al publicar un ejemplo de función que es *continua en todas partes pero no es diferenciable en ninguna*.

Ejercicios 3.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-20, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 10$
2. $f(x) = x - 1$
3. $f(x) = -3x + 5$
4. $f(x) = \pi x$
5. $f(x) = 3x^2$
6. $f(x) = -x^2 + 1$
7. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 7$
9. $y = (x + 1)^2$
10. $f(x) = (2x - 5)^2$
11. $f(x) = x^3 + x$
12. $f(x) = 2x^3 + x^2$
13. $y = -x^3 + 15x^2 - x$
14. $y = 3x^4$
15. $y = \frac{2}{x + 1}$
16. $y = \frac{x}{x - 1}$
17. $y = \frac{2x + 3}{x + 4}$
18. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
20. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

En los problemas 21-24, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor indicado de x .

21. $f(x) = 4x^2 + 7x$; $x = -1$
22. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4$; $x = 0$
23. $y = x - \frac{1}{x}$; $x = 1$
24. $y = 2x + 1 + \frac{6}{x}$; $x = 2$

En los problemas 25-28, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
26. $f(x) = x(x - 5)$
27. $f(x) = x^3 - 3x$
28. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

En los problemas 29-32, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o

varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es paralela a la recta dada.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$; $3x - y = 1$
30. $f(x) = x^2 - x$; $-2x + y = 0$
31. $f(x) = -x^3 + 4$; $12x + y = 4$
32. $f(x) = 6\sqrt{x} + 2$; $-x + y = 2$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función dada no es diferenciable en el valor indicado de x .

33. $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$
34. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \geq 0 \end{cases}$; $x = 0$

En la demostración del teorema 3.1.1 vimos que un planteamiento alternativo de la derivada de una función f en a está dado por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (6)$$

siempre que el límite exista. En los problemas 35-40, use (6) para calcular $f'(a)$.

35. $f(x) = 10x^2 - 3$
36. $f(x) = x^2 - 3x - 1$
37. $f(x) = x^3 - 4x^2$
38. $f(x) = x^4$
39. $f(x) = \frac{4}{3 - x}$
40. $f(x) = \sqrt{x}$

41. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.5. ¿Cuáles son los valores $f(-3)$ y $f'(-3)$?

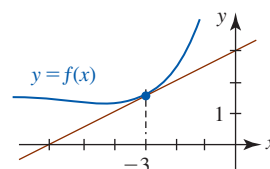


FIGURA 3.1.5 Gráfica del problema 41

42. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.6. ¿Cuál es el valor de $f'(3)$? ¿Cuál es la intersección con el eje y de la recta tangente?

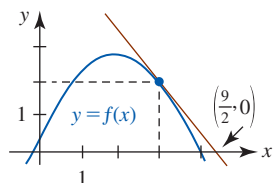


FIGURA 3.1.6 Gráfica del problema 42

En los problemas 43-48, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f .

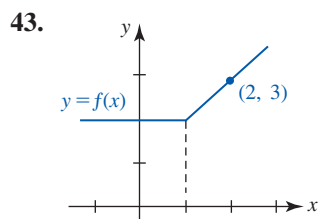


FIGURA 3.1.7 Gráfica del problema 43

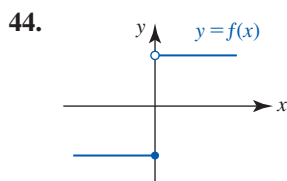


FIGURA 3.1.8 Gráfica del problema 44

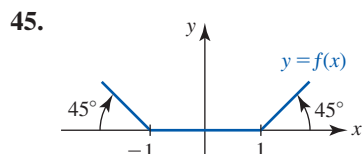


FIGURA 3.1.9 Gráfica del problema 45

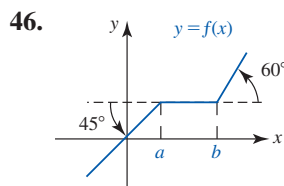


FIGURA 3.1.10 Gráfica del problema 46

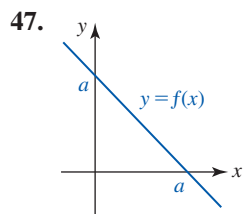


FIGURA 3.1.11 Gráfica del problema 47

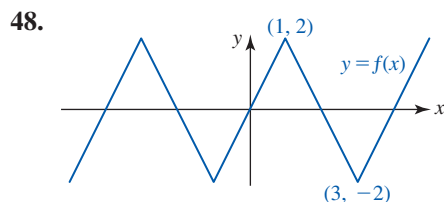


FIGURA 3.1.12 Gráfica del problema 48

En los problemas 49-54, relacione la gráfica de f con una gráfica de f' de a)-f).

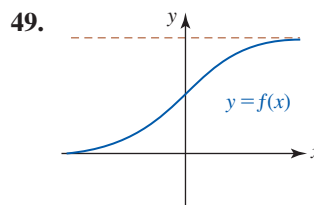
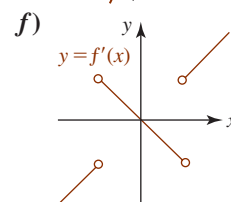
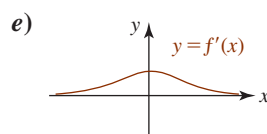
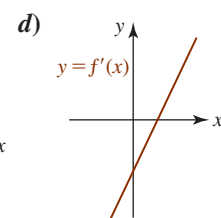
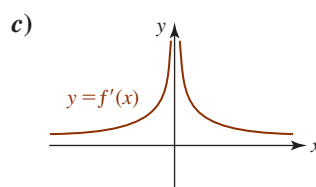
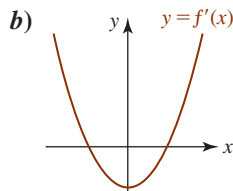
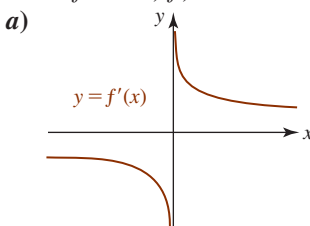


FIGURA 3.1.13 Gráfica del problema 49

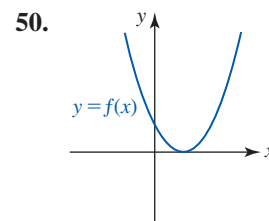


FIGURA 3.1.14 Gráfica del problema 50

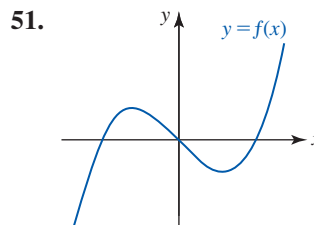


FIGURA 3.1.15 Gráfica del problema 51

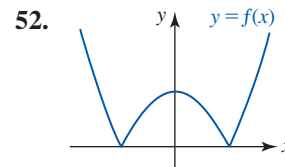


FIGURA 3.1.16 Gráfica del problema 52

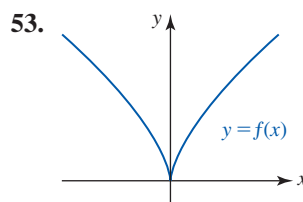


FIGURA 3.1.17 Gráfica del problema 53

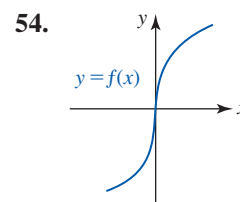


FIGURA 3.1.18 Gráfica del problema 54

≡ Piense en ello

55. Use la definición alterna de la derivada (6) para encontrar la derivada de $f(x) = x^{1/3}$.
[Sugerencia: Observe que $x - a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$.]
56. En los ejemplos 10 y 11 vimos, respectivamente, que las funciones $f(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = \sqrt{x}$ tenían tangentes verticales en el origen $(0, 0)$. Conjeture dónde las gráficas de $y = (x - 4)^{1/3}$ y $y = \sqrt{x + 2}$ pueden tener tangentes verticales.
57. Suponga que f es diferenciable en todas partes y que tiene tres propiedades:
i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, ii) $f(0) = 1$,
iii) $f'(0) = 1$.
Use (2) de la definición 3.1.1 para demostrar que $f'(x) = f(x)$ para toda x .

58. *a)* Suponga que f es una función par diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = -f'(x)$; es decir, que f' es una función impar.
- b)* Suponga que f es una función impar diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = f'(x)$; es decir, que f' es una función par.
59. Suponga que f es una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Experimente con gráficas para decidir si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

60. Trace gráficas de varias funciones f que tengan la propiedad $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$. ¿Qué tienen en común éstas?

≡ Problemas con calculadora/SAC

61. Considere la función $f(x) = x^n + |x|$, donde n es un entero positivo. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Luego use (2) para demostrar que f no es diferenciable en $x = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 . ¿Puede demostrar esto para *cualquier* entero positivo n ? ¿Cuáles son $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para $n > 1$?

3.2 Reglas de potencias y sumas

■ Introducción La definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

tiene la desventaja evidente de ser más bien molesta y cansada de aplicar. Para encontrar la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ usando la definición anterior *sólo* es necesario hacer malabares con 137 términos en los desarrollos del binomio de $(x+h)^{100}$ y $(x+h)^{35}$. Hay formas más eficaces para calcular derivadas de una función que usar la definición cada vez. En esta sección, y en las secciones que siguen, veremos que hay algunos atajos o **reglas** generales a partir de las cuales es posible obtener las derivadas de funciones como $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ literalmente, con un truco de pluma.

En la última sección vimos que las derivadas de las funciones potencia

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

eran, a su vez,

Vea los ejemplos 3, 5 y 6 en la sección 3.1. ▶

$$f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Si los miembros derechos de estas cuatro derivadas se escriben

$$2 \cdot x^{2-1}, \quad 3 \cdot x^{3-1}, \quad (-1) \cdot x^{-1-1}, \quad \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1},$$

observamos que cada coeficiente (indicado en rojo) corresponde al exponente original de x en f y que el nuevo exponente de x en f' puede obtenerse a partir del exponente anterior (también indicado en rojo) al restarle 1. En otras palabras, el patrón para la derivada de la función potencia general $f(x) = x^n$ es

$$\begin{array}{l} \text{el exponente se escribe como múltiplo} \\ \downarrow \\ (n)x^{(n)-1}. \\ \text{el exponente disminuye por uno} \end{array} \quad (2)$$

■ **Derivada de la función potencia** En efecto, el patrón ilustrado en (2) se cumple para cualquier exponente que sea un número real n , y este hecho se planteará como un teorema formal, pero en este momento del curso no se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias para demostrar su validez completa. Sin embargo, es posible demostrar un caso especial de esta regla de potencias; las partes restantes de la demostración se proporcionarán en las secciones idóneas más adelante.

Teorema 3.2.1 Regla de potencias

Para cualquier número real n ,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN La demostración sólo se presenta para el caso donde n es un entero positivo. A fin de calcular (1) para $f(x) = x^n$ usamos el método de cuatro pasos:

Teorema general del binomio

$$i) \quad f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$ii) \quad f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$= h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]$$

$$iii) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$iv) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{estos términos} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0} \right] = nx^{n-1}.$$

estos términos $\rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$

◀ Vea las Páginas de recursos para un repaso del teorema del binomio.

EJEMPLO 1 Regla de potencias

Diferencie

a) $y = x^7$

b) $y = x$

c) $y = x^{-2/3}$

d) $y = x^{\sqrt{2}}$

Solución Por la regla de potencias (3),

a) con $n = 7$: $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$,

b) con $n = 1$: $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

c) con $n = -\frac{2}{3}$: $\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2}{3}\right)x^{(-2/3)-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3x^{5/3}}$,

d) con $n = \sqrt{2}$: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Observe en el inciso b) del ejemplo 1 que el resultado es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$. Vea la FIGURA 3.2.1.

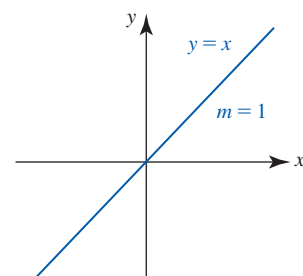


FIGURA 3.2.1 La pendiente de la recta $m = 1$ es consistente con $dy/dx = 1$

Teorema 3.2.2 Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$.

(4)

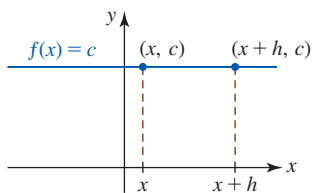


FIGURA 3.2.2 La pendiente de una recta horizontal es 0

DEMOSTRACIÓN Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces se concluye que la diferencia es $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$. Así, por (1),

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

El teorema 3.2.2 tiene una interpretación geométrica evidente. Como se muestra en la FIGURA 3.2.2, la pendiente de la recta horizontal $y = c$ es, por supuesto, cero. Además, el teorema 3.2.2 coincide con (3) en el caso donde $x \neq 0$ y $n = 0$.

Teorema 3.2.3 Regla de la multiplicación por constante

Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x , entonces cf es diferenciable en x , y

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x). \quad (5)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Un múltiplo constante

Diferencie $y = 5x^4$.

Solución Por (3) y (5),

$$\frac{dy}{dx} = 5 \frac{d}{dx} x^4 = 5(4x^3) = 20x^3. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.2.4 Reglas de suma y diferencia

Si f y g son diferenciables en x , entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables en x , y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \quad (7)$$

DEMOSTRACIÓN DE (6) Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \quad \leftarrow \text{reordenando términos} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

puesto que los límites existen, el límite de una suma es la suma de los límites $\rightarrow$

El teorema 3.2.4 se cumple para cualquier suma finita de diferenciables. Por ejemplo, si f , g y h son diferenciables en x , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x).$$

Ya que $f - g$ puede escribirse como una suma, $f + (-g)$, no es necesario demostrar (7) puesto que el resultado se concluye de (6) y (5). Por tanto, el teorema 3.2.4 puede plantearse coloquialmente como:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

■ Derivada de un polinomio Como sabemos cómo diferenciar potencias de x y múltiplos constantes de esas potencias, resulta fácil diferenciar sumas de estos múltiplos constantes. La derivada de una función polinomial es particularmente fácil de obtener. Por ejemplo, ahora vemos fácilmente que la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$, mencionada en la introducción de esta sección, es $f'(x) = 600x^{99} + 140x^{34}$.

EJEMPLO 3 Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6$.

Solución Al usar (3), (5) y (6) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}x^4 + 9 \frac{d}{dx}x^3 + 10 \frac{d}{dx}x^2 - 13 \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ por (4), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0 \\ &= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8 && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-1, 8) \\ f'(-1) &= -13. && \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (-1, 8) \text{ es } -13 \end{aligned}$$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \quad \text{o bien,} \quad y = -13x - 5.$$

■ Volver a escribir una función En algunas circunstancias, para aplicar una regla de diferenciación de manera eficiente puede ser necesario *volver a escribir* una expresión en una forma alterna. Esta forma alterna a menudo es resultado de algo de manipulación algebraica o una aplicación de las leyes de los exponentes. Por ejemplo, es posible usar (3) para diferenciar las siguientes expresiones, que primero reescribimos usando las leyes de los exponentes

$\frac{4}{x^2}, \frac{10}{\sqrt{x}}, \sqrt{x^3}$	→	las raíces cuadradas se vuelven a escribir como potencias	→	$\frac{4}{x^2}, \frac{10}{x^{1/2}}, (x^3)^{1/2},$
		luego se vuelve a escribir usando exponentes negativos	→	$4x^{-2}, 10x^{-1/2}, x^{3/2},$
		la derivada de cada término usando (3)	→	$-8x^{-3}, -5x^{-3/2}, \frac{3}{2}x^{1/2}.$

◀ Vale la pena recordar este análisis.

Una función como $f(x) = (5x + 2)/x^2$ puede escribirse de nuevo como dos fracciones

$$f(x) = \frac{5x + 2}{x^2} = \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 5x^{-1} + 2x^{-2}.$$

Por la última forma de f , ahora resulta evidente que la derivada f' es

$$f'(x) = 5(-x^{-2}) + 2(-2x^{-3}) = -\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \frac{8}{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10$.

Solución Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de x :

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^{1/2} + 8\frac{d}{dx}x^{-1} - 6\frac{d}{dx}x^{-1/3} + \frac{d}{dx}10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 8 \cdot (-1)x^{-2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}.\end{aligned}$$

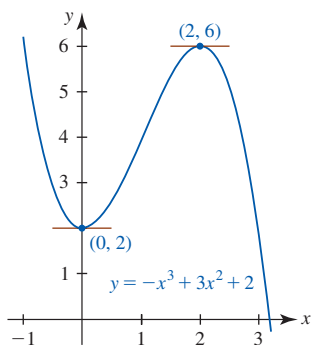


FIGURA 3.2.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x - 2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 3.2.3.

■ **Recta normal** Una **recta normal** en un punto P sobre una gráfica es una recta perpendicular a la recta tangente en P .

EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\text{tan}} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en verde en la FIGURA 3.2.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

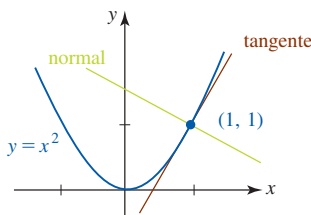


FIGURA 3.2.4 Recta normal en el ejemplo 7

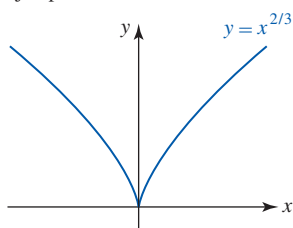


FIGURA 3.2.5 Gráfica de la función en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ mientras $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en $(0, 0)$. Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA 3.2.5.

■ **Cúspide** Se dice que la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ en el ejemplo 8 tiene una **cúspide** en el origen. En general, la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una cúspide en un punto $(a, f(a))$ si f es continua en a , $f'(x)$ tiene signos opuestos a cualquier lado de a , y $|f'(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a$.

■ **Derivadas de orden superior** Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx , la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad D^2, \quad D_x^2.$$

EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \frac{1}{x^3}$.

Solución Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}. \quad \blacksquare$$

Si se supone que todas las derivadas existen, es posible diferenciar una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada; la **cuarta derivada** es la derivada de la tercera derivada; y así sucesivamente. Las derivadas tercera y cuarta se denotan por $d^3 y/dx^3$ y $d^4 y/dx^4$, y se definen como

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad \text{y} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces la **n -ésima derivada** se define como

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Otras notaciones para las primeras derivadas n son

$$\begin{aligned} &f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x), \\ &y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad \dots, \quad y^{(n)}, \\ &\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x), \quad \frac{d^4}{dx^4} f(x), \quad \dots, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \\ &D, \quad D^2, \quad D^3, \quad D^4, \quad \dots, \quad D^n, \\ &D_x, \quad D_x^2, \quad D_x^3, \quad D_x^4, \quad \dots, \quad D_x^n. \end{aligned}$$

Observe que la notación “prima” se usa para denotar sólo las tres primeras derivadas; después de eso se usa el supraíndice $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, y así sucesivamente. El **valor de la n -ésima derivada** de una función $y = f(x)$ en un número a se denota por

$$f^{(n)}(a), \quad y^{(n)}(a) \quad \text{y} \quad \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 10 Quinta derivada

Encuentre las cinco primeras derivadas de $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$.

Solución Tenemos

$$f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5$$

$$f''(x) = 24x^2 - 36x + 14$$

$$f'''(x) = 48x - 36$$

$$f^{(4)}(x) = 48$$

$$f^{(5)}(x) = 0.$$

Después de reflexionar un momento, usted debe convencerse que al derivar la $(n + 1)$ veces una función polinomial de grado n el resultado es cero.

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) En los diversos contextos de ciencias, ingeniería y negocios, las funciones a menudo se expresan en otras variables distintas a x y y . De manera correspondiente, la notación de la derivada debe adaptarse a los nuevos símbolos. Por ejemplo,

Función

$$v(t) = 32t$$

$$A(r) = \pi r^2$$

$$r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$$

$$D(p) = 800 - 129p + p^2$$

Derivada

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$$

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = 8\theta - 3$$

$$D'(p) = \frac{dD}{dp} = -129 + 2p.$$

- ii) Quizá se pregunte qué interpretación puede darse a las derivadas de orden superior. Si piensa en términos de gráficas, entonces f'' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f' ; f''' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'' , y así sucesivamente. Además, si f es diferenciable, entonces la primera derivada f' proporciona la razón de cambio instantánea de f . En forma semejante, si f' es diferenciable, entonces f'' proporciona la razón de cambio instantánea de f' .

Ejercicios 3.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre dy/dx .

1. $y = -18$

2. $y = \pi^6$

3. $y = x^9$

4. $y = 4x^{12}$

5. $y = 7x^2 - 4x$

6. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

7. $y = 4\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $y = \frac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

En los problemas 9-16, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

9. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$

10. $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

11. $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$

12. $f(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{x^2}$

13. $f(x) = x^2(x^2 + 5)^2$ 14. $f(x) = (x^3 + x^2)^3$
 15. $f(x) = (4\sqrt{x} + 1)^2$ 16. $f(x) = (9 + x)(9 - x)$

En los problemas 17-20, encuentre la derivada de la función dada.

17. $h(u) = (4u)^3$ 18. $p(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$
 19. $g(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}$ 20. $Q(t) = \frac{t^5 + 4t^2 - 3}{6}$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

21. $y = 2x^3 - 1$; $x = -1$ 22. $y = -x + \frac{8}{x}$; $x = 2$
 23. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$; $x = 4$ 24. $f(x) = -x^3 + 6x^2$; $x = 1$

En los problemas 25-28, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = x^2 - 8x + 5$ 26. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
 27. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 28. $f(x) = x^4 - 4x^3$

En los problemas 29-32, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

29. $y = -x^2 + 1$; $x = 2$ 30. $y = x^3$; $x = 1$
 31. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$; $x = 4$ 32. $f(x) = x^4 - x$; $x = -1$

En los problemas 33-38, encuentre la segunda derivada de la función dada.

33. $y = -x^2 + 3x - 7$ 34. $y = 15x^2 - 24\sqrt{x}$
 35. $y = (-4x + 9)^2$ 36. $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$
 37. $f(x) = 10x^{-2}$ 38. $f(x) = x + \left(\frac{2}{x^2}\right)^3$

En los problemas 39 y 40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

39. $f(x) = 4x^6 + x^5 - x^3$; $f^{(4)}(x)$
 40. $y = x^4 - \frac{10}{x}$; d^5y/dx^5

En los problemas 41 y 42, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

41. $f(x) = x^2 + 8x - 4$ 42. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

En los problemas 43 y 44, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de f donde $f''(x) = 0$.

43. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$ 44. $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los problemas 45 y 46, determine intervalos para los cuales $f''(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f''(x) < 0$.

45. $f(x) = (x - 1)^3$ 46. $f(x) = x^3 + x^2$

Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina **ecuación diferencial**. En los problemas 47 y 48, demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

47. $y = x^{-1} + x^4$; $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$
 48. $y = x + x^3 + 4$; $x^2y'' - 3xy' + 3y = 12$
 49. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ donde la pendiente de la recta tangente es 5.

50. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y - 4 = 0$.
 51. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la pendiente de la recta normal es 2.
 52. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.
 53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto donde el valor de la segunda derivada es cero.
 54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto donde el valor de la tercera derivada es 12.

Aplicaciones

55. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial S de la esfera si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.
 56. Según el físico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869), la velocidad v del flujo sanguíneo en una arteria cuya sección transversal circular es constante de radio R es $v(r) = (P/4\eta l)(R^2 - r^2)$, donde P , η y l son constantes. ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en el valor de r para el cual $v'(r) = 0$?
 57. La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de x unidades es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Encuentre la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y la cantidad de estiramiento es $\frac{1}{2}$ m.
 58. La altura s por arriba del nivel del suelo de un proyectil en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde g , v_0 y s_0 son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.

Piense en ello

En los problemas 59 y 60, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

59. $\frac{d^n}{dx^n} x^n$ 60. $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x}$

61. A partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 3.2.6, determine qué función es la derivada de la otra. Explique verbalmente su decisión.

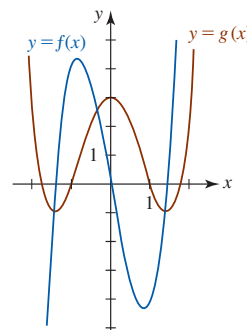


FIGURA 3.2.6 Gráficas para el problema 61

62. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 3.2.7, trace la gráfica de f' .

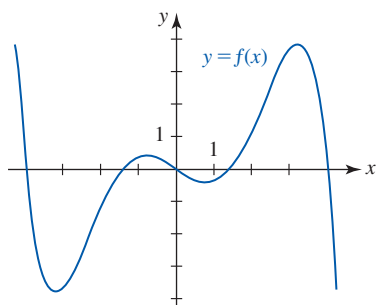


FIGURA 3.2.7 Gráfica para el problema 62

63. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.
64. Se dice que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ son ortogonales.
65. Encuentre los valores de b y c de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.
66. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por $(\frac{3}{2}, 1)$ y es(son) tangente(s) a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
67. Encuentre los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en $(-3, 0)$.
68. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ tal que la recta tangente interseque al eje y en $(0, -2)$.
69. Explique por qué la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ no tiene recta tangente con pendiente -1 .
70. Encuentre coeficientes A y B de modo que la función $y = Ax^2 + Bx$ satisfaga la ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.
71. Encuentre valores de a y b tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea -5 .
72. Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de $f(x) = x^2$ que pasan por el punto $(2, 4)$. [Sugerencia: Elabore una figura y observe que en $(2, 4)$ sólo hay una recta normal.]
73. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ y un punto sobre la gráfica de $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ donde las rectas tangentes son paralelas.
74. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$ donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.

75. Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a , b y c de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.

76. Sea f una función diferenciable. Si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo (a, b) , trace gráficas posibles de f sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de f sobre el intervalo. Repita si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b) .
77. Suponga que f es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Encuentre $f^{(100)}(x)$.
78. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 3$ dada por la FIGURA 3.2.8 muestran que hay dos rectas L_1 y L_2 que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

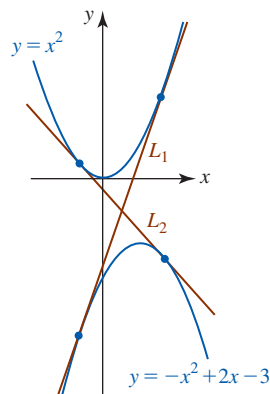


FIGURA 3.2.8 Gráficas para el problema 78

Problemas con calculadora/SAC

79. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$.
 b) Evalúe $f''(x)$ en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$.
 c) A partir de los datos del inciso b), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de f y los signos algebraicos de f'' ?
80. Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre $f'(x)$ para todos los puntos donde f es diferenciable.
- a) $f(x) = |x^2 - 2x|$ b) $f(x) = |x^3 - 1|$

3.3 Reglas de productos y cocientes

■ **Introducción** Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de x son, a su vez:

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$

También sabemos que para funciones diferenciables f y g :

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x). \quad (2)$$

Aunque los resultados en (1) y (2) nos permiten diferenciar rápidamente funciones algebraicas (como polinomios), ni (1) ni (2) constituyen una ayuda inmediata para encontrar la derivada de funciones como $y = x^4\sqrt{x^2 + 4}$ o $y = x/(2x + 1)$. Se requieren reglas adicionales para diferenciar productos fg y cocientes f/g .

■ **Regla del producto** Las reglas de diferenciación y las derivadas de funciones surgen en última instancia de la definición de la derivada. La regla de la suma en (2), que se obtuvo en la sección precedente, se concluye de la definición y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites siempre que los límites existan. También sabemos que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Al razonar por analogía, parecería plausible que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas. Lamentablemente, la regla del producto que se presenta a continuación *no es* tan simple.

Teorema 3.1.1 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables en x , entonces fg es diferenciable en x , y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - \overbrace{f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Debido a que f es diferenciable en x , es continua ahí y entonces $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$. Además, $\lim_{h \rightarrow 0} g(x) = g(x)$. Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \quad \blacksquare$$

La regla del producto se memoriza mejor en palabras:

- La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $y = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$.

Solución De la regla del producto (3),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(x^3 - 2x^2 + 3)}^{\text{primera}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(7x^2 - 4x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(7x^2 - 4x)}^{\text{segunda}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3)}^{\text{derivada de la primera}} \\ &= (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x) \\ &= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12. \end{aligned}$$

Solución alterna Los dos términos en la función dada pueden multiplicarse para obtener un polinomio de quinto grado. Luego, la derivada puede obtenerse usando la regla de la suma. ■

EJEMPLO 2 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$.

Solución Antes de tomar la derivada, $\sqrt{x}$ volvemos a escribirla como $x^{1/2}$. Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2})\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(1 + x^{1/2}) \\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en $x = 4$ obtenemos:

$$\begin{aligned}y(4) &= (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6) \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} &= \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{7}{2}x - 8. \quad \blacksquare$$

Aunque (3) se ha planteado sólo para el producto de dos funciones, puede aplicarse a funciones con un mayor número de factores. La idea consiste en agrupar dos (o más) funciones y tratar este agrupamiento como una función. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 3 Producto de tres funciones

Diferencie $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

Solución Los dos primeros factores se identifican como la “primera función”:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3 - 8x)}^{\text{segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \overbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 - x) \cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}} \\ &= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (x^3 - 8x)(16x^2 - 1) + 4(x^3 - 8x)(2x^2 - x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ **Regla del cociente** A continuación se presenta la derivada del cociente de dos funciones f y g .

Teorema 3.3.2 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en x , y

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad (4)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - \overbrace{g(x)f(x) + g(x)f(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)}.
 \end{aligned}$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

En palabras, la regla del cociente empieza con el denominador:

- El denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7}$.

Solución Por la regla del cociente (4),

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\overbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{denominador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2 - 1)}^{\text{derivada del numerador}} - \overbrace{(3x^2 - 1)}^{\text{numerador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}_{\text{cuadrado del denominador}}} \\
 &= \frac{(2x^3 + 5x^2 + 7) \cdot 6x - (3x^2 - 1) \cdot (6x^2 + 10x)}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador} \\
 &= \frac{-6x^4 + 6x^2 + 52x}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = \frac{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)}{3x^2 + 1}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(3x^2 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(2x^2 + 1)]}^{\text{Regla del producto aquí}} - (x^2 + 1)(2x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{(3x^2 + 1)[(x^2 + 1)4x + (2x^2 + 1)2x] - (x^2 + 1)(2x^2 + 1)6x}{(3x^2 + 1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador} \\
 &= \frac{12x^5 + 8x^3}{(3x^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse $dy/dx = 0$. La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

Por supuesto, los valores de x que hacen cero al numerador *no* deben hacer simultáneamente cero al denominador.

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \quad \text{o bien,} \quad x^3(12x^2 + 8) = 0. \quad (5)$$

En (5), debido a que $12x^2 + 8 \neq 0$ para todos los números reales x , debe tenerse $x = 0$. Al sustituir este número en la función obtenemos $y(0) = 1$. La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje y , el punto $(0, 1)$. ■

■ **Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Recuerde que en la sección 3.2 establecimos que la regla de potencias, $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, es válida para todos los números reales exponentes n . Ahora ya nos es posible demostrar la regla cuando el exponente es un entero negativo $-m$. Puesto que, por definición $x^{-m} = 1/x^m$, donde m es un entero positivo, la derivada de x^{-m} puede obtenerse por medio de la regla del cociente y las leyes de los exponentes:

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

se restan los exponentes
↓

$\frac{d}{dx}$

NOTAS DESDE EL AULA

- i) Las reglas del producto y del cociente suelen conducir a expresiones que demandan simplificación. Si su respuesta a un problema no se parece a la que se proporciona en la sección de respuestas del texto, quizá no ha realizado suficientes simplificaciones. No quede contento con sólo llevar a cabo las partes mecánicas de las diversas reglas de diferenciación; siempre resulta una buena idea poner en práctica sus habilidades algebraicas.
- ii) Algunas veces, la regla del cociente se usa cuando no es necesario. Aunque es posible usar esta regla para diferenciar funciones como

$$y = \frac{x^5}{6} \quad \text{y} \quad y = \frac{10}{x^3},$$

es más simple (y rápido) volver a escribir las funciones como $y = \frac{1}{6}x^5$ y $y = 10x^{-3}$, y luego usar las reglas del múltiplo constante y de potencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} \frac{d}{dx}x^5 = \frac{5}{6}x^4 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 10 \frac{d}{dx}x^{-3} = -30x^{-4}.$$

Ejercicios 3.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre dy/dx .

1. $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

2. $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$

3. $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)$

4. $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

$$\begin{array}{ll} 5. y = \frac{10}{x^2 + 1} & 6. y = \frac{5}{4x - 3} \\ 7. y = \frac{3x + 1}{2x - 5} & 8. y = \frac{2 - 3x}{7 - x} \\ 9. y = (6x - 1)^2 & 10. y = (x^4 + 5x)^2 \end{array}$$

En los problemas 11-20, encuentre $f'(x)$.

$$\begin{array}{ll} 11. f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}\right)(x^3 - 5x - 1) & \\ 12. f(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 10x + \frac{2}{x^2}\right) & \\ 13. f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + x + 1} & 14. f(x) = \frac{x^2 - 10x + 2}{x(x^2 - 1)} \\ 15. f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1) & \\ 16. f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)(3x^4 + 2x - 1) & \\ 17. f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2} & 18. f(x) = \frac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)} \\ 19. f(x) = (x^2 - 2x - 1)\left(\frac{x + 1}{x + 3}\right) & \\ 20. f(x) = (x + 1)\left(x + 1 - \frac{1}{x + 2}\right) & \end{array}$$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

$$\begin{array}{ll} 21. y = \frac{x}{x - 1}; \quad x = \frac{1}{2} & 22. y = \frac{5x}{x^2 + 1}; \quad x = 2 \\ 23. y = (2\sqrt{x} + x)(-2x^2 + 5x - 1); \quad x = 1 & \\ 24. y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3); \quad x = 0 & \end{array}$$

En los problemas 25-28, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

$$\begin{array}{ll} 25. y = (x^2 - 4)(x^2 - 6) & 26. y = x(x - 1)^2 \\ 27. y = \frac{x^2}{x^4 + 1} & 28. y = \frac{1}{x^2 - 6x} \end{array}$$

En los problemas 29 y 30, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la pendiente indicada.

$$\begin{array}{ll} 29. y = \frac{x + 3}{x + 1}; \quad m = -\frac{1}{8} & \\ 30. y = (x + 1)(2x + 5); \quad m = -3 & \end{array}$$

En los problemas 31 y 32, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la propiedad indicada.

$$\begin{array}{ll} 31. y = \frac{x + 4}{x + 5}; \quad \text{perpendicular a } y = -x & \\ 32. y = \frac{x}{x + 1}; \quad \text{paralela a } y = \frac{1}{4}x - 1 & \end{array}$$

33. Encuentre el valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (k + x)/x^2$ tiene pendiente 5 en $x = 2$.

34. Demuestre que la tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 + 14)/(x^2 + 9)$ en $x = 1$ es perpendicular a la tangente de la gráfica de $g(x) = (1 + x^2)(1 + 2x)$ en $x = 1$.

En los problemas 35-40, f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F'(1)$ si $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ y $g(1) = 6$, $g'(1) = 2$.

$$\begin{array}{ll} 35. F(x) = 2f(x)g(x) & 36. F(x) = x^2f(x)g(x) \\ 37. F(x) = \frac{2g(x)}{3f(x)} & 38. F(x) = \frac{1 + 2f(x)}{x - g(x)} \\ 39. F(x) = \left(\frac{4}{x} + f(x)\right)g(x) & 40. F(x) = \frac{xf(x)}{g(x)} \end{array}$$

41. Suponga que $F(x) = \sqrt{x}f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(4)$ si $f(4) = -16$, $f'(4) = 2$ y $f''(4) = 3$.

42. Suponga que $F(x) = xf(x) + xg(x)$, donde f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F''(0)$ si $f'(0) = -1$ y $g'(0) = 6$.

43. Suponga que $F(x) = f(x)/x$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(x)$.

44. Suponga que $F(x) = x^3f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F'''(x)$.

En los problemas 45-48, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

$$\begin{array}{ll} 45. f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x} & 46. f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} \\ 47. f(x) = (-2x + 6)(4x + 7) & \\ 48. f(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x + 4) & \end{array}$$

≡ Aplicaciones

49. La ley de gravitación universal establece que la fuerza F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es constante. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de F con respecto a r cuando $r = \frac{1}{2}$ km?

50. La energía potencial U entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, donde q_1 y q_2 son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. La fuerza entre los átomos se define como $F(x) = -U'(x)$. Demuestre que $F(\sqrt[6]{2q_1/q_2}) = 0$.

51. La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas ideal es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

donde P es la presión, V es el volumen por mol, R es la constante universal de los gases, T es la temperatura y a y b son constantes que dependen del gas. Encuentre dP/dV en el caso donde T es constante.

52. Para una lente convexa, la distancia focal f está relacionada con la distancia al objeto p y la distancia a la imagen q por la **ecuación de la lente**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Encuentre la razón de cambio instantánea de q con respecto a p en el caso donde f es constante. Explique el significado del signo negativo en su respuesta. ¿Qué ocurre a q cuando p crece?

≡ Piense en ello

53. a) Grafique la función racional $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$.

b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f tales que las rectas normales pasen por el origen.

54. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable.

a) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^2$.

b) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^3$.

c) Conjeture una regla para encontrar la derivada de $y = [f(x)]^n$, donde n es un entero positivo.

d) Use su conjetura en el inciso c) para encontrar la derivada de $y = (x^2 + 2x - 6)^{500}$.

55. Suponga que $y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' + P(x)y = 0$, donde P es una función conocida. Demuestre que $y = u(x)y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y' + P(x)y = f(x)$$

siempre que $u(x)$ satisface $du/dx = f(x)/y_1(x)$.

3.4 Funciones trigonométricas

■ Introducción En esta sección desarrollaremos las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Una vez que se han encontrado las derivadas de $\sin x$ y $\cos x$ es posible determinar las derivadas de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ usando la regla del cociente encontrada en la sección precedente. De inmediato veremos que la derivada de $\sin x$ usa los dos siguientes resultados de límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad (1)$$

que se encontraron en la sección 2.4.

■ Derivadas del seno y coseno Para encontrar la derivada de $f(x) = \sin x$ se usa la definición básica de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

y el proceso de cuatro pasos introducido en las secciones 2.7 y 3.1. En el primer paso usamos la fórmula de la suma para la función seno,

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \quad (3)$$

pero donde x y h desempeñan las partes de los símbolos x_1 y x_2 .

$$\begin{aligned} i) \quad f(x+h) &= \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h && \leftarrow \text{por (3)} \\ ii) \quad f(x+h) - f(x) &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x && \leftarrow \text{se factoriza } \sin x \\ &= \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h && \leftarrow \text{de los términos primero y tercero} \end{aligned}$$

Como observamos en la línea siguiente, no es posible cancelar las h en el cociente diferencial, aunque es posible volver a escribir la expresión para usar los resultados sobre límites en (1).

$$\begin{aligned} iii) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

iv) En esta línea, el símbolo h desempeña la parte del símbolo x en (1):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}.$$

A partir de los resultados sobre límites en (1), la última línea es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x. \quad (4)$$

De manera semejante es posible demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x. \quad (5)$$

Vea el problema 50 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 4\pi/3$.

Solución A partir de (4) la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$. Cuando éstas se evalúan en el mismo número $x = 4\pi/3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ es } -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A partir de la forma punto-pendiente de una recta, una ecuación de la recta tangente es

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente se muestra en rojo en la FIGURA 3.4.1.

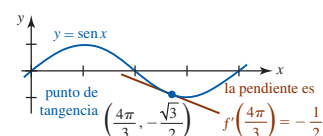


FIGURA 3.4.1 Recta tangente en el ejemplo 1

■ **Otras funciones trigonométricas** Los resultados en (4) y (5) pueden usarse junto con las reglas de diferenciación para encontrar las derivadas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para diferenciar $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ se usa la regla del cociente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x (\cos x) - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{\text{esto es igual a 1}}}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Al usar la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el hecho de que $1/\cos^2 x = (1/\cos x)^2 = \sec^2 x$, la última ecuación se simplifica a

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x. \quad (6)$$

La fórmula de la derivada para la cotangente

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x \quad (7)$$

se obtiene en forma análoga y se deja como ejercicio. Vea el problema 51 en los ejercicios 3.4.

Así, $\sec x = 1/\cos x$. En consecuencia, es posible usar otra vez la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} 1 - 1 \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Al escribir

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

podemos expresar (8) como

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x. \quad (9)$$

El resultado final también se concluye de inmediato a partir de la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x. \quad (10)$$

Vea el problema 52 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 2 Regla del producto

Diferencie $y = x^2 \sin x$.

Solución La regla del producto junto con (4) da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{d}{dx} x^2 \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Regla del producto

Diferencie $y = \cos^2 x$.

Solución Una forma de diferenciar esta función es reconocerla como un producto: $y = (\cos x)(\cos x)$. Luego, por la regla del producto y (5),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x \\ &= \cos x(-\sin x) + (\cos x)(-\sin x) \\ &= -2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

En la siguiente sección veremos que hay un procedimiento alternativo para diferenciar una potencia de una función.

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \frac{\sin x}{2 + \sec x}$.

Solución Por la regla del cociente, (4) y (9),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 + \sec x) \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (2 + \sec x)}{(2 + \sec x)^2} \\ &= \frac{(2 + \sec x) \cos x - \sin x (\sec x \tan x)}{(2 + \sec x)^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sec x \cos x = 1 \text{ y} \\ \sin x (\sec x \tan x) = \sin^2 x / \cos^2 x \end{array} \\ &= \frac{1 + 2 \cos x - \tan^2 x}{(2 + \sec x)^2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \sec x$.

Solución Por (9), la primera derivada es

$$f'(x) = \sec x \tan x.$$

Para obtener la segunda derivada, ahora es necesario usar la regla del producto junto con (6) y (9):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \frac{d}{dx} \tan x + \tan x \frac{d}{dx} \sec x \\ &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x. \end{aligned}$$

Para referencia futura, a continuación se resumen las fórmulas de derivadas presentadas en esta sección.

Teorema 3.4.1 Derivadas de funciones trigonométricas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas son

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x, \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x, \quad \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x. \quad (13)$$

$\frac{d}{dx}$

NOTAS DESDE EL AULA

Cuando trabaje los problemas en los ejercicios 3.4, puede que no obtenga la misma respuesta que la proporcionada en la sección de respuestas al final del libro. Esto se debe a que hay muchas identidades trigonométricas cuyas respuestas pueden expresarse en una forma más breve. Por ejemplo, la respuesta en el ejemplo 3:

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin x \cos x \quad \text{es la misma que} \quad \frac{dy}{dx} = -\sin 2x$$

por la fórmula del ángulo doble para la función seno. Intente resolver las diferencias entre su respuesta y la respuesta proporcionada.

Ejercicios 3.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre dy/dx .

1. $y = x^2 - \cos x$
2. $y = 4x^3 + x + 5 \sin x$
3. $y = 1 + 7 \sin x - \tan x$
4. $y = 3 \cos x - 5 \cot x$
5. $y = x \sin x$
6. $y = (4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}) \cos x$
7. $y = (x^3 - 2) \tan x$
8. $y = \cos x \cot x$
9. $y = (x^2 + \sin x) \sec x$
10. $y = \csc x \tan x$
11. $y = \cos^2 x + \sin^2 x$
12. $y = x^3 \cos x - x^3 \sin x$

En los problemas 13-22, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

13. $f(x) = (\csc x)^{-1}$
14. $f(x) = \frac{2}{\cos x \cot x}$
15. $f(x) = \frac{\cot x}{x + 1}$
16. $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{1 + \cos x}$
17. $f(x) = \frac{x^2}{1 + 2 \tan x}$
18. $f(x) = \frac{2 + \sin x}{x}$
19. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
20. $f(x) = \frac{1 + \csc x}{1 + \sec x}$
21. $f(x) = x^4 \sin x \tan x$
22. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x \cos x}$

En los problemas 23-26, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

23. $f(x) = \cos x$; $x = \pi/3$
24. $f(x) = \tan x$; $x = \pi$
25. $f(x) = \sec x$; $x = \pi/6$
26. $f(x) = \csc x$; $x = \pi/2$

En los problemas 27-30, considere la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Encuentre las coordenadas x del o de los puntos sobre la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

27. $f(x) = x + 2 \cos x$
28. $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$
29. $f(x) = \frac{1}{x + \cos x}$
30. $f(x) = \sin x + \cos x$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

31. $f(x) = \sin x$; $x = 4\pi/3$
32. $f(x) = \tan^2 x$; $x = \pi/4$
33. $f(x) = x \cos x$; $x = \pi$
34. $f(x) = \frac{x}{1 + \sin x}$; $x = \pi/2$

En los problemas 35 y 36, use una identidad trigonométrica idónea para encontrar la derivada de la función dada.

35. $f(x) = \sin 2x$
36. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

En los problemas 37-42, encuentre la segunda derivada de la función dada.

37. $f(x) = x \sin x$
38. $f(x) = 3x - x^2 \cos x$
39. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
40. $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$
41. $y = \csc x$
42. $y = \tan x$

En los problemas 43 y 44, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

43. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$; $y'' + y = \sin x$

44. $y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

Aplicaciones

45. Cuando el ángulo de elevación del Sol es θ , un poste telefónico de 40 pies de altura proyecta una sombra de longitud s como se muestra en la FIGURA 3.4.2. Encuentre la razón de cambio de s con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$ radianes. Explique el significado del signo menos en la respuesta.

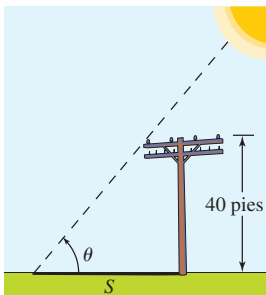


FIGURA 3.4.2 Sombra en el problema 45

46. Los dos extremos de una tabla de 10 pies de longitud se sujetan a rieles perpendiculares como se muestra en la FIGURA 3.4.3, de modo que el punto P puede desplazarse con libertad sobre la vertical y el punto R puede moverse libremente en dirección horizontal.

- Expresar el área A del triángulo PQR como una función del ángulo θ indicado.
- Encuentre la razón de cambio de A con respecto a θ .
- Al inicio la tabla está en posición plana sobre el riel horizontal. Suponga que luego el punto R se mueve en dirección del punto Q , obligando así al punto P a moverse hacia arriba sobre el riel vertical. Al principio el área del triángulo es 0 ($\theta = 0$), pero luego aumenta durante un instante a medida que θ crece y después disminuye cuando R tiende a Q . Cuando la tabla está vertical, el área del triángulo es 0 ($\theta = \pi/2$) de nuevo. Grafique la derivada $dA/d\theta$. Interprete la gráfica para encontrar valores de θ para los cuales A es creciente y los valores de θ para los cuales A es decreciente. Luego compruebe su interpretación de la gráfica de la derivada al graficar $A(\theta)$.
- Use las gráficas en el inciso c) para encontrar el valor de θ para el cual el área del triángulo es máxima.

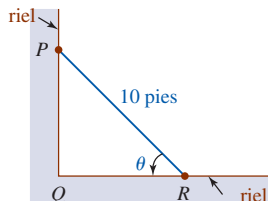


FIGURA 3.4.3 Tabla en el problema 46

Piense en ello

47. a) Encuentre todos los enteros positivos n tales que

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \sin x &= \sin x; & \frac{d^n}{dx^n} \cos x &= \cos x; \\ \frac{d^n}{dx^n} \cos x &= \sin x; & \frac{d^n}{dx^n} \sin x &= \cos x. \end{aligned}$$

- b) Use los resultados en el inciso a) como ayuda para encontrar

$$\frac{d^{21}}{dx^{21}} \sin x, \quad \frac{d^{30}}{dx^{30}} \sin x, \quad \frac{d^{40}}{dx^{40}} \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d^{67}}{dx^{67}} \cos x.$$

48. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \cos x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea perpendicular a la recta tangente en P_2 .
49. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \sin x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea paralela a la recta tangente en P_2 .
50. Use (1), (2) y la fórmula de la suma para el coseno para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

51. Use (4) y (5) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x.$$

52. Use (4) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x.$$

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Por inspección de la gráfica, indique dónde la función puede no ser diferenciable.

53. $f(x) = 0.5(\sin x + |\sin x|)$ 54. $f(x) = |x + \sin x|$

55. Como se muestra en la FIGURA 3.4.4, un joven jala un trineo donde va sentada su hermana. Si el peso total del trineo y la chica es de 70 lb, y si el coeficiente de fricción de suelo cubierto por nieve es 0.2, entonces la magnitud F de la fuerza (medida en libras) necesaria para mover el trineo es

$$F = \frac{70(0.2)}{0.2 \sin \theta + \cos \theta},$$

donde θ es el ángulo que la cuerda forma con la horizontal.

- Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de F sobre el intervalo $[-1, 1]$.
- Encuentre la derivada $dF/d\theta$.
- Encuentre el ángulo (en radianes) para el que $dF/d\theta = 0$.
- Encuentre el valor de F correspondiente al ángulo encontrado en el inciso c).
- Use la gráfica en el inciso a) como ayuda para interpretar los resultados encontrados en los incisos c) y d).

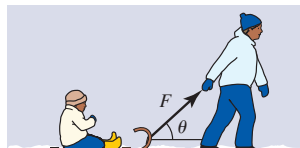


FIGURA 3.4.4 Trineo en el problema 55

3.5 Regla de la cadena

■ **Introducción** Como se analizó en la sección 3.2, la regla de potencias

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

es válida para todos los números reales exponentes n . En esta sección veremos que una regla semejante se cumple para la derivada de una potencia de una función $y = [g(x)]^n$. Antes de plantear el resultado formal, se considerará un ejemplo cuando n es un entero positivo.

Suponga que queremos diferenciar

$$y = (x^5 + 1)^2. \quad (1)$$

Al escribir (1) como $y = (x^5 + 1) \cdot (x^5 + 1)$, podemos encontrar la derivada al usar la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 &= (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) \\ &= (x^5 + 1) \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 5x^4 \\ &= 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4. \end{aligned} \quad (2)$$

En forma semejante, para diferenciar la función $y = (x^5 + 1)^3$, es posible escribirla como $y = (x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)$ y usar la regla del producto y el resultado que se proporciona en (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^3 &= \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1) && \text{sabemos esto por (2)} \\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2} \\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4 \\ &= 3(x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4. \end{aligned} \quad (3)$$

Asimismo, al escribir $y = (x^5 + 1)^4$ como $y = (x^5 + 1)^3 \cdot (x^5 + 1)$ es posible demostrar con facilidad mediante la regla del producto y (3) que

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^4 = 4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4. \quad (4)$$

■ **Regla de potencias para funciones** La inspección de (2), (3) y (4) revela un patrón para diferenciar una potencia de una función g . Por ejemplo, en (4) vemos

$$\begin{array}{c} \text{el exponente se escribe como múltiplo} \\ \downarrow \\ 4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4 \\ \uparrow \\ \text{disminuir el exponente por 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \text{derivada de la función entre paréntesis} \end{array}$$

Para recalcar lo anterior, si la función diferenciable se denota por $[]$, resulta evidente que

$$\frac{d}{dx}[]^n = n[]^{n-1} \frac{d}{dx}[].$$

El análisis anterior sugiere el resultado que se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 Regla de potencias para funciones

Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable en x , entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x), \quad (5)$$

o, en forma equivalente,
$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (6)$$

El teorema 3.5.1 constituye en sí un caso especial de un teorema más general, denominado **regla de la cadena**, que se presentará después de considerar algunos ejemplos de esta nueva regla de potencias.

EJEMPLO 1 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = (4x^3 + 3x + 1)^7$.

Solución Con la identificación de que $u = g(x) = 4x^3 + 3x + 1$, por (6) vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{7(4x^3 + 3x + 1)^6}^{u^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^3 + 3x + 1)}^{du/dx} = 7(4x^3 + 3x + 1)^6(12x^2 + 3). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Regla de potencias para funciones

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podríamos, por supuesto, usar la regla del cociente. No obstante, al volver a escribir la función como $y = (x^2 + 1)^{-1}$, también es posible usar la regla de potencias para funciones con $n = -1$:

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-1)(x^2 + 1)^{-2} 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \frac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

Solución Escribimos la función dada como $y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}$. Se identifica $u = 7x^5 - x^4 + 2$, $n = -10$ y se usa la regla de potencias (6):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \cdot \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2) = \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \tan^3 x$.

Solución Para recalcar, primero volvemos a escribir la función como $y = (\tan x)^3$ y luego se usa (6) con $u = \tan x$ y $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan x.$$

Recuerde por (6) de la sección 3.4 que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 3 \tan^2 x \sec^2 x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Regla del cociente y luego regla de potencias

Diferencie $y = \frac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

Solución Empezamos con la regla del cociente seguida por dos aplicaciones de la regla de potencias para:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(5x + 1)^8 \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3}^{\text{Regla de potencias para funciones}} - (x^2 - 1)^3 \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(5x + 1)^8}^{\text{Regla de potencias para funciones}}}{(5x + 1)^{16}} \\ &= \frac{(5x + 1)^8 \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x - (x^2 - 1)^3 \cdot 8(5x + 1)^7 \cdot 5}{(5x + 1)^{16}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2 - 40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}} \\
&= \frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Regla de potencias y luego regla del cociente

Diferencie $y = \sqrt{\frac{2x-3}{8x+1}}$.

Solución Al volver a escribir la función como

$$y = \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{1/2} \text{ podemos identificarla } u = \frac{2x-3}{8x+1}$$

y $n = \frac{1}{2}$. Por tanto, para calcular du/dx en (6) es necesario usar la regla del cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(8x+1) \cdot 2 - (2x-3) \cdot 8}{(8x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{26}{(8x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Por último, se simplifica usando las leyes de los exponentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13}{(2x-3)^{1/2}(8x+1)^{3/2}}.$$

■ **Regla de la cadena** Una potencia de una función puede escribirse como una función compuesta. Si identificamos $f(x) = x^n$ y $u = g(x)$, entonces $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. La regla de la cadena constituye un mecanismo para diferenciar cualquier composición $f \circ g$ de dos funciones diferenciables f y g .

Teorema 3.5.2 Regla de la cadena

Si la función f es diferenciable en $u = g(x)$ y la función g es diferenciable en x , entonces la composición $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (7)$$

o, en forma equivalente,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (8)$$

DEMOSTRACIÓN PARA $\Delta u \neq 0$ En esta demostración parcial resulta conveniente usar la forma de la definición de la derivada proporcionada en (3) de la sección 3.1. Para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \quad (9)$$

o bien, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$. Además,

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Cuando x y $x + \Delta x$ están en algún intervalo abierto para el que $\Delta u \neq 0$, es posible escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Puesto que se supone que g es diferenciable, es continua. En consecuencia, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $g(x + \Delta x) \rightarrow g(x)$, y así por (9) vemos que $\Delta u \rightarrow 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right). \quad \leftarrow \text{observe que } \Delta u \rightarrow 0 \text{ en el primer término}\end{aligned}$$

Por la definición de derivada, (3) de la sección 3.1, se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Se supone que $\Delta u \neq 0$ sobre algunos intervalos no se cumple para toda función diferenciable g . Aunque el resultado proporcionado en (7) sigue siendo válido cuando $\Delta u = 0$, la demostración precedente no.

Para comprender la derivada de una composición $y = f(g(x))$ podría ser de utilidad considerar a f como la *función externa* y a $u = g(x)$ como la *función interna*. Así, la derivada de $y = f(g(x)) = f(u)$ es el *producto de la derivada de la función externa* (evaluada en la función interna) y la *derivada de la función interna* (evaluada en x):

derivada de la función externa

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \cdot u'. \quad (10)$$

derivada de la función interna

El resultado en (10) lo escribimos de varias formas. Puesto que $y = f(u)$, tenemos $f'(u) = dy/du$, y, por supuesto, $u' = du/dx$. El producto de las derivadas en (10) es el mismo que en (8). Por otra parte, si los símbolos u y u' en (10) los sustituimos por $g(x)$ y $g'(x)$, obtenemos (7).

■ **Demostración de la regla de potencias para funciones** Como ya se observó, una potencia de una función puede escribirse como una composición $(f \circ g)(x)$ donde la función externa es $y = f(x) = x^n$ y la función interna es $u = g(x)$. La derivada de la función interna $y = f(u) = u^n$ es $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$ y la derivada de la función externa es $\frac{du}{dx}$. Así, el producto de estas derivadas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1} g'(x).$$

Ésta es la regla de potencias para funciones proporcionada en (5) y (6).

■ **Funciones trigonométricas** Las derivadas de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable g se obtienen como una consecuencia directa de la regla de la cadena. Por ejemplo, si $y = \sin u$, donde $u = g(x)$, entonces la derivada de y con respecto a la variable u es

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Por tanto, (8) da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\frac{d}{dx} \sin[] = \cos[] \frac{d}{dx} [].$$

En forma semejante, si $y = \tan u$ donde $u = g(x)$, entonces $dy/du = \sec^2 u$ y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}.$$

A continuación se resumen los resultados de la regla de la cadena para las seis funciones trigonométricas.

Teorema 3.5.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}. \quad (13)$$

EJEMPLO 7 Regla de la cadena

Diferencie $y = \cos 4x$.

Solución La función es $\cos u$ con $u = 4x$. Por la segunda fórmula en (11) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-\operatorname{sen} 4x}^{\frac{dy}{du}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx} 4x}^{\frac{du}{dx}} = -4 \operatorname{sen} 4x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Regla de la cadena

Diferencie $y = \tan(6x^2 + 1)$.

Solución La función es $\tan u$ con $u = 6x^2 + 1$. Por la segunda fórmula en (12) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\sec^2 u}^{\sec^2 u} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx} (6x^2 + 1)}^{\frac{du}{dx}} = 12x \sec^2(6x^2 + 1). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Reglas del producto, de potencias y de la cadena

Diferencie $y = (9x^3 + 1)^2 \operatorname{sen} 5x$.

Solución Primero se usa la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx} \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot \frac{d}{dx} (9x^3 + 1)^2$$

seguida de la regla de potencias (6) y la primera fórmula (11) del teorema 3.5.3,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (9x^3 + 1)^2 \cdot \overbrace{\cos 5x}^{\text{por (11)}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx} 5x}^{\text{por (6)}} + \operatorname{sen} 5x \cdot \overbrace{2(9x^3 + 1)}^{\text{por (6)}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx} (9x^3 + 1)}^{\text{por (6)}} \\ &= (9x^3 + 1)^2 \cdot 5 \cos 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot 2(9x^3 + 1) \cdot 27x^2 \\ &= (9x^3 + 1)(45x^3 \cos 5x + 5 \cos 5x + 54x^2 \operatorname{sen} 5x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En las secciones 3.2 y 3.3 vimos que aun cuando las reglas de la suma y el producto se plantearon en términos de dos funciones f y g , son válidas para cualquier número finito de funciones diferenciables. De este modo, también se planteó la regla de la cadena para la composición de dos funciones f y g , aunque es posible aplicarla a la composición de tres (o más) funciones diferenciables. En el caso de las tres, f , g y h , (7) se vuelve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(g(h(x))) &= f'(g(h(x))) \cdot \frac{d}{dx} g(h(x)) \\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

Solución Para recalcar, primero escribimos la función dada como $y = [\cos(7x^3 + 6x - 1)]^4$. Observe que esta función es la composición $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ donde $f(x) = x^4$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 7x^3 + 6x - 1$. Primero aplicamos la regla de la cadena en la forma de regla de potencias (6) seguida por la segunda fórmula en (11):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4[\cos(7x^3 + 6x - 1)]^3 \cdot \frac{d}{dx} \cos(7x^3 + 6x - 1) && \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar la potencia} \\ &= 4 \cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot \left[-\sin(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx} (7x^3 + 6x - 1) \right] && \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar el coseno} \\ &= -4(21x^2 + 6) \cos^3(7x^3 + 6x - 1) \sin(7x^3 + 6x - 1).\end{aligned}$$

En el ejemplo final, la función dada es una composición de cuatro funciones. ■

EJEMPLO 11 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \sin(\tan \sqrt{3x^2 + 4})$.

Solución La función es $f(g(h(k(x))))$, donde $f(x) = \sin x$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sqrt{x}$, y $k(x) = 3x^2 + 4$. En este caso se aplica la regla de la cadena tres veces consecutivas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \frac{d}{dx} \tan \sqrt{3x^2 + 4} && \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar el seno} \\ &= \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \sec^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 + 4} && \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar la tangente} \\ &= \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \sec^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 + 4)^{1/2} && \leftarrow \text{se vuelve a escribir la potencia} \\ &= \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \sec^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 + 4) && \leftarrow \text{tercera regla de la cadena: diferenciar la potencia} \\ &= \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \sec^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 6x && \leftarrow \text{simplificar} \\ &= \frac{3x \cos(\tan \sqrt{3x^2 + 4}) \cdot \sec^2 \sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{3x^2 + 4}}.\end{aligned}$$

Por supuesto, usted debe volverse tan apto en aplicar la regla de la cadena que al final ya no piense en el número de funciones presentes en la composición que se trate. ■

$\frac{d}{dx}$

NOTAS DESDE EL AULA

- i) Quizás el error más frecuente es olvidar efectuar la segunda parte de la regla de la cadena; a saber: la derivada de la función interna. Ésta es la parte du/dx en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo, la derivada de $y = (1 - x)^{57}$ no es $dy/dx = 57(1 - x)^{56}$ puesto que $57(1 - x)^{56}$ es sólo la parte dy/du . Podría ser útil usar de manera consistente el símbolo de operación d/dx :

$$\frac{d}{dx} (1 - x)^{57} = 57(1 - x)^{56} \cdot \frac{d}{dx} (1 - x) = 57(1 - x)^{56} \cdot (-1).$$

- ii) Un error menos común, pero tal vez más grave que el primero, consiste en diferenciar dentro la función dada. En su examen, un estudiante escribió que la derivada de $y = \cos(x^2 + 1)$ era $dy/dx = -\sin(2x)$; es decir, que la derivada del coseno es el negativo del seno y que la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$. Ambas observaciones son correctas, pero la forma donde se escribieron juntas es incorrecta. Tenga en cuenta que la derivada de la función interna es un múltiplo de la derivada de la función externa. De nuevo, podría ser de ayuda usar el símbolo de operación d/dx . La derivada correcta de $y = \cos(x^2 + 1)$ es el producto de dos derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = -2x \sin(x^2 + 1).$$

Ejercicios 3.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre dy/dx .

1. $y = (-5x)^{30}$
2. $y = (3/x)^{14}$
3. $y = (2x^2 + x)^{200}$
4. $y = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5$
5. $y = \frac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$
6. $y = \frac{10}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$
7. $y = (3x - 1)^4(-2x + 9)^5$
8. $y = x^4(x^2 + 1)^6$
9. $y = \sin \sqrt{2x}$
10. $y = \sec x^2$
11. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$
12. $y = \frac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$
13. $y = [x + (x^2 - 4)^3]^{10}$
14. $y = \left[\frac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$
15. $y = x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$
16. $y = (2x + 1)^3 \sqrt{3x^2 - 2x}$
17. $y = \sin(\pi x + 1)$
18. $y = -2 \cos(-3x + 7)$
19. $y = \sin^3 5x$
20. $y = 4 \cos^2 \sqrt{x}$

En los problemas 21-38, encuentre $f'(x)$.

21. $f(x) = x^3 \cos x^3$
22. $f(x) = \frac{\sin 5x}{\cos 6x}$
23. $f(x) = (2 + x \sin 3x)^{10}$
24. $f(x) = \frac{(1 - \cos 4x)^2}{(1 + \sin 5x)^3}$
25. $f(x) = \tan(1/x)$
26. $f(x) = x \cot(5/x^2)$
27. $f(x) = \sin 2x \cos 3x$
28. $f(x) = \sin^2 2x \cos^3 3x$
29. $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^5$
30. $f(x) = \csc^2 2x - \csc 2x^2$
31. $f(x) = \sin(\sin 2x)$
32. $f(x) = \tan\left(\cos \frac{x}{2}\right)$
33. $f(x) = \cos(\sin \sqrt{2x + 5})$
34. $f(x) = \tan(\tan x)$
35. $f(x) = \sin^3(4x^2 - 1)$
36. $f(x) = \sec(\tan^2 x^4)$
37. $f(x) = (1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^6$
38. $f(x) = \left[x^2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4}\right]^2$

En los problemas 39-42, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

39. $y = (x^2 + 2)^3$; $x = -1$
40. $y = \frac{1}{(3x + 1)^2}$; $x = 0$
41. $y = \sin 3x + 4x \cos 5x$; $x = \pi$
42. $y = 50x - \tan^3 2x$; $x = \pi/6$

En los problemas 43-46, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

43. $y = \left(\frac{x}{x + 1}\right)^2$; $x = -\frac{1}{2}$
44. $y = x^2(x - 1)^3$; $x = 2$
45. $y = \tan 3x$; $x = \pi/4$
46. $y = (-1 + \cos 4x)^3$; $x = \pi/8$

En los problemas 47 y 48, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

47. $y = \sin\left(\frac{\pi}{6x}\right) \cos(\pi x^2)$; $x = \frac{1}{2}$
48. $y = \sin^3 \frac{x}{3}$; $x = \pi$

En los problemas 49-52, encuentre la derivada indicada.

49. $f(x) = \sin \pi x$; $f'''(x)$
50. $y = \cos(2x + 1)$; $d^5 y/dx^5$
51. $y = x \sin 5x$; $d^3 y/dx^3$
52. $f(x) = \cos x^2$; $f''(x)$
53. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x/(x^2 + 1)^2$ donde la recta tangente es horizontal. La gráfica de f , ¿tiene alguna tangente vertical?
54. Determine los valores de t en los que la razón de cambio instantánea de $g(t) = \sin t + \frac{1}{2} \cos 2t$ es cero.
55. Si $f(x) = \cos(x/3)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f' en $x = 2\pi$?
56. Si $f(x) = (1 - x)^4$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?

≡ Aplicaciones

57. La función $R = (v_0^2/g)\sin 2\theta$ proporciona el rango de un proyectil disparado a un ángulo θ con respecto a la horizontal con una velocidad inicial v_0 . Si v_0 y g son constantes, encuentre los valores de θ con los cuales $dR/d\theta = 0$.
58. El volumen de un globo esférico de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El radio es una función del tiempo t y aumenta a razón constante de 5 pulg/min. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de V con respecto a r ?
59. Suponga que un globo esférico se infla a razón constante $dV/dt = 10$ pulg³/min. ¿A qué ritmo aumenta su radio cuando $r = 2$ pulg?
60. Considere una masa sobre un resorte como se muestra en la FIGURA 3.5.1. En ausencia de fuerzas de amortiguación, el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa, medido desde una posición denominada **posición de equilibrio**, está dado por la función

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$, k es la constante del resorte (un indicador de la rigidez del resorte), m es la masa (medida en slugs o kilogramos), y_0 es el desplazamiento inicial de la masa (medido por arriba o por debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la velocidad inicial de la masa y t es el tiempo medido en segundos.

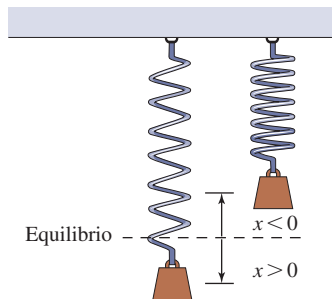


FIGURA 3.5.1 Masa en un resorte en el problema 60

- a) Compruebe que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

- b) Compruebe que $x(t)$ satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

≡ Piense en ello

61. Sea F una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}F(3x)$?
62. Sea G una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}[G(-x^2)]^2$?
63. Suponga $\frac{d}{du}f(u) = \frac{1}{u}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(-10x + 7)$?
64. Suponga $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(x^3)$?

En los problemas 65 y 66, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

65. $\frac{d^n}{dx^n}(1+2x)^{-1}$ 66. $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{1+2x}$
67. Suponga que $g(t) = h(f(t))$, donde $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, y $h'(3) = -2$. ¿Qué es $g'(1)$?
68. Suponga que $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) = 1$, $f'(2) = 4$, y $f''(2) = 3$. ¿Qué es $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1}$?
69. Dado que f es una función impar diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función par.
70. Dado que f es una función par diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función impar.

3.6 Diferenciación implícita

■ **Introducción** Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son las gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

describe un círculo de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (1) no es una función, puesto que para cualquier elección de x que satisfaga $-2 < x < 2$ corresponden dos valores de y . Vea la FIGURA 3.6.1a). A pesar de ello, las gráficas de ecuaciones como (1) pueden tener rectas tangentes en varios puntos (x, y) . La ecuación (1) define *por lo menos* dos funciones f y g sobre el intervalo $[-2, 2]$. Gráficamente, las funciones evidentes son la mitad superior y la mitad inferior del círculo. A fin de obtener fórmulas para éstas, se despeja y de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de x :

$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad \leftarrow \text{semicírculo superior} \quad (2)$$

$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \quad \leftarrow \text{semicírculo inferior} \quad (3)$$

Vea las figuras 3.6.1b) y c). Ahora ya es posible encontrar pendientes de las rectas tangentes para $-2 < x < 2$ al diferenciar (2) y (3) con la regla de potencias para funciones.

En esta sección veremos cómo obtener la derivada dy/dx para (1), así como para ecuaciones más complicadas $F(x, y) = 0$, sin necesidad de resolver la ecuación para la variable y .

■ **Funciones implícitas y explícitas** Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x , a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita. Por otra parte, se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define **implícitamente** la función, o que y es una **función implícita** de x . Acabamos de ver que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

En general, si una ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente una función en algún intervalo, entonces $F(x, f(x)) = 0$ es una identidad sobre el intervalo. La gráfica de f es una porción o un arco (o toda) de la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$. En el caso de las funciones en (2) y (3), observe que ambas ecuaciones

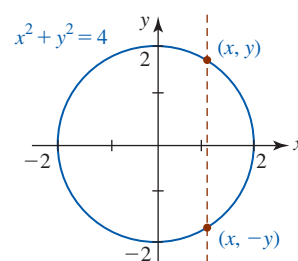
$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 4$$

son identidades sobre el intervalo $[-2, 2]$.

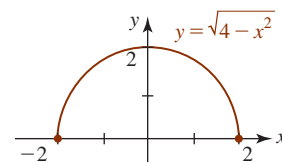
La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ que se muestra en la FIGURA 3.6.2a) es una curva famosa denominada **hoja de Descartes**. Con ayuda de un SAC como *Mathematica* o *Maple*, encontramos que una de las funciones implícitas definidas por $x^3 + y^3 = 3xy$ es

$$y = \frac{2x}{\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}. \quad (4)$$

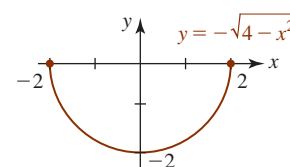
La gráfica de esta función es el arco rojo que observamos en la figura 3.6.2b). En la figura 3.6.2c) se proporciona la gráfica de otra función implícita definida por $x^3 + y^3 = 3xy$.



a) No es una función



b) Función



c) Función

FIGURA 3.6.1 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina por lo menos dos funciones

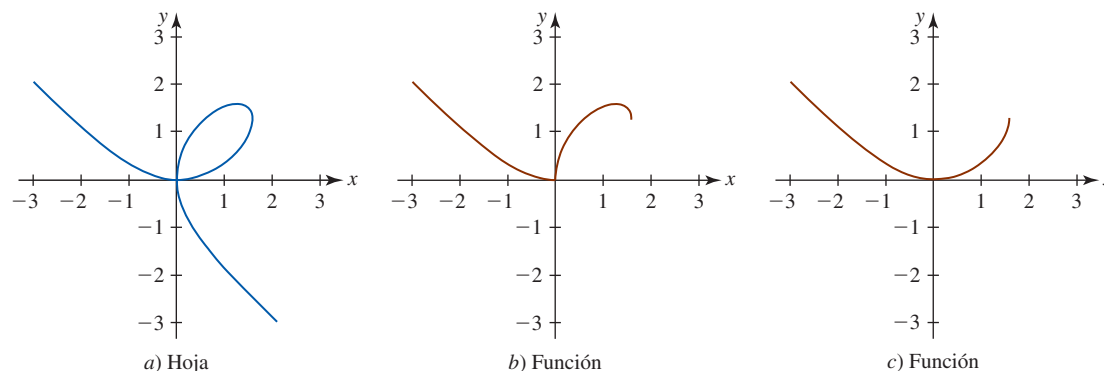


FIGURA 3.6.2 Las porciones de la gráfica en a) que se muestran en rojo en b) y c) son gráficas de dos funciones implícitas de x

■ **Diferenciación implícita** A partir del análisis anterior, no salte a la conclusión de que siempre es posible resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para una función implícita de x como se hizo en (2), (3) y (4). Por ejemplo, resolver una ecuación como

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + y \quad (5)$$

para y en términos de x es más que un ejercicio en algún desafío algebraico o una lección sobre el uso de la sintaxis correcta en un SAC. ¡Es imposible! Sin embargo, (5) puede determinar varias funciones implícitas sobre un intervalo restringido del eje x . A pesar de ello, podemos determinar la derivada dy/dx por medio de un proceso denominado **diferenciación implícita**. Este proceso consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a x , usando las reglas de diferenciación y luego resolviendo para dy/dx . Puesto que se considera que y está determinada por la ecuación dada como una función diferenciable de x , la regla de la cadena, en forma de la regla de potencias para funciones, proporciona el resultado útil

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}, \quad (6)$$

◀ Aunque no es posible resolver ciertas ecuaciones para una función explícita, sigue siendo posible graficar la ecuación con ayuda de un SAC. Así, es posible ver las funciones como se hizo en la figura 3.6.2.

donde n es cualquier número real. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \quad \text{mientras} \quad \frac{d}{dx} y^2 = 2y \frac{dy}{dx}.$$

En forma semejante, si y es una función de x , entonces por la regla del producto

$$\frac{d}{dx} xy = x \frac{d}{dx} y + y \frac{d}{dx} x = x \frac{dy}{dx} + y,$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \sin 5y = \cos 5y \cdot \frac{d}{dx} 5y = 5 \cos 5y \frac{dy}{dx}.$$

Directrices para diferenciación implícita

- i) Al diferenciar con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a y como una función diferenciable de x . Para potencias del símbolo y , use (6).
- ii) Agrupe todos los términos donde aparece dy/dx en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.
- iii) Factorice dy/dx en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje dy/dx .

En los siguientes ejemplos se supondrá que la ecuación dada determina por lo menos una función diferenciable implícitamente.

EJEMPLO 1 Uso de la diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Se diferencian ambos miembros de la ecuación y luego se usa (6):

$$\begin{aligned} & \text{use la regla de potencias (6) aquí} \\ & \downarrow \\ & \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} 4 \\ & 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (7) \quad \blacksquare$$

Como se ilustra en (7) del ejemplo 1, la diferenciación implícita suele producir una derivada que depende de ambas variables x y y . En el análisis introductorio vimos que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente sobre el intervalo abierto $-2 < x < 2$. El simbolismo $dy/dx = -x/y$ representa la derivada de cualquiera de las funciones sobre el intervalo. Observe que esta derivada indica con claridad que las funciones (2) y (3) no son diferenciables en $x = -2$ y $x = 2$ puesto que $y = 0$ para estos valores de x . En general, la diferenciación implícita produce la derivada de cualquier función que puede derivarse implícitamente definida por una ecuación $F(x, y) = 0$.

EJEMPLO 2 La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

Solución Al sustituir $x = 1$ en la ecuación dada obtenemos $y^2 = 3$ o $y = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, hay rectas tangentes en $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Aunque $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$ son puntos sobre la

■ **Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Hasta el momento se ha demostrado la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ para todos los enteros exponentes n . La diferenciación implícita constituye un mecanismo para demostrar esta regla cuando el exponente es un número racional p/q , donde p y q son enteros y $q \neq 0$. En el caso donde $n = p/q$, la función

$$y = x^{p/q} \quad \text{proporciona} \quad y^q = x^p.$$

Luego, para $y \neq 0$, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx} y^q = \frac{d}{dx} x^p \quad \text{produce} \quad qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y simplificar con las leyes de los exponentes obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}.$$

Al examinar el último resultado observamos que se trata de (3) de la sección 3.2 con $n = p/q$.

Ejercicios 3.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, suponga que y es una función diferenciable de x . Encuentre la derivada indicada.

1. $\frac{d}{dx} x^2 y^4$

2. $\frac{d}{dx} \frac{x^2}{y^2}$

3. $\frac{d}{dx} \cos y^2$

4. $\frac{d}{dx} y \sin 3y$

En los problemas 5-24, suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable implícita. Use diferenciación implícita para encontrar dy/dx .

5. $y^2 - 2y = x$

6. $4x^2 + y^2 = 8$

7. $xy^2 - x^2 + 4 = 0$

8. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

9. $3y + \cos y = x^2$

10. $y^3 - 2y + 3x^3 = 4x + 1$

11. $x^3 y^2 = 2x^2 + y^2$

12. $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$

13. $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$

14. $y = (x - y)^2$

15. $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$

16. $y^4 - y^2 = 10x - 3$

17. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$

18. $\frac{x + y}{x - y} = x$

19. $y^2 = \frac{x - 1}{x + 2}$

20. $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

21. $xy = \sin(x + y)$

22. $x + y = \cos(xy)$

23. $x = \sec y$

24. $x \sin y - y \cos x = 1$

En los problemas 25 y 26, use diferenciación implícita para encontrar la derivada indicada.

25. $r^2 = \sin 2\theta$; $dr/d\theta$

26. $\pi r^2 h = 100$; dh/dr

En los problemas 27 y 28, encuentre dy/dx en el punto indicado.

27. $xy^2 + 4y^3 + 3x = 0$; $(1, -1)$

28. $y = \sin xy$; $(\pi/2, 1)$

En los problemas 29 y 30, encuentre dy/dx en los puntos que corresponden al número indicado.

29. $2y^2 + 2xy - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$ 30. $y^3 + 2x^2 = 11y$; $y = 1$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto o número indicado.

31. $x^4 + y^3 = 24$; $(-2, 2)$ 32. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$; $x = 3$

33. $\tan y = x$; $y = \pi/4$ 34. $3y + \cos y = x^2$; $(1, 0)$

En los problemas 35 y 36, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada donde la recta tangente es horizontal.

35. $x^2 - xy + y^2 = 3$

36. $y^2 = x^2 - 4x + 7$

37. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente de la tangente es $\frac{1}{2}$.

38. Encuentre el punto donde se cortan las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$.

39. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^3 = x^2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 3x - 5 = 0$.

40. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 - xy + y^2 = 27$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 5$.

En los problemas 41-48, encuentre d^2y/dx^2 .

41. $4y^3 = 6x^2 + 1$

42. $xy^4 = 5$

43. $x^2 - y^2 = 25$

44. $x^2 + 4y^2 = 16$

45. $x + y = \sin y$

46. $y^2 - x^2 = \tan 2x$

47. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$

48. $x^3 + y^3 = 27$

En los problemas 49-52, primero use diferenciación implícita para encontrar dy/dx . Luego despeje y explícitamente en términos de x y diferencie. Demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

49. $x^2 - y^2 = x$

50. $4x^2 + y^2 = 1$

51. $x^3 y = x + 1$

52. $y \sin x = x - 2y$

En los problemas 53-56, determine una función implícita a partir de la ecuación dada tal que su gráfica sea la curva azul en la figura.

53. $(y - 1)^2 = x - 2$

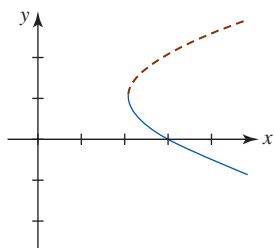


FIGURA 3.6.4 Gráfica para el problema 53

54. $x^2 + xy + y^2 = 4$

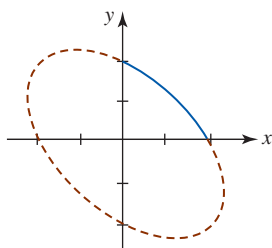


FIGURA 3.6.5 Gráfica para el problema 54

55. $x^2 + y^2 = 4$

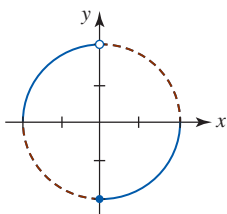


FIGURA 3.6.6 Gráfica para el problema 55

56. $y^2 = x^2(2 - x)$

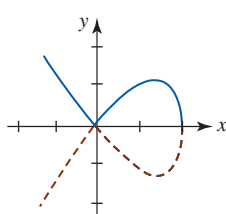


FIGURA 3.6.7 Gráfica para el problema 56

En los problemas 57 y 58, suponga que tanto x como y son diferenciables de una variable t . Encuentre dy/dt en términos de x , y y dx/dt .

57. $x^2 + y^2 = 25$

58. $x^2 + xy + y^2 - y = 9$

59. La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ es la hoja de Descartes proporcionada en la figura 3.6.2a).

- Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto en el primer cuadrante donde la hoja corta la gráfica de $y = x$.
- Encuentre el punto en el primer cuadrante donde la recta tangente es horizontal.

60. La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ mostrada en la FIGURA 3.6.8 se denomina **lemniscata**.

- Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 1$.
- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso a).
- Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal.

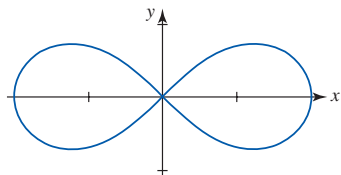


FIGURA 3.6.8 Lemniscata en el problema 60

En los problemas 61 y 62, demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son ortogonales en el punto de intersección indicado. Vea el problema 64 en los ejercicios 3.2.

61. $y^2 = x^3$, $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, 1)$

62. $y^3 + 3x^2y = 13$, $2x^2 - 2y^2 = 3x$; $(2, 1)$

Si todas las curvas de una familia de curvas $G(x, y) = c_1$, c_1 una constante, cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y) = c_2$, c_2 una constante, entonces se dice que las familias tienen **trayectorias ortogonales** entre sí. En los problemas 63 y 64, demuestre que las familias de curvas tienen trayectorias ortogonales entre sí. Trace las dos familias de curvas.

63. $x^2 - y^2 = c_1$, $xy = c_2$ 64. $x^2 + y^2 = c_1$, $y = c_2x$

Aplicaciones

65. Una mujer conduce hacia una señal en la carretera como se muestra en la FIGURA 3.6.9. Sea θ su ángulo de visión de la señal y sea x su distancia (medida en pies) a esa señal.

- Si el nivel de sus ojos está a 4 pies de la superficie de la carretera, demuestre que

$$\tan \theta = \frac{4x}{x^2 + 252}.$$

- Encuentre la razón a la que cambia θ con respecto a x .
- ¿A qué distancia se cumple que la razón del inciso b) es igual a cero?

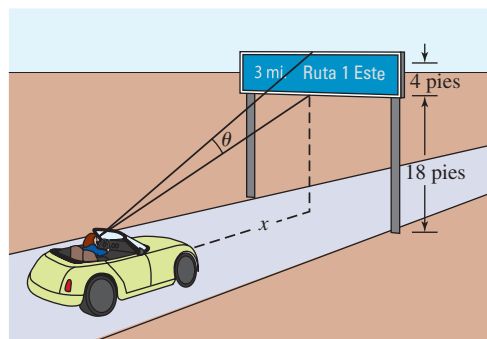


FIGURA 3.6.9 Automóvil en el problema 65

66. Un avión caza describe un círculo de 1 km de radio como se muestra en la FIGURA 3.6.10. Suponga que se escoge un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el origen está en el centro del círculo. La nave dispara un misil que describe una trayectoria rectilínea tangente al círculo e impacta en un blanco sobre el suelo cuyas coordenadas son $(2, -2)$.

- Determine el punto sobre el círculo donde fue disparado el misil.
- Si un misil se dispara en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ sobre el círculo, ¿en qué punto choca contra el suelo?

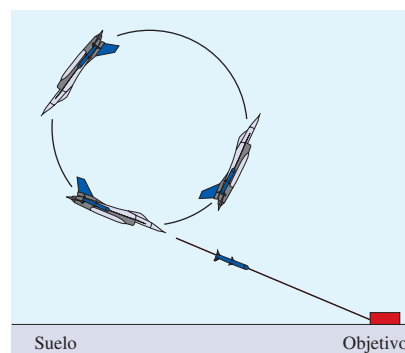


FIGURA 3.6.10 Avión caza en el problema 66

≡ Piense en ello

67. El ángulo θ ($0 < \theta < \pi$) entre dos curvas se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto P de intersección. Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes en P , es posible demostrar que $\tan \theta = (m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)$. Determine el ángulo entre las gráficas de $x^2 + y^2 + 4y = 6$ y $x^2 + 2x + y^2 = 4$ en $(1, 1)$.
68. Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0) está dada por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

69. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Establezca otra función implícita $h(x)$ definida por esta ecuación para $-2 \leq x \leq 2$ diferente de la proporcionada en (2), (3) y el problema 55.
70. Para $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$, la ecuación $x = \sin y$ define una función implícita diferenciable.
- Encuentre dy/dx en términos de y .
 - Encuentre dy/dx en términos de x .

3.7 Derivadas de funciones inversas

■ Introducción En la sección 1.5 vimos que las gráficas de una función f uno a uno y su inversa f^{-1} son **reflexiones** entre sí en la recta $y = x$. Como una consecuencia, si (a, b) es un punto sobre la gráfica de f , entonces (b, a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1} . En esta sección también veremos que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función diferenciable f están relacionadas con las pendientes de tangentes a la gráfica de f^{-1} .

Empezamos con dos teoremas sobre la continuidad de f y f^{-1} .

■ Continuidad de f^{-1} Aunque los dos teoremas siguientes se plantean sin demostración, su validez se concluye a partir del hecho de que f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

Teorema 3.7.1 Continuidad de la función inversa

Sea f una función continua uno a uno sobre su dominio X . Entonces f^{-1} es continua sobre su dominio.

■ Funciones crecientes-decrecientes Suponga que $y = f(x)$ es una función definida sobre un intervalo I , y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. Entonces por la sección 1.3 y la figura 1.3.4, recuerde que se dice que f es

- **creciente** sobre el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (1)
- **decreciente** sobre el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (2)

Los dos teoremas siguientes establecen una relación entre el concepto de creciente/decreciente y la existencia de una función inversa.

Teorema 3.7.2 Existencia de una función inversa

Sea f una función continua y creciente sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

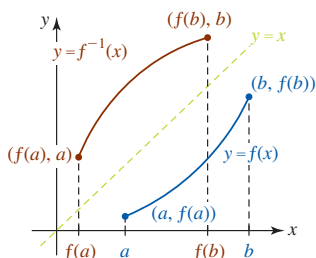


FIGURA 3.7.1 f (curva azul) y f^{-1} (curva roja) son continuas y crecientes

El teorema 3.7.2 también se cumple cuando sustituimos la palabra *creciente* por la palabra *decreciente* y el intervalo en la conclusión se reemplaza por $[f(b), f(a)]$. Vea la **FIGURA 3.7.1**. Además, por el teorema 3.7.2 concluimos que si f es continua y creciente sobre un intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre su dominio de inspección. Al analizar las figuras 1.3.4 y 3.7.1 también observamos que si f en el teorema 3.7.2 es una función diferenciable sobre (a, b) , entonces

- f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ sobre (a, b) , y
- f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) < 0$ sobre (a, b) .

Estas afirmaciones se demostrarán en el siguiente capítulo.

f creciente y diferenciable significa que las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

Teorema 3.7.3 Diferenciabilidad de una función inversa

Suponga que f es una función diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b) . Si $f'(x) > 0$ sobre el intervalo o $f'(x) < 0$ sobre el intervalo, entonces f es uno a uno. Además, f^{-1} es diferenciable para toda x en el rango de f .

EJEMPLO 1 Existencia de una inversa

Demuestre que $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ tiene una inversa.

Solución Puesto que f es una función polinomial, es diferenciable en todas partes; es decir, f es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. También, $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x implica que f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. Por el teorema 3.7.3 se concluye que f es uno a uno y entonces f^{-1} existe. ■

■ **Derivada de f^{-1}** Si f es diferenciable sobre un intervalo I y es uno a uno sobre ese intervalo, entonces para a en I el punto (a, b) sobre la gráfica de f y el punto (b, a) sobre la gráfica de f^{-1} son imágenes especulares entre sí en la recta $y = x$. Como veremos a continuación, las pendientes de las rectas tangentes en (a, b) y (b, a) también están relacionadas.

EJEMPLO 2 Derivada de una inversa

En el ejemplo 5 de la sección 1.5 se demostró que la inversa de una función uno a uno $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$. En $x = 2$,

$$f(2) = 5 \quad \text{y} \quad f^{-1}(5) = 2.$$

Luego, por

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Observamos que $f'(2) = 4$ y $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$. Esto muestra que la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(2, 5)$ y la pendiente de la tangente a la gráfica de f^{-1} en $(5, 2)$ son recíprocos:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} \quad \text{o} \quad (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}.$$

Vea la FIGURA 3.7.2.

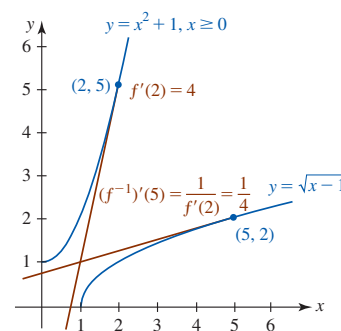


FIGURA 3.7.2 Rectas tangentes en el ejemplo 2

El siguiente teorema muestra que el resultado en el ejemplo 2 no es una coincidencia.

Teorema 3.7.4 Derivada de una función inversa

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I y que $f'(x)$ nunca es cero sobre I . Si f tiene una inversa f^{-1} sobre I , entonces f^{-1} es diferenciable en un número x y

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN Como vimos en (5) de la sección 1.5, $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1} . Por diferenciación implícita y la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \quad \text{o} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1.$$

Al despejar $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ en la última ecuación obtenemos (3). ■

Resulta evidente que la ecuación (3) muestra que para encontrar la función derivada para f^{-1} es necesario conocer de manera explícita $f^{-1}(x)$. Para una función uno a uno $y = f(x)$, resolver la ecuación $x = f(y)$ para y y algunas veces es difícil y a menudo imposible. En este

caso resulta conveniente volver a escribir (3) usando otra notación. De nuevo, por diferenciación implícita,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f(y) \quad \text{proporciona} \quad 1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y escribir $dx/dy = f'(y)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}. \quad (4)$$

Si (a, b) es un punto conocido sobre la gráfica de f , el resultado en (4) permite evaluar la derivada de f^{-1} en (b, a) sin contar con una ecuación que defina $f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 3 Derivada de una inversa

En el ejemplo 1 se indicó que la función polinomial $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$ y por tanto es continua sobre el intervalo. Puesto que el comportamiento final de f es el de la función polinomial con un solo término $y = 5x^3$, podemos concluir que el rango de f también es $(-\infty, \infty)$. Además, puesto que $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x , f es creciente sobre su dominio $(-\infty, \infty)$. Entonces, por el teorema 3.7.3, f tiene una inversa diferenciable f^{-1} con dominio $(-\infty, \infty)$. Al intercambiar x y y , la inversa se define por la ecuación $x = 5y^3 + 8y - 9$, pero resolver esta ecuación para y en términos de x es difícil (se requiere la fórmula cúbica). No obstante, al usar $dx/dy = 15y^2 + 8$, se encuentra que la derivada de la función inversa está dada por (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15y^2 + 8}. \quad (5)$$

Por ejemplo, puesto que $f(1) = 4$, sabemos que $f^{-1}(4) = 1$. Entonces, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 1)$ está dada por (5):

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = \left. \frac{1}{15y^2 + 8} \right|_{y=1} = \frac{1}{23}.$$

Lea otra vez este párrafo.

► En el ejemplo 3, la derivada de la función inversa también puede obtenerse directamente a partir de $x = 5y^3 + 8y - 9$ usando diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(5y^3 + 8y - 9) \quad \text{proporciona} \quad 1 = 15y^2 \frac{dy}{dx} + 8 \frac{dy}{dx}.$$

Al resolver la ecuación para dy/dx obtenemos (5). Como una consecuencia de esta observación, es posible usar diferenciación implícita para encontrar la derivada de una función inversa con el mínimo esfuerzo. En el siguiente análisis se encontrarán las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas Un repaso de las figuras 1.5.15 y 1.5.17a) revela que la tangente inversa y la cotangente inversa son diferenciables para toda x . No obstante, las cuatro funciones trigonométricas restantes no son diferenciables en $x = -1$ o $x = 1$. Centraremos la atención en obtener las fórmulas de las derivadas del seno inverso, la tangente inversa y la secante inversa, y la obtención de las otras se dejan como ejercicios.

Seno inverso: $y = \sin^{-1} x$ si y sólo si $x = \sin y$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. En consecuencia, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\sin y \quad \text{proporciona} \quad 1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

y así
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \quad (6)$$

Para la restricción dada sobre la variable y , $\cos y \geq 0$ y así $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Al sustituir esta cantidad en (6), hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (7)$$

Como habíamos pronosticado, observe que (7) no está definida en $x = -1$ o $x = 1$. La función seno inverso o arcosen es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Tangente inversa: $y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\tan y \quad \text{proporciona} \quad 1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

o bien,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}. \quad (8)$$

Debido a la identidad $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, (8) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (9)$$

Secante inversa: Para $|x| > 1$ y $0 \leq y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \leq \pi$,

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y.$$

Al diferenciar implícitamente la última ecuación obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \quad (10)$$

Debido a las restricciones sobre y , tenemos $\tan y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$, $|x| > 1$. Por tanto, (10) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (11)$$

Es posible deshacernos del signo $\pm$ en (11) al observar en la figura 1.5.17b) que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es positiva para $x < -1$ y positiva para $x > 1$. Así, (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1 \\ \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1. \end{cases} \quad (12)$$

El resultado en (12) puede volver a escribirse en forma más breve usando el símbolo de valor absoluto:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (13)$$

La derivada de la composición de una función trigonométrica inversa con una función diferenciable $u = g(x)$ se obtiene a partir de la regla de la cadena.

Teorema 3.7.5 Funciones trigonométricas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}. \quad (16)$$

En las fórmulas en (14) debe tenerse $|u| < 1$, mientras que en las fórmulas en (16) debe tenerse $|u| > 1$.

EJEMPLO 4 Derivada del seno inversoDiferencie $y = \sin^{-1} 5x$.**Solución** Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} 5x = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$$

EJEMPLO 5 Derivada de la tangente inversaDiferencie $y = \tan^{-1} \sqrt{2x + 1}$.**Solución** Con $u = \sqrt{2x + 1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + (\sqrt{2x + 1})^2} \cdot \frac{d}{dx} (2x + 1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{1 + (2x + 1)} \cdot \frac{1}{2} (2x + 1)^{-1/2} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{(2x + 2)\sqrt{2x + 1}}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Derivada de la secante inversaDiferencie $y = \sec^{-1} x^2$.**Solución** Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{|x^2| \sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 3.7.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$.

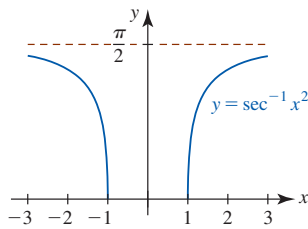


FIGURA 3.7.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 7 Recta tangenteEncuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.**Solución** Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2 \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) + 2x \cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones f y f' en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$$

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de f es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 3.7.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar.

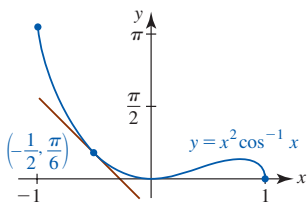


FIGURA 3.7.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Ejercicios 3.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, sin graficar determine si la función f dada tiene una inversa.

1. $f(x) = 10x^3 + 8x + 12$
2. $f(x) = -7x^5 - 6x^3 - 2x + 17$
3. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2$

En los problemas 5 y 6, use (3) para encontrar la derivada de f^{-1} en el punto indicado.

5. $f(x) = 2x^3 + 8$; $(f(\frac{1}{2}), \frac{1}{2})$
6. $f(x) = -x^3 - 3x + 7$; $(f(-1), -1)$

En los problemas 7 y 8, encuentre f^{-1} . Use (3) para encontrar $(f^{-1})'$ y luego compruebe este resultado por diferenciación directa de f^{-1} .

7. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$
8. $f(x) = (5x+7)^3$

En los problemas 9-12, sin encontrar la inversa, encuentre, en el valor indicado de x , el punto correspondiente sobre la gráfica de f^{-1} . Luego use (4) para encontrar una ecuación de la recta tangente en este punto.

9. $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 7$; $x = 3$
10. $y = \frac{2x+1}{4x-1}$; $x = 0$
11. $y = (x^5 + 1)^3$; $x = 1$
12. $y = 8 - 6\sqrt[3]{x+2}$; $x = -3$

En los problemas 13-32, encuentre la derivada de la función dada.

13. $y = \sin^{-1}(5x-1)$
14. $y = \cos^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)$
15. $y = 4 \cot^{-1} \frac{x}{2}$
16. $y = 2x - 10 \sec^{-1} 5x$
17. $y = 2\sqrt{x} \tan^{-1} \sqrt{x}$
18. $y = (\tan^{-1} x)(\cot^{-1} x)$
19. $y = \frac{\sin^{-1} 2x}{\cos^{-1} 2x}$
20. $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sin x}$
21. $y = \frac{1}{\tan^{-1} x^2}$
22. $y = \frac{\sec^{-1} x}{x}$
23. $y = 2 \sin^{-1} x + x \cos^{-1} x$

$$24. y = \cot^{-1} x - \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$25. y = \left(x^2 - 9 \tan^{-1} \frac{x}{3}\right)^3 \quad 26. y = \sqrt{x - \cos^{-1}(x+1)}$$

$$27. F(t) = \arctan\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \quad 28. g(t) = \arccos \sqrt{3t+1}$$

$$29. f(x) = \arcsen(\cos 4x) \quad 30. f(x) = \arctan\left(\frac{\sin x}{2}\right)$$

$$31. f(x) = \tan(\sin^{-1} x^2) \quad 32. f(x) = \cos(x \sin^{-1} x)$$

En los problemas 33 y 34, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx .

$$33. \tan^{-1} y = x^2 + y^2 \quad 34. \sin^{-1} y - \cos^{-1} x = 1$$

En los problemas 35 y 36, demuestre que $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

35. $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$
36. $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$.

En los problemas 37 y 38, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

37. $y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$; $x = 1$
38. $y = (\cos^{-1} x)^2$; $x = 1/\sqrt{2}$

En los problemas 39 y 40, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x .

39. $f(x) = x \tan^{-1} x$; $x = 1$
40. $f(x) = \sin^{-1}(x-1)$; $x = \frac{1}{2}$

41. Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 5 - 2 \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = \sqrt{3}x + 1$.
42. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \arctan x$ cuya pendiente es $\frac{1}{4}$.

Piense en ello

43. Si f y $(f^{-1})'$ son diferenciables, use (3) para encontrar una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

3.8 Funciones exponenciales

■ Introducción En la sección 1.6 vimos que la función exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, está definida para todos los números reales; es decir, el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Al revisar la figura 1.6.2 observamos que f es continua en todas partes. Resulta que una función exponencial también es diferenciable en todas partes. En esta sección desarrollaremos la derivada de $f(x) = b^x$.

■ **Derivada de una función exponencial** Para encontrar la derivada de una función exponencial $f(x) = b^x$ usamos la definición de la derivada proporcionada en (2) de la definición 3.1.1. Primero calculamos el cociente diferencial

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

en tres pasos. Para la función exponencial $f(x) = b^x$, tenemos

$$\begin{aligned} i) \quad f(x+h) &= b^{x+h} = b^x b^h && \leftarrow \text{leyes de los exponentes} \\ ii) \quad f(x+h) - f(x) &= b^{x+h} - b^x = b^x b^h - b^x = b^x(b^h - 1) && \leftarrow \text{leyes de los exponentes y factorización} \\ iii) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

En el cuarto paso, el paso de cálculo, hacemos $h \rightarrow 0$ pero en forma semejante a las derivadas de $\sin x$ y $\cos x$ en la sección 3.4, no hay forma evidente de cancelar la h en el cociente diferencial iii). No obstante, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}. \quad (2)$$

Debido a que b^x no depende de la variable h , (2) puede escribirse como

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}. \quad (3)$$

A continuación se presentan algunos resultados sorprendentes. Puede demostrarse que el límite en (3),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}, \quad (4)$$

existe para toda base positiva b . No obstante, como sería de esperar, para cada base b obtenemos una respuesta diferente. Así, por conveniencia, la expresión en (4) se denotará por el símbolo $m(b)$. Entonces, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = b^x m(b). \quad (5)$$

Se solicita al lector aproximar el valor de $m(b)$ en los cuatro casos $b = 1.5, 2, 3$ y 5 en los problemas 57-60 de los ejercicios 3.8. Por ejemplo, puede demostrar que $m(10) \approx 2.302585\dots$ y como una consecuencia, si $f(x) = 10^x$, entonces

$$f'(x) = (2.302585\dots)10^x. \quad (6)$$

Es posible que comprenda mejor lo que evalúa $m(b)$ al evaluar (5) en $x = 0$. Puesto que $b^0 = 1$, tenemos $f'(0) = m(b)$. En otras palabras, $m(b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = b^x$ en $x = 0$; es decir, en la intersección y $(0, 1)$. Vea la FIGURA 3.8.1. Dado que es necesario calcular una $m(b)$ diferente para cada base b , y que es probable que $m(b)$ sea un número “espantoso” como en (6), con el tiempo la siguiente pregunta surge de manera natural:

- ¿Hay alguna base b para la cual $m(b) = 1$? (7)

■ **Derivada de la función exponencial natural** Para contestar la pregunta planteada en (7), es necesario volver a las definiciones de e proporcionadas en la sección 1.6. En específico, (4) de la sección 1.6,

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \quad (8)$$

constituye el mecanismo para responder la pregunta planteada en (7). Sabemos que, a nivel intuitivo, la igualdad en (8) significa que cuando h se aproxima cada vez más a 0 entonces $(1+h)^{1/h}$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número e . Así, para valores de h cercanos a 0, tenemos la aproximación $(1+h)^{1/h} \approx e$ y así se concluye que $1+h \approx e^h$. La última expresión escrita en la forma

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1 \quad (9)$$

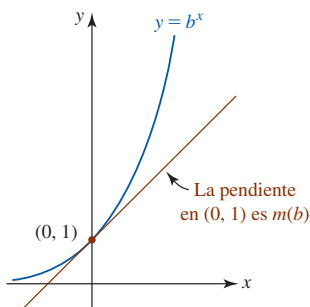


FIGURA 3.8.1 Encuentre una base b de modo que la pendiente $m(b)$ de la recta tangente en $(0, 1)$ sea 1

sugiere que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (10)$$

Puesto que el miembro izquierdo de (10) es $m(e)$, tenemos la respuesta a la pregunta planteada en (7):

- La base b para la cual $m(b) = 1$ es $b = e$. (11)

Además, por (3) hemos descubierto un resultado maravillosamente simple. La derivada de $f(x) = e^x$ es e^x . En resumen,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (12)$$

El resultado en (12) es el mismo que $f'(x) = f(x)$. Además, si $c \neq 0$ es una constante, entonces la otra función diferente de cero f en cálculo cuya derivada es igual a sí misma es $y = ce^x$ puesto que por la regla del múltiplo constante de la sección 3.2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} ce^x = c \frac{d}{dx} e^x = ce^x = y.$$

■ **Otro repaso a la derivada de $f(x) = b^x$** En el análisis precedente vimos que $m(e) = 1$, pero se dejó sin contestar la pregunta de si $m(b)$ tiene un valor exacto para todo $b > 0$. Tiene más. A partir de la identidad $e^{\ln b} = b$, $b > 0$, podemos escribir cualquier función exponencial $f(x) = b^x$ en términos de la base e :

$$f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x(\ln b)}.$$

Por la regla de la cadena, la derivada de b^x es

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x(\ln b)} = e^{x(\ln b)} \cdot \frac{d}{dx} x(\ln b) = e^{x(\ln b)} (\ln b).$$

Volviendo a $b^x = e^{x(\ln b)}$, la línea precedente muestra que

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x (\ln b). \quad (13)$$

Al relacionar el resultado en (5) con el de (13) concluimos que $m(b) = \ln b$. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = 10^x$ es $f'(x) = 10^x (\ln 10)$. Debido a que $\ln 10 \approx 2.302585$ observamos que $f'(x) = 10^x (\ln 10)$ es lo mismo que el resultado en (6).

A continuación se proporcionan las formas de los resultados de la regla de la cadena en (12) y (13).

Teorema 3.8.1 Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}, \quad (14)$$

$$y \quad \frac{d}{dx} b^u = b^u (\ln b) \frac{du}{dx}. \quad (15)$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

a) $y = e^{-x}$ b) $y = e^{1/x^3}$ c) $y = 8^{5x}$.

Solución

a) Con $u = -x$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx} (-x) = e^{-x} (-1) = -e^{-x}.$$

b) Al volver a escribir $u = 1/x^3$ como $u = x^{-3}$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^{-3} = e^{1/x^3} (-3x^{-4}) = -3 \frac{e^{1/x^3}}{x^4}.$$

c) Con $u = 5x$, por (15) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 8^{5x} \cdot (\ln 8) \cdot \frac{d}{dx} 5x = 5 \cdot 8^{5x} (\ln 8).$$

EJEMPLO 2 Reglas del producto y de la cadena

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = 3x^2 e^{-x^2}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se usa la regla del producto junto con (14):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \frac{d}{dx} e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx} 3x^2 \\ &= 3x^2(-2xe^{-x^2}) + 6xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(-6x^3 + 6x). \end{aligned}$$

Puesto que $e^{-x^2} \neq 0$ para todos los números reales x , $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $-6x^3 + 6x = 0$. Al factorizar la última ecuación obtenemos $x(x+1)(x-1) = 0$ y así $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Así, los puntos correspondientes sobre la gráfica de la función dada son $(0, 0)$, $(-1, 3e^{-1})$ y $(1, 3e^{-1})$. La gráfica de $y = 3x^2 e^{-x^2}$ junto con las tres rectas tangentes (en rojo) se muestran en la FIGURA 3.8.2.

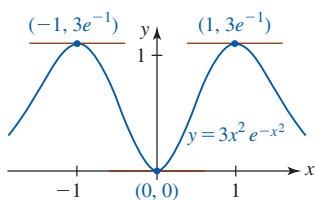


FIGURA 3.8.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

En el ejemplo siguiente se recuerda el hecho de que una ecuación exponencial puede escribirse en una forma logarítmica equivalente. En particular, se usa (9) de la sección 1.6 en la forma

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \quad (16)$$

EJEMPLO 3 Recta tangente paralela a una recta

Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$.

Solución Sea $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 2e^{-x_0})$ el punto desconocido sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$. Entonces, a partir de la derivada $f'(x) = -2e^{-x}$, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'(x_0) = -2e^{-x_0}$. Puesto que $y = -4x - 2$ y la recta tangente es paralela en ese punto, las pendientes son iguales:

$$f'(x_0) = -4 \quad \text{o bien,} \quad -2e^{-x_0} = -4 \quad \text{o bien,} \quad e^{-x_0} = 2.$$

A partir de (16), la última ecuación proporciona $-x_0 = \ln 2$ o $x_0 = -\ln 2$. Por tanto, el punto es $(-\ln 2, 2e^{\ln 2})$. Puesto que $e^{\ln 2} = 2$, el punto es $(-\ln 2, 4)$. En la FIGURA 3.8.3, la línea proporcionada se muestra en verde y la recta tangente en rojo.

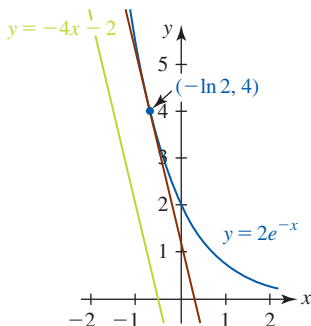


FIGURA 3.8.3 Gráfica de la función y rectas en el ejemplo 3

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

Los números e y π son **trascendentes**, así como irracionales. Un número trascendente es un número que *no* es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional pero no trascendente, puesto que es una raíz de la ecuación polinomial $x^2 - 2 = 0$. El hecho de que el número e sea trascendente fue demostrado por el matemático francés **Charles Hermite** (1822-1901) en 1873, mientras que el matemático alemán **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) demostró nueve años después que π es trascendente. Esta última demostración evidenció de manera concluyente que resolver la “cuadratura del círculo” con regla y compás era imposible.

Ejercicios 3.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-26, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = e^{-x}$
2. $y = e^{2x+3}$
3. $y = e^{\sqrt{x}}$
4. $y = e^{\sin 10x}$
5. $y = 5^{2x}$
6. $y = 10^{-3x^2}$
7. $y = x^3 e^{4x}$
8. $y = e^{-x} \sin \pi x$
9. $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$
10. $f(x) = \frac{xe^x}{x + e^x}$
11. $y = \sqrt{1 + e^{-5x}}$
12. $y = (e^{2x} - e^{-2x})^{10}$
13. $y = \frac{2}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$
14. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
15. $y = \frac{e^{7x}}{e^{-x}}$
16. $y = e^{2x} e^{3x} e^{4x}$
17. $y = (e^3)^{x-1}$
18. $y = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{100}$
19. $f(x) = e^{x^{1/3}} + (e^x)^{1/3}$
20. $f(x) = (2x + 1)^3 e^{-(1-x)^4}$
21. $f(x) = e^{-x} \tan e^x$
22. $f(x) = \sec e^{2x}$
23. $f(x) = e^{x\sqrt{x^2+1}}$
24. $y = e^{\frac{x+2}{x-2}}$
25. $y = e^{e^{-x^2}}$
26. $y = e^x + e^{x+e^{-x}}$

27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (e^x + 1)^2$ en $x = 0$.
28. Encuentre la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$ en $x = 0$.
29. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = e^x$ donde la recta tangente es paralela a $3x - y = 7$.
30. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = 5x + e^{2x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = 6x$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar y obtenga la gráfica de cada función.

31. $f(x) = e^{-x} \sin x$
32. $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada de orden superior indicada.

33. $y = e^{x^2}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3}$
34. $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$
35. $y = \sin e^{2x}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$
36. $y = x^2 e^x; \quad \frac{d^4 y}{dx^4}$

En los problemas 37 y 38, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

37. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}; \quad y'' + y' - 6y = 0$
38. $y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x; \quad y'' + 2y' + 5y = 0$

39. Si C y k son constantes reales, demuestre que la función $y = Ce^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y' = ky$.

40. Use el problema 39 para encontrar una función que satisfaga las condiciones dadas.

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= -0.01y \quad y(0) = 100 \\ \text{b) } \frac{dP}{dt} - 0.15P &= 0 \quad y(0) = P_0 \end{aligned}$$

En los problemas 41-46, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx .

41. $y = e^{x+y}$
42. $xy = e^y$
43. $y = \cos e^{xy}$
44. $y = e^{(x+y)^2}$
45. $x + y^2 = e^{x/y}$
46. $e^x + e^y = y$

47. a) Trace la gráfica de $f(x) = e^{-|x|}$.
b) Encuentre $f'(x)$.
c) Trace la gráfica de f' .
d) ¿La función es diferenciable en $x = 0$?
48. a) Demuestre que la función $f(x) = e^{\cos x}$ es periódica con periodo 2π .
b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal.
c) Trace la gráfica de f .

Aplicaciones

49. La función logística

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}},$$

donde a y b son constantes positivas, a menudo sirve como modelo matemático para una población en crecimiento pero limitada.

- a) Demuestre que $P(t)$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$.
- b) La gráfica de $P(t)$ se denomina **curva logística**, donde $P(0) = P_0$ es la población inicial. Considere el caso donde $a = 2$, $b = 1$ y $P_0 = 1$. Encuentre asíntotas horizontales para la gráfica de $P(t)$ al determinar los límites $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t)$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.
- c) Grafique $P(t)$.
- d) Encuentre el o los valores de t para los cuales $P''(t) = 0$.
50. El **modelo matemático de Jents** (1937) constituye una de las fórmulas empíricas más precisas para pronosticar la estatura h (en centímetros) en términos de la edad t (en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años):
$$h(t) = 79.04 + 6.39t - e^{3.26 - 0.99t}.$$
 - a) ¿Qué estatura pronostica este modelo para un niño de 2 años?
 - b) ¿Cuán rápido crece en estatura un niño de 2 años?
 - c) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de h sobre el intervalo $[\frac{1}{4}, 6]$.
 - d) Use la gráfica del inciso c) para estimar la edad de un niño en edad preescolar que mide 100 cm de estatura.

≡ Piense en ello

51. Demuestre que la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = x_0$ está una unidad a la derecha de x_0 .
52. ¿Cómo está relacionada la recta tangente a la gráfica de $y = e^x$ en $x = 0$ con la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = 0$?
53. Explique por qué sobre la gráfica de $y = e^x$ no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a $2x + y = 1$.
54. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = e^x$ que pasan por el origen.

En los problemas 55 y 56, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

55. $\frac{d^n}{dx^n} \sqrt[n]{e^x}$

56. $\frac{d^n}{dx^n} x e^{-x}$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 57-60, use una calculadora para estimar el valor $m(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ para $b = 1.5$, $b = 2$, $b = 3$ y $b = 5$ al llenar la tabla siguiente.

57.

$h \rightarrow 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{(1.5)^h - 1}{h}$						

58.

$h \rightarrow 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{2^h - 1}{h}$						

59.

$h \rightarrow 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{3^h - 1}{h}$						

60.

$h \rightarrow 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{5^h - 1}{h}$						

61. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable para toda x . Use la definición de la derivada para calcular $f'(0)$.

3.9 Funciones logarítmicas

■ Introducción Debido a que la inversa de la función exponencial $y = b^x$ es la función logarítmica $y = \log_b x$, la derivada de la segunda función puede encontrarse de tres maneras: (3) de la sección 3.7, diferenciación implícita o a partir de la definición fundamental (2) en la sección 3.1. Demostraremos los dos últimos métodos.

■ Derivada de la función logaritmo natural Por (9) de la sección 1.6 sabemos que $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$. Por diferenciación implícita, la regla de la cadena y (14) de la sección 3.8,

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = e^y \frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Al sustituir e^y por x , obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

■ Derivada de $f(x) = \log_b x$ Precisamente de la misma manera en que se obtuvo (1), la derivada de $y = \log_b x$ puede obtenerse al diferenciar implícitamente $x = b^y$.

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} b^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = b^y (\ln b) \frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y (\ln b)}.$$

Así como en las funciones trigonométricas inversas, la derivada de la inversa de la función exponencial natural es una función algebraica.

Al sustituir b^y por x , obtenemos

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}. \quad (2)$$

Puesto que $\ln e = 1$, (2) se vuelve (1) cuando $b = e$.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $f(x) = x^2 \ln x$.

Solución Por la regla del producto y (1) tenemos

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx} \ln x + (\ln x) \cdot \frac{d}{dx} x^2 = x^2 \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot 2x$$

o bien,

$$f'(x) = x + 2x \ln x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \log_{10} x$ en $x = 2$.

Solución Por (2), la derivada de $y = \log_{10} x$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 10)}.$$

Con ayuda de una calculadora, la pendiente de la recta tangente en $(2, \log_{10} 2)$ es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{1}{2 \ln 10} \approx 0.2171. \quad \blacksquare$$

Los resultados en (1) y (2) se resumen en forma de regla de la cadena.

Teorema 3.9.1 Derivadas de funciones logarítmicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

y

$$\frac{d}{dx} \log_b u = \frac{1}{u(\ln b)} \frac{du}{dx}. \quad (4)$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Diferencie

$$a) f(x) = \ln(\cos x) \quad y \quad b) y = \ln(\ln x).$$

Solución

a) Por (3), con $u = \cos x$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \cos x = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

o bien,

$$f'(x) = -\tan x.$$

b) Al usar de nuevo (3), ahora con $u = \ln x$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Diferencie $f(x) = \ln x^3$.

Solución Debido a que x^3 debe ser positiva, se entiende que $x > 0$. Así, por (3), con $u = x^3$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^3 = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}.$$

Solución alterna: Por *iii*) de las leyes de los logaritmos (teorema 1.6.1), $\ln N^c = c \ln N$ y así es posible volver a escribir $y = \ln x^3$ como $y = 3 \ln x$ y después diferenciar:

$$f(x) = 3 \frac{d}{dx} \ln x = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}. \quad \blacksquare$$

Aunque el dominio del logaritmo natural $y = \ln x$ es el conjunto $(0, \infty)$, el dominio de $y = \ln|x|$ se extiende al conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Para los números en este último dominio,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \text{para } x > 0, \quad \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \text{para } x < 0, \quad \frac{d}{dx} \ln(-x) &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Las derivadas en (5) prueban que para $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}. \quad (6)$$

Así, el resultado en (6) se generaliza por la regla de la cadena. Para una función diferenciable $u = g(x)$, $u \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \quad (7)$$

EJEMPLO 5 Uso de (6)

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -2$ y $x = 2$.

Solución Puesto que (6) proporciona $dy/dx = 1/x$, tenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Debido a que $\ln|-2| = \ln 2$, (8) proporciona, respectivamente, las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(-2, \ln 2)$ y $(2, \ln 2)$. Observe en la FIGURA 3.9.1 que la gráfica de $y = \ln|x|$ es simétrica con respecto al eje y ; las rectas tangentes se muestran en rojo. $\blacksquare$

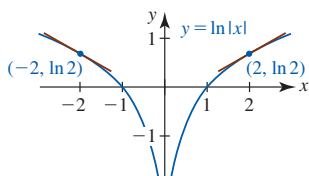


FIGURA 3.9.1 Gráficas de las rectas tangentes y función en el ejemplo 5

EJEMPLO 6 Uso de (7)

Diferencie

$$\text{a) } y = \ln(2x - 3) \quad \text{y} \quad \text{b) } y = \ln|2x - 3|.$$

Solución

a) Para $2x - 3 > 0$, o $x > \frac{3}{2}$, por (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - 3} \cdot \frac{d}{dx} (2x - 3) = \frac{2}{2x - 3}. \quad (9)$$

b) Para $2x - 3 \neq 0$, o $x \neq \frac{3}{2}$, por (7) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - 3} \cdot \frac{d}{dx} (2x - 3) = \frac{2}{2x - 3}. \quad (10)$$

Aunque (9) y (10) *parecen* iguales, definitivamente no se trata de la misma función. La diferencia consiste simplemente en que el dominio de la derivada en (9) es el intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$, mientras el dominio de la derivada en (10) es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{3}{2}$. ■

EJEMPLO 7 Una distinción

Las funciones $f(x) = \ln x^4$ y $g(x) = 4 \ln x$ no son las mismas. Puesto que $x^4 > 0$ para toda $x \neq 0$, el dominio de f es el conjunto de números reales excepto $x = 0$. El dominio de g es el intervalo $(0, \infty)$. Así,

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{mientras} \quad g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Simplificar antes de diferenciar

Diferencie $y = \ln \frac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$.

Solución Al usar las leyes de los logaritmos proporcionadas en la sección 1.6 para $x > 0$, podemos volver a escribir el miembro derecho de la función dada como

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(M/N) = \ln M - \ln N \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(MN) = \ln M + \ln N \\ &= \frac{1}{2} \ln x + 4 \ln(2x+7) - 2 \ln(3x^2+1) && \leftarrow \ln N^c = c \ln N \end{aligned}$$

de modo que
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{2x+7} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{3x^2+1} \cdot 6x$$

o bien,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1}. \quad \blacksquare$$

■ **Diferenciación logarítmica** La diferenciación de una función complicada $y = f(x)$ que contiene productos, cocientes y potencias puede simplificarse por medio de una técnica denominada **diferenciación logarítmica**. El procedimiento consta en tres pasos.

Directrices para diferenciación logarítmica

- Tome el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$. Use las propiedades generales de los logaritmos para simplificar tanto como sea posible el miembro derecho de $\ln y = \ln f(x)$.
- Diferencie implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

- Puesto que la derivada del miembro izquierdo es $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$, multiplique ambos miembros por y y sustituya y por $f(x)$.

Ahora ya sabe cómo diferenciar cualquier función del tipo

$$y = (\text{constante})^{\text{variable}} \quad \text{y} \quad y = (\text{variable})^{\text{constante}}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} \pi^x = \pi^x (\ln \pi) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} x^\pi = \pi x^{\pi-1}.$$

Hay funciones donde tanto la base como el exponente son variables:

$$y = (\text{variable})^{\text{variable}}. \quad (11)$$

Por ejemplo, $f(x) = (1 + 1/x)^x$ es una función del tipo descrito en (11). Recuerde que en la sección 1.6 vimos que $f(x) = (1 + 1/x)^x$ desempeñaba un papel importante en la definición del número e . A pesar de que no se desarrollará una fórmula general para la derivada de funciones del tipo dado en (11), es posible obtener sus derivadas por medio del proceso de diferenciación logarítmica. El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar dy/dx .

EJEMPLO 9 Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Solución Al tomar el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación dada y simplificar obtenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x. \quad \leftarrow \text{propiedad iii) de las leyes de los logaritmos. Sección 1.6}$$

Luego se diferencia implícitamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \ln x && \leftarrow \text{regla del producto} \\ \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right] && \leftarrow \text{ahora se sustituye } y \text{ por } x^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (2 + \ln x). && \leftarrow \text{denominador común y leyes de los exponentes} \end{aligned}$$

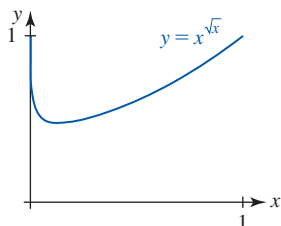


FIGURA 3.9.2 Gráfica de la función en el ejemplo 9

La gráfica de $y = x^{\sqrt{x}}$ en la FIGURA 3.9.2 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. Observe que la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto donde $dy/dx = 0$. Por tanto, la coordenada x del punto de tangencia horizontal se determina a partir de $2 + \ln x = 0$ o $\ln x = -2$. La última ecuación proporciona $x = e^{-2}$. ■

EJEMPLO 10 Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

Solución Observe que la función dada no contiene logaritmos. Entonces podemos encontrar dy/dx usando una aplicación ordinaria de las reglas del cociente, del producto y de potencias. Este procedimiento, que es tedioso, puede evitarse al tomar primero el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada, simplificar como se hizo en el ejemplo con las leyes de los logaritmos y luego diferenciar implícitamente. Se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada y se simplifica el miembro derecho:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}} \\ &= \ln \sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln(8x + 3)^5 - \ln(2x^2 + 7)^{2/3} \\ &= \frac{1}{3} \ln(x^4 + 6x^2) + 5 \ln(8x + 3) - \frac{2}{3} \ln(2x^2 + 7). \end{aligned}$$

Al diferenciar la última línea con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^4 + 6x^2} \cdot (4x^3 + 12x) + 5 \cdot \frac{1}{8x + 3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2x^2 + 7} \cdot 4x \\ \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)} \right] && \leftarrow \text{ambos lados se multiplican por } y \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}} \left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)} \right]. && \leftarrow \text{y se sustituye por la expresión original} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ **Posdata: Otro repaso a la derivada de $f(x) = \log_b x$** Como se afirmó en la introducción de esta sección, podemos obtener la derivada de $f(x) = \log_b x$ al usar la definición de la derivada. Por (2) de la sección 3.1,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_b \frac{x+h}{x} &< \text{álgebra y las leyes de los logaritmos} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_b \left(1 + \frac{h}{x}\right) &< \text{división de } x+h \text{ entre } x \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_b \left(1 + \frac{h}{x}\right) &< \text{multiplicación por } x/x = 1 \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} &< \text{las leyes de los logaritmos} \\
&= \frac{1}{x} \log_b \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right]. \tag{12}
\end{aligned}$$

El último paso, tomar el límite dentro de la función logarítmica, se justifica al invocar la continuidad de la función sobre $(0, \infty)$ y suponer que el límite entre corchetes existe. Si en la última ecuación se hace $t = h/x$, entonces, puesto que x es fija, $h \rightarrow 0$ implica $t \rightarrow 0$. En consecuencia, por (4) de la sección 1.6 vemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Por tanto, el resultado en (12) muestra que

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x} \log_b e. \tag{13}$$

Una vez que se hace la elección “natural” de $b = e$, (13) se vuelve (1) puesto que $\log_e e = \ln e = 1$.

◀ Quienes poseen un ojo agudo y gran memoria han observado que (13) no es lo mismo que (2). Los resultados son equivalentes, puesto que por las fórmulas de cambio de base para logaritmos tenemos que $\log_b e = \ln e / \ln b = 1 / \ln b$.

■ **Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Finalmente, ya es posible demostrar la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, (3) de la sección 3.2, para todos los números reales exponentes n . Nuestra demostración usa el siguiente hecho: para $x > 0$, x^n se define para todos los números reales n . Luego, debido a la identidad $x = e^{\ln x}$ podemos escribir

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}.$$

Así,
$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} e^{n \ln x} = e^{n \ln x} \frac{d}{dx} (n \ln x) = \frac{n}{x} e^{n \ln x}.$$

Al sustituir $e^{n \ln x} = x^n$ en el último resultado se completa la demostración para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}.$$

La última fórmula de derivada también es válida para $x < 0$ cuando $n = p/q$ es un número racional y q es un entero impar.

Ejercicios 3.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-24, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = 10 \ln x$

2. $y = \ln 10x$

3. $y = \ln x^{1/2}$

4. $y = (\ln x)^{1/2}$

5. $y = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$

6. $y = \ln(x^2 + 1)^{20}$

7. $y = x^2 \ln x^3$

8. $y = x - \ln|5x + 1|$

9. $y = \frac{\ln x}{x}$

10. $y = x(\ln x)^2$

11. $y = \ln \frac{x}{x+1}$

12. $y = \frac{\ln 4x}{\ln 2x}$

13. $y = -\ln|\cos x|$

14. $y = \frac{1}{3} \ln|\sin 3x|$

15. $y = \frac{1}{\ln x}$

16. $y = \ln \frac{1}{x}$

17. $f(x) = \ln(x \ln x)$

18. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

19. $g(x) = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$

20. $w(\theta) = \theta \sin(\ln 5\theta)$

21. $H(t) = \ln t^2(3t^2 + 6)$

22. $G(t) = \ln \sqrt{5t+1}(t^3 + 4)^6$

23. $f(x) = \ln \frac{(x+1)(x+2)}{x+3}$

24. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{(3x+2)^5}{x^4+7}}$

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = 1$.
26. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$.
27. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(e^{3x} + x)$ en $x = 0$.
28. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(xe^{-x^3})$ en $x = 1$.
29. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de f' en el punto en que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x^2$ es 4.
30. Determine el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ donde la recta tangente es perpendicular a $x + 4y = 1$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

31. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 32. $f(x) = x^2 \ln x$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada indicada y simplifique tanto como pueda.

33. $\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 34. $\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

35. $\frac{d}{dx} \ln(\sec x + \tan x)$ 36. $\frac{d}{dx} \ln(\csc x - \cot x)$

En los problemas 37-40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

37. $y = \ln x$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$ 38. $y = x \ln x$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$

39. $y = (\ln|x|)^2$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 40. $y = \ln(5x - 3)$; $\frac{d^4 y}{dx^4}$

En los problemas 41 y 42, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada para $x > 0$.

41. $y = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1/2} \ln x$; $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$

42. $y = C_1 x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_2 x^{-1} \sin(\sqrt{2} \ln x)$;
 $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los problemas 43-48, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx .

43. $y^2 = \ln xy$ 44. $y = \ln(x + y)$

45. $x + y^2 = \ln \frac{x}{y}$ 46. $y = \ln xy^2$

47. $xy = \ln(x^2 + y^2)$ 48. $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

En los problemas 49-56, use diferenciación logarítmica para encontrar dy/dx .

49. $y = x^{\sec x}$ 50. $y = (\ln|x|)^x$

51. $y = x(x - 1)^x$ 52. $y = \frac{(x^2 + 1)^x}{x^2}$

53. $y = \frac{\sqrt{(2x + 1)(3x + 2)}}{4x + 3}$ 54. $y = \frac{x^{10} \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

55. $y = \frac{(x^3 - 1)^5 (x^4 + 3x^3)^4}{(7x + 5)^9}$ 56. $y = x\sqrt{x + 1} \sqrt[3]{x^2 + 2}$

57. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

58. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln x)^x$ en $x = e$.

En los problemas 59 y 60, encuentre el punto sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar a fin de obtener la gráfica de cada función sobre el intervalo $[0.01, 1]$.

59. $y = x^x$ 60. $y = x^{2x}$

≡ Piense en ello

61. Encuentre las derivadas de
a) $y = \tan x^x$ b) $y = x^x e^{x^x}$ c) $y = x^{x^x}$.

62. Encuentre $d^2 y/dx^2$ para $y = \sqrt{x^x}$.

63. La función $f(x) = \ln|x|$ no es diferenciable sólo en $x = 0$. La función $g(x) = |\ln x|$ no es diferenciable en $x = 0$ ni en otro valor de $x > 0$. ¿Cuál es?

64. Encuentre una manera para calcular $\frac{d}{dx} \log_x e$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

65. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = (\sin x)^{\ln x}$ sobre el intervalo $(0, 5\pi)$.

b) Explique por qué en ciertos intervalos parece que no hay gráfica. Identifique los intervalos.

66. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = |\cos x|^{\cos x}$ sobre el intervalo $[0, 5\pi]$.

b) Determine, por lo menos aproximadamente, los valores de x en el intervalo $[0, 5\pi]$ para los cuales la tangente a la gráfica es horizontal.

67. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 - 12 \ln x$. Luego encuentre al valor *exacto* del menor valor de $f(x)$.

3.10 Funciones hiperbólicas

■ **Introducción** Si alguna vez ha visitado el Arco de San Luis, Missouri, que mide 630 pies de altura, quizá se haya preguntado: ¿cuál es la forma del arco?, y recibido la respuesta críptica: la forma de una catenaria invertida. La palabra *catenaria* proviene de la palabra latina *catena* y significa literalmente “cadena colgante” (los romanos usaban una cadena para suje-

tar a los perros). Es posible demostrar que la forma que asumen un alambre flexible, una cadena, un cable o una cuerda colgantes suspendidos en dos puntos es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{k}{2}(e^{cx} + e^{-cx}) \quad (1)$$

para elecciones idóneas de las constantes c y k . La gráfica de cualquier función de la forma dada en (1) se denomina **catenaria**.

■ **Funciones hiperbólicas** Combinaciones como (1) que implican las funciones exponenciales e^x y e^{-x} ocurren tan a menudo en matemáticas que ameritan definiciones especiales.

Definición 3.10.1 Seno y coseno hiperbólico

Para cualquier número real x , el **seno hiperbólico** de x es

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2)$$

y el **coseno hiperbólico** de x es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (3)$$

Puesto que el dominio de cada una de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$, el dominio de $y = \sinh x$ y $y = \cosh x$ es $(-\infty, \infty)$. Por (2) y (3) de la definición 3.10.1, también resulta evidente que

$$\sinh 0 = 0 \quad \text{y} \quad \cosh 0 = 1.$$

En forma análoga a las funciones trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ que están definidas en términos de $\sin x$ y $\cos x$, las cuatro funciones hiperbólicas adicionales se definen en términos de $\sinh x$ y $\cosh x$.

Definición 3.10.2 Otras funciones hiperbólicas

Para un número real x , la **tangente hiperbólica** de x es

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (4)$$

la **cotangente hiperbólica** de x , $x \neq 0$, es

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad (5)$$

la **secante hiperbólica** de x es

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad (6)$$

la **cosecante hiperbólica** de x , $x \neq 0$, es

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \quad (7)$$

■ **Gráficas de funciones hiperbólicas** Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se proporcionan en la FIGURA 3.10.1. Observe la semejanza de la gráfica en la figura 3.10.1b) y la forma del Arco de San Luis, Missouri, en la foto al principio de esta sección. Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se muestran en la FIGURA 3.10.2. Observe que $x = 0$ es una asíntota vertical de las gráficas de $y = \coth x$ y $y = \operatorname{csch} x$.



El Arco de San Luis, Missouri.

La forma del Arco de San Luis, Missouri, está basada en el modelo matemático

$$y = A - B \cosh(Cx/L).$$

donde $A = 693.8597$, $B = 68.7672$, $L = 299.2239$, $C = 3.0022$, y x y y se miden en pies. Cuando $x = 0$, se obtiene la altura aproximada de 630 pies.

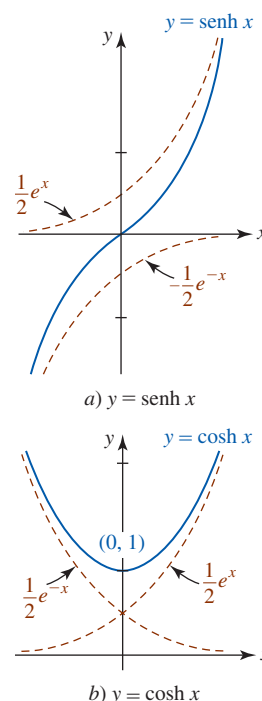


FIGURA 3.10.1 Gráficas del seno y coseno hiperbólicos

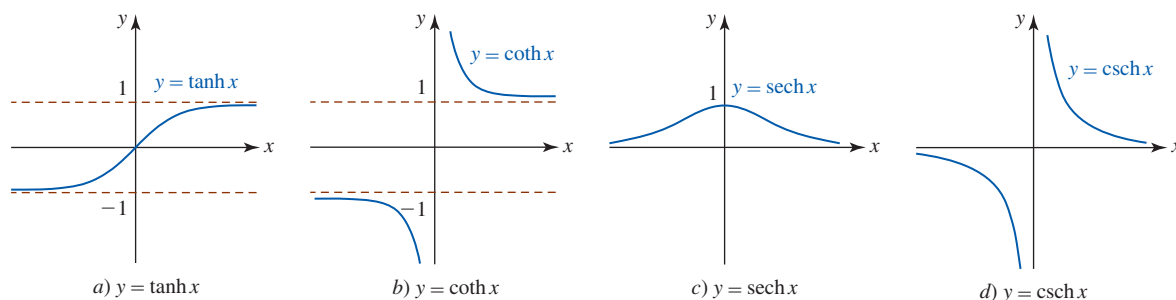


FIGURA 3.10.2 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas

■ **Identities** Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, cuentan con muchas identidades que son semejantes a las de las funciones trigonométricas. Observe que las gráficas en la figura 3.10.1a) y b) son simétricas con respecto al origen y al eje y , respectivamente. En otras palabras, $y = \sinh x$ es una función impar y $y = \cosh x$ es una función par:

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad (8)$$

$$\cosh(-x) = \cosh x. \quad (9)$$

En trigonometría, una identidad fundamental es $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Para funciones hiperbólicas, el análogo de esta identidad es

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (10)$$

Para demostrar (10) recurrimos a (2) y (3) de la definición 3.10.1:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (8) a (10) y otras once identidades se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.1 Identidades hiperbólicas

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (11)$$

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \quad (12)$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (13)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \quad (14)$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (15)$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (16)$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x) \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x) \quad (17)$$

■ **Derivadas de funciones hiperbólicas** Las derivadas de las funciones hiperbólicas se concluyen por (14) de la sección 3.8 y las reglas de diferenciación; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} e^x - \frac{d}{dx} e^{-x} \right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Es decir, $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x. \quad (18)$

En forma semejante, a partir de la definición del coseno hiperbólico en (3) debe resultar evidente que

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x. \quad (19)$$

Para diferenciar, por ejemplo, la tangente hiperbólica, se usan la regla del cociente y la definición que se proporcionó en (4):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{d}{dx} \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{\cosh x \cdot \frac{d}{dx} \sinh x - \sinh x \cdot \frac{d}{dx} \cosh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \leftarrow \text{por (10), esto es igual a 1} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \quad (20)$$

Las derivadas de las seis funciones hiperbólicas en el caso más general se concluyen por la regla de la cadena.

Teorema 3.10.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}. \quad (23)$$

Usted debe tomar nota cuidadosa de la ligera diferencia en los resultados en las ecuaciones (21) a (23) y las fórmulas análogas para las funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{lll} \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x & \text{mientras} & \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \\ \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x & \text{mientras} & \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x. \end{array}$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

$$a) y = \sinh \sqrt{2x+1} \quad b) y = \coth x^3.$$

Solución

a) Por el primer resultado en (21),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cosh \sqrt{2x+1} \cdot \frac{d}{dx} (2x+1)^{1/2} \\ &= \cosh \sqrt{2x+1} \left(\frac{1}{2} (2x+1)^{-1/2} \cdot 2 \right) \\ &= \frac{\cosh \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$

b) Por el segundo resultado en (22),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\operatorname{csch}^2 x^3 \cdot \frac{d}{dx} x^3 \\ &= -\operatorname{csch}^2 x^3 \cdot 3x^2.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Valor de una derivada

Evalúe la derivada de $y = \frac{3x}{4 + \cosh 2x}$ en $x = 0$.

Solución Por la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 + \cosh 2x) \cdot 3 - 3x(\sinh 2x \cdot 2)}{(4 + \cosh 2x)^2}.$$

Debido a que $\sinh 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$, tenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

■ **Funciones hiperbólicas inversas** Al analizar la figura 3.10.1a) observamos que $y = \sinh x$ es una función uno a uno. Es decir, para cualquier número real y en el rango $(-\infty, \infty)$ del seno hiperbólico corresponde sólo un número real x en su dominio $(-\infty, \infty)$. Por tanto, $y = \sinh x$ tiene una función inversa que escribimos $y = \sinh^{-1} x$. Vea la FIGURA 3.10.3a). Así como en el análisis anterior de las funciones trigonométricas inversas en la sección 1.5, esta última notación es equivalente a $x = \sinh y$. A partir de la figura 3.10.2a) también observamos que $y = \tanh x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(-1, 1)$ también es uno a uno y tiene una inversa $y = \tanh^{-1} x$ con dominio $(-1, 1)$ y rango $(-\infty, \infty)$. Vea la figura 3.10.3c). Pero por las figuras 3.10.1b) y 3.10.2c) resulta evidente que $y = \cosh x$ y $y = \operatorname{sech} x$ no son funciones uno a uno, de modo que no tienen funciones inversas a menos que sus dominios se restrinjan en forma conveniente. Al analizar la figura 3.10.1b) observamos que cuando el dominio de $y = \cosh x$ se restringe al intervalo $[0, \infty)$, el rango correspondiente es $[1, \infty)$. Entonces, el dominio de la función inversa $y = \cosh^{-1} x$ es $[1, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. Vea la figura 3.10.3b). Las gráficas de todas las funciones hiperbólicas inversas junto con sus dominios y rangos se resumen en la figura 3.10.3.

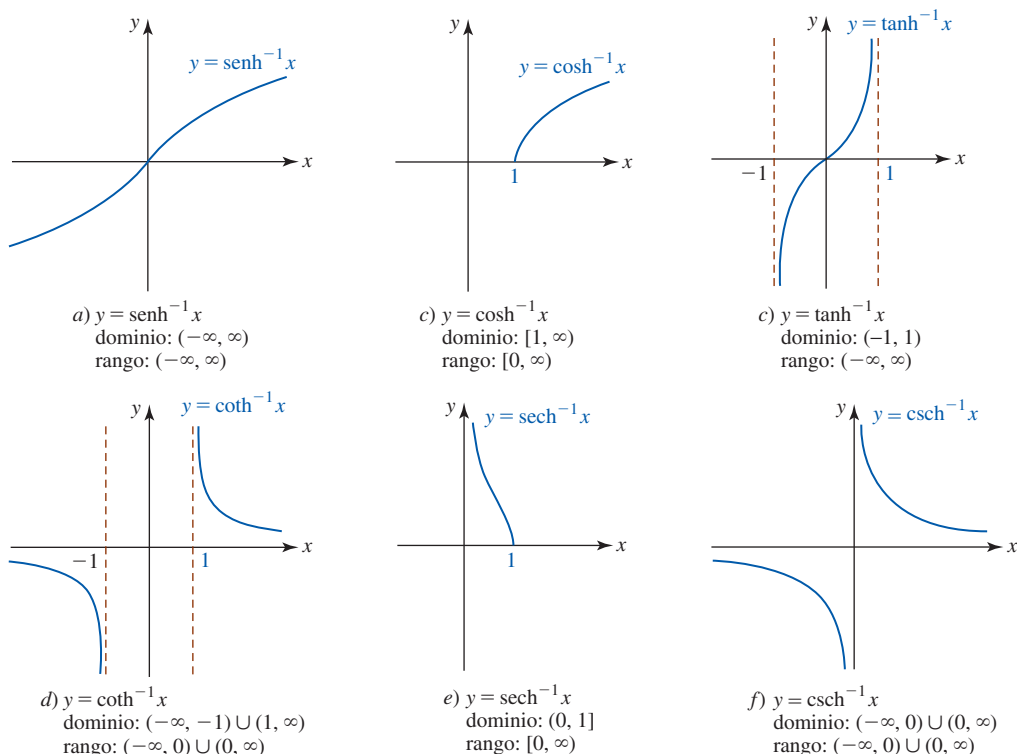


FIGURA 3.10.3 Gráficas de las inversas de las hiperbólicas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

■ **Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos** Debido a que todas las funciones hiperbólicas están definidas en términos de combinaciones de e^x , no debe sorprender el hecho de encontrar que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos del logaritmo natural. Por ejemplo, $y = \sinh^{-1}x$ es equivalente a $x = \sinh y$, de modo que

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{o bien,} \quad 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \quad \text{o bien,} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Debido a que la última ecuación es cuadrática en e^y , la fórmula cuadrática proporciona

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \quad (24)$$

Luego, es necesario rechazar la solución correspondiente al signo menos en (24) porque $e^y > 0$ pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. Así, tenemos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{o bien,} \quad y = \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

En forma semejante, para $y = \tanh^{-1}x$, $|x| < 1$,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

proporciona

$$e^y(1 - x) = (1 + x)e^{-y}$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\text{o bien,} \quad y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Se han demostrado dos resultados del siguiente teorema.

Teorema 3.10.3 Identidades logarítmicas

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1 \quad (25)$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), |x| < 1 \quad \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), |x| > 1 \quad (26)$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1 \quad \operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), x \neq 0 \quad (27)$$

Las identidades anteriores constituyen un medio conveniente para obtener los valores numéricos de una función hiperbólica inversa. Por ejemplo, con ayuda de una calculadora, a partir del primer resultado en (25) en el teorema 3.10.3 vemos que cuando $x = 4$,

$$\sinh^{-1}4 = \ln(4 + \sqrt{17}) \approx 2.0947.$$

■ **Derivadas de funciones hiperbólicas inversas** Para encontrar la derivada de una función hiperbólica inversa es posible proceder de dos formas. Por ejemplo, si

$$y = \sinh^{-1}x \quad \text{entonces} \quad x = \sinh y.$$

Al usar diferenciación implícita es posible escribir

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\sinh y$$

$$1 = \cosh y \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

El resultado anterior puede obtenerse de otra manera. Por el teorema 3.10.3 sabemos que

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

En consecuencia, por la derivada del logaritmo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x \right) \leftarrow \text{por (3) de la sección 3.9} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Esencialmente, se ha demostrado la primera entrada en (28) en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, u > 1, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, |u| < 1, \quad \frac{d}{dx} \coth^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, |u| > 1, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, 0 < u < 1, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}, u \neq 0. \quad (30)$$

EJEMPLO 3 Derivada del coseno hiperbólico inverso

Diferencie $y = \cosh^{-1}(x^2 + 5)$.

Solución Con $u = x^2 + 5$, por la segunda fórmula en (28) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 5)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5) = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 10x^2 + 24}}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Derivada de la tangente hiperbólica inversa

Diferencie $y = \tanh^{-1} 4x$.

Solución Con $u = 4x$ por la primera fórmula en (29) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - (4x)^2} \cdot \frac{d}{dx} 4x = \frac{4}{1 - 16x^2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Reglas del producto y de la cadena

Diferencie $y = e^{x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$.

Solución Por la regla del producto y la primera fórmula en (30) tenemos

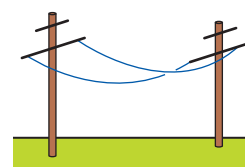
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{x^2} \left(\frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}} \right) + 2xe^{x^2} \operatorname{sech}^{-1} x \quad \begin{array}{l} \text{por la primera fórmula en (30)} \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{por (14) de la sección 3.8} \\ \downarrow \end{array} \\ &= -\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1 - x^2}} + 2xe^{x^2} \operatorname{sech}^{-1} x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}$

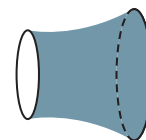
NOTAS DESDE EL AULA

- i) Como se mencionó en la introducción de esta sección, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = k \cosh cx$, k y c constantes, se denomina **catenaria**. La forma que asume un alambre flexible o una cuerda pesada que cuelgan entre dos postes básicamente es la misma que la de la función coseno hiperbólico. Además, si dos anillos circulares se mantienen juntos en forma vertical y no están muy separados entre sí, entonces una película jabonosa estirada entre los anillos asume una superficie con área mínima. La superficie es una porción de una **catenoide**, que es la superficie que obtenemos al hacer girar una catenaria alrededor del eje x . Vea la FIGURA 3.10.4.
- ii) La semejanza entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas va más allá de las fórmulas de derivadas y las identidades básicas. Si t es un ángulo medido en radianes cuyo lado terminal es OP , entonces las coordenadas de P sobre una *circunferencia* unitaria $x^2 + y^2 = 1$ son $(\cos t, \sin t)$. Luego, el área del sector sombreado que se muestra en la FIGURA 3.10.5a) es $A = \frac{1}{2}t$ y así $t = 2A$. De esta forma, las *funciones circulares* $\cos t$ y $\sin t$ pueden considerarse funciones del área A .

Tal vez usted ya sepa que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se denomina *hipérbola*. Debido a que $\cosh t \geq 1$ y $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, se concluye que las coordenadas de un punto P sobre la rama derecha de la hipérbola son $(\cosh t, \sinh t)$. Además, puede demostrarse que el área del sector hiperbólico en la figura 3.10.5b) está relacionado con el número t por $t = 2A$. Por tanto, vemos el origen del nombre de la *función hiperbólica*.

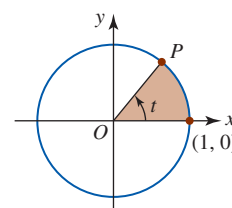


a) cables colgantes

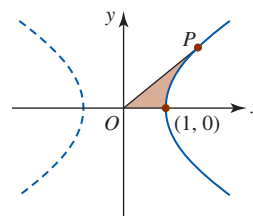


b) película de jabón

FIGURA 3.10.4 Catenaria en a); catenoide en b)



a) sector circular



b) sector hiperbólico

FIGURA 3.10.5 Círculo en a); hipérbola en b)

Ejercicios 3.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

- Si $\sinh x = -\frac{1}{2}$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.
- Si $\cosh x = 3$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

En los problemas 3-26, encuentre la derivada de la función dada.

- $y = \cosh 10x$
- $y = \tanh \sqrt{x}$
- $y = \operatorname{sech}(3x - 1)^2$
- $y = \coth(\cosh 3x)$
- $y = \sinh 2x \cosh 3x$
- $y = x \cosh x^2$
- $y = \sinh^3 x$
- $f(x) = (x - \cosh x)^{2/3}$
- $f(x) = \ln(\cosh 4x)$
- $f(x) = \frac{e^x}{1 + \cosh x}$
- $y = \operatorname{sech} 8x$
- $y = \operatorname{csch} \frac{1}{x}$
- $y = \sinh e^{x^2}$
- $y = \tanh(\sinh x^3)$
- $y = \operatorname{sech} x \coth 4x$
- $y = \frac{\sinh x}{x}$
- $y = \cosh^4 \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{4 + \tanh 6x}$
- $f(x) = (\ln(\operatorname{sech} x))^2$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + \sinh x}$

23. $F(t) = e^{\sinh t}$

25. $g(t) = \frac{\sin t}{1 + \sinh 2t}$

27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sinh 3x$ en $x = 0$.

28. Encuentre de la recta tangente a la gráfica de $y = \cosh x$ en $x = 1$.

En los problemas 29 y 30, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la tangente es horizontal.

29. $f(x) = (x^2 - 2)\cosh x - 2x \sinh x$

30. $f(x) = \cos x \cosh x - \sin x \sinh x$

En los problemas 31 y 32, encuentre d^2y/dx^2 para la función dada.

31. $y = \tanh x$

32. $y = \operatorname{sech} x$

En los problemas 33 y 34, C_1, C_2, C_3, C_4 y k son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

33. $y = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx; \quad y'' - k^2y = 0$

34. $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \cosh kx + C_4 \sinh kx; \quad y^{(4)} - k^4y = 0$

En los problemas 35-48, encuentre la derivada de la función dada.

35. $y = \sinh^{-1} 3x$ 36. $y = \cosh^{-1} \frac{x}{2}$
 37. $y = \tanh^{-1}(1 - x^2)$ 38. $y = \coth^{-1} \frac{1}{x}$
 39. $y = \coth^{-1}(\csc x)$ 40. $y = \sinh^{-1}(\sin x)$
 41. $y = x \sinh^{-1} x^3$ 42. $y = x^2 \operatorname{csch}^{-1} x$
 43. $y = \frac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x}$ 44. $y = \frac{\coth^{-1} e^{2x}}{e^{2x}}$
 45. $y = \ln(\operatorname{sech}^{-1} x)$ 46. $y = x \tanh^{-1} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$
 47. $y = (\cosh^{-1} 6x)^{1/2}$ 48. $y = \frac{1}{(\tanh^{-1} 2x)^3}$

≡ Aplicaciones

49. a) Suponga que k , m y g son constantes reales. Demuestre que la función

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t\right)$$

satisface la ecuación diferencial $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$.

- b) La función v representa la velocidad de una masa m que cae cuando la resistencia del aire se considera proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Encuentre la **velocidad terminal** o limitante $v_{\text{ter}} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ de la masa.
 c) Suponga que un paracaidista de 80 kg retrasa la apertura del paracaídas hasta que alcanza la velocidad terminal. Determine la velocidad terminal si se sabe que $k = 0.25 \text{ kg/m}$.
 50. Una mujer, M , se mueve en la dirección positiva del eje x , empezando en el origen, jalando un bote a lo largo de la curva C , denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 3.10.6. El bote, que inicialmente se encuentra sobre el eje

y en $(0, a)$, es jalado por una cuerda de longitud constante a que se mantiene durante todo el movimiento. Una ecuación de la tractriz está dada por

$$x = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

- a) Vuelva a escribir esta ecuación usando una función hiperbólica.
 b) Use diferenciación implícita para demostrar que la ecuación de la tractriz satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

- c) Interprete geoméricamente la ecuación diferencial del inciso b).

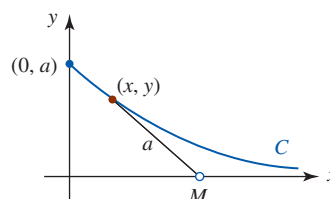


FIGURA 3.10.6 Tractriz en el problema 50

≡ Piense en ello

En los problemas 51 y 52, encuentre el valor numérico exacto de la cantidad dada.

51. $\cosh(\ln 4)$ 52. $\sinh(\ln 0.5)$

En los problemas 53 y 54, exprese la cantidad dada como una función racional de x .

53. $\sinh(\ln x)$ 54. $\tanh(3 \ln x)$

55. Demuestre que para cualquier entero positivo n ,

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

Revisión del capítulo 3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-13.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

- Si $y = f(x)$ es continua en un número a , entonces hay una recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$. _____
- Si f es diferenciable en cualquier número real x , entonces f es continua en todas partes. _____
- Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente en $(a, f(a))$, entonces f necesariamente es diferenciable en $x = a$. _____
- La razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$. _____
- En $x = -1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ es paralela a la recta $y = 2$. _____
- La derivada de un producto es el producto de las derivadas. _____
- Una función polinomial tiene una recta tangente en todo punto de su gráfica. _____

8. Para $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ una ecuación de la recta tangente es $f'(x) = -2x + 5$. _____
9. La función $f(x) = x/(x^2 + 9)$ es diferenciable sobre el intervalo $[-3, 3]$. _____
10. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$. _____
11. Si m es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sin x$, entonces $-1 \leq m \leq 1$. _____
12. Para $y = \tan^{-1}x$, $dy/dx > 0$ para toda x . _____
13. $\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = -\sin^{-1}x$ _____
14. La función $f(x) = x^5 + x^3 + x$ tiene una inversa. _____
15. Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[2, 8]$, entonces $f(3) > f(5)$. _____
16. Si f es una función creciente diferenciable sobre un intervalo, entonces $f'(x)$ también es creciente sobre el intervalo. _____
17. La única función para la cual $f'(x) = f(x)$ es $f(x) = e^x$. _____
18. $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{|x|}$ _____
19. $\frac{d}{dx} \cosh^2 x = \frac{d}{dx} \sinh^2 x$ _____
20. Toda función hiperbólica inversa es un logaritmo. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

1. Si $y = f(x)$ es una función polinomial de grado 3, entonces $\frac{d^4}{dx^4} f(x) =$ _____.
2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -\frac{1}{2}$ es _____.
3. La pendiente de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/3$ es _____.
4. $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, entonces $f'(x) =$ _____.
5. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (x+3)/(x-2)$ en $x = 0$ es _____.
6. Para $f(x) = 1/(1-3x)$ la razón de cambio instantánea de f' con respecto a x en $x = 0$ es _____.
7. Si $f'(4) = 6$ y $g'(4) = 3$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 2f(x) - 5g(x)$ en $x = 4$ es _____.
8. Si $f(2) = 1$, $f'(2) = 5$, $g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$, entonces $\left. \frac{d}{dx} \frac{x^2 f(x)}{g(x)} \right|_{x=2} =$ _____.
9. Si $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) = -1$, $f'(2) = 4$ y $f''(2) = 3$, entonces $\left. \frac{d^2}{dx^2} f(g(x)) \right|_{x=1} =$ _____.
10. Si $f'(x) = x^2$, entonces $\frac{d}{dx} f(x^3) =$ _____.
11. Si F es una función diferenciable, entonces $\frac{d^2}{dx^2} F(\sin 4x) =$ _____.
12. La función $f(x) = \cot x$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \pi]$ porque _____.
13. La función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$
 es diferenciable en $x = 3$ cuando $a =$ _____ y $b =$ _____.
14. Si $f'(x) = \sec^2 2x$, entonces $f(x) =$ _____.
15. La recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5 - x + e^{x-1}$ es horizontal en el punto _____.

16. $\frac{d}{dx} 2^x =$ _____.
17. $\frac{d}{dx} \log_{10} x =$ _____.
18. Si $f(x) = \ln|2x - 4|$, el dominio de $f'(x)$ es _____.
19. La gráfica de $y = \cosh x$ se denomina _____.
20. $\cosh^{-1} 1 =$ _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-28, encuentre la derivada de la función dada.

1. $f(x) = \frac{4x^{0.3}}{5x^{0.2}}$	2. $y = \frac{1}{x^3 + 4x^2 - 6x + 11}$
3. $F(t) = (t + \sqrt{t^2 + 1})^{10}$	4. $h(\theta) = \theta^{1.5}(\theta^2 + 1)^{0.5}$
5. $y = \sqrt[4]{x^4 + 16} \sqrt[3]{x^3 + 8}$	6. $g(u) = \sqrt{\frac{6u - 1}{u + 7}}$
7. $y = \frac{\cos 4x}{4x + 1}$	8. $y = 10 \cot 8x$
9. $f(x) = x^3 \sin^2 5x$	10. $y = \tan^2(\cos 2x)$
11. $y = \sin^{-1} \frac{3}{x}$	12. $y = \cos x \cos^{-1} x$
13. $y = (\cot^{-1} x)^{-1}$	14. $y = \operatorname{arcsec}(2x - 1)$
15. $y = 2 \cos^{-1} x + 2x\sqrt{1 - x^2}$	16. $y = x^2 \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$
17. $y = xe^{-x} + e^{-x}$	18. $y = (e + e^2)^x$
19. $y = x^7 + 7^x + 7^\pi + e^{7x}$	20. $y = (e^x + 1)^{-e}$
21. $y = \ln(x\sqrt{4x - 1})$	22. $y = (\ln \cos^2 x)^2$
23. $y = \sinh^{-1}(\sin^{-1} x)$	24. $y = (\tan^{-1} x)(\tanh^{-1} x)$
25. $y = xe^{x \cosh^{-1} x}$	26. $y = \sinh^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$
27. $y = \sinh e^{x^3}$	28. $y = (\tanh 5x)^{-1}$

En los problemas 29-34, encuentre la derivada indicada.

29. $y = (3x + 1)^{5/2}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3}$	30. $y = \sin(x^3 - 2x); \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$
31. $s = t^2 + \frac{1}{t^2}; \quad \frac{d^4 s}{dt^4}$	32. $W = \frac{v - 1}{v + 1}; \quad \frac{d^3 W}{dv^3}$
33. $y = e^{\sin 2x}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$	34. $f(x) = x^2 \ln x; \quad f'''(x)$

35. Use primero las leyes de los logaritmos para simplificar

$$y = \ln \left| \frac{(x + 5)^4 (2 - x)^3}{(x + 8)^{10} \sqrt[3]{6x + 4}} \right|,$$

y luego encuentre dy/dx .

36. Encuentre dy/dx para $y = 5^{x^2} x^{\sin 2x}$.
37. Dado que $y = x^3 + x$ es una función uno a uno, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función inversa en $x = 1$.
38. Dado que $f(x) = 8/(1 - x^3)$ es una función uno a uno, encuentre f^{-1} y $(f^{-1})'$.

En los problemas 39 y 40, encuentre dy/dx .

39. $xy^2 = e^x - e^y$

40. $y = \ln(xy)$

41. Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ que sea perpendicular a la recta $y = -3x$.

42. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$ donde

a) $f''(x) = f(x)$ y b) $f''(x) = f'(x)$.

43. Encuentre ecuaciones para las rectas que pasan por $(0, -9)$ que son tangentes a la gráfica de $y = x^2$.

44. a) Encuentre la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

b) Encuentre una ecuación de la recta con la misma intersección con el eje x que es perpendicular a la recta tangente en el inciso a).

c) Encuentre el o los puntos donde la recta del inciso a) corta la gráfica de $y = x^2$.

45. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(9, f(9))$.

46. Si $f(x) = (1 + x)/x$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?

47. Encuentre las coordenadas x de todos los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, donde la recta tangente es horizontal.

48. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ tal que la recta tangente pase por el origen.

49. Suponga que un circuito en serie contiene un capacitor y un resistor variable. Si la resistencia en el instante t está dada por $R = k_1 + k_2t$, donde k_1 y k_2 son constantes positivas conocidas, entonces la carga $q(t)$ sobre el capacitor está dada por

$$q(t) = E_0C + (q_0 - E_0C) \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2t} \right)^{1/Ck_2},$$

donde C es una constante denominada **capacitancia** y $E(t) = E_0$ es la tensión aplicada. Demuestre que $q(t)$ satisface la condición inicial $q(0) = q_0$ y

$$(k_1 + k_2t) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0.$$

50. Suponga que C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función

$$y = C_1x + C_2 \left[\frac{x}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - 1 \right]$$

satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

En los problemas 51 y 52, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

51. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^{-x} + C_4xe^x$; $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

52. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$; $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

53. a) Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y^3 - y + x^2 - 4 = 0$ correspondientes a $x = 2$.

b) Encuentre las pendientes de las rectas tangentes en los puntos que se encontraron en el inciso a).

54. Trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f dada en la FIGURA 3.R.1.

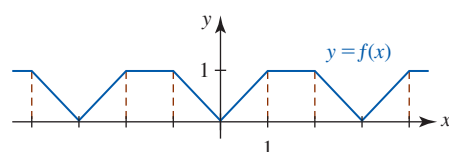


FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 54

55. La gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que se muestra en la FIGURA 3.R.2, se denomina **hipocicloide**.^{*} Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en los puntos correspondientes a $x = \frac{1}{8}$.

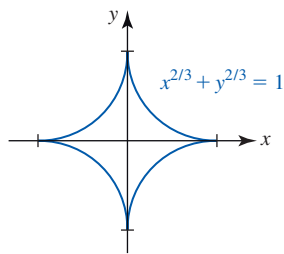


FIGURA 3.R.2 Hipocicloide en el problema 55

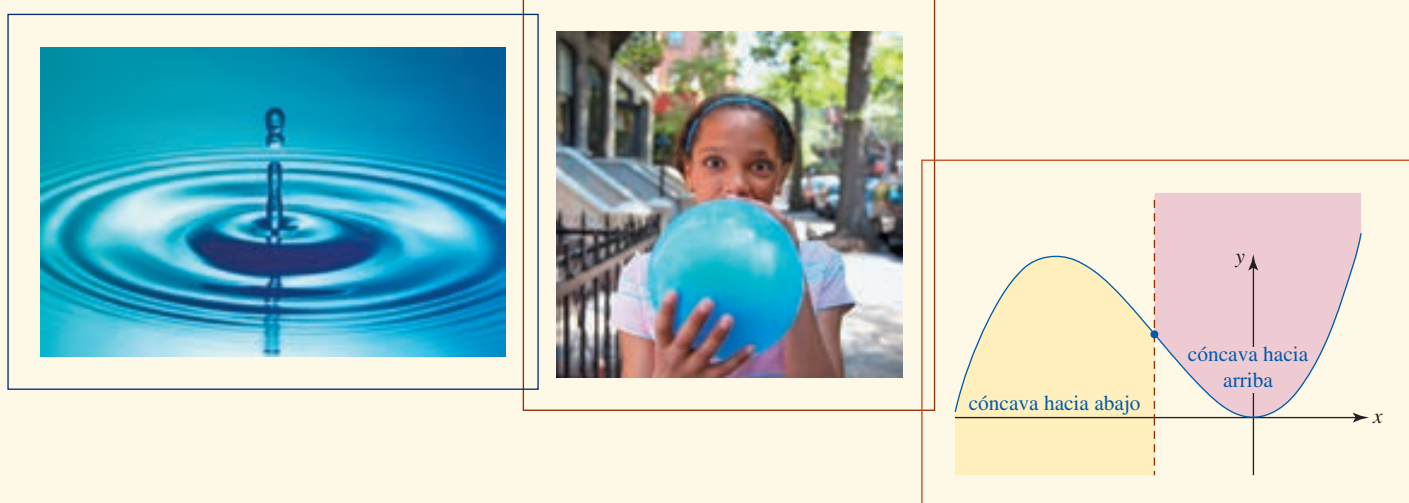
56. Encuentre d^2y/dx^2 para la ecuación del problema 55.
57. Suponga

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Encuentre $f'(x)$ para $x \neq 0$. Use la definición de derivada, (2) de la sección 3.1, para determinar si $f'(0)$ existe.

^{*}Consulte el sitio <http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html> para ver varias hipocicloides y sus propiedades.

Aplicaciones de la derivada



En este capítulo Las derivadas primera y segunda de una función f pueden usarse para determinar la forma de su gráfica. Si imagina la gráfica de una función como una curva que sube y baja, entonces los puntos alto y bajo de la gráfica o, con más precisión, los valores máximo y mínimo de la función, podemos encontrarlos usando la derivada. Como ya vimos, la derivada también proporciona una razón de cambio. En la sección 2.7 vimos brevemente que la razón de cambio con respecto al tiempo t de una función que proporciona la posición de un objeto en movimiento es la velocidad del objeto.

Encontrar los valores máximo y mínimo de una función junto con el problema de determinar razones de cambio son dos de los temas centrales de estudio de este capítulo.

- 4.1 Movimiento rectilíneo
- 4.2 Razones de cambio relacionadas
- 4.3 Extremos de funciones
- 4.4 Teorema del valor medio
- 4.5 Otro repaso a los límites: regla de L'Hôpital
- 4.6 Gráficas y la primera derivada
- 4.7 Gráficas y la segunda derivada
- 4.8 Optimización
- 4.9 Linealización y diferenciales
- 4.10 Método de Newton

Revisión del capítulo 4

4.1 Movimiento rectilíneo

■ **Introducción** En la sección 2.7 se definió que el movimiento de un objeto en una línea recta, horizontal o vertical, es un **movimiento rectilíneo**. Una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina **función posición**. La variable t representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta. Recuerde que sobre una escala horizontal, consideramos la dirección s positiva a la derecha de $s = 0$, y sobre una escala vertical, la dirección s positiva la consideramos hacia arriba.

EJEMPLO 1 Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

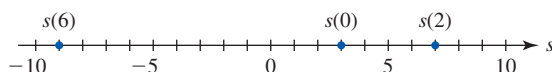


FIGURA 4.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1

■ **Velocidad y aceleración** Si la **velocidad media** de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud Δt es

$$\frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

entonces la razón de cambio instantánea, o velocidad del cuerpo, está dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1 Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

La velocidad se mide en centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo (pies/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mi/h), etcétera.

También es posible calcular la razón de cambio de la velocidad.

Definición 4.1.2 Función aceleración

Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son metros por segundo por segundo (m/s^2), pies por segundo por segundo (pies/s^2), millas por hora por hora (mi/h^2), etcétera. A menudo, las unidades de la aceleración se leen literalmente “metros por segundo al cuadrado”

■ Significado de los signos algebraicos En la sección 3.7 vimos que siempre que la derivada de una función f es *positiva* sobre un intervalo I , entonces f es *creciente* sobre I . Geométricamente, la gráfica de una función creciente sube cuando x crece. En forma semejante, si la derivada de una función f es *negativa* sobre I , entonces f es *decreciente*, lo cual significa que su gráfica baja cuando x crece. Sobre un intervalo de tiempo para el cual $v(t) = s'(t) > 0$, es posible afirmar que $s(t)$ es creciente. Por tanto, el objeto se mueve *hacia la derecha* sobre una recta horizontal, o *hacia arriba* sobre una recta vertical. Por otra parte, $v(t) = s'(t) < 0$ implica que $s(t)$ es decreciente y que el movimiento es *hacia la izquierda* sobre una recta horizontal o *hacia abajo* sobre una recta vertical. Vea la FIGURA 4.1.2. Si $a(t) = v'(t) > 0$ sobre un intervalo de tiempo, entonces la velocidad $v(t)$ del objeto es *creciente*, mientras $a(t) = v'(t) < 0$ indica que la velocidad $v(t)$ del objeto es *decreciente*. Por ejemplo, una aceleración de -25 m/s^2 significa que la velocidad decrece por 25 m/s cada segundo. No confunda los términos “velocidad decreciente” y “velocidad creciente” con los conceptos “desaceleración” o “aceleración”. Por ejemplo, considere una roca que se deja caer desde la parte superior de un edificio alto. La aceleración de la gravedad es una constante negativa, -32 pies/s^2 . El signo negativo significa que la velocidad de la roca disminuye a partir de cero. Una vez que la roca choca contra el suelo, su rapidez $|v(t)|$ es bastante grande, pero $v(t) < 0$. En específico, un objeto en movimiento rectilíneo sobre, por ejemplo, una recta horizontal *desacelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente). En forma semejante, un objeto en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal *acelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente). En general,

Un objeto en movimiento rectilíneo

- **desacelera** cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- **acelera** cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

De manera alterna, un objeto desacelera cuando su rapidez $|v(t)|$ es decreciente y acelera cuando su rapidez es creciente.

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \quad \text{y} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4 \text{ cm/s}$, $v(2) = 0 \text{ cm/s}$ y $v(6) = -8 \text{ cm/s}$, respectivamente. Puesto que la aceleración siempre es negativa, la velocidad siempre es decreciente. Observe que $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se deja que el tiempo t sea negativo y también positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha para el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y se mueve hacia la izquierda para el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento puede representarse por la gráfica que se muestra en la FIGURA 4.1.3a). Puesto que el movimiento en realidad se lleva a cabo *sobre* la recta horizontal, usted debe imaginar el movimiento de un punto P que corresponde a la proyección de un punto en la gráfica sobre la recta horizontal. Vea la figura 4.1.3b).

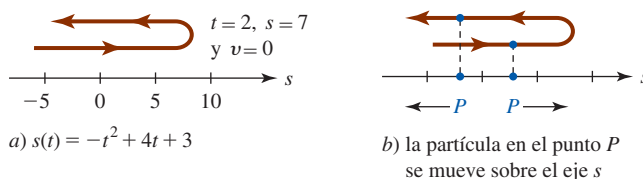


FIGURA 4.1.3 Representación del movimiento de la partícula en el ejemplo 2

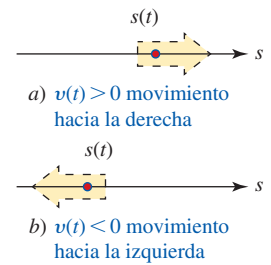


FIGURA 4.1.2 Significado del signo de la función velocidad

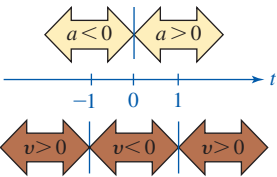


FIGURA 4.1.4 Signos de $v(t)$ y $a(t)$ en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Partícula que desacelera/acelera

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

Solución Los signos algebraicos de las funciones velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) \quad \text{y} \quad a(t) = 2t$$

se muestran sobre la escala de tiempo en la FIGURA 4.1.4. Puesto que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos sobre $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, la partícula desacelera sobre estos intervalos de tiempo; $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo algebraico sobre $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, de modo que la partícula acelera sobre estos intervalos de tiempo. ■

En el ejemplo 2 verifique que la partícula desacelera sobre el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y acelera sobre el intervalo de tiempo $(2, \infty)$.

EJEMPLO 4 Movimiento de una partícula

Un objeto se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Use una gráfica para representar el movimiento durante el intervalo de tiempo $[-4, 4]$.

Solución La función velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 36t = 4t(t + 3)(t - 3)$$

y la función aceleración es

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2 - 36 = 12(t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3}).$$

Luego, a partir de las soluciones de $v(t) = 0$ podemos determinar los intervalos de tiempo para los cuales $s(t)$ es creciente o decreciente. A partir de la información que se muestra en las tablas siguientes, se construye la función mostrada en la FIGURA 4.1.5. Al inspeccionar las tablas observamos que la partícula desacelera sobre los intervalos de tiempo $(-4, -3)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 3)$ (se muestran en verde en la figura) y acelera sobre los intervalos de tiempo $(-3, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$, $(3, 4)$ (se muestran en rojo en la figura).

Intervalo de tiempo	Signo de $v(t)$	Dirección de movimiento	Tiempo	Posición	Velocidad	Aceleración	Intervalo de tiempo	Signo de $a(t)$	Velocidad
$(-4, -3)$	−	a la izquierda	−4	−7	−112	156	$(-4, -\sqrt{3})$	+	creciente
$(-3, 0)$	+	a la derecha	−3	−56	0	72	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	−	decreciente
$(0, 3)$	−	a la izquierda	0	25	0	−36	$(\sqrt{3}, 3)$	+	creciente
$(3, 4)$	+	a la derecha	3	−56	0	72			
			4	−7	112	156			

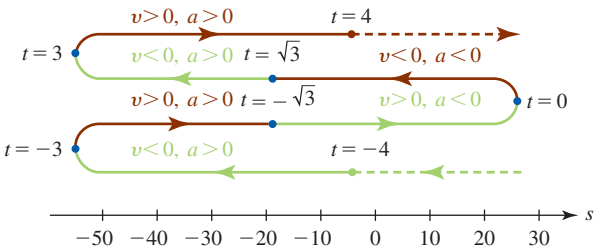


FIGURA 4.1.5 Movimiento de una partícula en el ejemplo 4

Ejercicios 4.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-13.

Fundamentos

En los problemas 1-8, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados.

1. $s(t) = 4t^2 - 6t + 1$; $t = \frac{1}{2}, t = 3$
2. $s(t) = (2t - 6)^2$; $t = 1, t = 4$
3. $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t$; $t = -2, t = 2$
4. $s(t) = t^4 - t^3 + t$; $t = -1, t = 3$
5. $s(t) = t - \frac{1}{t}$; $t = \frac{1}{4}, t = 1$
6. $s(t) = \frac{t}{t+2}$; $t = -1, t = 0$
7. $s(t) = t + \sin \pi t$; $t = 1, t = \frac{3}{2}$
8. $s(t) = t \cos \pi t$; $t = \frac{1}{2}, t = 1$

En los problemas 9-12, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal.

9. $s(t) = t^2 - 4t - 5$
 - a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
 - b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?
10. $s(t) = t^2 + 6t + 10$
 - a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = v(t)$?
 - b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $v(t) = -a(t)$?
11. $s(t) = t^3 - 4t$
 - a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula cuando $v(t) = 2$?
 - b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 18$?
 - c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
12. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$
 - a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?
 - b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?
 - c) ¿Cuándo desacelera la partícula? ¿Cuándo acelera?

En los problemas 13 y 14, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera.

13. $s(t) = t^3 - 27t$
14. $s(t) = t^4 - t^3$

En los problemas 15-20, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

15. $s(t) = t^2$; $[-1, 3]$
16. $s(t) = t^3$; $[-2, 2]$
17. $s(t) = t^2 - 4t - 2$; $[-1, 5]$

18. $s(t) = (t + 3)(t - 1)$; $[-3, 1]$
19. $s(t) = 2t^3 - 6t^2$; $[-2, 3]$
20. $s(t) = (t - 1)^2(t - 2)$; $[-2, 3]$

En los problemas 21-28, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

21. $s(t) = 3t^4 - 8t^3$; $[-1, 3]$
22. $s(t) = t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 60$; $[-2, 5]$
23. $s(t) = t - 4\sqrt{t}$; $[1, 9]$
24. $s(t) = 1 + \cos \pi t$; $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$
25. $s(t) = \sin \frac{\pi}{2} t$; $[0, 4]$
26. $s(t) = \sin \pi t - \cos \pi t$; $[0, 2]$
27. $s(t) = t^3 e^{-t}$; $[0, \infty)$
28. $s(t) = t^2 - 12 \ln(t + 1)$; $[0, \infty)$

29. En la FIGURA 4.1.6 se muestra la gráfica en el plano st de una función posición $s(t)$ de una partícula que se mueve rectilíneamente. Complete la tabla siguiente si $v(t)$ y $a(t)$ son positivas, negativas o cero. Proporcione los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos sobre los cuales acelera.

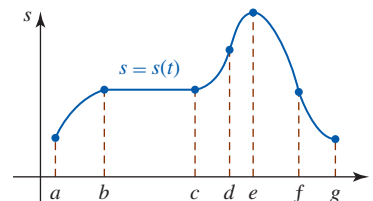


FIGURA 4.1.6 Gráfica para el problema 29

Intervalo	$v(t)$	$a(t)$
(a, b)		
(b, c)		
(c, d)		
(d, e)		
(e, f)		
(f, g)		

30. En la FIGURA 4.1.7 se muestra la gráfica de la función velocidad v de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Elabore una gráfica de una función posición s con esta función velocidad.

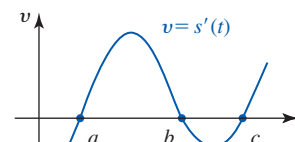


FIGURA 4.1.7 Gráfica para el problema 30

≡ Aplicaciones

31. La altura (en pies) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde un punto a 6 pies por arriba del nivel del suelo la proporciona $s(t) = -16t^2 + 48t + 6$, $0 \leq t \leq T$, donde T es el instante en que el proyectil choca contra el suelo. Vea la FIGURA 4.1.8.
- a) Determine el intervalo de tiempo para el cual $v > 0$ y el intervalo de tiempo para el cual $v < 0$.
- b) Encuentre la altura máxima alcanzada por el proyectil.

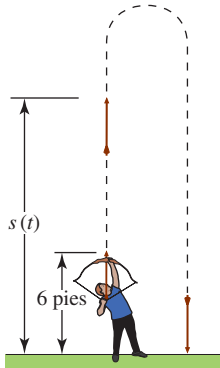


FIGURA 4.1.8 Proyectil en el problema 31

32. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 10t - 20$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Determine la distancia total recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo $[1, 6]$.

En los problemas 33 y 34, use la siguiente información. Cuando se ignora la fricción, la distancia s (en pies) que un cuerpo se mueve hacia abajo sobre un plano inclinado cuya inclinación es θ está dada por $s(t) = 16t^2 \sin \theta$, $[0, t_1]$, donde $s(0) = 0$, $s(t_1) = L$, y t se mide en segundos. Vea la FIGURA 4.1.9.

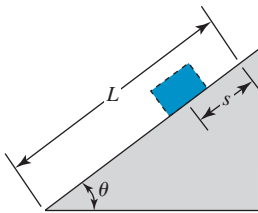


FIGURA 4.1.9 Plano inclinado

33. Un objeto se desliza por una colina de 256 pies de longitud con una inclinación de 30° . ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del objeto en la parte superior de la colina?

34. Un participante en una carrera de automóviles de juguete desciende la colina mostrada en la FIGURA 4.1.10. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del automóvil en la parte inferior de la colina?

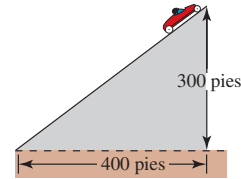


FIGURA 4.1.10 Plano inclinado en el problema 34

35. Un cubo, atado con una cuerda a un molinete circular, se deja caer libremente en línea recta. Si se ignora la inercia rotacional del molinete, entonces la distancia que recorre el cubo es igual a la medida en radianes del ángulo indicado en la FIGURA 4.1.11; es decir, $\theta = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 32$ pies/s² es la aceleración debida a la gravedad. Encuentre la razón a la que cambia la coordenada y de un punto P sobre la circunferencia del molinete en $t = \sqrt{\pi}/4$ s. Interprete el resultado.

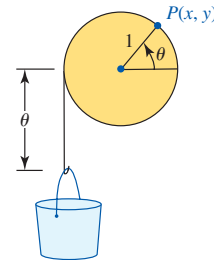


FIGURA 4.1.11 Cubo en el problema 35

36. En mecánica, la fuerza F que actúa sobre un cuerpo se define como la razón de cambio de su cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Cuando m es constante, a partir de esta fórmula obtenemos la conocida fórmula denominada segunda ley de Newton $F = ma$, donde la aceleración es $a = dv/dt$. Según la teoría de la relatividad de Einstein, cuando una partícula con masa en reposo m_0 se mueve rectilíneamente a gran velocidad (como en un acelerador lineal), su masa varía con la velocidad v según la fórmula $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde c es la velocidad constante de la luz. Demuestre que en la teoría de la relatividad la fuerza F que actúa sobre la partícula es

$$F = \frac{m_0 a}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}},$$

donde a es la aceleración.

4.2 Razones de cambio relacionadas

■ **Introducción** En esta sección abordaremos las **razones de cambio relacionadas**. La derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable x . En la sección precedente vimos que cuando una función $s = s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo ds/dt se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad? Por ejemplo, si V

representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t . Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies³/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 4.2.1. En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s. Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

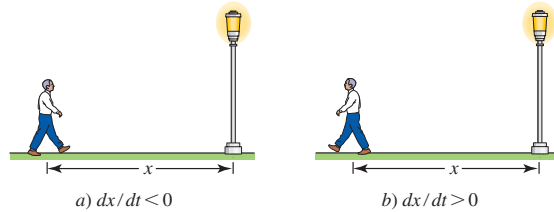


FIGURA 4.2.2 x decreciente en a); x creciente en b)

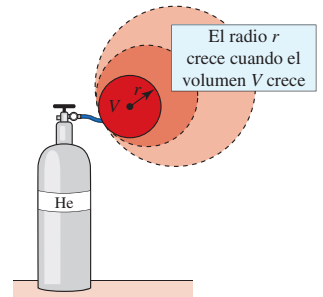


FIGURA 4.2.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

■ **Regla de potencias para funciones** Recuerde por (6) de la sección 3.6 que si y denota una función de x , entonces con la regla de potencias para funciones obtenemos

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}, \quad (1)$$

donde n es un número real. Por supuesto, (1) es aplicable a cualquier función; por ejemplo r , x o z , que dependa de la variable t :

$$\frac{d}{dt} r^n = nr^{n-1} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d}{dt} x^n = nx^{n-1} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt} z^n = nz^{n-1} \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

EJEMPLO 1 Uso de (2)

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución En el instante t , el volumen V de una esfera es una función del radio r ; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d}{dt} r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(3r^2 \frac{dr}{dt} \right)$$

es lo mismo que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

razones relacionadas

Debido a que los problemas de esta sección se describen con palabras, usted debe interpretar el planteamiento en términos de símbolos matemáticos. La clave para resolver problemas planteados en lenguaje coloquial consiste en la organización. A continuación se presentan algunas sugerencias.

Directrices para resolver problemas relacionados

- i) Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.
- ii) Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
- iii) Escriba todas las razones que se **proporcionan**. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea **encontrar**.
- iv) Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.
- v) Diferencie con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso iv). Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

Un globo esférico se infla con aire a razón de 20 pies³/min. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

Solución Como se muestra en la figura 4.2.1, denotamos el radio del globo con r y su volumen con V . Ahora, las interpretaciones de “Un globo esférico se infla ... a razón de 20 pies³/min” y “¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?” son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\text{Dado: } \frac{dV}{dt} = 20 \text{ pies}^3/\text{min}$$

y la razón que se busca

$$\text{Encontrar: } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=3}.$$

Debido a que por el ejemplo 1 ya sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2 (dr/dt)$. Al despejar dr/dt en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

$$\text{Por tanto, } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \text{ pies/min} \approx 0.18 \text{ pies/min}$$

EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P ?

Solución Sea el tiempo t medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P . Como se muestra en la FIGURA 4.2.3, a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P . Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\text{Dado: } \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \quad (3)$$

y se busca

$$\text{Encontrar: } \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1/3} \leftarrow 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

En la figura 4.2.3 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables x , y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \quad (4)$$

Al diferenciar (4) con respecto a t ,

$$\frac{d}{dt} z^2 = \frac{d}{dt} x^2 + \frac{d}{dt} y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}. \quad (5)$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z \frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$ h usamos $\text{distancia} = \text{razón} \times \text{tiempo}$ para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot (\frac{1}{3}) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$ h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$ h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34} \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h.}$$

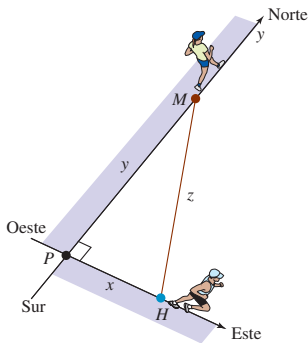


FIGURA 4.2.3 Corredores en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Uso de trigonometría

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 grados/s. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a 3 mi del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?

Solución Primero se introducen las variables θ y x como se muestra en la FIGURA 4.2.4. Además, se cambia la información sobre θ a radianes al recordar que 1° es equivalente a $\pi/180$ radianes. Así,

$$\text{Dado: } \frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s} \quad \text{Encontrar: } \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=3}.$$

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan \theta \quad \text{o bien,} \quad x = 2 \tan \theta.$$

Al diferenciar la última ecuación con respecto a t y usar la razón dada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2 \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15} \sec^2 \theta. \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena: } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan \theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ obtenemos $\sec^2 \theta = \frac{13}{4}$. Por tanto,

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=3} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60} \text{ mi/s.} \quad \blacksquare$$

En el siguiente ejemplo es necesario usar la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura H y radio en la base R :

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H. \quad (6)$$

EJEMPLO 5 Uso de triángulos semejantes

Desde la parte superior del reloj de arena que se muestra en la FIGURA 4.2.5 la arena cae a razón constante de $4 \text{ cm}^3/\text{s}$. Exprese la razón a que crece la altura de la pila inferior en términos de la altura de la arena.

Solución Primero, como sugiere la figura 4.2.5, se establece la hipótesis de que la pila de arena en la parte inferior del reloj de arena tiene la forma del *frustrum* de un cono. En el instante $t > 0$, sean V el volumen de la pila de arena, h su altura y r el radio de su superficie plana inferior. Así,

$$\text{Dado: } \frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{Encontrar: } \frac{dh}{dt}.$$

Necesitamos encontrar el volumen V de la pila de arena en el instante $t > 0$. Esto puede lograrse como se muestra a continuación:

$$V = \text{volumen de todo el cono inferior} - \text{volumen del cono que no es arena.}$$

Al usar la figura 4.2.5 y (6) con $R = 6$ y $H = 12$,

$$V = \frac{1}{3} \pi 6^2 (12) - \frac{1}{3} \pi r^2 (12 - h)$$

$$\text{o} \quad V = \pi \left(144 - 4r^2 + \frac{1}{3} r^2 h \right).$$

Podemos eliminar la variable r de la última ecuación al usar triángulos semejantes. Como se muestra en la FIGURA 4.2.6, el triángulo rectángulo rojo claro es semejante al triángulo rectángulo azul, y así las proporciones de lados correspondientes son iguales:

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{6} \quad \text{o bien,} \quad r = 6 - \frac{h}{2}.$$

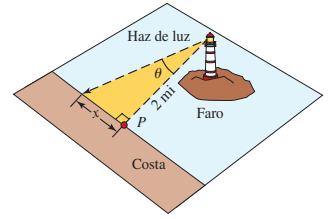


FIGURA 4.2.4 Faro en el ejemplo 4

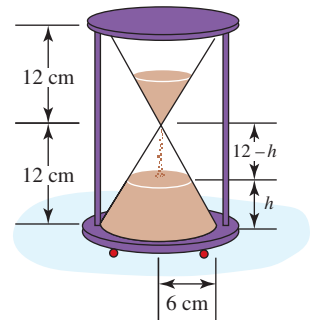


FIGURA 4.2.5 Reloj de arena en el ejemplo 5

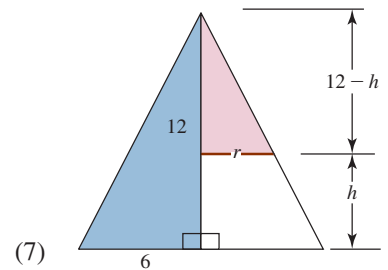


FIGURA 4.2.6 En sección transversal, el cono inferior del reloj de arena en el ejemplo 5 es un triángulo

La última expresión se sustituye en (7) y se simplifica.

$$V = \pi \left(\frac{1}{12} h^3 - 3h^2 + 36h \right). \quad (8)$$

Al diferenciar (8) con respecto a t obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{1}{4} h^2 \frac{dh}{dt} - 6h \frac{dh}{dt} + 36 \frac{dh}{dt} \right) = \pi \left(\frac{1}{4} h^2 - 6h + 36 \right) \frac{dh}{dt}.$$

Por último, al usar la razón dada $dV/dt = 4$ es posible despejar dh/dt :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(h - 12)^2}. \quad (9) \quad \blacksquare$$

Observe en (9) del ejemplo 5 que la altura de la pila de arena en el reloj de arena crece más rápido cuando la altura h de la pila está próxima a 12 cm.

Ejercicios 4.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los siguientes problemas, una solución puede requerir una fórmula especial que usted tal vez no conozca. En caso de ser necesario, consulte la lista de fórmulas que se encuentra en las *Páginas de recursos*.

1. Un cubo se expande con el tiempo. ¿Cómo está relacionada la razón a la cual crece el volumen con la razón a la que aumenta la arista?
2. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Dado que cada lado se expande a una razón constante de 10 cm/min, encuentre la razón a la cual se expande el volumen cuando $x = 1$ cm, $y = 2$ cm y $z = 3$ cm.
3. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. La longitud de un lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿A qué razón crece el área cuando un lado mide 8 cm?
4. En el problema 3, ¿a qué razón crece el área en el instante en que el área es $\sqrt{75}$ cm²?
5. Un rectángulo se expande con el tiempo. La diagonal del rectángulo aumenta a razón de 1 pulg/h y la longitud crece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg/h. ¿Cuán rápido crece el ancho cuando éste mide 6 pulg y la longitud mide 8 pulg?
6. Las longitudes de las aristas de un cubo aumentan a razón de 5 cm/h. ¿A qué razón crece la longitud de la diagonal del cubo?
7. Un velero se dirige hacia el acantilado vertical mostrado en la FIGURA 4.2.7. ¿Cómo están relacionadas las razones a las que cambian x , s y θ ?

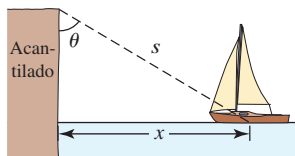


FIGURA 4.2.7 Velero en el problema 7

8. Un escarabajo se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$, donde x y y se miden en centímetros. Si la coordenada x de la posición del escarabajo (x, y) cambia a razón constante de 3 cm/min, ¿Cuán rápido

cambia la coordenada y cuando el escarabajo está en el punto $(2, 13)$? ¿Cuán rápido cambia la coordenada y cuando el escarabajo está 6 cm arriba del eje x ?

9. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y^2 = x + 1$ de modo que $dx/dt = 4x + 4$. ¿Cuál es dy/dt cuando $x = 8$?
10. Una partícula en movimiento continuo se mueve sobre la gráfica de $4y = x^2 + x$. Encuentre el punto (x, y) sobre la gráfica en el que la razón de cambio de la coordenada x y la razón de cambio de la coordenada y son iguales.
11. La coordenada x del punto P mostrado en la FIGURA 4.2.8 aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ cm/h. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo OPA cuando las coordenadas de P son $(8, 2)$?

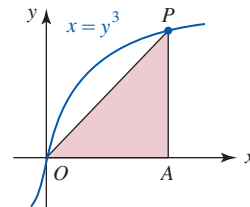


FIGURA 4.2.8 Triángulo en el problema 11

12. Una maleta está sobre la banda transportadora mostrada en la FIGURA 4.2.9 que se mueve a razón de 2 pies/s. ¿Cuán rápido aumenta la distancia vertical de la maleta a partir de la parte inferior de la banda?

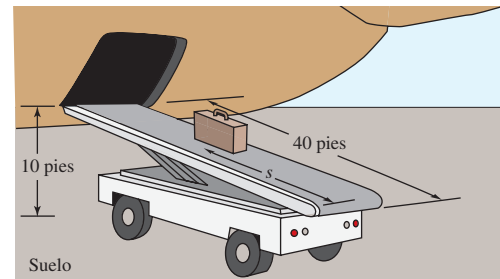


FIGURA 4.2.9 Banda transportadora en el problema 12

13. Una persona de 5 pies de estatura se aleja caminando de un poste de 20 pies de altura a razón constante de 3 pies/s. Vea la FIGURA 4.2.10.

- a) ¿A qué razón crece la sombra de la persona?
 b) ¿A qué razón se aleja la punta de la sombra desde la base del poste?

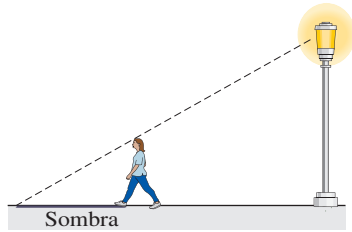


FIGURA 4.2.10 Sombra en el problema 13

14. Una roca arrojada a un estanque tranquilo provoca una onda circular. Suponga que el radio de la onda se expande a razón constante de 2 pies/s.
- ¿Cuán rápido crece el diámetro de la onda circular?
 - ¿Cuán rápido crece la circunferencia de la onda circular?
 - ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el radio es de 3 pies?
 - ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el área es 8π pies²?
15. Una escalera de 15 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte inferior de la escalera se aleja de la base del muro a razón constante de 2 pies/min. ¿A qué razón descende la parte superior de la escalera en el instante en que la parte inferior de la escalera está a 5 pies del muro?
16. Una escalera de 20 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de $\frac{1}{2}$ pie/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en que la parte superior de la escalera está a 18 pies por arriba del suelo?
17. Considere la escalera cuya parte inferior se desliza alejándose de la base del muro vertical mostrado en la FIGURA 4.2.11. Demuestre que la razón a la cual crece θ_1 es la misma que la razón a la cual decrece θ_2 .

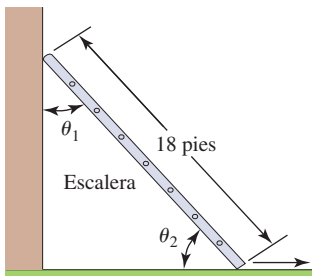


FIGURA 4.2.11 Escalera en el problema 17

18. La cuerda de un cometa se suelta a razón constante de 3 pies/s. Si el viento se lleva al cometa horizontalmente a una altitud de 200 pies, ¿Cuán rápido se mueve el cometa cuando se han soltado 400 pies de cuerda?
19. Dos buques tanque zarpan de la misma terminal petrolera. Uno se dirige hacia el este a mediodía a una velocidad de 10 nudos. (1 nudo = 1 milla náutica/h. Una milla náutica mide 6 080 pies o 1.15 milla estándar.) El otro buque se dirige hacia el norte a la 1:00 p.m. a razón

de 15 nudos. ¿A qué razón cambia la distancia entre los dos buques a las 2:00 p.m.?

20. A las 8:00 a.m., el barco S_1 está a 20 km dirección norte del barco S_2 . El barco S_1 navega hacia el sur a razón de 9 km/h y el barco S_2 se dirige hacia el oeste a razón de 12 km/h. A las 9:20 a.m., ¿a qué razón cambia la distancia entre los dos barcos?
21. Una polea está asegurada a una orilla de un muelle situado a 15 pies por arriba de la superficie del agua. Un bote pequeño es jalado hacia el muelle por medio de una cuerda en la polea. La cuerda está unida a la proa del bote a 3 pies antes de la línea del agua. Vea la FIGURA 4.2.12. Si la cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s, ¿Cuán rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 16 pies de éste?

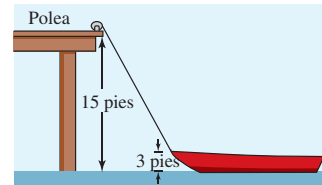


FIGURA 4.2.12 Bote y muelle en el problema 21

22. Un bote se jala hacia un muelle por medio de un cabrestante. El cabrestante está situado al final del muelle y se encuentra a 10 pies por arriba del nivel al que la cuerda de arrastre está atada a la proa del bote. La cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual cambia el ángulo de elevación entre la proa del bote y el final del muelle cuando se han soltado 30 pies de cuerda.
23. Un reflector en un bote patrulla que está a $\frac{1}{2}$ km de la costa sigue un buque de dunas de arena que se mueve en forma paralela al agua a lo largo de una playa recta. El buque se desplaza a razón constante de 15 km/h. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual gira el reflector cuando el buque está a $\frac{1}{2}$ km del punto sobre la playa más próximo al bote.
24. Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Vea la FIGURA 4.2.13. Un jugador golpea la pelota y corre hacia la primera base a razón de 20 pies/s. ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a segunda base en el instante en que el corredor está a 60 pies de home? ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a tercera base en ese mismo instante?

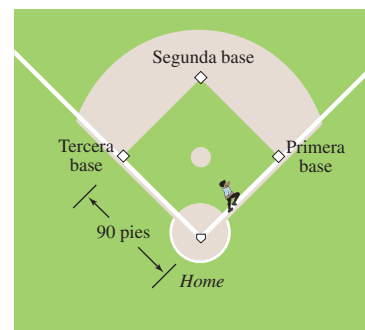


FIGURA 4.2.13 Diamante de beisbol en el problema 24

25. Un avión que se mueve en forma paralela al nivel del suelo a razón constante de 600 mi/h se aproxima a una estación de radar. Si la altura del avión es de 2 mi, ¿cuán rápido disminuye la distancia entre el avión y la estación de radar cuando la distancia horizontal entre ambos es 1.5 mi? Vea la FIGURA 4.2.14.

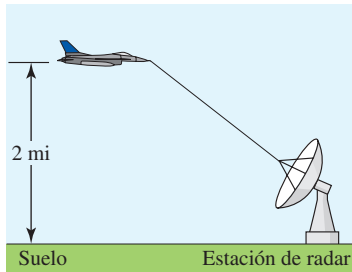


FIGURA 4.2.14 Avión en el problema 25

26. En el problema 25, en el punto directamente por arriba de la estación de radar, el avión asciende formando un ángulo de 30° sin aminorar su velocidad. ¿Cuán rápido aumenta la distancia entre el avión y la estación 1 minuto después? [Sugerencia: Use la ley de los cosenos.]
27. Un avión a una altura de 4 km pasa directamente por arriba de un telescopio de rastreo ubicado en tierra. Cuando el ángulo de elevación es de 60° , se observa que el ángulo decrece a razón de 30 grados/min. ¿Cuán rápido se mueve el avión?
28. Una cámara de rastreo, ubicada a 1 200 pies del punto de lanzamiento, sigue a un globo de aire caliente con ascenso vertical. En el instante en que el ángulo de elevación θ de la cámara es $\pi/6$, el ángulo θ crece a razón de 0.1 rad/min. Vea la FIGURA 4.2.15. ¿A qué razón sube el globo en ese instante?

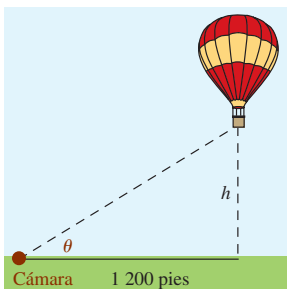


FIGURA 4.2.15 Globo en el problema 28

29. Un cohete se desplaza a razón constante de 1 000 mi/h a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Vea la FIGURA 4.2.16.

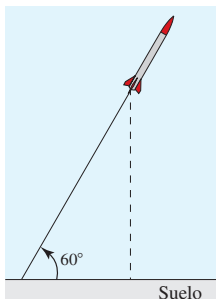


FIGURA 4.2.16 Cohete en el problema 29

- a) ¿A qué razón crece su altitud?
b) ¿Cuál es la velocidad del cohete con respecto a tierra?

30. Un tanque de agua en forma de cilindro circular recto de 40 pies de diámetro se drena de modo que el nivel del agua disminuye a razón constante de $\frac{3}{2}$ pies/min. ¿Cuán rápido decrece el volumen del agua?
31. Un tanque de aceite en forma de cilindro circular recto de 8 m de radio se llena a razón constante de $10 \text{ m}^3/\text{min}$. ¿Cuán rápido sube el volumen del aceite?
32. Como se muestra en la FIGURA 4.2.17, un tanque rectangular de agua de 5 pies de ancho está dividido en dos tanques por medio de una separación que se mueve en la dirección indicada a razón de 1 pulg/min cuando al tanque frontal se bombea agua a razón de $1 \text{ pie}^3/\text{min}$.
- a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el volumen de agua en el tanque frontal es de 40 pies^3 y $x = 4$ pies?
b) En ese instante, el nivel del agua ¿sube o baja?

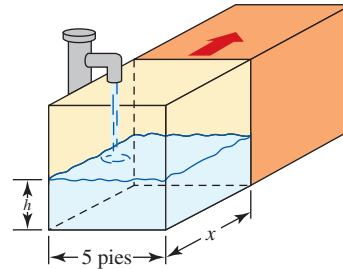


FIGURA 4.2.17 Tanque en el problema 32

33. Por la parte inferior de un tanque cónico se fuga agua a razón de $1 \text{ pie}^3/\text{min}$, como se muestra en la FIGURA 4.2.18.
- a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
b) ¿A qué razón cambia el radio del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
c) Suponga que el tanque estaba lleno en $t = 0$. ¿A qué razón cambia el nivel del agua en $t = 6$ min?

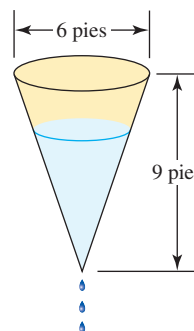


FIGURA 4.2.18 Tanque en el problema 33

34. Un canal de agua con extremos verticales en forma de trapecoides isósceles tiene las dimensiones mostradas en la FIGURA 4.2.19. Si se bombea agua a razón constante de $\frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{s}$, ¿Cuán rápido sube el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de $\frac{1}{4} \text{ m}$?

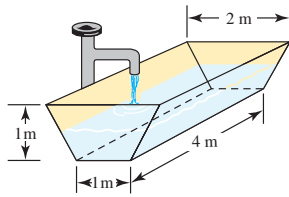


FIGURA 4.2.19 Tanque en el problema 34

35. Cada uno de los extremos verticales de un canal de agua de 20 pies de longitud es un triángulo equilátero con el vértice hacia abajo. Se bombea agua a razón constante de 4 pies³/min.

- a) ¿Cuán rápido sube el nivel h del agua cuando la profundidad del agua es de 1 pie?
 b) Si h_0 es la profundidad inicial del agua en el canal, demuestre que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10} \left(h_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{5} t \right)^{-1/2}.$$

[Sugerencia: Considere la diferencia de volumen después de t minutos.]

- c) Si $h_0 = \frac{1}{2}$ pie y la altura del extremo triangular es 5 pies, determine el instante en el que el canal está lleno. ¿Cuán rápido sube el nivel del agua cuando el canal está lleno?
36. El volumen V entre dos esferas concéntricas está en expansión. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras el radio de la esfera interior disminuye a razón constante $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón cambia V cuando el radio exterior es 3 m y el radio interior es 1 m?
37. Muchos objetos esféricos como las gotas de lluvia, las bolas de nieve y las bolas de naftalina se evaporan a una razón proporcional a su área superficial. En este caso, demuestre cómo el radio del objeto decrece a razón constante.
38. Si la razón a la cual cambia el volumen de una esfera es constante, demuestre que la razón a la cual cambia su área superficial es inversamente proporcional al radio.
39. Suponga que un cubo de hielo se derrite de modo que siempre conserva su forma cúbica. Si el volumen del cubo decrece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg³/min, ¿Cuán rápido cambia el área superficial del cubo cuando el área superficial es de 54 pulg²?
40. La rueda de la fortuna mostrada en la FIGURA 4.2.20 gira una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cada 2 minutos. ¿Cuán rápido sube una pasajera en el instante en que está 64 pies por arriba del suelo? ¿Cuán rápido se mueve horizontalmente en el mismo instante?

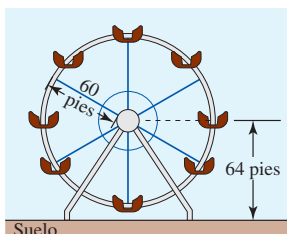


FIGURA 4.2.20 Rueda de la fortuna en el problema 40

41. Suponga que la rueda de la fortuna en el problema 40 está equipada con reflectores de colores fijos situados en varios puntos a lo largo de su circunferencia. Considere el reflector ubicado en el punto P en la FIGURA 4.2.21. Si los haces de luz son tangentes a la rueda en el punto P , ¿a qué razón se aleja el reflector en Q en tierra del punto R en el instante en que $\theta = \pi/4$?

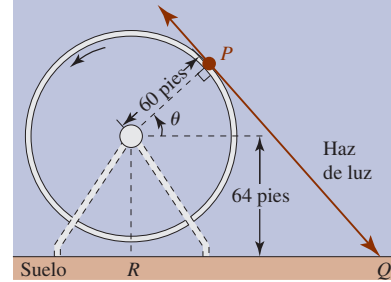


FIGURA 4.2.21 Rueda de la fortuna en el problema 41

42. Un clavadista salta desde una plataforma elevada con velocidad inicial hacia abajo de 1 pie/s hacia el centro de un gran tanque circular de agua. Vea la FIGURA 4.2.22. Por física, la altura del clavadista por arriba del nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 - t + 200$, donde $t \geq 0$ es el tiempo medido en segundos.

- a) Use una función trigonométrica inversa para expresar θ en términos de s .
 b) Encuentre la razón a la cual el ángulo θ subtendido por el tanque circular, según lo ve el clavadista, crece en $t = 3$ s.
 c) ¿Cuál es el valor de θ cuando el clavadista golpea el agua?
 d) ¿Cuál es la razón de cambio de θ cuando el clavadista golpea el agua?

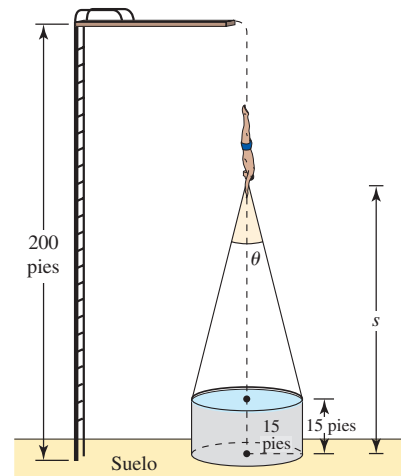


FIGURA 4.2.22 Clavadista en el problema 42

Modelos matemáticos

43. **Resistencia** La resistencia total R en un circuito paralelo que contiene dos resistores de resistencias R_1 y R_2 está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Si cada resistencia cambia con el tiempo t , entonces ¿cómo están relacionadas dR/dt , dR_1/dt y dR_2/dt ?

44. Presión En la expansión adiabática del aire, la presión P y el volumen V están relacionados por $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. En cierto instante, la presión es 100 lb/pulg² y el volumen es 32 pulg³. ¿A qué razón cambia la presión en ese instante si el volumen disminuye a razón de 2 pulg³/s?

45. Cangrejos de río Un estudio acerca de cangrejos de río (*Orconectes virilis*) indica que el caparazón de longitud C está relacionado con la longitud total T según la fórmula $C = 0.493T - 0.913$, donde C y T se miden en milímetros. Vea la FIGURA 4.2.23.

- A medida que el cangrejo de río crece, la razón R de la longitud del caparazón a la longitud total, ¿aumenta o disminuye?
- Si el cangrejo de río crece en longitud a razón de 1 mm por día, ¿a qué razón cambia la relación del caparazón a la longitud total cuando el caparazón es un tercio de la longitud total?

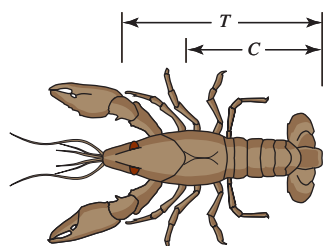


FIGURA 4.2.23 Cangrejo de río en el problema 45

46. Peso del cerebro Según estudios de alometría, el peso del cerebro E en los peces está relacionado con el

peso corporal P por $E = 0.007P^{2/3}$, y el peso corporal está relacionado con la longitud del cuerpo por $P = 0.12L^{2.53}$, donde E y P se miden en gramos y L se mide en centímetros. Suponga que la longitud de cierta especie de pez evolucionó a razón constante desde 10 cm hasta 18 cm a lo largo de 20 millones de años. ¿A qué razón, en gramos por millones de años, creció el cerebro de esta especie cuando el pez pesaba la mitad de su peso corporal final?

47. Cantidad de movimiento En física, la cantidad de movimiento p de un cuerpo de masa m que se mueve en línea recta con velocidad v está dada por $p = mv$. Suponga que un avión de masa 10^5 kg vuela en línea recta mientras en los bordes de entrada de sus alas se acumula hielo a razón constante de 30 kg/h. Vea la FIGURA 4.2.24.

- ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión si vuela a razón constante de 800 km/h?
- ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión en $t = 1$ h si en ese instante su velocidad es 750 km/h y aumenta a razón de 20 km/h?

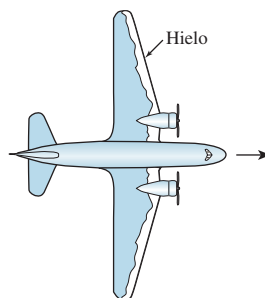


FIGURA 4.2.24 Avión en el problema 47

4.3 Extremos de funciones

■ Introducción Ahora abordaremos el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función f sobre un intervalo I . Veremos que al encontrar estos **extremos** de f (en caso de haber alguno) en muchos casos es posible trazar fácilmente su gráfica. Al encontrar los extremos de una función también es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización. En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostramos cómo puede encontrar los valores máximo y mínimo de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado I .

■ Extremos absolutos En la FIGURA 4.3.1 se ha ilustrado la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 3x + 4$. A partir de esta gráfica debe resultar evidente que el valor de la función $f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$ es la coordenada y del vértice, y como la parábola se abre hacia arriba, en el rango de f no hay número menor que $\frac{7}{4}$. Decimos que el extremo $f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$ es el **mínimo absoluto** de f . A continuación se definen los conceptos de máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

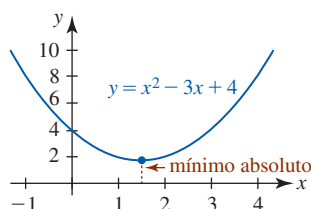


FIGURA 4.3.1 Mínimo absoluto de una función

Definición 4.3.1 Extremos absolutos

- Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f .
- Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f .

Los extremos absolutos también se denominan **extremos globales**.

A partir de su experiencia al graficar funciones debe serle fácil, en algunos casos, ver cuándo una función posee un máximo o un mínimo absoluto. En general, una función cuadrá-

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto. La función $f(x) = 4 - x^2$ tiene el máximo absoluto $f(0) = 4$. Una función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene extremos absolutos. Las gráficas de las funciones conocidas $y = 1/x$, $y = x^3$, $y = \tan x$, $y = e^x$ y $y = \ln x$ muestran que éstas no tienen extremos absolutos. Las funciones trigonométricas $y = \sin x$ y $y = \cos x$ tienen un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

EJEMPLO 1 Extremos absolutos

Para $f(x) = \sin x$, $f(\pi/2) = 1$ es su máximo absoluto y $f(3\pi/2) = -1$ es su mínimo absoluto. Por periodicidad, los valores máximo y mínimo también ocurren en $x = \pi/2 + 2n\pi$ y $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, respectivamente.

El intervalo sobre el que la función está definida es muy importante en la consideración de extremos.

EJEMPLO 2 Funciones definidas sobre un intervalo cerrado

- $f(x) = x^2$, definida sólo sobre el intervalo *cerrado* $[1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$. Vea la FIGURA 4.3.2a).
- Por otra parte, si $f(x) = x^2$ está definida sobre el intervalo *abierto* $(1, 2)$, entonces f no tiene extremos absolutos. En este caso, $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.
- $f(x) = x^2$ definida sobre $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$, pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$. Vea la figura 4.3.2b).
- $f(x) = x^2$ definida sobre $(-1, 2)$, tiene un mínimo absoluto $f(0) = 0$, pero no un máximo absoluto.

Los incisos a) y c) del ejemplo 2 ilustran el siguiente resultado general.

Teorema 4.3.1 Teorema del valor extremo

Una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo.

En otras palabras, cuando f es continua sobre $[a, b]$, hay números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda x en $[a, b]$. Los valores $f(c_2)$ y $f(c_1)$ son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Vea la FIGURA 4.3.3.

■ Extremos de un punto frontera Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en un punto frontera de un intervalo I , como en los incisos a) y c) del ejemplo 2, decimos que se trata de un **extremo de un punto frontera**. Cuando I no es un intervalo cerrado; es decir, cuando I es un intervalo como $(a, b]$, $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$, entonces aunque f sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto. Vea la FIGURA 4.3.4.

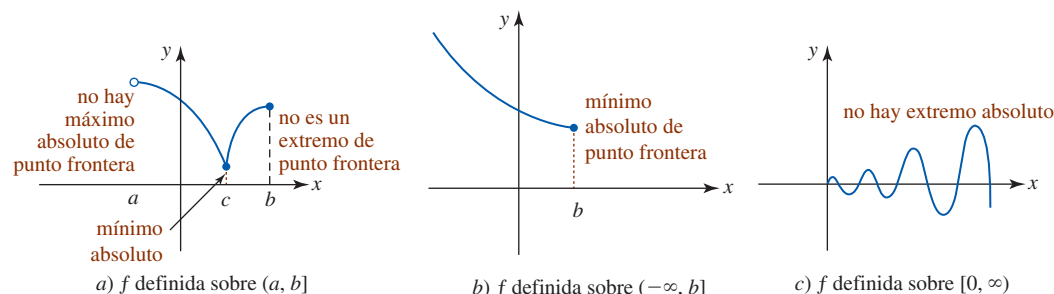
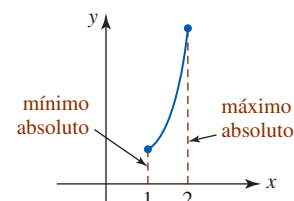
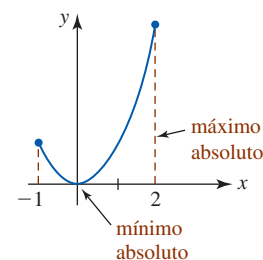


FIGURA 4.3.4 Una función f continua sobre un intervalo que no tiene ningún extremo absoluto

■ Extremos relativos En la FIGURA 4.3.5a) se ha ilustrado la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 8$. Debido a que el comportamiento final de f es el de $y = x^3$, $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Con base en esta observación es posible concluir que esta función polinomial no tiene extremos absolutos. No obstante, suponga que centramos la atención



a) f definida sobre $[1, 2]$



b) f definida sobre $[-1, 2]$

FIGURA 4.3.2 Gráficas de funciones en el ejemplo 2

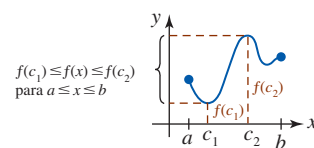
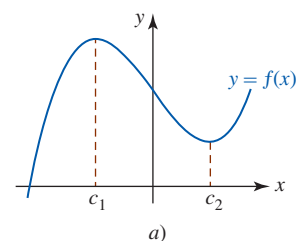
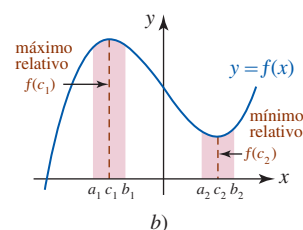


FIGURA 4.3.3 La función f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto



a)



b)

FIGURA 4.3.5 Máximo relativo en c_1 y mínimo relativo en c_2

en valores de x próximos a, o en una *vecindad* de, los números c_1 y c_2 . Como se muestra en la figura 4.3.5b), $f(c_1)$ es el valor mayor o máximo de la función f cuando se compara con todos los demás valores de la función en el intervalo abierto (a_1, b_1) ; en forma semejante, $f(c_2)$ es el valor mínimo de f en el intervalo (a_2, b_2) . Estos **extremos relativos**, o **locales**, se definen como sigue.

Definición 4.3.2 Extremos relativos

- i) Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1 .
- ii) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1 .

Como consecuencia de la definición 4.3.2 podemos concluir que

- Todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

Un extremo absoluto de un punto frontera se excluye de ser un extremo relativo con base en el tecnicismo de que alrededor de un punto frontera del intervalo no puede encontrarse un intervalo abierto contenido en el dominio de la función.

Hemos llegado al planteamiento de una pregunta evidente:

- ¿Cómo se encuentran los extremos de una función?

Incluso cuando tenemos gráficas, para la mayor parte de las funciones la coordenada x en que ocurre un extremo no es evidente. Con ayuda de la herramienta para acercar o alejar una página de un dispositivo para graficar, es posible buscar y, por supuesto, aproximar tanto la ubicación como el valor de un extremo. Vea la FIGURA 4.3.6. A pesar de lo anterior, resulta aconsejable poder encontrar la ubicación exacta y el valor exacto de un extremo.

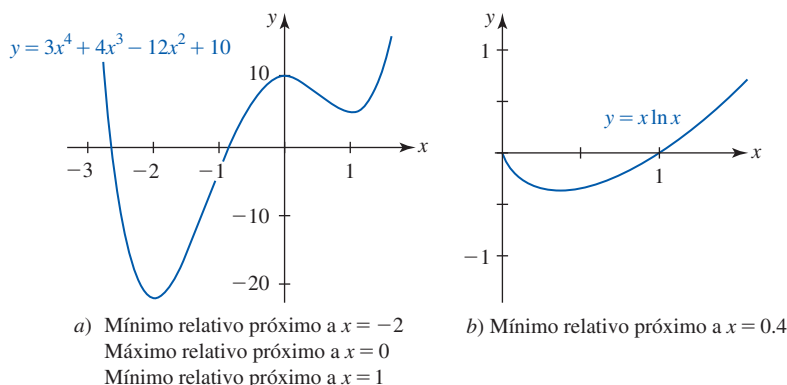


FIGURA 4.3.6 Ubicación aproximada de extremos relativos

En la figura 4.3.6a) se plantea que un mínimo relativo ocurre *cerca* de $x = -2$. Con las herramientas de una calculadora o un SAC es posible convencernos de que este mínimo relativo es realmente un mínimo absoluto o global, pero con las herramientas del cálculo es posible demostrar en verdad que éste es el caso.

Números críticos El análisis de la FIGURA 4.3.7 junto con las figuras 4.3.5 y 4.3.6 sugiere que si c es un número en el que la función f tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto correspondiente a $x = c$ o no es diferenciable en $x = c$. Es decir, una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número c recibe un nombre especial.

Definición 4.3.3 Número crítico

Un **número crítico** de una función f es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

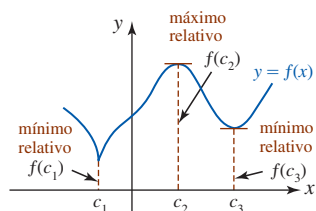


FIGURA 4.3.7 f no es diferenciable en c_1 ; f' es 0 en c_2 y c_3

En algunos textos un número crítico $x = c$ se denomina **punto crítico**.

EJEMPLO 3 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = x \ln x$.

Solución Por la regla del producto,

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = 1 + \ln x.$$

La única solución de $f'(x) = 0$ o $\ln x = -1$ es $x = e^{-1}$. Hasta dos cifras decimales, el número crítico de f es $e^{-1} \approx 0.36$. ■

EJEMPLO 4 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$.

Solución Al diferenciar y factorizar se obtiene

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Por tanto, observamos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$. Los números críticos de f son 0 , -2 y 1 . ■

EJEMPLO 5 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = (x + 4)^{2/3}$.

Solución Por la regla de potencias para funciones,

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}.$$

En este caso observamos que $f'(x)$ no existe cuando $x = -4$. Puesto que -4 está en el dominio de f , concluimos que éste es su número crítico. ■

EJEMPLO 6 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

Solución Por la regla del cociente, después de simplificar encontramos,

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Ahora, $f'(x) = 0$ cuando el numerador de f es 0. Al resolver la ecuación $x(x - 2) = 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Además, cuando se inspecciona el denominador de f se encuentra que $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$. No obstante, al analizar f se observa que $x = 1$ no está en su dominio, y así los únicos números críticos son 0 y 2 . ■

Teorema 4.3.2 Los extremos relativos ocurren en números críticos

Si una función f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces c es un número crítico.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $f(c)$ es un extremo relativo.

- i) Si $f'(c)$ no existe, entonces, por la definición 4.3.3, c es un número crítico.
- ii) Si $f'(c)$ existe, entonces hay tres posibilidades: $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Para ahorrar argumentos, también se supondrá que $f(c)$ es un máximo relativo. Así, por la definición 4.3.2 hay algún intervalo abierto que contiene a c donde

$$f(c + h) \leq f(c) \quad (1)$$

donde el número h es suficientemente pequeño en valor absoluto. Entonces, la desigualdad en (1) implica que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{para } h > 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{para } h < 0. \quad (2)$$

Pero como $\lim_{h \rightarrow 0} [f(c+h) - f(c)]/h$ existe y es igual a $f'(c)$, las desigualdades en (2) muestran que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, respectivamente. La única forma en que esto puede ocurrir es cuando $f'(c) = 0$. El caso en que $f(c)$ es un mínimo relativo se demuestra en forma semejante. ■

■ **Extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado** Se ha visto que una función f que es continua sobre un intervalo *cerrado* tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El siguiente teorema indica dónde ocurren estos extremos.

Teorema 4.3.3 Determinación de extremos absolutos

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre ya sea en un punto frontera del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b) .

El teorema 4.3.3 se resume como sigue:

Directrices para encontrar extremos sobre un intervalo cerrado

- i) Evalúe f en los puntos frontera a y b del intervalo $[a, b]$.
- ii) Encuentre todos los números críticos $c_1, c_2, \dots, c_n$ en el intervalo abierto (a, b) .
- iii) Evalúe f en todos los números críticos.
- iv) Los valores mayor y menor en la lista

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n), f(b),$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 7 Determinación de extremos absolutos

Encuentre los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ sobre el intervalo

- a) $[-3, 1]$ b) $[-3, 8]$.

Solución Debido a que f es continua, sólo es necesario evaluar f en los puntos frontera de cada intervalo y en los números críticos dentro de cada intervalo. A partir de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

vemos que los números críticos de la función f son -2 y 4 .

- a) A partir de los datos que se muestran en la tabla siguiente resulta evidente que el máximo absoluto de f sobre el intervalo $[-3, 1]$ es $f(-2) = 30$, y que el mínimo absoluto es el extremo de un punto frontera $f(1) = -24$.

Sobre $[-3, 1]$			
x	-3	-2	1
$f(x)$	20	30	-24

- b) Sobre el intervalo $[-3, 8]$ a partir de la tabla siguiente observamos que $f(4) = -78$ es un mínimo absoluto y que $f(8) = 130$ es un máximo absoluto de un punto frontera.

Sobre $[-3, 8]$				
x	-3	-2	4	8
$f(x)$	20	30	-78	130

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) Una función puede, por supuesto, asumir sus valores máximo y mínimo más de una vez sobre un intervalo. Usted debe comprobar, con ayuda de un dispositivo para graficar, que la función $f(x) = \sin x$ alcanza su valor de función máximo 1 cinco veces y su valor de función mínimo -1 cuatro veces en el intervalo $[0, 9\pi]$.
- ii) El converso del teorema 4.3.2 no necesariamente es cierto. En otras palabras:

Un número crítico de una función f no necesita corresponder a un extremo relativo.

Considere $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Las derivadas $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ muestran que 0 es un número crítico de ambas funciones. Pero a partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 4.3.8 vemos que ninguna función posee algún extremo sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

- iii) Hemos indicado cómo encontrar los extremos absolutos de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado. En las secciones 4.6 y 4.7 usamos la primera y segunda derivada para encontrar los extremos relativos de una función.

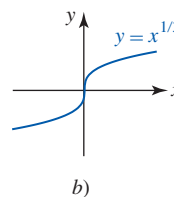
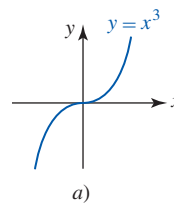


FIGURA 4.3.8 0 es un número crítico para ambas funciones, pero ninguna tiene extremos

Ejercicios 4.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-6, use la gráfica de la función dada como ayuda para determinar cualquier extremo absoluto sobre los intervalos indicados.

- $f(x) = x - 4$
a) $[-1, 2]$ b) $[3, 7]$ c) $(2, 5)$ d) $[1, 4]$
- $f(x) = |x - 4|$
a) $[-1, 2]$ b) $[3, 7]$ c) $(2, 5)$ d) $[1, 4]$
- $f(x) = x^2 - 4x$
a) $[1, 4]$ b) $[1, 3]$ c) $(-1, 3)$ d) $(4, 5]$
- $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
a) $[-3, 3]$ b) $(-3, 3)$ c) $[0, 3)$ d) $[-1, 1]$
- $f(x) = \tan x$
a) $[-\pi/2, \pi/2]$ b) $[-\pi/4, \pi/4]$
c) $[0, \pi/3]$ d) $[0, \pi]$
- $f(x) = 2 \cos x$
a) $[-\pi, \pi]$ b) $[-\pi/2, \pi/2]$
c) $[\pi/3, 2\pi/3]$ d) $[-\pi/2, 3\pi/2]$

En los problemas 7-22, encuentre los números críticos de las funciones dadas.

- $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$
- $f(x) = x^3 + x - 2$
- $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
- $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$
- $f(x) = x^2(x + 1)^3$
- $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$
- $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$
- $f(x) = x^{2/3} + x$
- $f(x) = (x - 1)^2 \sqrt[3]{x + 2}$
- $f(x) = \frac{x + 4}{\sqrt[3]{x + 1}}$
- $f(x) = -x + \sin x$
- $f(x) = \cos 4x$
- $f(x) = x^2 - 8 \ln x$
- $f(x) = e^{-x} + 2x$

En los problemas 23-36, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

- $f(x) = -x^2 + 6x$; $[1, 4]$
- $f(x) = (x - 1)^2$; $[2, 5]$

- $f(x) = x^{2/3}$; $[-1, 8]$
- $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1)$; $[-1, 1]$
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$; $[-3, 2]$
- $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x$; $[-2, 2]$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $[-4, 3]$
- $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10$; $[0, 4]$
- $f(x) = x^4(x - 1)^2$; $[-1, 2]$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
- $f(x) = 2 \cos 2x - \cos 4x$; $[0, 2\pi]$
- $f(x) = 1 + 5 \sin 3x$; $[0, \pi/2]$
- $f(x) = 3 + 2 \sin^2 24x$; $[0, \pi]$
- $f(x) = 2x - \tan x$; $[-1, 1.5]$

En los problemas 37 y 38, encuentre todos los números críticos. Distinga entre extremos absolutos, extremos de un punto frontera y extremos relativos.

- $f(x) = x^2 - 2|x|$; $[-2, 3]$
- $f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & -5 \leq x \leq -2 \\ x^2, & -2 < x \leq 1 \end{cases}$

- Considere la función f continua definida sobre $[a, b]$ que se muestra en la FIGURA 4.3.9. Dado que c_1 a c_{10} son números críticos:

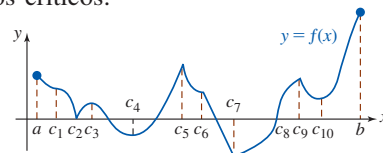


FIGURA 4.3.9 Gráfica para el problema 39

- Enumere los números críticos en los cuales $f'(x) = 0$.
 - Enumere los números críticos en los cuales $f'(x)$ no está definida.
 - Distinga entre los extremos absolutos y los extremos absolutos de un punto frontera.
 - Distinga entre los máximos relativos y los mínimos relativos.
- Considere la función $f(x) = x + 1/x$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.

≡ Aplicaciones

41. La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 320t$, donde t se mide en segundos y s en pies.
- a) $s(t)$ está definida sólo en el intervalo $[0, 20]$. ¿Por qué?
- b) Use los resultados del teorema 4.3.3 para determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil.
42. El físico francés **Jean Louis Poiseuille** descubrió que la velocidad $v(r)$ (en cm/s) del flujo sanguíneo que circula por una arteria con sección transversal de radio R está dada por $v(r) = (P/4\mu l)(R^2 - r^2)$, donde P , μ y l son constantes positivas. Vea la FIGURA 4.3.10.
- a) Determine el intervalo cerrado sobre el que está definida v .
- b) Determine las velocidades máxima y mínima del flujo sanguíneo.

Sección transversal circular

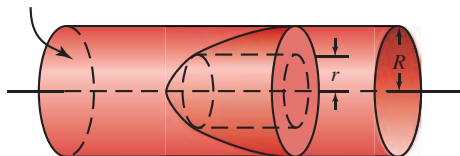


FIGURA 4.3.10 Arteria para el problema 42

≡ Piense en ello

43. Elabore una gráfica de una función continua f que no tenga extremos absolutos pero sí un máximo relativo y un mínimo relativo que tengan el mismo valor.
44. Proporcione un ejemplo de una función continua, definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, para el cual el máximo absoluto es el mismo que el mínimo absoluto.
45. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor. Demuestre que todo valor de x es un número crítico.
46. Demuestre que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ no tiene números críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué ocurre cuando $ad - bc = 0$?

47. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Determine los valores de n para los cuales f tiene un extremo relativo.
48. Analice: ¿por qué una función polinomial de grado n puede tener a lo sumo $n - 1$ números críticos?
49. Suponga que f es una función par continua tal que $f(a)$ es un mínimo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?
50. Suponga que f es una función impar continua tal que $f(a)$ es un máximo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?
51. Suponga que f es una función par continua que es diferenciable en todas partes. Demuestre que $x = 0$ es un número crítico de f .
52. Suponga que f es una función diferenciable que tiene sólo un número crítico c . Si $k \neq 0$, encuentre los números críticos de:
- a) $k + f(x)$ b) $kf(x)$ c) $f(x + k)$ d) $f(kx)$

≡ Problemas con calculadora/SAC

53. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = -2 \cos x + \cos 2x$.
- b) Encuentre los números críticos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.
- c) Encuentre los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.
54. En el estudio del crecimiento de los copos de nieve, la fórmula

$$I(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{b}{2} \sin \omega t - \frac{2b}{3\pi} \cos 2\omega t$$

es un modelo matemático para la variación diaria en la intensidad de radiación solar que penetra la superficie de la nieve. Aquí t representa el tiempo medido en horas después del amanecer ($t = 0$) y $\omega = 2\pi/24$.

- a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de I sobre el intervalo $[0, 24]$. Use $b = 1$.
- b) Encuentre los números críticos de I en el intervalo $[0, 24]$.

4.4 Teorema del valor medio

■ Introducción Suponga que una función $y = f(x)$ es continua y diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Estas condiciones significan que los números a y b son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f . En la FIGURA 4.4.1a) se muestra una gráfica típica de una función f que satisface estas condiciones. A partir de la figura 4.4.1b) parece válido que debe haber por lo menos un número c en el intervalo abierto (a, b) correspondiente a un punto sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal. Esta observación conduce a un resultado denominado teorema de Rolle. Usaremos este teorema para demostrar el resultado más importante de esta sección: el teorema del valor medio para derivadas.

Teorema 4.4.1 Teorema de Rolle

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) . Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Ocurre que f es una función constante sobre el intervalo $[a, b]$ o no lo es. Si f es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe tenerse $f'(c) = 0$ para todo número c en (a, b) . Luego, si f no es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe haber un número x

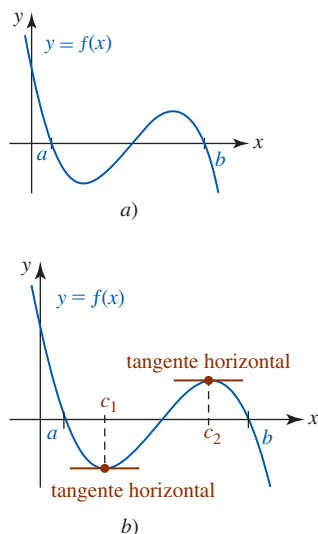


FIGURA 4.4.1 Dos puntos donde la tangente es horizontal

en (a, b) donde $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Suponga que $f(x) > 0$. Puesto que f es continua sobre $[a, b]$, por el teorema del valor extremo sabemos que f alcanza un máximo absoluto en algún número c en $[a, b]$. Pero por $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) > 0$ para alguna x en (a, b) , concluimos que el número c no puede ser un punto frontera de $[a, b]$. En consecuencia, c está en (a, b) . Puesto que f es diferenciable sobre (a, b) , es diferenciable en c . Entonces, por el teorema 4.3.2 tenemos $f'(c) = 0$. La demostración para el caso en que $f(x) < 0$ se concluye en forma semejante. ■

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Rolle

Considere la función $f(x) = -x^3 + x$ definida sobre $[-1, 1]$. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 4.4.2. Puesto que f es una función polinomial, es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable sobre $(-1, 1)$. También, $f(-1) = f(1) = 0$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos que debe haber por lo menos un número en $(-1, 1)$ para el cual $f'(x) = -3x^2 + 1$ es cero. Para encontrar este número, se resuelve $f'(c) = 0$ o $-3c^2 + 1 = 0$. Esta última conduce a dos soluciones en el intervalo: $c_1 = -\sqrt{3}/3 \approx -0.57$ y $c_2 = \sqrt{3}/3 \approx 0.57$. ■

En el ejemplo 1, observe que la función f dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[0, 1]$, así como sobre $[-1, 1]$. En el caso del intervalo $[0, 1]$, $f'(c) = -3c^2 + 1 = 0$ produce la única solución $c = \sqrt{3}/3$.

EJEMPLO 2 Comprobación del teorema de Rolle

- a) La función $f(x) = x - 4x^{1/3}$, que se muestra en la FIGURA 4.4.3, es continua sobre $[-8, 8]$ y satisface $f(-8) = f(8) = 0$. Pero no es diferenciable sobre $(-8, 8)$, puesto que en el origen hay una tangente vertical. No obstante, como sugiere la figura, hay dos números c_1 y c_2 en $(-8, 8)$ donde $f'(x) = 0$. Usted debe comprobar que $f'(-8\sqrt{3}/9) = 0$ y $f'(8\sqrt{3}/9) = 0$. Tenga en cuenta que las hipótesis del teorema de Rolle son condiciones suficientes pero no necesarias. En otras palabras, si no se cumple una de estas tres hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, la conclusión de que en (a, b) hay un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.
- b) Considere otra función $g(x) = 1 - x^{2/3}$. Esta función es continua sobre $[-1, 1]$ y $g(-1) = g(1) = 0$. Pero como la función f anterior, g no es diferenciable en $x = 0$ y por tanto no es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$. En este caso, sin embargo, en $(-1, 1)$ no hay algún c para el cual $f'(c) = 0$. Vea la FIGURA 4.4.4. ■

La conclusión del teorema de Rolle también se cumple cuando la condición $f(a) = f(b) = 0$ se sustituye por $f(a) = f(b)$. La validez de este hecho se ilustra en la FIGURA 4.4.5.

■ **Teorema del valor medio** El teorema de Rolle es de utilidad para demostrar el siguiente resultado importante denominado **teorema del valor medio**. Este teorema establece que cuando una función f es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) , entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La palabra *medio* se refiere aquí a un promedio; es decir, al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo.

Teorema 4.4.2 Teorema del valor medio para derivadas

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) . Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN Como se muestra en la FIGURA 4.4.6, sea $d(x)$ la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

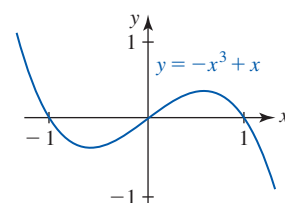


FIGURA 4.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 1

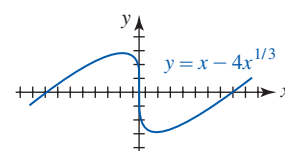


FIGURA 4.4.3 Gráfica de la función f en el ejemplo 2

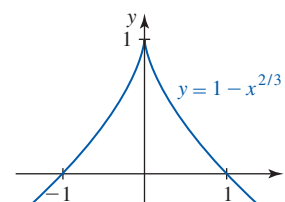


FIGURA 4.4.4 Gráfica de la función g en el ejemplo 2

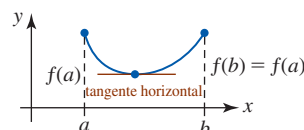


FIGURA 4.4.5 El teorema de Rolle se cumple cuando $f(a) = f(b)$

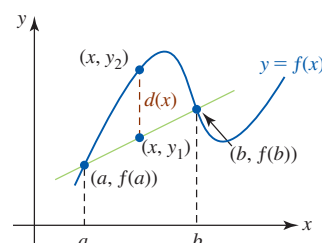


FIGURA 4.4.6 Recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

tenemos, como se muestra en la figura, $d(x) = y_2 - y_1$, o bien,

$$d(x) = f(x) - \left[f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b) \right].$$

Puesto que $d(a) = d(b) = 0$ y $d(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) , el teorema de Rolle implica que en (a, b) existe un número c para el cual $d'(c) = 0$. Entonces,

$$d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así $d'(c) = 0$ es lo mismo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como se indica en la FIGURA 4.4.7, en (a, b) puede haber más de un número c para el que las rectas tangente y secante son paralelas.

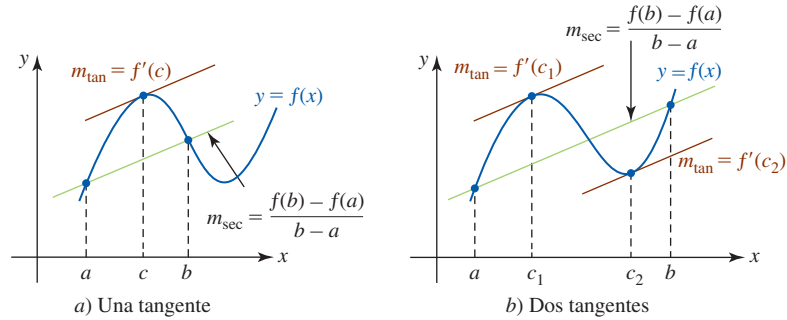


FIGURA 4.4.7 Las tangentes son paralelas a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

EJEMPLO 3 Comprobación del teorema del valor medio

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-1, 3]$, ¿existe un número c en el intervalo abierto $(-1, 3)$ que cumple la conclusión del teorema del valor medio?

Solución Puesto que f es una función polinomial, es continua sobre $[-1, 3]$ y diferenciable sobre $(-1, 3)$. Entonces, $f(3) = -9$, $f(-1) = 11$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad \text{y} \quad f'(c) = 3c^2 - 12.$$

Así, debe tenerse

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Por tanto, $3c^2 = 7$. Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, la única solución en el intervalo $(-1, 3)$ es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$.

El teorema del valor medio es muy útil para demostrar otros teoremas. Recuerde de la sección 3.2 que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. El converso de este resultado se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.3 Función constante

Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es una constante sobre el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Pero por hipótesis, $f'(x) = 0$. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ o $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, la función f tiene el mismo valor en todos los puntos en el intervalo. Así, f es constante.

■ **Funciones crecientes y decrecientes** Suponga que una función $y = f(x)$ está definida sobre un intervalo I y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. En la sección 1.3 vimos que f es **creciente** sobre I si $f(x_1) < f(x_2)$, y **decreciente** sobre I si $f(x_1) > f(x_2)$. Vea la figura 1.3.4. Intuitivamente, la gráfica de una función creciente *sube* cuando x crece (es decir, la gráfica asciende cuando se lee de izquierda a derecha) y la gráfica de una función decreciente *baja* cuando x crece. Por ejemplo, $y = e^x$ crece sobre $(-\infty, \infty)$ y $y = e^{-x}$ decrece sobre $(-\infty, \infty)$. Por supuesto, una función f puede ser creciente sobre ciertos intervalos y decreciente sobre intervalos diferentes. Por ejemplo, $y = \sin x$ crece sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y decrece sobre $[\pi/2, 3\pi/2]$.

La gráfica en la FIGURA 4.4.8 ilustra una función f que es creciente sobre los intervalos $[b, c]$ y $[d, e]$ y decreciente sobre $[a, b]$, $[c, d]$ y $[e, h]$.

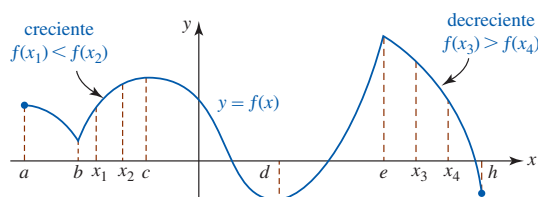


FIGURA 4.4.8 Una función puede crecer sobre algunos intervalos y decrecer en otros

El siguiente teorema es una prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento.

Teorema 4.4.4 Prueba para crecimiento/decrecimiento

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) .

- i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b) , entonces f es creciente sobre $[a, b]$.
- ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b) , entonces f es decreciente sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN i) Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pero $f'(c) > 0$ por hipótesis. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es creciente sobre $[a, b]$.

- ii) Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es decreciente sobre $[a, b]$. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución La derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4).$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ es necesario resolver

$$(x + 2)(x - 4) > 0 \quad \text{y} \quad (x + 2)(x - 4) < 0,$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es analizar los signos algebraicos de los factores $(x + 2)$ y $(x - 4)$ sobre los intervalos de la recta numérica determinada por los puntos críticos -2 y 4 : $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Vea la FIGURA 4.4.9.

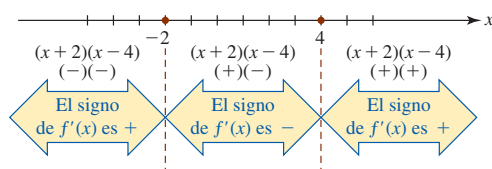


FIGURA 4.4.9 Signos de $f'(x)$ en tres intervalos en el ejemplo 4

◀ En precálculo, este procedimiento para resolver desigualdades no lineales se denomina *método de la tabla de signos*.

La información obtenida a partir de la figura 4.4.9 se resume en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	$y = f(x)$
$(-\infty, -2)$	+	creciente sobre $(-\infty, -2]$
$(-2, 4)$	-	decreciente sobre $[-2, 4]$
$(4, \infty)$	+	creciente sobre $[4, \infty)$

EJEMPLO 5 Prueba de la derivada para creciente/decreciente

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución Primero observe que el dominio de f está definido por $x \geq 0$. Luego, la derivada

$$f'(x) = x^{1/2}e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x/2} = \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1-x)$$

es cero en 1 y está indefinida en 0. Puesto que 0 está en el dominio de f y ya que $f'(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, concluimos que la gráfica de f tiene una tangente vertical (el eje y) en $(0, 0)$. Además, debido a que $e^{-x/2}/2\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$, sólo es necesario resolver

$$1 - x > 0 \quad \text{y} \quad 1 - x < 0$$

para determinar dónde $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, respectivamente. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	$y = f(x)$
$(0, 1)$	+	creciente sobre $[0, 1]$
$(1, \infty)$	-	decreciente sobre $[1, \infty)$

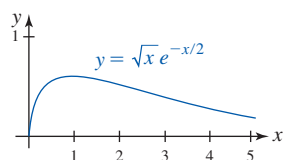


FIGURA 4.4.10 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de f que se observa en la FIGURA 4.4.10.

Si una función f es discontinua en uno o en ambos puntos extremos de $[a, b]$, entonces $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre (a, b) implica que f es creciente (o decreciente) sobre el intervalo abierto (a, b) .

■ Posdata: Un poco de historia Michel Rolle (1652-1719), francés, maestro de escuela elemental, estaba profundamente interesado en las matemáticas, y a pesar de que su educación fue bastante deficiente resolvió varios teoremas de importancia. Pero, curiosamente, Rolle no demostró el teorema que lleva su nombre. De hecho, fue uno de los primeros críticos rotundos del, entonces, nuevo cálculo. A Rolle también se le acredita la invención del simbolismo $\sqrt[n]{x}$ para denotar la raíz n -ésima de un número x .

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

- Como ya se mencionó, las hipótesis planteadas en el teorema de Rolle, así como las hipótesis del teorema del valor medio, son condiciones suficientes pero no necesarias. En el teorema de Rolle, por ejemplo, si una o más de las hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$ no se cumple, entonces la conclusión de que en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.
- El converso de los incisos i) y ii) del teorema 4.4.4 no necesariamente son ciertos. En otras palabras, cuando f es una función creciente (o decreciente) sobre un intervalo, no se concluye que $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre el intervalo. Una función puede ser creciente sobre un intervalo e incluso no ser diferenciable sobre ese intervalo.

Ejercicios 4.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $[1, 5]$
3. $f(x) = x^3 + 27$; $[-3, -2]$
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$; $[0, 4]$
5. $f(x) = x^3 + x^2$; $[-1, 0]$
6. $f(x) = x(x - 1)^2$; $[0, 1]$
7. $f(x) = \sin x$; $[-\pi, 2\pi]$
8. $f(x) = \tan x$; $[0, \pi]$
9. $f(x) = x^{2/3} - 1$; $[-1, 1]$
10. $f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2$; $[1, 8]$

En los problemas 11 y 12, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[a, b]$.

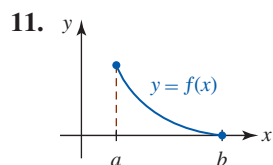


FIGURA 4.4.11 Gráfica para el problema 11

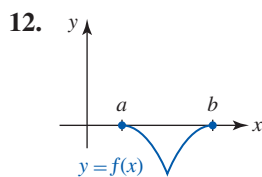


FIGURA 4.4.12 Gráfica para el problema 12

En los problemas 13-22, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

13. $f(x) = x^2$; $[-1, 7]$
14. $f(x) = -x^2 + 8x - 6$; $[2, 3]$
15. $f(x) = x^3 + x + 2$; $[2, 5]$
16. $f(x) = x^4 - 2x^2$; $[-3, 3]$
17. $f(x) = 1/x$; $[-10, 10]$
18. $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $[1, 5]$
19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$; $[0, 9]$
20. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$; $[2, 6]$
21. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $[-2, -1]$
22. $f(x) = x^{1/3} - x$; $[-8, 1]$

En los problemas 23 y 24, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre $[a, b]$.

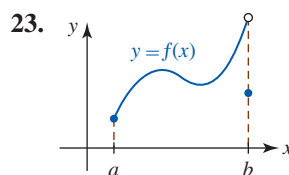


FIGURA 4.4.13 Gráfica para el problema 23

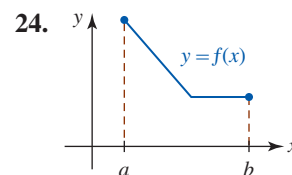


FIGURA 4.4.14 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-46, determine los intervalos sobre los cuales la función dada f es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

25. $f(x) = x^2 + 5$
26. $f(x) = x^3$
27. $f(x) = x^2 + 6x - 1$
28. $f(x) = -x^2 + 10x + 3$
29. $f(x) = x^3 - 3x^2$
30. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$
31. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$
32. $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$
33. $f(x) = 1 - x^{1/3}$
34. $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$
35. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
36. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
37. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
38. $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
39. $f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$
40. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$
41. $f(x) = x(x - 3)^2$
42. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
43. $f(x) = \sin x$
44. $f(x) = -x + \tan x$
45. $f(x) = x + e^{-x}$
46. $f(x) = x^2 e^{-x}$

En los problemas 47 y 48, demuestre, sin graficar, que la función dada no tiene extremos relativos.

47. $f(x) = 4x^3 + x$
48. $f(x) = -x + \sqrt{2 - x}$

Aplicaciones

49. Un motociclista entra a una carretera de peaje y en el comprobante de pago la hora indicada es 1:15 p.m. Luego de 70 millas, cuando el motociclista paga en la caseta de peaje a las 2:15 p.m., también recibe un comprobante de pago. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que la velocidad límite es 65 mi/h.
50. En el análisis matemático de la tos humana se supone que la tráquea o tubo respiratorio es un tubo cilíndrico. Un modelo matemático para el volumen de aire (en cm^3/s) que fluye a través de la tráquea durante su contracción es

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad r_0/2 \leq r \leq r_0,$$

donde k es una constante positiva y r_0 es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo respiratorio. Determine un intervalo para el cual V sea creciente y un intervalo para el cual V sea decreciente. ¿Con qué radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

Piense en ello

51. Considere la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz en $[-1, 1]$.

52. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b) . Demuestre que $f + g$ es una función creciente sobre $[a, b]$.
53. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b) . Proporcione una condición sobre $f(x)$ y $g(x)$ que garantice que el producto fg es creciente sobre $[a, b]$.
54. Demuestre que la ecuación $ax^3 + bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$, no puede tener dos raíces reales. [Sugerencia: Considere la función $f(x) = ax^3 + bx + c$. Suponga que hay dos números r_1 y r_2 tales que $f(r_1) = f(r_2) = 0$.]
55. Demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo sumo una raíz real. [Sugerencia: Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que hay tres números distintos r_1 , r_2 y r_3 tales que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$.]
56. Para una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ demuestre que el valor de x_3 que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.
57. Suponga que la gráfica de una función polinomial f tiene cuatro intersecciones x distintas. Analice: ¿cuál es el número mínimo de puntos en los cuales una recta tangente a la gráfica de f es horizontal?
58. Como se mencionó después del ejemplo 2, la hipótesis $f(a) = f(b) = 0$ en el teorema de Rolle puede sustituirse por la hipótesis $f(a) = f(b)$.
- a) Encuentre una función explícita f definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que f sea continua sobre el intervalo, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b)$.
- b) Encuentre un número c para el que $f'(c) = 0$.
59. Considere la función $f(x) = x \sen x$. Use f y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $\cot x = -1/x$ tiene una solución sobre el intervalo $(0, \pi)$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

60. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x - 4x^{1/3}$.
- b) Compruebe que todas las hipótesis, excepto una del teorema de Rolle, se cumplen en el intervalo $[-8, 8]$.
- c) Determine si en $(-8, 8)$ existe un número c para el cual $f'(c) = 0$.

En los problemas 61 y 62, use una calculadora para encontrar un valor de c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

61. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$
62. $f(x) = 1 + \sen x$; $[\pi/4, \pi/2]$

4.5 Otro repaso a los límites: regla de L'Hôpital

■ **Introducción** En los capítulos 2 y 3 vimos cómo el concepto de límite conduce a la idea de derivada de una función. En esta sección se invierte la situación. Vemos cómo la derivada puede usarse para calcular ciertos límites con formas indeterminadas.

■ **Terminología** Recuerde que en el capítulo 2 se consideraron límites de cocientes como

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2 + 1}. \quad (1)$$

El primer límite en (1) tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$, mientras que el segundo tiene la forma indeterminada ∞/∞ . En general, decimos que el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la **forma indeterminada $0/0$** en $x = a$ si

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a$$

y la **forma indeterminada ∞/∞** en $x = a$ si

$$|f(x)| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad |g(x)| \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a.$$

Los signos de valor absoluto aquí significan que cuando x tiende a a es posible tener, por ejemplo,

$$f(x) \rightarrow \infty, \quad g(x) \rightarrow -\infty; \text{ o bien,}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad g(x) \rightarrow \infty; \text{ o bien,}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad g(x) \rightarrow -\infty,$$

y así sucesivamente. Un límite también puede tener una forma indeterminada como

$$x \rightarrow a^-, \quad x \rightarrow a^+, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \text{o bien,} \quad x \rightarrow \infty.$$

Límites de la forma

$$\frac{0}{k}, \quad \frac{k}{0}, \quad \frac{\infty}{k} \quad \text{y} \quad \frac{k}{\infty},$$



donde k es una constante *diferente de cero*, no son formas indeterminadas. Merece la pena recordar que:

• El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o k/∞ es 0. (2)

• Un límite cuya forma es $k/0$ o ∞/k no existe. (3)

Al establecer si límites de cocientes como los que se muestran en (1) existen, usamos manipulaciones algebraicas de factorización, cancelación y división. No obstante, recuerde que en la demostración de $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ se usó un razonamiento geométrico elaborado. Sin embargo, la intuición algebraica y geométrica fracasan lamentablemente cuando intentan abordar un problema del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}},$$

que tiene una forma indeterminada $0/0$. El siguiente teorema es de utilidad cuando se demuestra una regla de suma importancia en la evaluación de muchos límites que tienen una forma indeterminada.

Teorema 4.5.1 Teorema del valor medio ampliado

Sean f y g continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b) . Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observe que el teorema 4.5.1 se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$. Aquí no se proporciona ninguna demostración de este teorema, que evoca la demostración del teorema 4.4.2.

La siguiente regla se denomina así en honor del matemático francés G.F.A. L'Hôpital.

Teorema 4.5.2 Regla de L'Hôpital

Suponga que f y g son diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al número a , excepto posiblemente en a mismo, y que $g'(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo salvo posiblemente en a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ es una forma indeterminada, y $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = L$ o $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4)$$

DEMOSTRACIÓN DEL CASO 0/0 Sea (r, s) el intervalo abierto. Como se supone que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

también puede asumirse que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Concluimos que f y g son continuas en a . Además, puesto que f y g son diferenciables, éstas son continuas sobre los intervalos abiertos (r, a) y (a, s) . En consecuencia, f y g son continuas en el intervalo (r, s) . Luego, para cualquier $x \neq a$ en el intervalo, el teorema 4.5.1 es aplicable a $[x, a]$ o $[a, x]$. En cualquier caso, entre x y a existe un número c tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Al hacer $x \rightarrow a$ implica $c \rightarrow a$, y entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$, por (4) es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

La letra *h* en cursiva roja arriba de la primera desigualdad indica que los dos límites son iguales como resultado de aplicar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 2 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$, se aplica (4):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} (e^x - e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

El resultado proporcionado en (4) sigue siendo válido cuando $x \rightarrow a$ se sustituye por límites por un lado o por $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$. La demostración para el caso $x \rightarrow \infty$ puede obtenerse al usar la sustitución $x = 1/t$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x)$ y al observar que $x \rightarrow \infty$ es equivalente a $t \rightarrow 0^+$.

EJEMPLO 3 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada ∞/∞ . Así, por la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x}.$$

En este último límite, $xe^x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, mientras 1 permanece constante. En consecuencia, por (2),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Al resolver un problema puede ser necesario aplicar varias veces la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 4 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

Solución Resulta evidente que la forma indeterminada es ∞/∞ , de modo que por (4),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 5}{8x + 2}.$$

Puesto que el nuevo límite sigue teniendo la forma indeterminada ∞/∞ , aplicamos (4) por segunda vez:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 5}{8x + 2} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} = \frac{3}{2}.$$

EJEMPLO 5 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$.

Solución El límite dado y el límite obtenido después de una aplicación de la regla de L'Hôpital tienen la forma indeterminada ∞/∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{3x}}{2x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (4), observamos que $e^{3x} \rightarrow \infty$ mientras el denominador permanece constante. A partir de ello concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \infty.$$

En otras palabras, el límite no existe.

EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{e^{2x}}$.

Solución Aplicamos (4) cuatro veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{e^{2x}} &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty) \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{4e^{2x}} \quad (\infty/\infty) \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty) \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4e^{2x}} = 0. \end{aligned}$$

En aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital, algunas veces es posible cambiar un límite de una forma indeterminada a otra; por ejemplo, ∞/∞ a $0/0$.

EJEMPLO 7 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t}$.

Solución Se observa que $\tan t \rightarrow -\infty$ y $\tan 3t \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \pi/2^+$. Entonces, por (4),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t} &\stackrel{h}{=} \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sec^2 t}{3 \sec^2 3t} \quad (\infty/\infty) && \leftarrow \text{se vuelve a escribir usando } \sec t = 1/\cos t \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos^2 3t}{3 \cos^2 t} \quad (0/0) \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{2 \cos 3t (-3 \sin 3t)}{6 \cos t (-\sin t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{2 \sin 3t \cos 3t}{2 \sin t \cos t} && \leftarrow \text{se vuelve a escribir usando la fórmula} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sin 6t}{\sin 2t} \quad (0/0) && \text{del ángulo doble en el numerador} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \frac{6 \cos 6t}{2 \cos 2t} = \frac{-6}{-2} = 3. && \text{y en el denominador} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Solución El límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/x}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0. \quad \blacksquare$$

■ **Otras formas indeterminadas** Hay cinco formas indeterminadas adicionales:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty. \quad (5)$$

Por medio de una combinación de álgebra y un poco de astucia a menudo es posible convertir una de estas nuevas formas de límites ya sea a $0/0$ o a ∞/∞ .

■ **La forma $\infty - \infty$** El siguiente ejemplo ilustra un límite que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Este ejemplo debe anular cualquier convicción garantizada de que $\infty - \infty = 0$.

EJEMPLO 9 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3x+1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right]$.

Solución Se observa que $(3x+1)/\sin x \rightarrow \infty$ y $1/x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. No obstante, después de escribir la diferencia como una fracción simple, se identifica la forma $0/0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3x+1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + x - \sin x}{x \sin x} && \leftarrow \text{común denominador} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x + 1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 + \sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} \\ &= \frac{6+0}{0+2} = 3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ **La forma $0 \cdot \infty$** Si

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |g(x)| \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Un límite que tiene esta forma puede cambiarse a uno con la forma $0/0$ o ∞/∞ al escribir, a su vez,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o bien,} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

EJEMPLO 10 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

Solución Puesto que $1/x \rightarrow 0$, tenemos $\sin(1/x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Por tanto, el límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Al escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$$

ahora tenemos la forma $0/0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x^{-2})\cos(1/x)}{(-x^{-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = 1. \end{aligned}$$

En la última línea se usó el hecho de que $1/x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\cos 0 = 1$. ■

■ **Las formas 0^0 , ∞^0 y 1^∞** Suponga que $y = f(x)^{g(x)}$ tiende a 0^0 , ∞^0 o 1^∞ cuando $x \rightarrow a$. Al tomar el logaritmo natural de y :

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

observamos que el miembro derecho de

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$$

tiene la forma $0 \cdot \infty$. Si se supone que $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow a} y) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^L \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Por supuesto, el procedimiento que acaba de presentarse es aplicable a límites que implican

$$x \rightarrow a^-, \quad x \rightarrow a^+, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{o bien,} \quad x \rightarrow -\infty.$$

EJEMPLO 11 Forma indeterminada 0^0

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$.

Solución Ya que $\ln x \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, por (2) concluimos que $1/\ln x \rightarrow 0$. Así, el límite dado tiene la forma indeterminada 0^0 . Luego, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1.$$

Observe que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{o bien,} \quad \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y\right) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^1$ o de manera equivalente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x} = e$. ■

EJEMPLO 12 Forma indeterminada 1^∞

Evalúe $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Solución Ya que $1 - 3/x \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, la forma indeterminada es 1^∞ . Si

$$y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} \quad \text{entonces} \quad \ln y = 2x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

Observe que la forma de $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \ln(1 - 3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras la forma de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

es $0/0$. Al aplicar (4) al último límite y simplificar obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\ln(1 - 3/x)}{1/x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\frac{3/x^2}{(1 - 3/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{(1 - 3/x)} = -6.$$

A partir de $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y) = -6$ concluimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^{-6}$ o

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}. \quad \blacksquare$$



L'Hôpital

■ **Posdata: Un poco de historia** Es cuestionable si el matemático francés **Marquis Guillaume François Antoine de L'Hôpital** (1661-1704) descubrió la regla que lleva su nombre. El resultado se debe probablemente a Johann Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital fue el primero en publicar la regla en su texto *Analyse des Infiniment Petits*. Este libro fue publicado en 1696 y es considerado como el primer libro de texto de cálculo.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) En la aplicación de la regla de L'Hôpital, los estudiantes a veces interpretan mal

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Recuerde que en la regla de L'Hôpital se utiliza el *cociente de derivadas* y no la *derivada del cociente*.

- ii) Analice un problema antes de saltar a su solución. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)/x$ es de la forma $1/0$ y, en consecuencia, no existe. La falta de previsión matemática al escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

es una aplicación incorrecta de la regla de L'Hôpital. Por supuesto, la “respuesta” carece de significado.

- iii) La regla de L'Hôpital no es un remedio para todas las formas indeterminadas. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/e^{x^2}$ es ciertamente de la forma ∞/∞ , pero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

no es de ayuda práctica.

Ejercicios 4.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

2. $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 27}{t - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\ln x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x + x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x}$

7. $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{5 \sin^2 t}{1 + \cos t}$

8. $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\theta^2 - 1}{e^{\theta^2} - e}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + 6x + 3x^2 - 6e^x}{x - \sin x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x^3}{5x + 7x^3}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot 2x}{\cot x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x/6)}{\arctan(x/2)}$

13. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^3 - 2t^2 + t - 2}$

14. $\lim_{r \rightarrow -1} \frac{r^3 - r^2 - 5r - 3}{(r + 1)^2}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{x^2}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x} + x}{e^{4x} + 3x}$

19. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln \sqrt{x}}{x - 1}$

21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{x - 2}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$

27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4}$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x - \sin^{-1} x}$

31. $\lim_{u \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin u)}{(2u - \pi)^2}$

33. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

35. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r - \cos r}{r - \sin r}$

37. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln^2(1 + 3x)}$

39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x \sin x}$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 1)}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x}$

24. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh t}{t^2}$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)^2}{x^2}$

28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}}{\sin(1/x)}$

30. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{1/3} - t^{1/2}}{t - 1}$

32. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\tan \theta}{\ln(\cos \theta)}$

34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{2x^2}$

36. $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\csc 7t}{\csc 2t}$

38. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} \right)^2$

40. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x^2 - 64}$

En los problemas 41-74, identifique el límite dado como una de las formas indeterminadas proporcionadas en (5). Use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

41. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

43. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$

45. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$

49. $\lim_{t \rightarrow 3} \left[\frac{\sqrt{t+1}}{t^2-9} - \frac{2}{t^2-9} \right]$

51. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \csc 4\theta$

53. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + e^x)^{e^{-x}}$

55. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t$

57. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{(1-\cos x)}$

59. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \sin^2(2/x)}$

61. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x^2+3x-4} \right]$

63. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x}$

65. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

67. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \left(\frac{5}{x} \right)$

69. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{e^x} - x^2 \right]$

71. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+1} \right)^x$

73. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sinh x)^{\tan x}$

42. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \csc x)$

44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

46. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2} \right]$

50. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right]$

52. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\sec^2 x)^{\tan x}$

54. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{x^2}$

56. $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h)^{4/h}$

58. $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$

60. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^{x^2}$

62. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$

64. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x}$

66. $\lim_{t \rightarrow \pi/4} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \tan 2t$

68. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$

70. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \sin x)^{\cot x}$

72. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} (\sec^3 \theta - \tan^3 \theta)$

74. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(\ln x)^2}$

En los problemas 75 y 76, identifique el límite dado.

75. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$

76. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 77 y 78, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada para el valor de n sobre el intervalo indicado. En cada caso, conjeture el valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

77. $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$; $n = 3$ sobre $[0, 15]$; $n = 4$ sobre $[0, 20]$; $n = 5$ sobre $[0, 25]$

78. $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$; $n = 3$ sobre $[0, 15]$; $n = 4$ sobre $[0, 15]$; $n = 5$ sobre $[0, 20]$

En los problemas 79 y 80, use $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$,

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!,$$

donde n es un entero positivo, y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

79. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$

80. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$

Aplicaciones

81. Considere el círculo que se muestra en la FIGURA 4.5.1.

a) Si el arco ABC mide 5 pulg de longitud, exprese el área A de la región sombreada como una función del ángulo indicado θ . [Sugerencia: El área de un sector circular es $\frac{1}{2}r^2\theta$ y la longitud del arco de un círculo es $r\theta$, donde θ se mide en radianes.]

b) Evalúe $\lim_{\theta \rightarrow 0} A(\theta)$

c) Evalúe $\lim_{\theta \rightarrow 0} dA/d\theta$

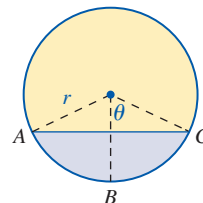


FIGURA 4.5.1 Círculo en el problema 81

82. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento, un modelo matemático para el desplazamiento $x(t)$ de una masa en un resorte (vea el problema 60 en los ejercicios 3.5) cuando el sistema es activado sinusoidalmente por una fuerza externa de amplitud F_0 y frecuencia $\gamma/2\pi$ es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t), \quad \gamma \neq \omega,$$

donde $\omega/2\pi$ es la frecuencia de las vibraciones libres (no excitadas) del sistema.

a) Cuando $\gamma = \omega$, se dice que el sistema masa-resorte está en **resonancia pura**, y el desplazamiento de la masa se define por

$$x(t) = \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t).$$

Determine $x(t)$ al encontrar este límite.

b) Use un dispositivo para graficar y analice la gráfica de $x(t)$ encontrada en el inciso a) en el caso en que $F_0 = 2$, $\gamma = \omega = 1$. Describa el comportamiento del sistema masa-resorte en resonancia pura cuando $t \rightarrow \infty$.

83. Cuando un gas ideal se expande a partir de la presión p_1 y volumen v_1 hasta la presión p_2 y volumen v_2 tal que $pv^\gamma = k$ (constante) durante toda la expansión, si $\gamma \neq 1$, entonces el trabajo realizado está dado por

$$W = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - \gamma}.$$

a) Demuestre que

$$W = p_1 v_1 \left[\frac{(v_2/v_1)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right].$$

b) Encuentre el trabajo realizado en el caso en que $pv = k$ (constante) durante toda la expansión al hacer $\gamma \rightarrow 1$ en la expresión en el inciso a).

84. La retina es más sensible a fotones que penetran al ojo cerca del centro de la pupila y menos sensible a la luz que entra cerca del borde de la pupila. (Este fenómeno se denomina **efecto Stiles-Crawford** del primer tipo.) El porcentaje σ de fotones que llegan a los fotopigmentos está relacionado con el radio de la pupila p (medido en radianes) por el modelo matemático

$$\sigma = \frac{1 - 10^{-0.05p^2}}{0.115p^2} \times 100.$$

Vea la FIGURA 4.5.2.

- a) ¿Qué porcentaje de fotones llega a los fotopigmentos cuando $p = 2$ mm?
- b) Según la fórmula, ¿cuál es el porcentaje limitante cuando el radio de la pupila tiende a cero? ¿Puede explicar por qué parece ser más de 100%?

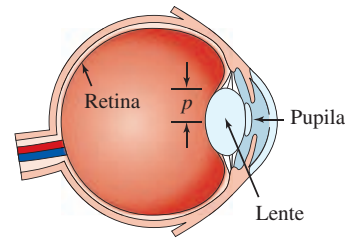


FIGURA 4.5.2 Ojo en el problema 84

■ Piense en ello

85. Suponga que una función f tiene segunda derivada. Evalúe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

86. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}.$$

- b) A partir de la gráfica en el inciso a), conjeture el valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- c) Explique por qué la regla de L'Hôpital no es válida para $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

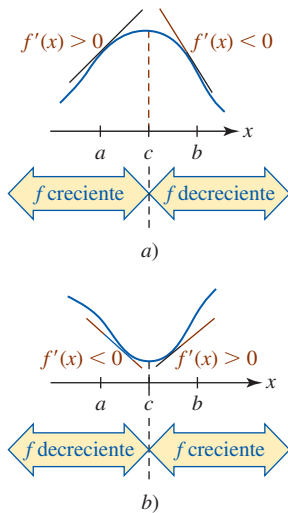


FIGURA 4.6.1 Máximo relativo en a); mínimo relativo en b)

4.6 Gráficas y la primera derivada

■ **Introducción** Saber que una función tiene, o no, extremos relativos es de gran ayuda al trazar su gráfica. En la sección 4.3 (teorema 4.3.2) vimos que cuando una función tiene un extremo relativo debe ocurrir en un número crítico. Al encontrar los números críticos de una función, tenemos una *lista de candidatos* para las coordenadas x de los puntos que corresponden a extremos relativos. A continuación se combinarán las ideas de las primeras secciones de este capítulo para establecer dos pruebas para determinar cuándo un número crítico es en realidad la coordenada x de un extremo relativo.

■ **Prueba de la primera derivada** Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b) , excepto tal vez en un número crítico c dentro del intervalo. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b) , entonces la gráfica de f sobre el intervalo (a, b) puede ser como se muestra en la FIGURA 4.6.1a); es decir, $f(c)$ es un máximo relativo. Por otra parte, cuando $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b) , entonces, como se muestra en la figura 4.6.1b), $f(c)$ es un mínimo relativo. Se han demostrado dos casos especiales del siguiente teorema.

Teorema 4.6.1 Prueba de la primera derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) excepto tal vez en el número crítico c .

- Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c , entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
- Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c , entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
- Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico a cada lado de c , entonces $f(c)$ no es un extremo.

Las conclusiones del teorema 4.6.1 pueden resumirse en una frase:

- Una función f tiene un extremo relativo en un número crítico c donde $f'(x)$ cambia de signo.

En la FIGURA 4.6.2 se ilustra cuál sería el caso cuando $f'(c)$ no cambia de signo en un número crítico c . En las figuras 4.6.2a) y 4.6.2b) se muestra una tangente horizontal en $(c, f(c))$ y

$f'(c) = 0$ pero $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo. En la figura 4.6.2c) se muestra una tangente vertical en $(c, f(c))$ y así $f'(c)$ no existe, pero de nuevo $f(c)$ no es un extremo relativo porque $f'(c)$ no cambia de signo en el número crítico c .

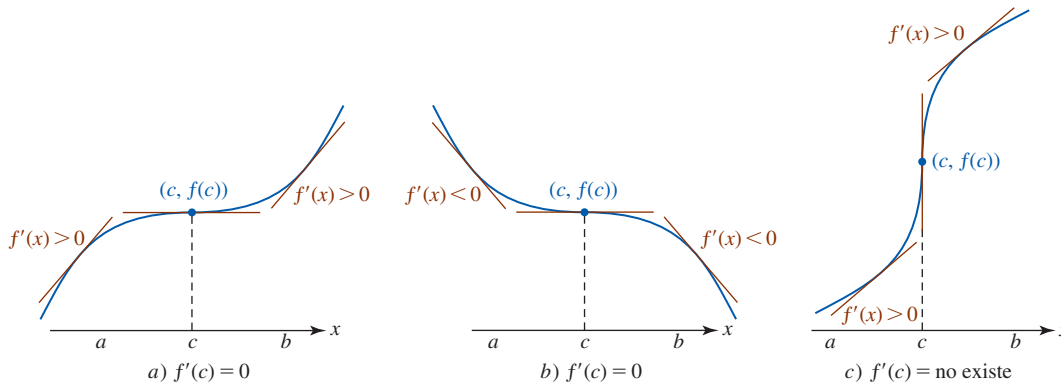


FIGURA 4.6.2 No hay extremo porque $f'(x)$ no cambia de signo en el número crítico c

En los cinco ejemplos siguientes se ilustra la utilidad del teorema 4.6.1 para trazar a mano la gráfica de una función f . Además del cálculo:

- Encuentre la derivada de f y factorice f' tanto como sea posible.
- Encuentre los números críticos de f .
- Aplique la prueba de la primera derivada a cada número crítico.

También resulta útil preguntar:

- ¿Cuál es el dominio de f ? intersecciones x : resuelva para $f(x) = 0$
- La gráfica de f , ¿tiene alguna intersección? ← intersección y : encuentre $f(0)$
- La gráfica de f , ¿tiene alguna simetría? ← determine si $f(-x) = f(x)$ o bien, $f(-x) = -f(x)$
- La gráfica de f , ¿tiene alguna asíntota?

Las funciones consideradas en los ejemplos 1 y 2 son polinomiales. Observe que estas funciones constan de potencias pares e impares de x ; esto es suficiente para concluir que las gráficas de estas funciones no son simétricas con respecto al eje y o al origen.

EJEMPLO 1 Función polinomial de grado 3

Grafique $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solución La primera derivada

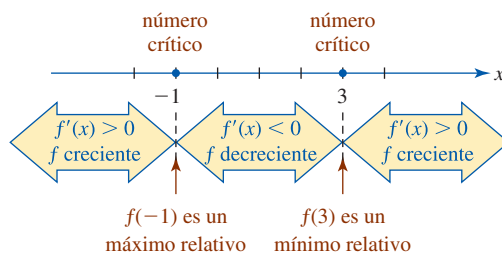
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \quad (1)$$

produce los números críticos -1 y 3 . Luego, la prueba de la primera derivada es esencialmente el procedimiento que se usó para encontrar los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente. En la FIGURA 4.6.3a) vemos que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$. En otras palabras, $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en -1 y así por el inciso i) del teorema 4.6.1 concluimos que $f(-1) = 7$ es un máximo relativo. En forma semejante, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < \infty$. Debido a que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 3 , el inciso ii) del teorema 4.6.1 indica que $f(3) = -25$ es un mínimo relativo. Luego, como $f(0) = 2$, el punto $(0, 2)$ es la intersección y para la gráfica de f . Además, al buscar si la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ tiene raíces positivas se encuentra que $x = -2$ es una raíz real. Luego, al dividir entre el factor $x + 2$ obtenemos $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. Cuando la fórmula cuadrática se aplica al factor cuadrático se encuentran dos raíces reales adicionales:

$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) \approx 0.21 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) \approx 4.79.$$

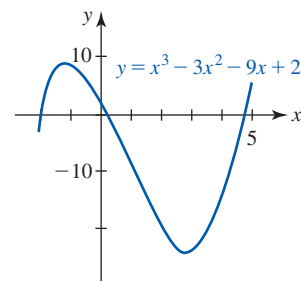
Entonces, las intersecciones x son $(-2, 0)$, $(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 0)$ y $(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 0)$. Al reunir toda esta información se llega a la gráfica mostrada en la figura 4.6.3b):

◀ Veas las MRS para un breve repaso de cómo encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales.



a) Prueba de la primera derivada

FIGURA 4.6.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

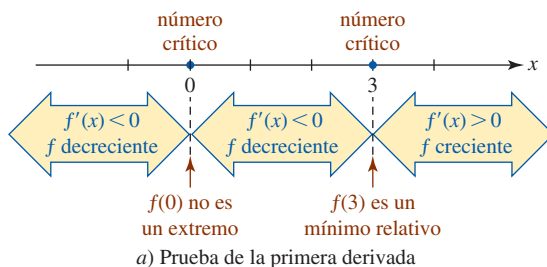


b) Observe las intersecciones x y y

EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4Grafique $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.**Solución** La derivada

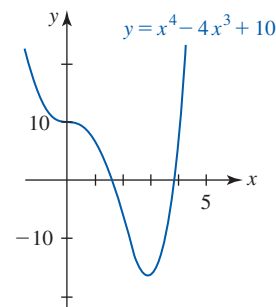
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que los números críticos son 0 y 3. Luego, como se observa en la FIGURA 4.6.4a), f' tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$. Entonces $f(0) = 10$ no es un extremo. En este caso $f'(0) = 0$ significa que en la intersección y $(0, f(0)) = (0, 10)$ hay una sola tangente horizontal. Sin embargo, por la prueba de la primera derivada resulta evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo. En efecto, la información de que f es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico 3 (la gráfica de f no puede retroceder) permite concluir que $f(3) = -17$ también es un *mínimo absoluto*. Por último, vemos que la gráfica de f tiene dos intersecciones x. Con ayuda de una calculadora o un SAC se encuentra que las intersecciones x son aproximadamente $(1.61, 0)$ y $(3.82, 0)$.



a) Prueba de la primera derivada

FIGURA 4.6.4 Gráfica de la función en el ejemplo 2

b) $f'(0) = 0$ pero $f(0) = 10$ no es un extremo**EJEMPLO 3** Gráfica de una función racional

$$\text{Grafique } f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}.$$

Solución La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional f antes de graficarla realmente.

intersección y: $f(0) = -3$; en consecuencia, la intersección y es $(0, -3)$.

intersecciones x: $f(x) = 0$ cuando $x^2 - 3 = 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Las intersecciones x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

Simetría: Con respecto al eje y, puesto que $f(-x) = f(x)$.

Asíntotas verticales: Ninguna, puesto que $x^2 + 1 \neq 0$ para todos los números reales.

Asíntotas horizontales: Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada ∞/∞ , podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1,$$

y así la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Derivada: Con la regla del cociente obtenemos $f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 1)^2}$.

Números críticos: $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En consecuencia, 0 es el único número crítico.

Prueba de la primera derivada: Vea la FIGURA 4.6.5a); $f(0) = -3$ es un mínimo relativo.

Grafique: Vea la figura 4.6.5b).

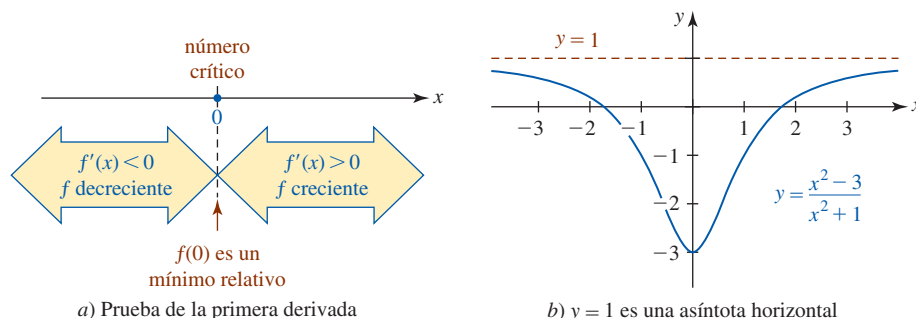


FIGURA 4.6.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Gráfica con una asíntota vertical

Grafique $f(x) = x^2 + x - \ln|x|$.

Solución Primero observe que el dominio de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Luego, al igualar a cero el denominador de la derivada

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x}$$

se observa que -1 y $\frac{1}{2}$ son números críticos. Aunque f no es diferenciable en $x = 0$, 0 no es un número crítico puesto que 0 no está en el dominio de f . De hecho, $x = 0$ es una asíntota vertical para $\ln|x|$ y también es una asíntota vertical para la gráfica de f . Los números críticos y 0 se escriben en la recta numérica porque el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de 0 indica el comportamiento de f . Como se observa en la FIGURA 4.6.6a), $f'(x) < 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$. Concluimos que $f(-1) = 0$ es un mínimo relativo (al mismo tiempo, $f(-1) = 0$ muestra que $x = -1$ es la coordenada x de una intersección x). Al continuar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \infty$ muestra que $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} \approx 1.44$ es otro mínimo relativo.

Como se observó, f no está definida en $x = 0$, de modo que no hay intersección y . Por último, no hay simetría con respecto al eje y o con respecto al origen. La gráfica de la función f se muestra en la figura 4.6.6b).

Verifique que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

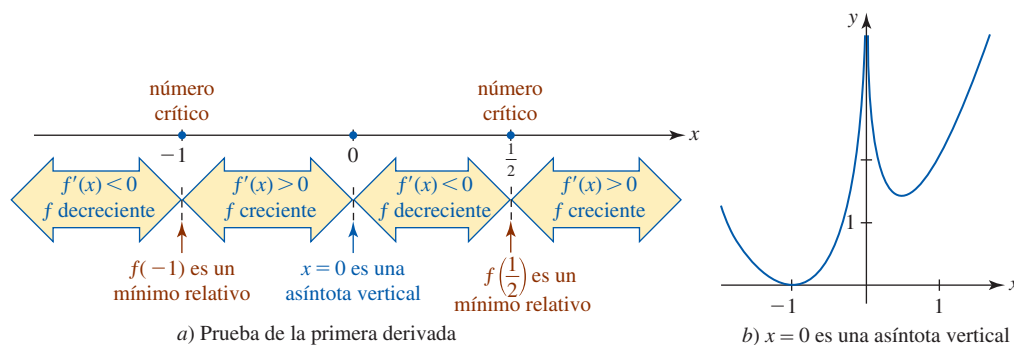


FIGURA 4.6.6 Gráfica de la función en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Gráfica con una cúspide

Grafique $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

Solución La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3} \frac{(-x + 2)}{x^{1/3}}.$$

Revise la definición de *cúspide* en la sección 3.2

Observe que f' no existe en 0 pero 0 está en el dominio de la función puesto que $f(0) = 0$. Los números críticos son 0 y 2. La prueba de la primera derivada, ilustrada en la FIGURA 4.6.7a), muestra que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo y que $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$ es un máximo relativo. Además, puesto que $f'(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $f'(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^-$ en $(0, 0)$ hay una cúspide. Por último, al escribir $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$, vemos que $f(x) = 0$ y que $x = 5$. Las intersecciones x son los puntos $(0, 0)$ y $(5, 0)$. La gráfica de f se muestra en la figura 4.6.7b).

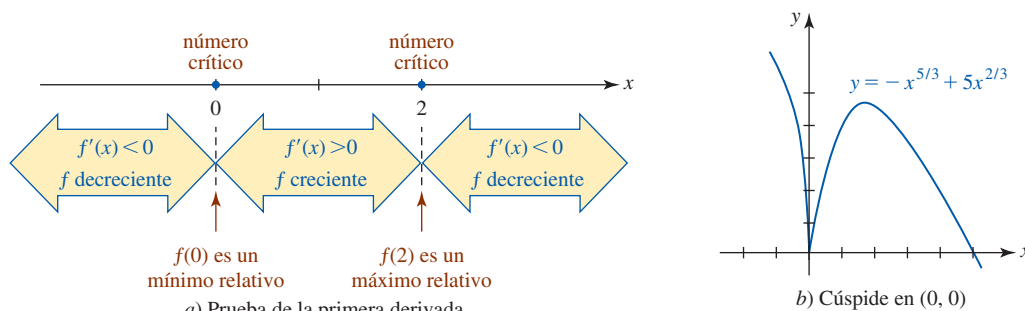


FIGURA 4.6.7 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Algunas veces resulta conveniente saber antes de graficar, e incluso antes de molestarse en graficar, si un extremo relativo $f(c)$ es un extremo *absoluto*. El siguiente teorema es algo útil. Usted debe trazar algunas gráficas y convencerse sobre la validez del teorema.

Teorema 4.6.2 Prueba del único número crítico

Suponga que c es el único número crítico de una función f dentro de un intervalo I . Si se demuestra que $f(c)$ es un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto.

En el ejemplo 3, mediante la prueba de la primera derivada se demostró que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo. También se hubiera podido concluir de inmediato que este valor de la función es un mínimo absoluto. Este hecho se concluye por el teorema 4.6.2 porque 0 es el único número crítico en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejercicios 4.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-32, use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique. Encuentre las intersecciones cuando sea posible.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
3. $f(x) = x^3 - 3x$
4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$
5. $f(x) = x(x - 2)^2$
6. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$
7. $f(x) = x^3 + x - 3$
8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$
9. $f(x) = x^4 + 4x$
10. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
11. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$
12. $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$
13. $f(x) = -x^2(x - 3)^2$
14. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 2$

15. $f(x) = 4x^5 - 5x^4$

17. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

19. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$

21. $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$

23. $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

25. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

27. $f(x) = x - 12x^{1/3}$

29. $f(x) = x^3 - 24 \ln|x|$

31. $f(x) = (x + 3)^2 e^{-x}$

16. $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$

18. $f(x) = x + \frac{25}{x}$

20. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

22. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$

26. $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$

28. $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$

30. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

32. $f(x) = 8x^2 e^{-x^2}$

En los problemas 33-36, trace una gráfica de la función f cuya derivada f' tiene la gráfica dada.

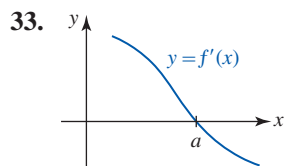


FIGURA 4.6.8 Gráfica para el problema 33

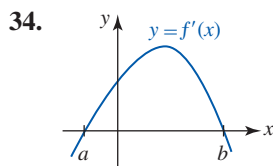


FIGURA 4.6.9 Gráfica para el problema 34

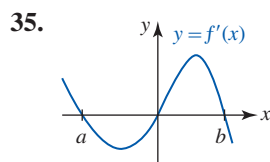


FIGURA 4.6.10 Gráfica para el problema 35

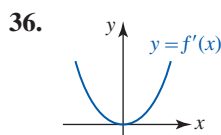


FIGURA 4.6.11 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f .

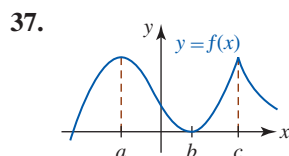


FIGURA 4.6.12 Gráfica para el problema 37

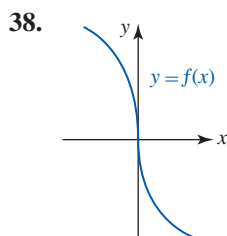


FIGURA 4.6.13 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39-42, trace una gráfica de una función f que tenga las propiedades dadas.

39. $f(-1) = 0, f(0) = 1$
 $f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$
 $f'(x) > 0, x < 3$ y $x > 5$
 $f'(x) < 0, 3 < x < 5$

40. $f(0) = 0$
 $f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$
 $f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$
 $f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$

41. $f(-x) = f(x)$
 $f(2) = 3$
 $f'(x) < 0, 0 < x < 2$
 $f'(x) > 0, x > 2$

42. $f(1) = -2, f(0) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, f'(4) = 0$
 $f'(x) < 0, x < 1$
 $f'(x) < 0, x > 4$

En los problemas 43 y 44, determine dónde la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

43. $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$ 44. $f(x) = x^4 - 6x^2$

45. a) A partir de la gráfica de $g(x) = \sin 2x$ determine los intervalos para los cuales $g(x) > 0$ y los intervalos para los cuales $g(x) < 0$.

- b) Encuentre los números críticos de $f(x) = \sin^2 x$. Use la prueba de la primera derivada y la información en el inciso a) para encontrar los extremos relativos de f .

- c) Trace la gráfica de la función f en el inciso b).

46. a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x - \sin x$.

- b) Demuestre que f no tiene extremos relativos.

- c) Trace la gráfica de f .

■ Aplicaciones

47. La **media aritmética**, o **promedio**, de n números $a_1, a_2, \dots, a_n$ está dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

- a) Demuestre que $\bar{x}$ es un número crítico de la función

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2.$$

- b) Demuestre que $f(\bar{x})$ es un mínimo relativo.

48. Cuando el sonido pasa de un medio a otro, puede perder algo de su energía debido a una diferencia en las resistencias acústicas de los dos medios. (La resistencia acústica es el producto de la densidad y la elasticidad.) La fracción de la energía transmitida está dada por

$$T(r) = \frac{4r}{(r + 1)^2},$$

donde r es la razón de las resistencias acústicas de los dos medios.

- a) Demuestre que $T(r) = T(1/r)$. Explique el significado físico de esta expresión.

- b) Use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de T .

- c) Trace la gráfica de la función T para $r \geq 0$.

■ Piense en ello

49. Encuentre valores de a, b y c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo 6 en $x = 2$ y la gráfica de f tenga intersección y igual a 4.

50. Encuentre valores de a, b, c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo -3 en $x = 0$ y un máximo relativo 4 en $x = 1$.

51. Suponga que f es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y . Demuestre que $f'(0) = 0$. ¿Tiene f necesariamente un extremo relativo en $x = 0$?

52. Sean m y n enteros positivos. Demuestre que $f(x) = x^m(x - 1)^n$ siempre tiene un mínimo relativo.

53. Suponga que f y g son diferenciables y que tienen máximos relativos en el mismo número crítico c .

- a) Demuestre que c es un número crítico para las $f + g, f - g$ y fg .

- b) ¿Se concluye que las $f + g, f - g$ y fg tienen máximos relativos en c ? Demuestre sus aseveraciones o dé un contraejemplo.

4.7 Gráficas y la segunda derivada

■ **Introducción** En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un extremo relativo de una función f ocurre en un número crítico.

■ **Concavidad** Tal vez usted tiene una idea *intuitiva* del significado de concavidad. En las FIGURAS 4.7.1a) y 4.7.1b) se ilustran formas geométricas **cóncavas hacia arriba** y **cóncavas hacia abajo**, respectivamente. Por ejemplo, el Arco de San Luis Missouri es cóncavo hacia abajo; los cables entre los soportes verticales del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba. A menudo decimos que una forma cóncava hacia arriba “contiene agua”, mientras una forma cóncava hacia abajo “derrama agua”. No obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.



a) “Contiene agua”



b) “Derrama agua”

FIGURA 4.7.1 Concavidad

Definición 4.7.1 Concavidad

Sea f una función diferenciable sobre un intervalo (a, b) .

- i) Si f' es una función creciente sobre (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava **hacia arriba** sobre el intervalo.
- ii) Si f' es una función decreciente sobre (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f crecen (decrecen) cuando x crece sobre (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba (abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes crecen (decrecen) cuando x crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo. La validez de la definición 4.7.1 se ilustra en la FIGURA 4.7.2. Una manera equivalente de considerar la concavidad también resulta evidente a partir de la figura 4.7.2. La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba (hacia abajo) sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba (abajo) de las rectas tangentes.

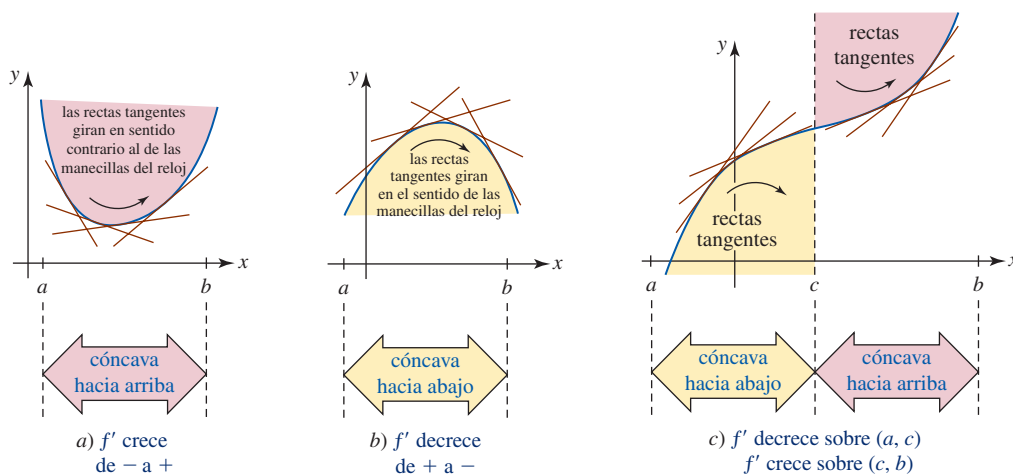


FIGURA 4.7.2 Concavidad sobre intervalos

■ **Concavidad y la segunda derivada** En el teorema 4.4.4 de la sección 4.4 vimos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente sobre un intervalo. En específico, si la función referida en la oración precedente es la derivada f' , entonces podemos concluir que el signo algebraico de la derivada de f' , es decir, f'' , indica cuándo f' es creciente o decreciente sobre un intervalo. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$ sobre (a, b) , entonces f' es creciente sobre (a, b) . Debido a la definición 4.7.1, si f' es creciente sobre (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. En consecuencia, se llega a la siguiente prueba para concavidad.

Teorema 4.7.1 Prueba para concavidad

Sea f una función para la cual f'' existe sobre (a, b) .

- i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b) .
- ii) Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b) .

EJEMPLO 1 Prueba para concavidad

Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

Solución A partir de $f'(x) = 3x^2 + 9x$ obtenemos

$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Se observa que $f''(x) < 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$ o $x < -\frac{3}{2}$ y que $f''(x) > 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ o $x > -\frac{3}{2}$. Por el teorema 4.7.1 concluimos que la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(-\frac{3}{2}, \infty)$. ■

■ **Punto de inflexión** La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = -\frac{3}{2}$. Cuando x crece a través de $-\frac{3}{2}$, la gráfica de f cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$. Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.

Definición 4.7.2 Punto de inflexión

Sea f continua sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c . Un punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si en $(c, f(c))$ hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en este punto.

Al volver a examinar el ejemplo 1 se observa que $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es continua en $-\frac{3}{2}$, tiene una recta tangente en $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ y cambia de concavidad en este punto. Por tanto, $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ es un punto de inflexión. También observe que $f''(-\frac{3}{2}) = 0$. Vea la FIGURA 4.7.3a). También sabemos que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en 0 y tiene una tangente vertical en $(0, 0)$ (vea el ejemplo 10 de la sección 3.1). A partir de $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ se observa que $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y que $f''(x) < 0$ para $x > 0$. Por tanto, $(0, 0)$ es un punto de inflexión. Observe que en este caso $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ no está definida en $x = 0$. Vea la figura 4.7.3b). Estos dos casos se ilustran en el siguiente teorema.

Teorema 4.7.2 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función f , entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

■ **Prueba de la segunda derivada** Si c es un número crítico de una función $y = f(x)$ y, por ejemplo, $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre algún intervalo abierto (a, b) que contiene a c . Entonces, necesariamente $f(c)$ es un mínimo relativo. En forma semejante, $f''(c) < 0$ en un valor crítico c implica que $f(c)$ es un máximo relativo. Este teorema se denomina **prueba de la segunda derivada** y se ilustra en la FIGURA 4.7.4.

Teorema 4.7.3 Prueba de la segunda derivada

Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número crítico c .

- i) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
- ii) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
- iii) Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso se usa la prueba de la primera derivada.

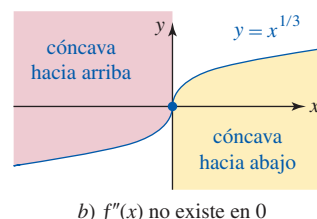
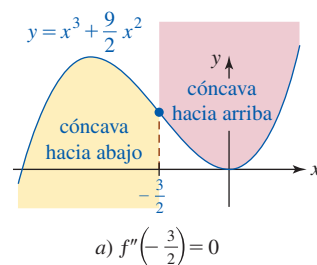


FIGURA 4.7.3 Puntos de inflexión

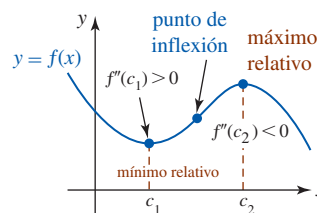


FIGURA 4.7.4 Prueba de la segunda derivada

En este punto podría plantearse la pregunta: ¿por qué se requiere otra prueba para extremos relativos cuando ya se cuenta con la prueba de la primera derivada? Si la función f en consideración es un polinomio, es muy sencillo calcular la segunda derivada. Al usar el teorema 4.7.3 sólo necesitamos determinar el signo algebraico de $f''(x)$ en el número crítico. Compare esto con el teorema 4.6.1, donde es necesario determinar el signo de $f'(x)$ en los números a la derecha y a la izquierda del número crítico. Si no es fácil factorizar f' , el último procedimiento puede ser algo difícil. Por otra parte, puede resultar igualmente tedioso usar el teorema 4.7.3 en el caso de algunas funciones que impliquen productos, cocientes, potencias, etcétera. Por tanto, los teoremas 4.6.1 y 4.7.3 pueden tener ventajas y desventajas,

EJEMPLO 2 Prueba de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 4x^4 - 4x^2$.

Solución A partir de $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^2(x + 1)(x - 1)$ se observa que la gráfica de f tiene las intersecciones $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Además, puesto que f es un polinomio que sólo tiene potencias pares, concluimos que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (función par). Así, las derivadas primera y segunda son

$$\begin{aligned}f'(x) &= 16x^3 - 8x = 8x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) \\f''(x) &= 48x^2 - 8 = 8(\sqrt{6}x + 1)(\sqrt{6}x - 1).\end{aligned}$$

A partir de f' vemos que los números críticos de f son 0 , $-\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}/2$. La prueba de la segunda derivada se resume en la tabla siguiente.

x	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	−	0	máximo relativo
$\sqrt{2}/2$	+	−1	mínimo relativo
$-\sqrt{2}/2$	+	−1	mínimo relativo

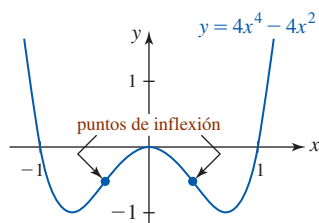


FIGURA 4.7.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

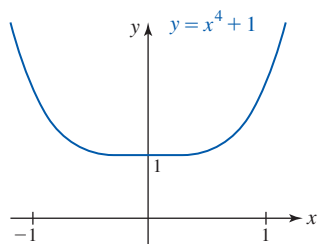


FIGURA 4.7.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Por último, a partir de la forma factorizada de f'' observamos que $f''(x)$ cambia de signo en $x = -\sqrt{6}/6$ y en $x = \sqrt{6}/6$. Por tanto, la gráfica de f tiene dos puntos de inflexión: $(-\sqrt{6}/6, -5/9)$ y $(\sqrt{6}/6, -5/9)$. Vea la FIGURA 4.7.5. ■

EJEMPLO 3 Fracaso de la prueba de la segunda derivada

Considere la función simple $f(x) = x^4 + 1$. A partir de $f'(x) = 4x^3$ vemos que 0 es un número crítico. Pero por la segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ obtenemos $f''(0) = 0$. Por tanto, la prueba de la segunda derivada no conduce a ninguna conclusión. No obstante, a partir de la primera derivada $f'(x) = 4x^3$ vemos lo siguiente:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x < 0 \quad \text{y} \quad f'(x) > 0 \quad \text{para } x > 0.$$

La prueba de la primera derivada indica que $f(0) = 1$ es un mínimo relativo. La FIGURA 4.7.6 muestra que $f(0) = 1$ es realmente un mínimo absoluto. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la segunda derivada

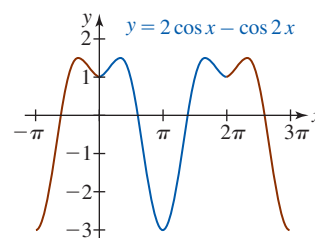
Grafique $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$.

Solución Debido a que $\cos x$ y $\cos 2x$ son pares, la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y . También, $f(0) = 1$ produce la intersección $(0, 1)$. Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = -2 \sin x + 2 \sin 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = -2 \cos x + 4 \cos 2x.$$

Al usar la identidad trigonométrica $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ es posible simplificar la ecuación $f'(x) = 0$ a $\sin x(1 - 2 \cos x) = 0$. Las soluciones de $\sin x = 0$ son $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ y las soluciones de $\cos x = \frac{1}{2}$ son $\pm\pi/3, \pm5\pi/3, \dots$. Pero como el periodo de f es 2π (¡ demuéstrelolo!), es suficiente considerar sólo los números críticos en $[0, 2\pi]$, a saber, $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π . En la tabla siguiente se resume la aplicación de la prueba de la segunda derivada a estos valores.

x	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	+	1	mínimo relativo
$\pi/3$	-	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
π	+	-3	mínimo relativo
$5\pi/3$	-	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
2π	+	1	mínimo relativo



La gráfica de f es la extensión con periodo 2π de la porción azul que se muestra en la FIGURA 4.7.7 sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

FIGURA 4.7.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. El converso de esta afirmación no necesariamente es verdadero. No es posible concluir, simplemente a partir del hecho de que cuando $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. En este sentido, en el ejemplo 3 vimos que $f''(0) = 0$ para $f(x) = x^4 + 1$. Pero a partir de la figura 4.7.6 resulta evidente que $(0, f(0))$ no es un punto de inflexión. También, para $f(x) = 1/x$, vemos que $f''(x) = 2/x^3$ está indefinida en $x = 0$ y que la gráfica de f cambia de concavidad en $x = 0$:

$$f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) > 0 \text{ para } x > 0.$$

No obstante, $x = 0$ no es la coordenada x de un punto de inflexión porque f no es continua en 0.

- ii) Usted no debe pensar que la gráfica de una función *debe tener* concavidad. Hay funciones perfectamente bien diferenciables cuyas gráficas no poseen concavidad. Vea el problema 60 en los ejercicios 4.7.
- iii) Usted debe estar al tanto de que los libros de texto no coinciden respecto a la definición precisa de punto de inflexión. Esto no es algo por lo cual deba preocuparse, pero si usted tiene interés, vea el problema 65 en los ejercicios 4.7.

Ejercicios 4.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-16.

Fundamentos

En los problemas 1-12, use la segunda derivada para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo. Grafique.

- $f(x) = -x^2 + 7x$
- $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$
- $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$
- $f(x) = (x + 5)^3$
- $f(x) = x(x - 4)^3$
- $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$
- $f(x) = x^{1/3} + 2x$
- $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$
- $f(x) = x + \frac{9}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$
- $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

En los problemas 13-16, a partir de la gráfica de la función dada f calcule los intervalos sobre los cuales f' es creciente y los intervalos sobre los cuales f' es decreciente.

13.

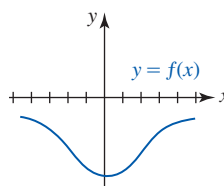


FIGURA 4.7.8 Gráfica para el problema 13

14.

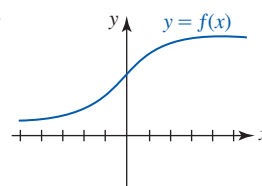


FIGURA 4.7.9 Gráfica para el problema 14

15.

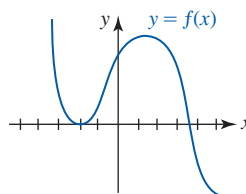


FIGURA 4.7.10 Gráfica para el problema 15

16.

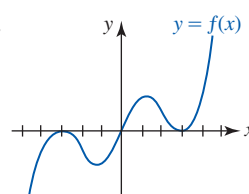


FIGURA 4.7.11 Gráfica para el problema 16

17. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\cos x < 0$.
18. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \csc x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\sin x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\sin x < 0$.

En los problemas 19-26, use la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

19. $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$ 20. $f(x) = x^{5/3} + 4x$
 21. $f(x) = \sin x$ 22. $f(x) = \cos x$
 23. $f(x) = x - \sin x$ 24. $f(x) = \tan x$
 25. $f(x) = x + xe^{-x}$ 26. $f(x) = xe^{-x^2}$

En los problemas 27-44, use la prueba de la segunda derivada, cuando sea pertinente aplicarla, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique y encuentre todos los puntos de inflexión cuando sea posible.

27. $f(x) = -(2x - 5)^2$ 28. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$
 29. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 30. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$
 31. $f(x) = 6x^5 - 10x^3$ 32. $f(x) = x^3(x + 1)^2$
 33. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ 34. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
 35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ 36. $f(x) = x\sqrt{x - 6}$
 37. $f(x) = x^{1/3}(x + 1)$ 38. $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$
 39. $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$ 40. $f(x) = 2 + \sin 2x$, $[0, 2\pi]$
 41. $f(x) = \cos x + \sin x$, $[0, 2\pi]$
 42. $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $[0, 2\pi]$
 43. $f(x) = 2x - x \ln x$ 44. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

En los problemas 45-48, determine si la función dada tiene un extremo relativo en el número crítico indicado.

45. $f(x) = \sin x \cos x$; $\pi/4$ 46. $f(x) = x \sin x$; 0
 47. $f(x) = \tan^2 x$; π 48. $f(x) = (1 + \sin 4x)^3$; $\pi/8$

En los problemas 49-52, trace una gráfica de una función que tenga las propiedades dadas.

49. $f(-2) = 0, f(4) = 0$ 50. $f(0) = 5, f(2) = 0$
 $f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$ $f'(2) = 0, f''(3)$ no existe
 $f''(x) < 0, x < 1, x > 2$ $f''(x) > 0, x < 3$
 $f''(x) > 0, 1 < x < 2$ $f''(x) < 0, x > 3$

51. $f(0) = -1, f(\pi/2) > 0$
 $f'(x) \geq 0$ para toda x
 $f''(x) > 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n$ par
 $f''(x) < 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n$ impar

52. $f(-x) = -f(x)$
 asíntota vertical $x = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 $f''(x) < 0, 0 < x < 2$
 $f''(x) > 0, x > 2$

≡ Piense en ello

53. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.
54. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión en $(1, 1)$.
55. Use la prueba de la segunda derivada como ayuda para graficar $f(x) = \sin(1/x)$. Observe que f es discontinua en $x = 0$.
56. Demuestre que la gráfica de una función polinomial general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

puede tener cuando mucho $n - 2$ puntos de inflexión.

57. Sea $f(x) = (x - x_0)^n$, donde n es un entero positivo.
 a) Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es un entero impar.
 b) Demuestre que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f , sino que corresponde a un mínimo relativo cuando n es un entero par.
58. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, es cóncava hacia arriba sobre el eje x cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo sobre el eje x cuando $a < 0$.
59. Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c . Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, ¿qué puede afirmarse sobre $(c, f(c))$?
60. Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad. No piense demasiado.
61. Demuestre o refute lo siguiente. Un punto de inflexión para una función f debe ocurrir en un valor crítico de f' .
62. Sin graficar, explique por qué la gráfica de $f(x) = 10x^2 - x - 40 + e^x$ no puede tener un punto de inflexión.
63. Demuestre o refute lo siguiente. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

64. Suponga que f es una función polinomial de grado 3 y que c_1 y c_2 son números críticos distintos.
 a) $f(c_1)$ y $f(c_2)$, ¿son necesariamente extremos relativos de la función? Demuestre su respuesta.
 b) ¿Cuál considera que es la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de f ? Demuestre su respuesta.

≡ Proyecto

65. **Puntos de inflexión** Encuentre otros libros de texto de cálculo y anote cómo definen el punto de inflexión. Luego, investigue en internet acerca de la definición de punto de inflexión. Escriba un breve artículo en que compare estas definiciones. Ilustre su artículo con gráficas idóneas.

4.8 Optimización

■ **Introducción** En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función; por ejemplo, una empresa tiene interés natural en maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos. La próxima vez que vaya al supermercado, observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 15 oz de alimento (0.01566569 pies³) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. En el mismo tenor, muchos de los denominados automóviles económicos comparten muchas características extraordinariamente semejantes. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado.

■ **Jugar con algunos números** Se empezará con un problema simple:

Encontrar dos números no negativos cuya suma sea 5 tales que el producto de uno y el cuadrado del otro sea el más grande posible.

(1)  En este punto se recomienda bastante repasar la sección 1.7.

En el ejemplo 1 de la sección 1.7 presentamos el problema:

La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números.

(2)

Al comparar (1) y (2) se observa que (2), donde simplemente se pide establecer una función, está contenido en el problema de cálculo (1). La parte de cálculo de (1) requiere encontrar números no negativos de modo que su producto sea máximo. Al revisar los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.7 se indica que el producto descrito en (1) es

$$P = x(5 - x)^2 \quad \text{o bien,} \quad P(x) = 25x - 10x^2 + x^3. \quad (3)$$

El dominio de la función $P(x)$ en (3) es el intervalo $[0, 5]$. Este hecho proviene de la combinación de las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ o del reconocimiento de que si se permite que x fuese más grande que 5, entonces y sería negativo, contradiciendo la hipótesis inicial. Hay una cantidad infinita de pares de números reales no negativos (rationales e irracionales) cuya suma es 5. ¡Observe que no dijimos *enteros* no negativos! Por ejemplo

Números: x, y	Producto: $P = xy^2$
1, 4	$P = 1 \cdot 4^2 = 16$
2, 3	$P = 2 \cdot 3^2 = 18$
$\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$	$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 10.125$
$\pi, 5 - \pi$	$P = \pi \cdot (5 - \pi)^2 \approx 10.85$

Pares de números como -1 y 6 , cuya suma es 5, se rechazan porque ambos números deben ser no negativos. ¿Cómo saber cuándo se han descubierto los números x y y que proporcionan el valor más grande; es decir, el máximo óptimo, de P ? La respuesta reside en darse cuenta que el dominio de la función $P(x)$ es el intervalo cerrado $[0, 5]$. Por el teorema 4.3.3 sabemos que la función continua $P(x)$ tiene un extremo absoluto ya sea en el punto frontera del intervalo o en un número crítico en el intervalo abierto $(0, 5)$. Por (3) vemos que $P'(x) = 25 - 20x + 3x^2 = (3x - 5)(x - 5)$ de modo que el único número crítico en el intervalo abierto $(0, 5)$ es $\frac{5}{3}$. Resulta evidente que los valores de la función $P(0) = 0$ y $P(5) = 0$ representan el producto mínimo, de modo que el producto máximo absoluto es $P\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}\left(5 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{500}{27} \approx 18.52$. En otras palabras, los dos números son $x = \frac{5}{3}$ y $y = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

■ **Terminología** En general, la función que describe la cantidad que se quiere optimizar, al encontrar su valor máximo o mínimo, se denomina **función objetivo**. La función en (3) es la función objetivo para el problema dado en (1). Una relación entre las variables en un problema

de optimización, como la ecuación $x + y = 5$ entre los números x y y en el análisis anterior, se denomina **restricción**. La restricción permite eliminar una de las variables en la construcción de la función objetivo, como $P(x)$ en (3), así como impone una limitación sobre la forma en que variables como x y y pueden variar en realidad. Vimos que las limitaciones $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ fueron de utilidad para inferir que el dominio de la función $P(x)$ en (3) era el intervalo $[0, 5]$. Usted debe considerar que el tipo de problemas coloquiales en esta sección *pueden o pueden no tener una restricción*.

■ Sugerencias En los ejemplos y problemas siguientes se proporciona una función objetivo y es necesario traducir el lenguaje coloquial a símbolos matemáticos y construir una función objetivo. Éstos son los tipos de problemas coloquiales que muestran el poder del cálculo y constituyen una de muchas respuestas posibles a la vieja pregunta: ¿para qué es bueno? Mientras no se garantice nada, hay algunas sugerencias que es necesario tomar en cuenta al resolver un problema de optimización. Primero y lo más importante:

Desarrolle una actitud positiva y analítica. Trate de ser claro y organizado.

Directrices para resolver problemas de optimización

- i) Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo.
- ii) Elabore un dibujo cuando sea posible; hágalo sencillo.
- iii) Introduzca variables (en su dibujo, en caso de haber alguna) y observe cualquier restricción entre las variables.
- iv) Use todas las variables necesarias para establecer la función objetivo. Si usa más de una variable, aplique la restricción para reducir la función a una variable.
- v) Note el intervalo en que está definida la función. Determine todos los números críticos.
- vi) Si la función objetivo es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto (a, b) .
- vii) Si la función objetivo está definida sobre un intervalo que no es cerrado, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada número crítico en ese intervalo.

En el primer ejemplo se analiza un modelo matemático que proviene de física.

EJEMPLO 1 Alcance máximo

Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \quad (4)$$

donde v_0 es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil.

Solución Como modelo físico del problema puede imaginarse que el proyectil es una bala de cañón. Vea la FIGURA 4.8.1. Para ángulos θ mayores que $\pi/2$, la bala de cañón mostrada en la figura debe salir hacia atrás. Por tanto, tiene sentido físico restringir la función en (4) al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. A partir de

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta$$

se observa que $dR/d\theta = 0$ cuando $\cos 2\theta = 0$ o $2\theta = \pi/2$, de modo que el único número crítico en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ es $\pi/4$. Al evaluar la función en los puntos finales y el número crítico obtenemos

$$R(0) = 0, \quad R(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}, \quad R(\pi/2) = 0.$$

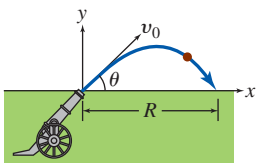


FIGURA 4.8.1 Bala de cañón en el ejemplo 1

Puesto que $R(\theta)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$, estos valores indican que el alcance mínimo es $R(0) = R(\pi/2) = 0$ y que el alcance máximo es $R(\pi/4) = v_0^2/g$. En otras palabras, para lograr la distancia máxima, el proyectil debe ser lanzado a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ■

Si las balas de cañón en el ejemplo 1 se disparan con la velocidad inicial v_0 pero con ángulos de elevación variables θ diferentes de 45° , entonces sus alcances horizontales son menores que $R_{\max} = v_0^2/g$. Al analizar la función en (4) se observa que obtenemos el mismo alcance horizontal para ángulos complementarios como 20° y 70° , y 30° y 60° . Vea la FIGURA 4.8.2. Si se toma en cuenta la resistencia del aire, el alcance de todos los proyectiles es más corto que v_0^2/g , aunque se hayan disparado a un ángulo de elevación de 45° .

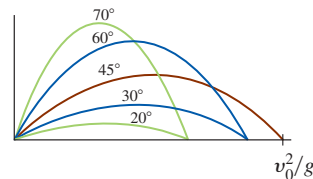


FIGURA 4.8.2 Mismo alcance para ángulos complementarios

EJEMPLO 2 Volumen máximo

Un canalón para agua de 20 pies de longitud tiene extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados miden 4 pies de longitud. Determine la dimensión a través del extremo triangular de modo que el volumen del canalón sea máximo. Encuentre el volumen máximo.

Solución El canalón con la dimensión desconocida x se muestra en la FIGURA 4.8.3. El volumen V del canalón es

$$V = (\text{área del extremo triangular}) \times (\text{longitud}).$$

Por la FIGURA 4.8.4 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular como una función de x es $\frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2/4}$. En consecuencia, el volumen del canalón como una función de x , la función objetivo, es

$$V(x) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{1}{4}x^2} \right) = 5x\sqrt{64 - x^2}.$$

La función $V(x)$ sólo tiene sentido sobre el intervalo cerrado $[0, 8]$. (¿Por qué?)

Al tomar la derivada y simplificar se obtiene

$$V'(x) = -10 \frac{x^2 - 32}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único número crítico en el intervalo abierto $(0, 8)$ es $4\sqrt{2}$. Puesto que la función $V(x)$ es continua sobre $[0, 8]$, sabemos por el teorema 4.3.3 que $V(0) = V(8) = 0$ debe ser su mínimo absoluto. Entonces, el máximo absoluto de $V(x)$ debe ocurrir cuando el ancho a través de la parte superior del canalón es $4\sqrt{2} \approx 5.66$ pies. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160$ pies³. ■

Nota: A menudo un problema puede resolverse en más de una forma. En retrospectiva, usted debe comprobar que la solución del ejemplo 2 es ligeramente “más limpia” si la dimensión a través de la parte superior del extremo del canalón se identifica como $2x$ en vez de como x . En efecto, como se muestra en el siguiente ejemplo, el ejemplo 2 puede resolverse usando una variable completamente distinta.

EJEMPLO 3 Solución alterna del ejemplo 2

Como se muestra en la FIGURA 4.8.5, θ denota el ángulo entre la vertical y uno de los lados. A partir de trigonometría de triángulos rectángulos, la altura y la base del extremo triangular son $4 \cos \theta$ y $8 \sin \theta$, respectivamente. Cuando V se expresa como una función de θ obtenemos $(\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}) \times (\text{longitud})$, o bien,

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}(4 \cos \theta)(8 \sin \theta) \cdot 20 \\ &= 320 \sin \theta \cos \theta \\ &= 160(2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 160 \sin 2\theta, \end{aligned}$$

← fórmula de doble ángulo

donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al proceder como en el ejemplo 1, encontramos que el valor máximo $V = 160$ pies³ ocurre en $\theta = \pi/4$. La dimensión a través de la parte superior del canalón, o la base del triángulo isósceles, es $8 \sin(\pi/4) = 4\sqrt{2}$ pies. ■

■ Problemas con restricciones A menudo es más conveniente plantear una función en términos de dos variables en lugar de una. En este caso es necesario encontrar una relación entre

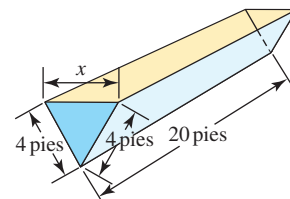


FIGURA 4.8.3 Canalón de agua en el ejemplo 2

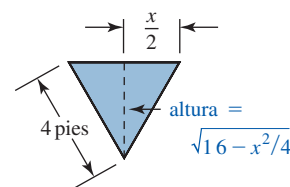


FIGURA 4.8.4 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 2

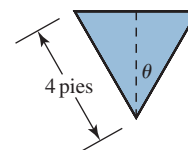


FIGURA 4.8.5 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 3

estas variables que pueden usarse para eliminar una de las variables de la función en consideración. Como se analizó junto con (1), esta relación suele ser una ecuación denominada **restricción**. Este concepto lo ilustran los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Punto más próximo

Encuentre el punto en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ más próximo a $(2, 4)$.

Solución Sea (x, y) , $x > 0$, $y > 0$ el punto sobre el círculo más próximo al punto $(2, 4)$. Vea la FIGURA 4.8.6.

Como se muestra en la figura, la distancia d entre (x, y) y $(2, 4)$ es

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \quad \text{o bien,} \quad d^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2.$$

Luego, el punto que minimiza el cuadrado de la distancia d^2 también minimiza la distancia d . Se escribirá $D = d^2$. Al desarrollar $(x-2)^2$ y $(y-4)^2$ y usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$ en la forma $y = \sqrt{1-x^2}$, encontramos

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 - 4x + 4 + \overbrace{(1-x^2)}^{y^2} - 8\sqrt{1-x^2} + 16 \\ &= -4x - 8\sqrt{1-x^2} + 21. \end{aligned}$$

Debido a que se ha supuesto que x y y son positivos, el dominio de la función anterior es el intervalo abierto $(0, 1)$. No obstante, la solución del problema no es afectada de ninguna manera si se supone que el dominio es el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Al diferenciar obtenemos

$$D'(x) = -4 - 4(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-4\sqrt{1-x^2} + 8x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Luego, $D'(x) = 0$ sólo si $-4\sqrt{1-x^2} + 8x = 0$ o $2x = \sqrt{1-x^2}$. Después de elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar, encontramos que $\sqrt{5}/5$ es el único número crítico en el intervalo $(0, 1)$. Debido a que $D(x)$ es continua sobre $[0, 1]$, a partir de los valores de la función

$$D(0) = 13, \quad D(\sqrt{5}/5) = 21 - 4\sqrt{5} \approx 12.06 \quad \text{y} \quad D(1) = 17$$

concluimos que D y, por consiguiente, la distancia d son mínimos cuando $x = \sqrt{5}/5$. Al usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$, de manera correspondiente encontramos que $y = 2\sqrt{5}/5$. Esto significa que $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$ es el punto sobre el círculo más próximo a $(2, 4)$. ■

EJEMPLO 5 Cerca mínima

Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de $1\,500 \text{ m}^2$. El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.

Solución Como se muestra en la FIGURA 4.8.7, x y y denotan las dimensiones del terreno cercado. La función que queremos minimizar es la cantidad total de cerca; es decir, la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca. Si esta suma se denota por el símbolo L , tenemos

$$L = 2x + 3y. \quad (5)$$

Debido a que el área del terreno cercado debe ser de $1\,500 \text{ m}^2$, x y y deben estar relacionados por el requisito de que $xy = 1\,500$. Usamos esta restricción en la forma $y = 1\,500/x$ para eliminar y en (5) y escribir la función objetivo L como una función de x :

$$L(x) = 2x + \frac{4\,500}{x} \quad (6)$$

Puesto que x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,500$, concluimos que es positiva. Pero aparte de esta restricción, sobre x no hay ninguna otra restricción. Por tanto,

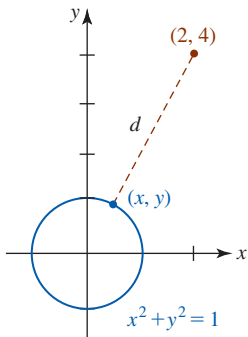


FIGURA 4.8.6 Círculo y punto en el ejemplo 4

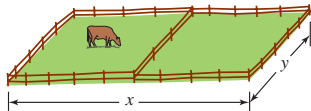


FIGURA 4.8.7 Terreno rectangular en el ejemplo 5

a diferencia de los ejemplos anteriores, la función en consideración no está definida sobre un intervalo cerrado; $L(x)$ está definida sobre el intervalo no acotado $(0, \infty)$.

Al igualar a cero la derivada

$$L'(x) = 2 - \frac{4\,500}{x^2}$$

y despejar x , encontramos que el único número crítico es $15\sqrt{10}$. Puesto que es fácil calcular la segunda derivada, usamos la prueba de la segunda derivada. A partir de

$$L''(x) = \frac{9\,000}{x^3}$$

observamos que $L''(15\sqrt{10}) > 0$. Por el teorema 4.7.3 concluimos que $L(15\sqrt{10}) = 2(15\sqrt{10}) + 4\,500/(15\sqrt{10}) = 60\sqrt{10}$ m es la cantidad mínima requerida de cerca. Volviendo a la restricción $y = 1\,500/x$, encontramos que el valor correspondiente de y es $10\sqrt{10}$. En consecuencia, las dimensiones del terreno deben ser $15\sqrt{10}$ m $\times$ $10\sqrt{10}$ m. ■

Si un objeto se mueve a razón constante, entonces la distancia, la razón y el tiempo están relacionados por *distancia = razón $\times$ tiempo*. Este resultado se usará en el último ejemplo en la forma

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{razón}}. \quad (7)$$

EJEMPLO 6 Tiempo mínimo

Una mujer en el punto P sobre una isla desea llegar a una población situada en el punto S sobre una playa recta en tierra firme. El punto P está a 9 millas del punto más próximo Q sobre la playa y la población en el punto S está a 15 millas de Q . Vea la FIGURA 4.8.8. Si la mujer rema un bote a razón de 3 mi/h hacia un punto R en tierra, luego camina el resto del camino hacia S a razón de 5 mi/h, determine dónde debe desembarcar en la playa a fin de minimizar el tiempo total de viaje.

Solución Como se muestra en la figura, si x denota la distancia del punto Q en la playa al punto R donde la mujer desembarca en la playa, entonces por el teorema de Pitágoras, la distancia que ella rema es $\sqrt{81 + x^2}$. La distancia que camina es $15 - x$. Por (7), el tiempo total del viaje desde P hasta S es

$$T = \text{tiempo de remado} + \text{tiempo caminando}, \quad \text{o bien,} \quad T(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{3} + \frac{15 - x}{5}.$$

Puesto que $0 \leq x \leq 15$, la función $T(x)$ está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 15]$.

La derivada de T es

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{6}(81 + x^2)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Igualemos esta derivada a cero y despejamos x :

$$\begin{aligned} \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} &= \frac{1}{5} \\ \frac{x^2}{81 + x^2} &= \frac{9}{25} \\ 16x^2 &= 729 \\ x &= \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Es decir, $\frac{27}{4}$ es el único número crítico en $[0, 15]$. Puesto que $T(x)$ es continua sobre el intervalo, a partir de los tres valores de la función

$$T(0) = 6 \text{ h}, \quad T\left(\frac{27}{4}\right) = 5.4 \text{ h} \quad \text{y} \quad T(15) \approx 5.83 \text{ h}$$

el tiempo de viaje mínimo ocurre cuando $x = \frac{27}{4} = 6.75$. En otras palabras, la mujer desembarca en el punto R , a 6.75 millas del punto Q , y luego camina las 8.25 millas restantes hacia el punto S . ■

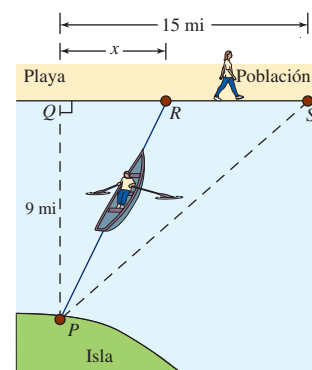


FIGURA 4.8.8 Mujer que se desliza en el ejemplo 6

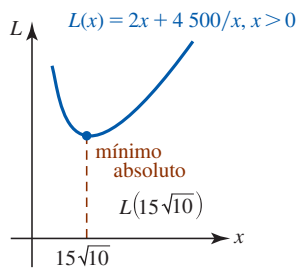


FIGURA 4.8.9 Gráfica de la función objetivo en el ejemplo 5

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Un lector perspicaz podría cuestionar por lo menos dos aspectos del ejemplo 5.

- En la solución, ¿dónde entra la hipótesis de que el terreno sea dividido en dos partes iguales? De hecho, no lo hace. Lo importante es que la cerca divisoria sea paralela a los dos extremos. Pregúntese cuál sería $L(x)$ si éste *no* fuera el caso. No obstante, la ubicación real de la cerca divisoria entre los extremos es irrelevante en tanto sea paralela a éstos.
- En un problema aplicado, por supuesto que tenemos interés sólo en los extremos absolutos. En consecuencia, otra pregunta podría ser: puesto que la función L en (6) no está definida sobre un intervalo cerrado y como la prueba de la segunda derivada no garantiza extremos absolutos, ¿cómo puede tenerse la certeza de que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo absoluto? Cuando se tengan dudas, siempre es posible trazar una gráfica. La FIGURA 4.8.9 responde la pregunta para $L(x)$. También, observe de nuevo el teorema 4.6.2 en la sección 4.6. Debido a que $15\sqrt{10}$ es el *único* número crítico en el intervalo $(0, \infty)$ y ya que se demostró que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo relativo, el teorema 4.6.2 garantiza que el valor de la función $L(15\sqrt{10}) = 60\sqrt{10}$ es un mínimo absoluto.

Ejercicios 4.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

- Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.
- Encuentre dos números no negativos cuyo producto sea 50 y cuya suma sea mínima.
- Encuentre un número que exceda su cuadrado por la mayor cantidad.
- Sean m y n enteros positivos. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea S de modo que el producto de la m -ésima potencia de uno y la n -ésima potencia del otro sea máximo.
- Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 1 de modo que la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro sea mínima.
- Encuentre el valor mínimo de la suma de un número no negativo y su recíproco.
- Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^2 = 6x$ más próximo(s) a $(5, 0)$, más próximo(s) a $(3, 0)$.
- Encuentre el punto sobre la gráfica de $x + y = 1$ más próximo a $(2, 3)$.
- Determine el punto sobre la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente mínima.
- Determine el punto sobre la gráfica de $y = 8x^2 + 1/x$ en que la recta tangente tiene pendiente máxima.

En los problemas 11 y 12, encuentre las dimensiones de la región sombreada de modo que su área sea máxima.

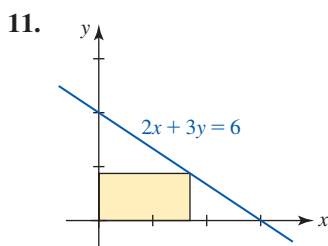


FIGURA 4.8.10 Gráfica para el problema 11

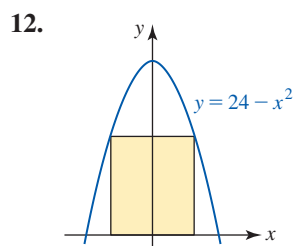


FIGURA 4.8.11 Gráfica para el problema 12

- Encuentre los vértices $(x, 0)$ y $(0, y)$ de la región triangular sombreada en la FIGURA 4.8.12 tal que su área sea mínima.

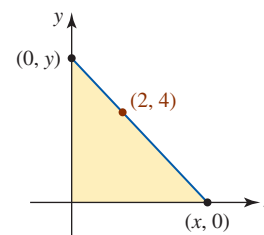


FIGURA 4.8.12 Gráfica para el problema 13

- Encuentre la distancia vertical máxima d entre las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x$ para $-2 \leq x \leq 1$. Vea la FIGURA 4.8.13.

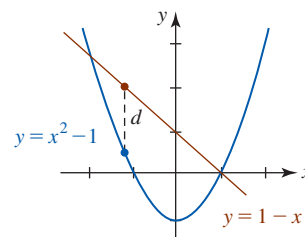


FIGURA 4.8.13 Gráfica para el problema 14

- Un granjero tiene 3 000 pies de cerca a la mano. Determine las dimensiones de un corral rectangular que contenga el área máxima.
- Un terreno rectangular ha de cercarse en tres porciones iguales al dividir cercas paralelas a dos lados. Vea la FIGURA 4.8.14. Si el área a encerrar es de $4\,000\text{ m}^2$, encuentre las dimensiones de terreno que requiere la cantidad mínima de cerca.

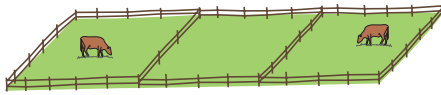


FIGURA 4.8.14 Terreno rectangular en el problema 16

17. Si la cantidad total de cerca usada es 8 000 m, encuentre las dimensiones de terreno encerrado en la figura 4.8.14 que tenga el área máxima.
18. Se piensa cercar un patio rectangular sujetando la cerca a una casa de 40 pies de ancho. Vea la FIGURA 4.8.15. La cantidad de cerca es 160 pies. Describa cómo debe usar la cerca de modo que se abarque la mayor área.

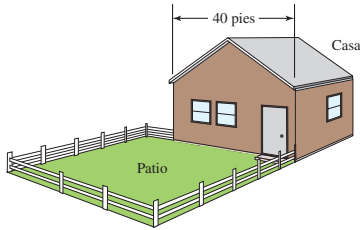


FIGURA 4.8.15 Casa y patio en el problema 18

19. Resuelva el problema 18 si la cantidad de cerca a usar mide 80 pies.
20. Un granjero desea construir un corral rectangular de 128 000 pies² con un lado a lo largo de un acantilado vertical. El cercado a lo largo del acantilado cuesta \$1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados cuesta \$2.50 por pie. Encuentre las dimensiones del corral, de modo que el costo del cercado sea mínimo.
21. Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32 000 cm³. Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.
22. En el problema 21, encuentre las dimensiones de una caja cerrada que requiera la menor cantidad de material.
23. Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza cuadrada de cartón cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados. En la FIGURA 4.8.16, los cuadrados blancos se han cortado y el cartón se ha doblado a lo largo de las líneas discontinuas. Dado que la pieza de cartón mide 40 cm por lado, encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

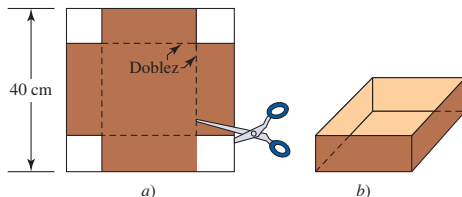


FIGURA 4.8.16 Caja abierta en el problema 23

24. Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza rectangular de cartón que mide 30 pulg de largo por 20 pulg de ancho. La caja puede cerrarse al cortar un cuadrado en cada esquina, al cortar sobre las líneas sólidas interiores y doblar luego el cartón por las líneas discon-

tinuas. Vea la FIGURA 4.8.17. Exprese el volumen de la caja como una función de la variable indicada x . Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

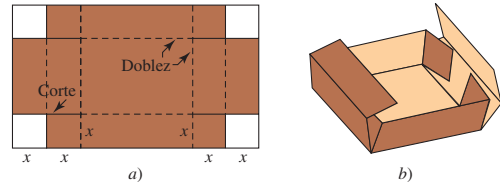


FIGURA 4.8.17 Caja abierta en el problema 24

25. Se producirá un canalón con sección transversal rectangular al doblar cantidades iguales de los extremos de una plancha de aluminio de 30 cm de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal de modo que el volumen sea máximo?
26. Se producirá un canalón cuya sección transversal es un trapecioide isósceles con dimensiones indicadas en la FIGURA 4.8.18. Determine el valor de θ tal que maximice el volumen.

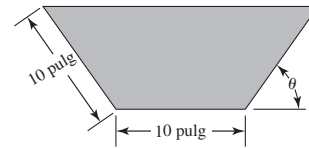


FIGURA 4.8.18 Canalón en el problema 26

27. Dos astabanderas están aseguradas con cables sujetos a un solo punto entre las astas. Vea la FIGURA 4.8.19. ¿Dónde debe ubicarse el punto a fin de minimizar la cantidad de cable usado?

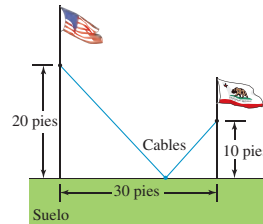


FIGURA 4.8.19 Astabanderas en el problema 27

28. La pista de carreras que se muestra en la FIGURA 4.8.20 debe constar de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares. La longitud de la pista debe medir 2 km. Encuentre el diseño de la pista de modo que el terreno rectangular encerrado por la pista sea máximo.



FIGURA 4.8.20 Pista de carreras en el problema 28

29. Una ventana normanda es un rectángulo con un semicírculo arriba de éste. Encuentre las dimensiones de la ventana con mayor área si su perímetro mide 10 m. Vea la FIGURA 4.8.21.

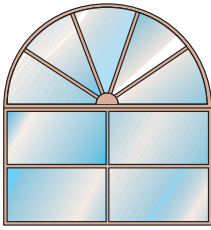


FIGURA 4.8.21 Ventana normanda en el problema 29

30. Vuelva a trabajar el problema 29 dado que el rectángulo está arriba de un triángulo equilátero.
31. Un muro de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio, como se muestra en la FIGURA 4.8.22. Encuentre la longitud L de la escalera más corta, apoyada en el muro, que llega desde el suelo hasta el edificio.

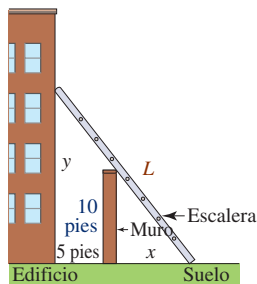


FIGURA 4.8.22 Escalera en el problema 31

32. Las regulaciones del servicio postal estadounidense establecen que una caja rectangular enviada por servicio de cuarta clase debe satisfacer el requerimiento de que su longitud más su circunferencia (perímetro de un extremo) no debe exceder 108 pulg. Dado que se elaborará una caja con base cuadrada, encuentre las dimensiones de la caja que tenga volumen máximo. Vea la FIGURA 4.8.23.

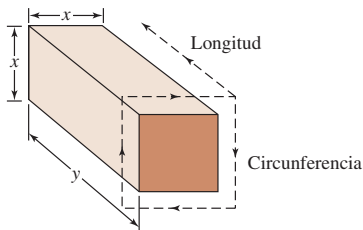


FIGURA 4.8.23 Caja en el problema 32

33. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de 8 pulg de radio y 12 pulg de altura. Vea la FIGURA 4.8.24.

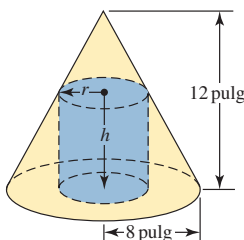


FIGURA 4.8.24 Cilindro inscrito en el problema 33

34. Encuentre la longitud máxima L de una lámina delgada que puede transportarse horizontalmente alrededor de una esquina en ángulo recto mostrada en la FIGURA 4.8.25. [Sugerencia: Utilice triángulos similares.]

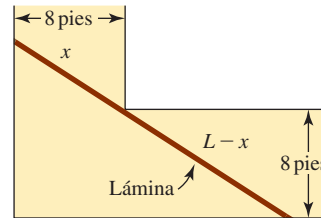


FIGURA 4.8.25 Lámina en el problema 34

35. Se producirá una lata para jugo en forma de cilindro circular recto con volumen de 32 pulg^3 . Vea la FIGURA 4.8.26. Encuentre las dimensiones de la lata de modo que para hacerla se use la menor cantidad de material. [Sugerencia: Material = área superficial total de la lata = área de la parte superior + área de la parte inferior + área de lado lateral. Si las partes circulares superior e inferior se retiran y el cilindro se corta en forma recta por el lado y se aplana, el resultado es el rectángulo mostrado en la figura 4.8.26c).]

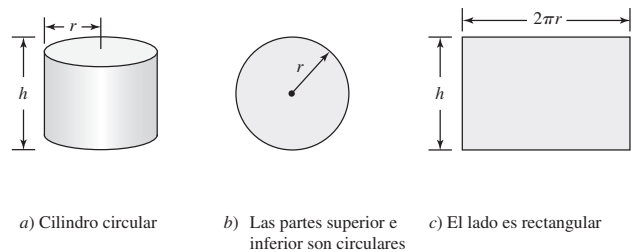


FIGURA 4.8.26 Lata de jugo en el problema 35

36. En el problema 35, suponga que las partes circulares superior e inferior se cortan de láminas metálicas cuadradas como se muestra en la FIGURA 4.8.27. Si se desperdicia el metal cortado de las esquinas de la lámina cuadrada, encuentre las dimensiones de la lata de modo que para elaborarla se use la menor cantidad de material (incluyendo el desperdicio).

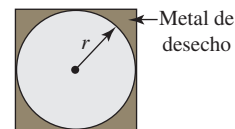


FIGURA 4.8.27 Partes superior e inferior de la lata en el problema 36

37. Algunas aves vuelan más lentamente sobre agua que sobre tierra. Un ave vuela a razones constantes de 6 km/h sobre agua y 10 km/h sobre tierra. Use la información de la FIGURA 4.8.28 para encontrar la trayectoria a la cual el ave debe seguir para minimizar el tiempo total de vuelo entre la costa de una isla y su nido ubicado en la costa de otra isla. [Sugerencia: Use $\text{distancia} = \text{razón} \times \text{tiempo}$.]

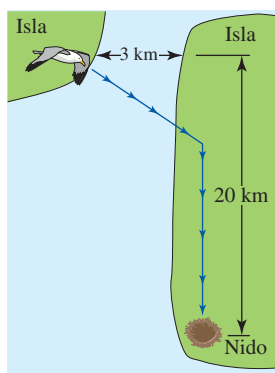


FIGURA 4.8.28 Ave en el problema 37

38. Se va a construir una tubería desde una refinería a través de un pantano hasta tanques de almacenamiento. Vea la FIGURA 4.8.29. El costo de construcción es \$25 000 por milla sobre el pantano y \$20 000 por milla sobre tierra. ¿Cómo debe construirse la tubería para que el costo de producción sea mínimo?

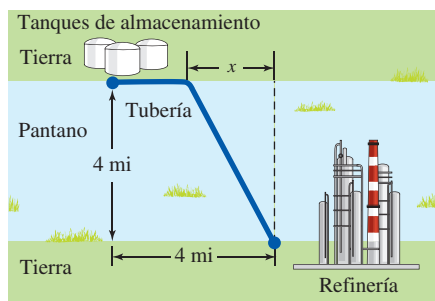


FIGURA 4.8.29 Tubería en el problema 38

39. Vuelva a trabajar el problema 38 dado que el costo por milla a través del pantano es el doble del costo por milla sobre tierra.
40. A medianoche, el barco A está a 50 km al norte del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 20 km/h y el barco B se dirige al oeste a 10 km/h. ¿En qué instante es mínima la distancia entre los barcos?
41. Un contenedor que transporta desechos peligrosos se fabrica de plástico pesado y se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto como se muestra en la FIGURA 4.8.30. El volumen total del contenedor es de 30π pie³. El costo por pie cuadrado para los extremos es una vez y media el costo por pie cuadrado del plástico usado en la parte cilíndrica. Encuentre las dimensiones del contenedor de modo que su costo de producción sea mínimo. [Sugerencia: El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área superficial es $4\pi r^2$.]

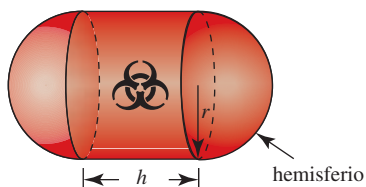


FIGURA 4.8.30 Contenedor en el problema 41

42. Una página impresa debe tener márgenes izquierdo y derecho de 2 pulg de espacio en blanco y márgenes superior e inferior de 1 pulg de espacio en blanco. Vea la FIGURA 4.8.31. El área de la porción impresa es 32 pulg². Determine las dimensiones de la página de modo que se use la menor cantidad de papel.

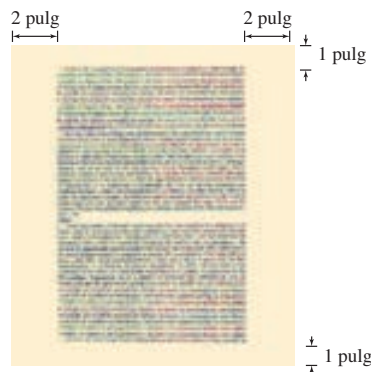


FIGURA 4.8.31 Página impresa en el problema 42

43. Una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg $\times$ 11 pulg se dobla sobre el otro borde del papel como se muestra en la FIGURA 4.8.32. Encuentre el ancho x del doblez de modo que la longitud L del pliegue sea mínima.

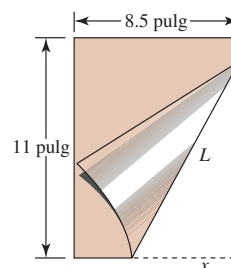


FIGURA 4.8.32 Pieza de papel en el problema 43

44. El marco de una cometa consta de seis partes de plástico ligero. Como se muestra en la FIGURA 4.8.33, el marco exterior de la cometa consta de cuatro piezas precortadas, dos piezas de 2 pies de longitud y dos piezas de 3 pies de longitud. Las partes restantes en forma de cruz, identificadas por x en la figura, deben cortarse de longitudes tales que la cometa sea lo más grande posible. Encuentre estas longitudes.

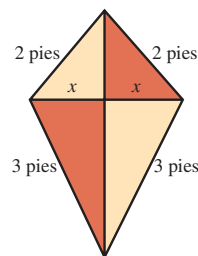


FIGURA 4.8.33 Cometa en el problema 44

45. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede circunscribirse alrededor de un rectángulo de longitud a y ancho b . Vea el rectángulo rojo en la FIGURA 4.8.34.

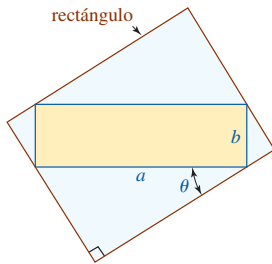


FIGURA 4.8.34 Rectángulo en el problema 45

46. Una estatua se coloca sobre un pedestal como se muestra en la FIGURA 4.8.35. ¿A qué distancia del pedestal debe pararse una persona para maximizar el ángulo de visión θ ? [Sugerencia: Revise la identidad trigonométrica para $\tan(\theta_2 - \theta_1)$. También es suficiente maximizar $\tan \theta$ más que θ . ¿Por qué?]

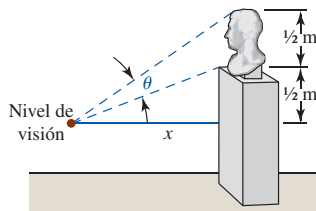


FIGURA 4.8.35 Estatua en el problema 46

47. La sección transversal de una viga de madera cortada de un tronco circular de diámetro d mide x de ancho y y de profundidad. Vea la FIGURA 4.8.36. La resistencia de la viga varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad. Encuentre las dimensiones de la sección transversal de máxima resistencia.

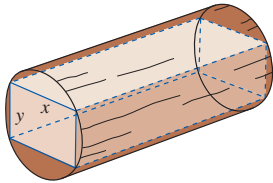


FIGURA 4.8.36 Tronco en el problema 47

48. El contenedor que se muestra en la FIGURA 4.8.37 se construirá al unir un cono invertido (abierto en la parte superior) con la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio 5 pies. El contenedor debe tener un volumen de 100 pies³. Encuentre el valor del ángulo indicado de modo que el área superficial total del contenedor sea mínima. ¿Cuál es el área superficial mínima? [Sugerencia: Vea el problema 38 en la parte C de la revisión del capítulo 1.]

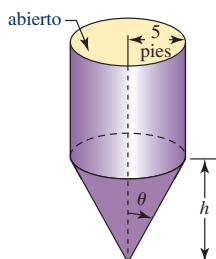


FIGURA 4.8.37 Contenedor en el problema 48

Modelos matemáticos

49. La iluminancia E debida a una fuente de luz o intensidad I a una distancia r de la fuente está dada por $E = I/r^2$. La iluminancia total proveniente de dos focos de intensidades $I_1 = 125$ e $I_2 = 216$ es la suma de las iluminancias. Encuentre el punto P entre los dos focos a 10 m de distancia de éstos en que la iluminancia total es mínima. Vea la FIGURA 4.8.38.

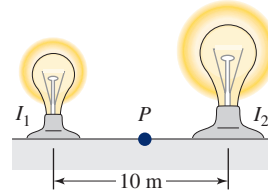


FIGURA 4.8.38 Focos en el problema 49

50. La iluminancia E en cualquier punto P sobre el borde de una mesa redonda originada por una luz colocada directamente arriba del centro de la mesa está dada por $E = (i \cos \theta)/r^2$. Vea la FIGURA 4.8.39. Dado que el radio de la mesa es 1 m y que $I = 100$, encuentre la altura en que debe colocarse la luz de modo que E sea máxima.

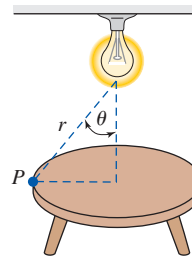


FIGURA 4.8.39 Luz y mesa en el problema 50

51. El **principio de Fermat** en óptica establece que la luz se desplaza del punto A (en el plano xy) en un medio hasta el punto B en otro medio siguiendo una trayectoria que requiere tiempo mínimo. Si c_1 es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto A y c_2 es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto B , demuestre que el tiempo de recorrido de A a B es mínimo cuando los ángulos θ_1 y θ_2 , que se muestran en la FIGURA 4.8.40, cumplen la **ley de Snell**:

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}.$$

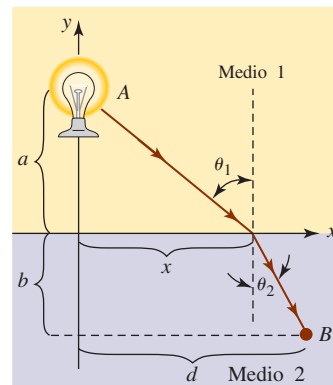


FIGURA 4.8.40 Dos medios en el problema 51

52. La sangre es transportada por el cuerpo mediante el tejido vascular, que consta de vasos capilares, venas, arteriolas y arterias. Una consideración de los problemas de minimización de la energía utilizada para mover la sangre a través de varios órganos consiste en encontrar un ángulo óptimo θ para la *ramificación vascular* de modo que sea mínima la resistencia total de la sangre a lo largo de una trayectoria de un vaso capilar más grande a un vaso capilar más pequeño. Vea la FIGURA 4.8.41. Use la **ley de Poiseuille**, que establece que la resistencia R de un vaso capilar de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, donde k es una constante, para demostrar que la resistencia total

$$R = k\left(\frac{x}{r_1^4}\right) + k\left(\frac{y}{r_2^4}\right)$$

a lo largo de la trayectoria $P_1P_2P_3$ es mínima cuando $\cos \theta = r_2^4/r_1^4$. [Sugerencia: Expresé x y y en términos de θ y a .]

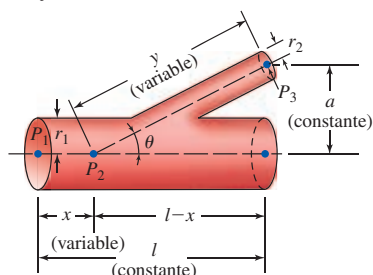


FIGURA 4.8.41 Ramificación vascular en el problema 52

53. La energía potencial entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = 2/x^{12} - 1/x^6$. Encuentre la energía potencial mínima entre los dos átomos.
54. La altitud de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante v_0 a un ángulo de elevación θ_0 está dada por $y = (\tan \theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}\right)x^2$, donde x es su desplazamiento horizontal medido desde el punto de lanzamiento. Demuestre que la altitud máxima alcanzada por el proyectil es $h = (v_0^2/2g) \sin^2 \theta_0$.
55. Una viga de longitud L se incrusta en muros de concreto como se muestra en la FIGURA 4.8.42. Cuando una carga constante w_0 se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la curva de desviación $y(x)$ para la viga está dada por

$$y(x) = \frac{w_0 L^2}{24EI} x^2 - \frac{w_0 L}{12EI} x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4,$$

donde E e I son constantes (E es el **módulo de elasticidad de Young** e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). La curva de desviación aproxima la forma de la viga.

- a) Determine la deflexión máxima de la viga.
b) Trace la gráfica de $y(x)$.

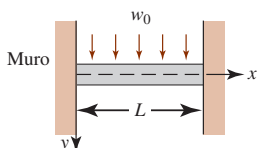


FIGURA 4.8.42 Viga en el problema 55

56. La relación entre la altura h y el diámetro d de un árbol puede aproximarse por la expresión cuadrática $h = 137 + ad - bd^2$, donde h y d se miden en centímetros, y a y b son parámetros positivos que dependen del tipo de árbol. Vea la FIGURA 4.8.43.

- a) Suponga que el árbol alcanza una altura máxima de H centímetros a un diámetro de D centímetros. Demuestre que

$$h = 137 + 2\frac{H - 137}{D}d - \frac{H - 137}{D^2}d^2.$$

- b) Suponga que cierto árbol alcanza su altura máxima posible (según la fórmula) de 15 m a un diámetro de 0.8 m. ¿Cuál es el diámetro del árbol cuando mide 10 m de alto?

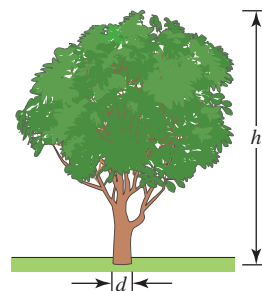


FIGURA 4.8.43 Árbol en el problema 56

57. Los huesos largos en los mamíferos pueden representarse como tubos cilíndricos huecos, llenos con médula, de radio exterior R y radio interior r . Se piensa fabricar huesos ligeros pero capaces de soportar ciertos momentos de flexión. Para resistir un momento de flexión M , puede demostrarse que la masa m por longitud unitaria del hueso y médula está dada por

$$m = \pi \rho \left[\frac{M}{K(1 - x^4)} \right]^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 \right),$$

donde ρ es la densidad del hueso y K es una constante positiva. Si $x = r/R$, demuestre que m es mínima cuando $r = 0.63R$ (aproximadamente).

58. La razón P (en mg de carbono/m³/h) a la cual se lleva a cabo la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton está relacionada con la intensidad de la luz I (en 10³ pies-candela) por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}.$$

¿A qué intensidad de la luz se cumple que P es máxima?

≡ Piense en ello

59. **Un clásico matemático** Una persona desea cortar una pieza de 1 m de longitud de alambre en dos partes. Una parte debe doblarse en forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea máxima?
60. En el problema 59, suponga que una parte del alambre se dobla en forma de círculo y que la otra se dobla en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea mínima? ¿Y máxima?

61. Un vaso cónico se elabora a partir de una pieza circular de papel de radio R al cortar un sector circular y luego unir los bordes sombreados como se muestra en la FIGURA 4.8.44.

- a) Determine el valor de r indicado en la figura 4.8.44b) de modo que el volumen del vaso sea máximo.
 b) ¿Cuál es el volumen máximo del vaso?
 c) Encuentre el ángulo central θ del sector circular de modo que el volumen del vaso cónico sea máximo.

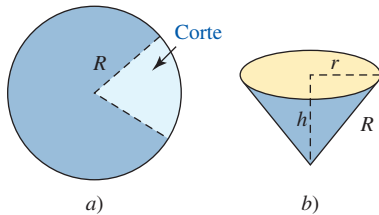
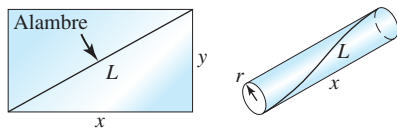


FIGURA 4.8.44 Vaso cónico en el problema 61

62. Se piensa elaborar la cara lateral de un cilindro a partir de un rectángulo de lámina de plástico ligero. Debido a que el material plástico no puede sostenerse por sí mismo, en el material se incrusta un delgado alambre rígido, como se muestra en la FIGURA 4.8.45a). Encuentre las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede elaborarse si el alambre tiene una longitud fija L . [Sugerencia: En este problema hay dos restricciones. En la figura 4.8.45b), la circunferencia de un extremo circular del cilindro es y .]



a) Lámina rectangular de plástico b) Lado del cilindro

FIGURA 4.8.45 Cilindro en el problema 62

63. En el problema 27, demuestre que cuando se usa la cantidad óptima de alambre (la cantidad mínima) entonces el ángulo θ_1 que el alambre del asta bandera izquierda forma con el suelo es el mismo que el ángulo θ_2 que el alambre del asta bandera derecha forma con el suelo. Vea la figura 4.8.19.
64. Encuentre una ecuación de la recta tangente L a la gráfica de $y = 1 - x^2$ en $P(x_0, y_0)$ tal que el triángulo en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y L tenga área mínima. Vea la FIGURA 4.8.46.

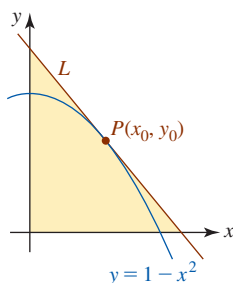


FIGURA 4.8.46 Triángulo en el problema 64

Problemas con calculadora/SAC

65. En una carrera, a una mujer se le solicita que nade desde un muelle flotante A hacia la playa y , sin detenerse, que nade de la playa hacia otro muelle flotante C . Las distancias se muestran en la FIGURA 4.8.47a). La mujer calcula que puede nadar del muelle A a la playa y luego al muelle C a razón constante de 3 mi/h y luego del muelle C a la playa a una razón de 2 mi/h. ¿Dónde debe tocar la playa a fin de minimizar el tiempo total de natación de A a C ? Introduzca un sistema de coordenadas xy como se muestra en la figura 4.8.47b). Use una calculadora o un SAC para encontrar los números críticos.

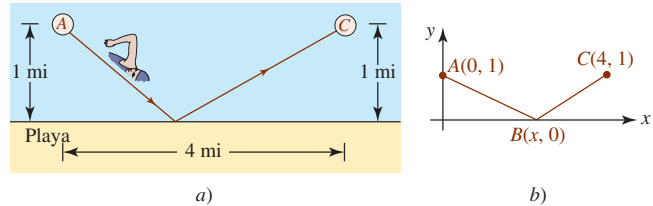


FIGURA 4.8.47 Nadadora en el problema 65

66. Una casa de dos pisos en construcción consta de dos estructuras A y B con secciones transversales rectangulares como se muestra en la FIGURA 4.8.48. Para elaborar el armazón de la estructura B se requieren sostenes temporales de madera desde el nivel del suelo apoyados contra la estructura A como se muestra.
- a) Expresé la longitud L del sostén como una función del ángulo θ indicado.
 b) Encuentre $L'(\theta)$.
 c) Use una calculadora o un SAC para encontrar la gráfica de $L'(\theta)$ sobre el intervalo $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para demostrar que L sólo tiene un número crítico θ_c en $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para determinar el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $0 < \theta < \theta_c$, y el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $\theta_c < \theta < \pi/2$. ¿Cuál es su conclusión?
 d) Encuentre la longitud mínima de un sostén.

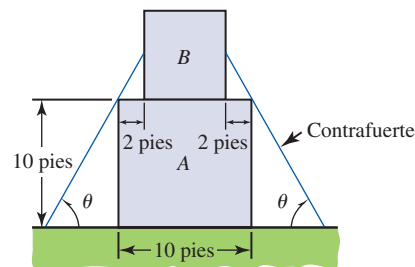


FIGURA 4.8.48 Casa en el problema 66

67. Considere los tres cables mostrados en la FIGURA 4.8.49.
- a) Expresé la longitud total L de los tres cables mostrados en la figura 4.8.49a) como una función de la longitud L del cable AB .
 b) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de L tiene un mínimo.
 c) Expresé la longitud del cable AB de modo que la longitud total L de las longitudes de los tres cables sea mínima.

- d) Exprese la longitud total L de los tres cables mostrados en la figura 4.8.49b) como una función de la longitud del cable AB .
- e) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de L tiene un mínimo.
- f) Use la gráfica obtenida en el inciso e) o un SAC como ayuda en la aproximación de la longitud del cable AB que minimiza la función L obtenida en el inciso d).

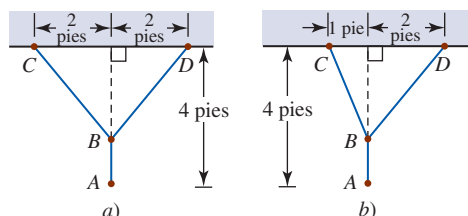


FIGURA 4.8.49 Cables en el problema 67

Proyecto

68. Interferencia de frecuencia Cuando la Administración Federal de Aviación (FAA, por sus siglas en inglés) asigna numerosas frecuencias para un radiotransmisor en un aeropuerto, bastante a menudo los transmisores cercanos usan las mismas frecuencias. Como consecuencia, la FAA intenta minimizar la interferencia entre estos transmisores. En la FIGURA 4.8.50, el punto (x_t, y_t) representa la ubicación de un transmisor cuya jurisdicción radial está indicada por el círculo C de radio con centro en el origen. Un segundo transmisor se encuentra en $(x_i, 0)$ como se muestra en la figura. En este problema, usted desarrolla y analiza una función para encontrar la interferencia entre dos transmisores.

- a) La intensidad de la señal de un transmisor a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos. Suponga que un punto (x, y) está ubicado sobre la porción superior del círculo C como se muestra en la figura 4.8.50. Exprese la intensidad primaria de la señal en (x, y) desde un transmisor en (x_t, y_t) como una función de x . Exprese la intensidad secundaria en (x, y) desde el transmisor en $(x_i, 0)$ como una función de x . Luego defina una función

$R(x)$ como un cociente de la intensidad primaria de la señal entre la intensidad secundaria de la señal. Puede considerarse que $R(x)$ es una *razón señal a ruido*. Para garantizar que la interferencia permanezca pequeña es necesario demostrar que la razón señal a ruido mínima es mayor que el umbral mínimo de la FAA de -0.7 .

- b) Suponga que $x_t = 760$ m, $y_t = -560$ m, $r = 1.1$ km y $x_i = 12$ km. Use un SAC para simplificar y luego trazar la gráfica de $R(x)$. Use la gráfica para estimar el dominio y el rango de $R(x)$.
- c) Use la gráfica en el inciso b) para estimar el valor de x donde ocurre la razón mínima R . Estime el valor de R en ese punto. Este valor de R , ¿excede el umbral mínimo de la FAA?
- d) Use un SAC para diferenciar $R(x)$. Use un SAC para encontrar la raíz de $R'(x) = 0$ y para calcular el valor correspondiente de $R(x)$. Compare sus respuestas aquí con las estimaciones en el inciso c).
- e) ¿Cuál es el punto (x, y) sobre el círculo C ?
- f) Se supuso que el punto (x, y) estaba en el semiplano superior cuando (x_t, y_t) estaba en el semiplano inferior. Explique por qué esta suposición es correcta.
- g) Use un SAC para encontrar el valor de x donde ocurre la interferencia mínima en términos de los símbolos x_t, y_t, x_i y r .
- h) ¿Dónde está el punto que minimiza la razón señal a ruido cuando el transmisor en (x_t, y_t) está sobre el eje x ? Proporcione un argumento convincente y justifique su respuesta.

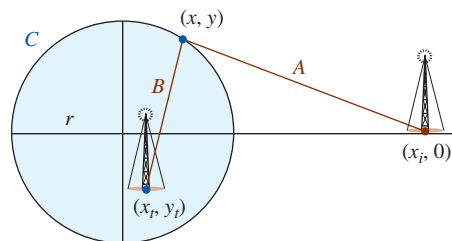


FIGURA 4.8.50 Radiotransmisores en el problema 68

4.9 Linealización y diferenciales

Introducción Empezamos el análisis de la derivada con el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que una recta tangente esté muy próxima a la gráfica de f siempre que x esté cerca del número a . En otras palabras, cuando x está en una pequeña vecindad de a , los valores de la función $f(x)$ están muy próximos al valor de las coordenadas y de la recta tangente. Así, al encontrar una ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ podemos usar esa ecuación para aproximar $f(x)$.

Una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 4.9.1 está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{o bien,} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (1)$$

Al usar notación funcional estándar, la última ecuación en (1) se escribirá como $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta función lineal recibe un nombre especial.

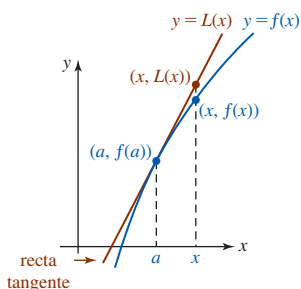


FIGURA 4.9.1 Cuando x está próximo a a , el valor $L(x)$ está cerca de $f(x)$

Definición 4.9.1 Linealización

Si una función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a , entonces decimos que la función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

es una **linealización** de f en a . Para un número x próximo a a , la aproximación

$$f(x) \approx L(x) \quad (3)$$

se denomina **aproximación lineal local** de f en a .

No es necesario memorizar (2); es simplemente la forma punto-pendiente de una recta tangente en $(a, f(a))$.

EJEMPLO 1 Linealización de $\sin x$

Encuentre una linealización de $f(x) = \sin x$ en $a = 0$.

Solución Al usar $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$ y $f'(0) = 1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sin x$ en $(0, 0)$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$. En consecuencia, la linealización de $f(x) = \sin x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$. Como se observa en la FIGURA 4.9.2, la gráfica de $f(x) = \sin x$ y su linealización en $a = 0$ son casi indistinguibles cerca del origen. La aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$ de f en $a = 0$ es

$$\sin x \approx x. \quad (4) \quad \blacksquare$$

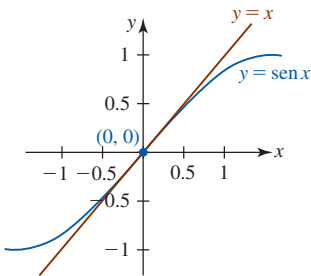


FIGURA 4.9.2 Gráfica de función y linealización en el ejemplo 1

■ **Errores** En el ejemplo 1 se recalca algo que usted ya sabe por trigonometría. La aproximación lineal local (4) muestra que el seno de un ángulo pequeño x (medido en radianes) es aproximadamente el mismo que el ángulo. Para efectos de comparación, si se escoge $x = 0.1$, entonces (4) indica que $f(0.1) \approx L(0.1)$ o $\sin(0.1) \approx 0.1$. Para efectos de comparación, con una calculadora se obtiene (redondeado hasta cinco cifras decimales) $f(0.1) = \sin(0.1) = 0.09983$. Luego, un error en el cálculo se define por

$$\text{error} = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}. \quad (5)$$

No obstante, en la práctica

$$\text{error relativo} = \frac{\text{error}}{\text{valor verdadero}} \quad (6)$$

suele ser más importante que el error. Además $(\text{error relativo}) \cdot 100$ se denomina **error porcentual**. Así, con ayuda de una calculadora se encuentra que el error porcentual en la aproximación $f(0.1) \approx L(0.1)$ es sólo alrededor de 0.2%. En la figura 4.9.2 se muestra claramente que cuando x se aleja de 0, la precisión de la aproximación $\sin x \approx x$ disminuye. Por ejemplo, para el número 0.9, con una calculadora obtenemos $f(0.9) = \sin(0.9) = 0.78333$, mientras que $L(0.9) = 0.9$. En esta ocasión el error porcentual es aproximadamente 15%.

También hemos visto el resultado del ejemplo 1 presentado de manera ligeramente distinta en la sección 2.4. Si la aproximación lineal local $\sin x \approx x$ la dividimos entre x , obtenemos $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ para valores de x próximos a 0. Esto lleva de regreso al límite trigonométrico importante $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

EJEMPLO 2 Linealización y aproximación

- Encuentre una linealización de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $a = 3$.
- Use una aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.01}$.

Solución

- Por la regla de potencias para funciones, la derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Cuando ambas se evalúan en $a = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{4} = 2 && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (3, 2) \\ f'(3) &= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. && \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (3, 2) \text{ es } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, la linealización de f en $a = 3$ está dada por $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$, o bien

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3). \quad (7)$$

Las gráficas de f y L se muestran en la FIGURA 4.9.3. Por supuesto, L puede expresarse en la forma punto-pendiente $L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$, pero para efectos de cálculo es más conveniente la forma proporcionada en (7).

b) Al usar (7) del inciso a), tenemos la aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$, o bien

$$\sqrt{x+1} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 3), \quad (8)$$

siempre que x esté cerca de 3. Luego, al hacer $x = 2.95$ y $x = 3.01$ en (8) obtenemos, a su vez, las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \overbrace{\sqrt{3.95}}^{f(2.95)} &\approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(2.95 - 3)}^{L(2.95)} = 2 - \frac{0.05}{4} = 1.9875. \\ \text{y} \quad \overbrace{\sqrt{4.01}}^{f(3.01)} &\approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(3.01 - 3)}^{L(3.01)} = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025. \end{aligned}$$

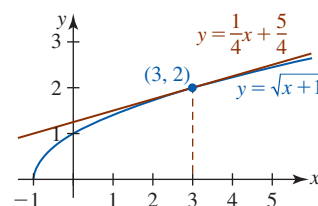


FIGURA 4.9.3 Gráficas de función y linealización en el ejemplo 2

Diferenciales La idea fundamental de linealización de una función originalmente fue expresada en la terminología de *diferenciales*. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene al número a . Si x_1 es un número diferente sobre el eje x , entonces los **incrementos** Δx y Δy son las diferencias

$$\Delta x = x_1 - a \quad \text{y} \quad \Delta y = f(x_1) - f(a).$$

Pero ya que $x_1 = a + \Delta x$, el **cambio en la función** es

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Para valores de Δx que están próximos a 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una aproximación del valor de la derivada de f en a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \quad \text{o bien,} \quad \Delta y \approx f'(a)\Delta x.$$

Las cantidades Δx y $f'(a)\Delta x$ se denominan **diferenciales** y se denotan por los símbolos dx y dy , respectivamente. Es decir,

$$\Delta x = dx \quad \text{y} \quad dy = f'(a)dx.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.9.4, para un cambio dx en x la cantidad $dy = f'(a)dx$ representa el **cambio en la linealización** (el *ascenso* en la recta tangente en $(a, f(a))$).^{*} Y cuando $dx \approx 0$, el cambio en la función Δy es aproximadamente el mismo que el cambio en la linealización dy :

$$\Delta y \approx dy. \quad (9)$$

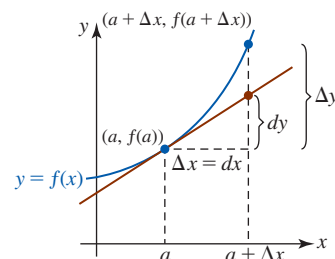


FIGURA 4.9.4 Interpretaciones geométricas de dx , Δy y dy

^{*} Por esta razón, la notación dy/dx de Leibniz para la derivada parece un cociente.

Definición 4.9.2 Diferenciales

La **diferencial de la variable independiente** x es el número diferente de cero Δx y se denota por dx ; es decir,

$$dx = \Delta x. \quad (10)$$

Si f es una función diferenciable en x , entonces la **diferencial de la variable dependiente** y se denota por dy ; es decir,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x) dx. \quad (11)$$

EJEMPLO 3 Diferenciales

- a) Encuentre Δy y dy para $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$.
 b) Compare los valores de Δy y dy para $x = 6$, $\Delta x = dx = 0.02$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= [5(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1] \\ &= 10x\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Luego, puesto que $f'(x) = 10x + 4$, por (11) de la definición 4.9.2 tenemos

$$dy = (10x + 4)dx. \quad (12)$$

Al volver a escribir Δy como $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ y usar $dx = \Delta x$, se observa que $dy = (10x + 4)\Delta x$ y $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ difieren por la cantidad $5(\Delta x)^2$.

- b) Cuando $x = 6$, $\Delta x = 0.02$:

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282$$

$$\text{mientras } dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28.$$

Por supuesto, la diferencia en las respuestas es $5(\Delta x)^2 = 5(0.02)^2 = 0.002$. ■

En el ejemplo 3, el valor $\Delta y = 1.282$ es la cantidad *exacta* por la cual la función $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$ cambia cuando x cambia de 6 a 6.02. La diferencial $dy = 1.28$ representa una *aproximación* de la cantidad por la cual cambia la función. Como se muestra en (9), para un cambio o incremento pequeño Δx en la variable independiente, el cambio correspondiente Δy en la variable dependiente puede aproximarse por la diferencial dy .

■ **Otro repaso a la aproximación lineal** Las diferenciales pueden usarse para aproximar el valor $f(x + \Delta x)$. A partir de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, obtenemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Pero debido a (9), para un cambio pequeño en x puede escribirse como

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Con $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ la línea precedente es exactamente la misma que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx. \quad (13)$$

La fórmula en (13) ya se ha visto bajo otra forma. Si se hace $x = a$ y $dx = \Delta x = x - a$, entonces (13) se vuelve

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \quad (14)$$

El miembro derecho de la desigualdad en (14) se identifica como $L(x)$ y (13) se vuelve $f(x) \approx L(x)$, que es el resultado proporcionado en (3).

EJEMPLO 4 Aproximación por diferenciales

Use (13) para aproximar $(2.01)^3$.

Solución Primero se identifica la función $f(x) = x^3$. Deseamos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$. Así, por (11),

$$dy = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x.$$

Por tanto, (13) proporciona

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \Delta x.$$

Con $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$, la fórmula precedente proporciona la aproximación

$$(2.01)^3 \approx 2^3 + 3(2)^2(0.01) = 8.12. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Aproximación por diferenciales

La arista de un cubo mide 30 cm con un error posible de ± 0.02 cm. ¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?

Solución El volumen de un cubo es $V = x^3$, donde x es la longitud de la arista. Si Δx representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x$ como una aproximación a ΔV . Así, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$ el máximo error aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 5, un error de alrededor de 54 cm^3 en el volumen para un error de 0.02 cm en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo (6) es $\Delta V/V$, entonces el error relativo *aproximado* es dV/V . Cuando $x = 30$ y $V = (30)^3 = 27\,000$, el error porcentual máximo es $\pm 54/27\,000 = \pm 1/500$, y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo $\pm 0.2\%$.

■ Reglas para diferenciales Las reglas para diferenciación consideradas en este capítulo pueden volver a plantearse en términos de diferenciales; por ejemplo, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y $y = f(x) + g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) + g'(x)$. Por tanto, $dy = [f'(x) + g'(x)] dx = f'(x) dx + g'(x) dx = du + dv$. A continuación se resumen los equivalentes diferenciales de las reglas de la suma, el producto y el cociente:

$$d(u + v) = du + dv \quad (15)$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad (16)$$

$$d(u/v) = \frac{v du - u dv}{v^2}. \quad (17)$$

Como se muestra en el siguiente ejemplo, casi no es necesario memorizar las expresiones (15), (16) y (17).

EJEMPLO 6 Diferencial de y

Encuentre dy para $y = x^2 \cos 3x$.

Solución Para encontrar la diferencial de una función, simplemente puede multiplicar su derivada por dx . Así, por la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-\sin 3x \cdot 3) + \cos 3x(2x)$$

$$\text{de modo que} \quad dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = (-3x^2 \sin 3x + 2x \cos 3x) dx. \quad (18)$$

Solución alterna Al aplicar (16) obtenemos

$$\begin{aligned} dy &= x^2 d(\cos 3x) + \cos 3x d(x^2) \\ &= x^2(-\sin 3x \cdot 3 dx) + \cos 3x(2x dx). \end{aligned} \quad (19)$$

Al factorizar dx en (19) obtenemos (18). ■

Ejercicios 4.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre una linealización de la función dada en el número indicado.

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 9$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $a = 1$
3. $f(x) = \tan x$; $a = \pi/4$
4. $f(x) = \cos x$; $a = \pi/2$
5. $f(x) = \ln x$; $a = 1$
6. $f(x) = 5x + e^{x-2}$; $a = 2$
7. $f(x) = \sqrt{1+x}$; $a = 3$
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$; $a = 6$

En los problemas 9-16, use una linealización en $a = 0$ para establecer la aproximación lineal local dada.

9. $e^x \approx 1 + x$
10. $\tan x \approx x$
11. $(1+x)^{10} \approx 1 + 10x$
12. $(1+2x)^{-3} \approx 1 - 6x$
13. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$
14. $\sqrt{x^2 + x + 4} \approx 2 + \frac{1}{4}x$
15. $\frac{1}{3+x} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x$
16. $\sqrt[3]{1-4x} \approx 1 - \frac{4}{3}x$

En los problemas 17-20, use un resultado idóneo de los problemas 1-8 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

17. $(1.01)^{-2}$
18. $\sqrt{9.05}$
19. $10.5 + e^{0.1}$
20. $\ln 0.98$

En los problemas 21-24, use un resultado idóneo de los problemas 9-16 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

21. $\frac{1}{(1.1)^3}$
22. $(1.02)^{10}$
23. $(0.88)^{1/3}$
24. $\sqrt{4.11}$

En los problemas 25-32, use una función idónea y una aproximación lineal local para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

25. $(1.8)^5$
26. $(7.9)^{2/3}$
27. $\frac{(0.9)^4}{(0.9) + 1}$
28. $(1.1)^3 + 6(1.1)^2$
29. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0.4\right)$
30. $\sin 1^\circ$
31. $\sin 33^\circ$
32. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.1\right)$

En los problemas 33 y 34, encuentre una linealización $L(x)$ de f en el valor dado de a . Use $L(x)$ para aproximar el valor de la función dado.

33. $a = 1$; $f(1.04)$
34. $a = -2$; $f(-1.98)$

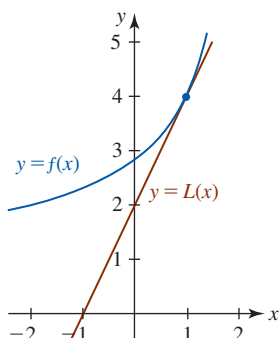


FIGURA 4.9.5 Gráfica para el problema 33

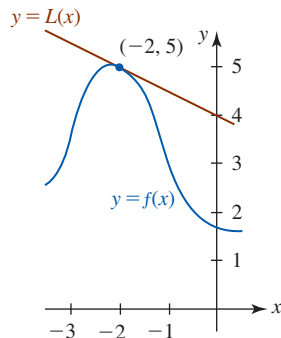


FIGURA 4.9.6 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-42, encuentre Δy y dy .

35. $y = x^2 + 1$
36. $y = 3x^2 - 5x + 6$
37. $y = (x + 1)^2$
38. $y = x^3$
39. $y = \frac{3x + 1}{x}$
40. $y = \frac{1}{x^2}$
41. $y = \sin x$
42. $y = -4\cos 2x$

En los problemas 43 y 44, complete la tabla siguiente para cada función.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

43. $y = 5x^2$
44. $y = 1/x$
45. Calcule la cantidad aproximada por la cual la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$ cambia cuando x cambia de:
 - a) 4 a 4.03
 - b) 3 a 2.9.
46. a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2$ en $x = 1$.
 b) Encuentre la coordenada y del punto sobre la recta tangente en el inciso a) que corresponde a $x = 1.02$.
 c) Use (3) para encontrar una aproximación a $f(1.02)$. Compare su respuesta con la del inciso b).
47. El área de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$.
 a) Dado que el radio de un círculo cambia de 4 cm a 5 cm, encuentre el cambio exacto en el área.
 b) ¿Cuál es el cambio aproximado en área?

Aplicaciones

48. Según Poiseuille, la resistencia R de un vaso capilar de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, donde k es una constante. Dado que l es constante, encuentre el cambio aproximado en R cuando r cambia de 0.2 mm a 0.3 mm.
49. Muchas pelotas de golf constan de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su grosor es t y el radio del núcleo es r . [Sugerencia: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Considere esferas concéntricas cuyos radios son r y $r + \Delta r$.] Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Vea la FIGURA 4.9.7. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ y $t = 0.04$ pulg.

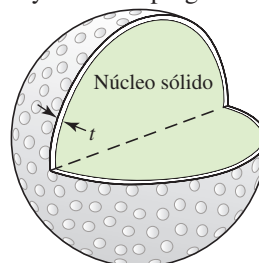


FIGURA 4.9.7 Pelota de golf en el problema 49

50. Un tubo de metal hueco mide 1.5 m de longitud. Encuentre una aproximación al volumen del metal si el radio interior mide 2 cm y el grosor del metal es 0.25 cm. Vea la FIGURA 4.9.8.

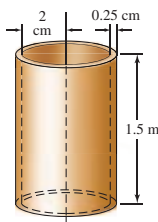


FIGURA 4.9.8 Tubo en el problema 50

51. El lado de un cuadrado mide 10 cm con un error posible de ± 0.3 cm. Use diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.
52. Un tanque de almacenamiento de petróleo en forma de cilindro circular mide 5 m de altura. El radio mide 8 m con un error posible de ± 0.25 m. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.
53. En el estudio de ciertos procesos adiabáticos, la presión P de un gas está relacionada con el volumen V que ocupa por $P = c/V^\gamma$, donde c y γ son constantes. Demuestre que el error relativo aproximado en P es proporcional al error relativo aproximado en V .
54. El alcance de un proyectil R con velocidad inicial v_0 y ángulo de elevación θ está dado por $R = (v_0^2/g)\sin 2\theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si v_0 y θ se mantienen constantes, demuestre entonces que el error porcentual en el alcance es proporcional al error porcentual en g .
55. Use la fórmula en el problema 54 para determinar el alcance de un proyectil cuando la velocidad inicial es 256 pies/s, el ángulo de elevación es 45° y la aceleración de la gravedad es 32 pies/s^2 . ¿Cuál es el cambio aproximado en el alcance del proyectil si la velocidad inicial se incrementa a 266 pies/s?
56. La aceleración debida a la gravedad g no es constante, ya que varía con la altitud. Para efectos prácticos, en la superficie terrestre, g se considera igual a 32 pies/s^2 , 980 cm/s^2 o 9.8 m/s^2 .
- A partir de la ley de la gravitación universal, la fuerza F entre un cuerpo de masa m_1 y la Tierra de masa m_2 es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es una constante y r es la distancia al centro de la Tierra. En forma alterna, la segunda ley de movimiento de Newton implica $F = m_1g$. Demuestre que $g = km_2/r^2$.
 - Use el resultado del inciso a) para demostrar que $dg/g = -2dr/r$.
 - Sea $r = 6400$ km en la superficie de la Tierra. Use el inciso b) para demostrar que el valor aproximado de g a una altitud de 16 km es 9.75 m/s^2 .
57. La aceleración debida la gravedad g también cambia con la latitud. La International Geodesy Association ha definido g (a nivel del mar) como una función de la latitud θ como sigue:
- $$g = 978.0318 (1 + 53.024 \times 10^{-4} \sin^2 \theta - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\theta),$$
- donde g se mide en cm/s^2 .

- Según este modelo matemático, ¿dónde es mínima g ? ¿Dónde es máxima?
- ¿Cuál es el valor de g a latitud 60° N ?
- ¿Cuál es el cambio aproximado en g cuando θ cambia de 60° N a 61° N ? [Sugerencia: Recuerde usar medida en radianes.]

58. El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si L se incrementa de 4 m a 5 m. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en periodo. Suponga $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.
59. En el problema 58, dado que L es fijo a 4 m, encuentre una aproximación al cambio en el periodo si el péndulo se mueve a una altitud donde $g = 9.75 \text{ m/s}^2$.
60. Puesto que casi todas las placas de circulación son del mismo tamaño (12 pulg de largo), un detector óptico computarizado montado en la parte frontal del automóvil A puede registrar la distancia D al automóvil B directamente enfrente del automóvil A para medir el ángulo θ subtendido por la placa de circulación del automóvil B. Vea la FIGURA 4.9.9.

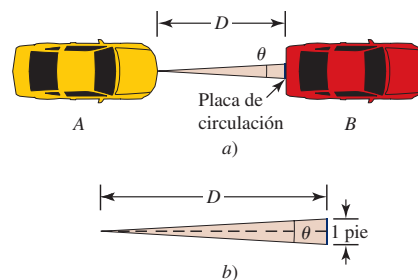


FIGURA 4.9.9 Automóviles en el problema 60

- Expresar D como una función del ángulo subtendido θ .
- Encuentre la distancia al automóvil de enfrente si el ángulo subtendido θ es 30 minutos de arco (es decir, $\frac{1}{2}^\circ$).
- Suponga en el inciso b) que θ decrece a razón de 2 minutos de arco por segundo, y que el automóvil A se mueve a razón de 30 mi/h. ¿A qué razón se mueve el automóvil B?
- Demuestre que el error relativo aproximado al medir D está dado por

$$\frac{dD}{D} = -\frac{d\theta}{\tan \theta},$$

donde $d\theta$ es el error aproximado (en radianes) al medir θ . ¿Cuál es el error relativo aproximado en D en el inciso b) si el ángulo subtendido θ se mide con un error posible de ± 1 minuto de arco?

■ Piense en ello

61. Suponga que la función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a . Si un polinomio $p(x) = c_1x + c_0$ tiene las propiedades de que $p(a) = f(a)$ y $p'(a) = f'(a)$, demuestre entonces que $p(x) = L(x)$, donde L se define en (2).
62. Sin usar trigonometría, explique por qué para valores pequeños de x , $\cos x = 1$.

63. Suponga que una función f y f' son diferenciables en un número a y que $L(x)$ es una linealización de f en a . Analice: Si $f''(x) > 0$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a a , $L(x)$ ¿sobrestima o subestima $f(x)$ para x próximo a a ?
64. Suponga que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de $y = f(x)$ tal que $f''(c) = 0$ y suponga también que $L(x)$ es una linealización de f en c . Describa a qué se parece la gráfica de $y = f(x) - L(x)$ en una vecindad de c .
65. El área de un cuadrado cuyo lado mide x es $A = x^2$. Suponga, como se muestra en la FIGURA 4.9.10, que cada

lado del cuadrado se incrementa por una cantidad Δx . En la figura 4.9.10, identifique por color las áreas ΔA , dA y $\Delta A - dA$.

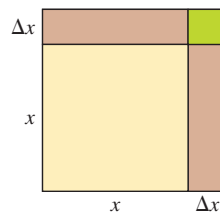


FIGURA 4.9.10 Cuadrado en el problema 65

4.10 Método de Newton

■ **Introducción** Encontrar raíces de ciertos tipos de ecuaciones fue un problema que cautivó a los matemáticos durante siglos. Los ceros de una función *polinomial* f de grado 4 o menos (es decir, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$) siempre pueden encontrarse por medio de una fórmula algebraica que expresa la incógnita x en términos de los coeficientes de f . Por ejemplo, la ecuación polinomial de grado 2, $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, puede resolverse con la fórmula cuadrática. Uno de los logros más importantes en la historia de las matemáticas fue la demostración en el siglo XIX de que las ecuaciones polinomiales de grado mayor que 4 no pueden resolverse por medio de fórmulas algebraicas; en otras palabras, en términos de radicales. Por tanto, resolver una ecuación algebraica como

$$x^5 - 3x^2 + 4x - 6 = 0 \quad (1)$$

plantea un dilema a menos que el polinomio de quinto grado $x^5 - 3x^2 + 4x - 6$ pueda factorizarse. Además, en análisis científicos, a menudo se pide encontrar las raíces de ecuaciones trascendentes como

$$2x = \tan x. \quad (2)$$

En el caso de problemas como (1) y (2), suele acostumbrarse usar algún método que produzca una aproximación o estimación de las raíces. En esta sección consideraremos una técnica de aproximación que utiliza la derivada de una función f o, con más precisión, una recta tangente a la gráfica de f . Este nuevo método se denomina **método de Newton**, o **método de Newton-Raphson**.

■ **Método de Newton** Suponga que f es diferenciable y suponga que c representa alguna raíz real desconocida de $f(x) = 0$; es decir, $f(c) = 0$. Sea x_0 un número que se escoge de manera arbitraria como primera conjetura para c . Si $f(x_0) \neq 0$, calcule $f'(x_0)$ y, como se muestra en la FIGURA 4.10.1a), construya una tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. Si se hace que $(x_1, 0)$ denote la intersección x de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, entonces las coordenadas $x = x_1$ y $y = 0$ deben satisfacer esta ecuación. Al despejar x_1 de $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ obtenemos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

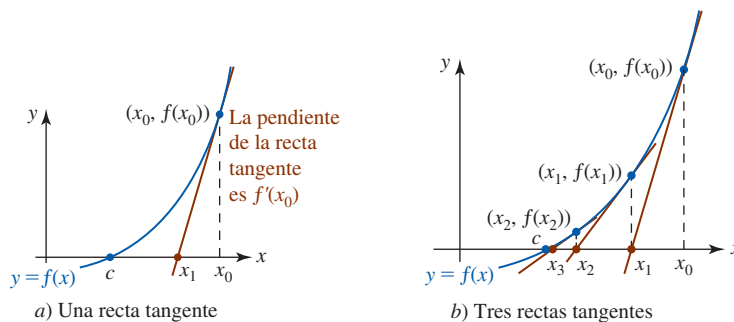


FIGURA 4.10.1 Coordenadas x sucesivas de intersecciones x de rectas tangentes próximas a la raíz c

Repita el procedimiento en $(x_1, f(x_1))$ y sea $(x_2, 0)$ la intersección x de la segunda recta tangente $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Por $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ encontramos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Al continuar de esta manera, determinamos x_{n+1} a partir de x_n al usar la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$

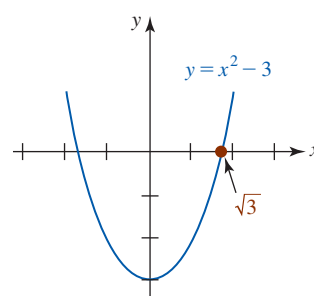
Para $n = 0, 1, 2, \dots$ la fórmula (3) produce una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \dots$ a la raíz c . Como se sugiere en la figura 4.10.1b), si los términos de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ se aproximan cada vez más a c cuando n crece sin límite, es decir, $x_n \rightarrow c$ cuando $n \rightarrow \infty$, se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ y se dice que la sucesión **converge** a c .

■ **Análisis gráfico** Antes de aplicar (3), una buena idea es determinar la existencia y el número de raíces reales de $f(x) = 0$ por medios gráficos. Por ejemplo, el número irracional $\sqrt{3}$ puede interpretarse como

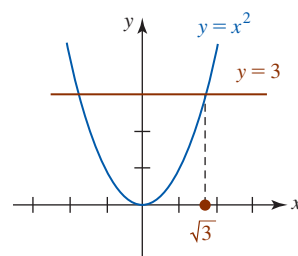
- una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 0$ y, por tanto, como un cero de la función continua $f(x) = x^2 - 3$, o
- la coordenada x de un punto de intersección de las gráficas de $y = x^2$ y $y = 3$.

Ambas interpretaciones se ilustran en la FIGURA 4.10.2. Por supuesto, otra razón para una gráfica es permitir la elección de la conjetura inicial x_0 de modo que esté próximo a la raíz c .

Aunque el cálculo verdadero del número $\sqrt{3}$ es trivial en una calculadora, su cálculo sirve muy bien como introducción al uso del método de Newton.



a) coordenada x de intersección x



b) coordenada x del punto de intersección de dos gráficas

FIGURA 4.10.2 Localización gráfica de $\sqrt{3}$

EJEMPLO 1 Uso del método de Newton

Aproxime $\sqrt{3}$ por el método de Newton.

Solución Si definimos $f(x) = x^2 - 3$, entonces $f'(x) = 2x$ y (3) se vuelve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} \quad \text{o bien,} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right). \quad (4)$$

A partir de la figura 4.10.2 parece razonable escoger $x_0 = 1$ como conjetura inicial para el valor de $\sqrt{3}$. Usamos (4) y se muestra cada cálculo hasta ocho cifras decimales:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{3}{x_0} \right) = \frac{1}{2} (1 + 3) = 2 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 1.75 \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7} \right) \approx 1.73214286 \\ x_4 &= \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{3}{x_3} \right) \approx 1.73205081 \\ x_5 &= \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{3}{x_4} \right) \approx 1.73205081. \end{aligned}$$

El proceso continúa hasta que obtenemos dos aproximaciones consecutivas x_n y x_{n+1} que coinciden con el número deseado de cifras decimales. Entonces, si estamos satisfechos con una aproximación de ocho decimales a $\sqrt{3}$, es posible detenerse con x_5 y concluir $\sqrt{3} \approx 1.73205081$. ■

EJEMPLO 2 Aproximación a la raíz de una ecuación

Use el método de Newton para aproximar las raíces reales de $x^3 - x + 1 = 0$.

Solución Puesto que la ecuación dada es equivalente a $x^3 = x - 1$, en la FIGURA 4.10.3 se han graficado las funciones $y = x^3$ y $y = x - 1$. La figura debe convencerlo de que la ecuación

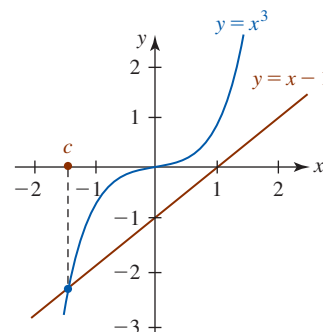


FIGURA 4.10.3 Gráficas de las funciones en el ejemplo 2

original sólo tiene una raíz real c ; a saber, la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. Luego, si $f(x) = x^3 - x + 1$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 1$. Por tanto, (3) es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} \quad \text{o bien,} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}. \quad (5)$$

Si estamos interesados en tres y tal vez cuatro cifras decimales de precisión, usamos (5) para calcular $x_1, x_2, x_3, \dots$ hasta que dos x_n consecutivas en la sucesión coincidan hasta en cuatro cifras decimales. También, la figura 4.10.3 pide que $x_0 = -1.5$ sea la conjetura inicial. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 1} = \frac{2(-1.5)^3 - 1}{3(-1.5)^2 - 1} \approx -1.3478 \\ x_2 &= \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx -1.3252 \\ x_3 &= \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx -1.3247 \\ x_4 &= \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx -1.3247. \end{aligned}$$

Por tanto, la raíz de la ecuación dada es aproximadamente $c \approx -1.3247$. ■

EJEMPLO 3 Aproximación de una raíz de una ecuación

Aproxime la primera raíz positiva de $2x = \tan x$.

Solución En la FIGURA 4.10.4 se muestra que hay una infinidad de puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x$ y $y = \tan x$. La primera coordenada x positiva correspondiente a un punto de intersección se indica por la letra c en la figura. Con $f(x) = 2x - \tan x$ y $f'(x) = 2 - \sec^2 x$, (3) se vuelve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \tan x_n}{2 - \sec^2 x_n}.$$

Si en la utilización recursiva de la fórmula precedente usamos una calculadora, resulta mejor expresar la fórmula en términos de $\sin x$ y $\cos x$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n \cos^2 x_n - \sin x_n \cos x_n}{2 \cos^2 x_n - 1}. \quad (6)$$

Puesto que la asíntota vertical de $y = \tan x$ a la derecha del eje y es $x = \pi/2 \approx 1.57$, a partir de la figura 4.10.4 se observa que la primera raíz positiva está próxima a $x_0 = 1$. Al usar esta conjetura inicial y colocar la calculadora en modo de radianes, (6) produce entonces

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1.310478 \\ x_2 &\approx 1.223929 \\ x_3 &\approx 1.176051 \\ x_4 &\approx 1.165927 \\ x_5 &\approx 1.165562 \\ x_6 &\approx 1.165561 \\ x_7 &\approx 1.165561. \end{aligned}$$

Concluimos que la primera raíz positiva es aproximadamente $c \approx 1.165561$. ■

El ejemplo 3 ilustra la importancia de la selección del valor inicial x_0 . Usted debe comprobar que la elección $x_0 = \frac{1}{2}$ en (6) conduce a una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \dots$ que converge a la única raíz evidente de $2x = \tan x$; a saber, $c = 0$.

■ **Posdata: Un poco de historia** El problema de encontrar una fórmula que exprese las raíces de una ecuación *polinomial* general de grado n -ésimo $f(x) = 0$ en términos de sus coeficientes

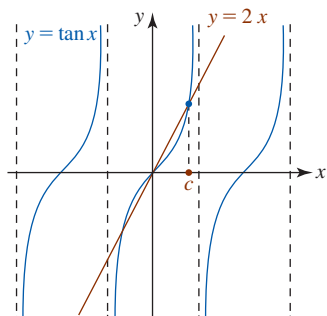


FIGURA 4.10.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

dejó perplejos a los matemáticos durante siglos. Sabemos que en el caso de una función polinomial de segundo grado, o función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde los coeficientes a , b y c son números reales, las raíces c_1 y c_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ pueden encontrarse usando la fórmula cuadrática.

La solución al problema de encontrar raíces de una ecuación general de tercer grado, o función cúbica, suele atribuirse al matemático italiano **Niccolo Fontana** (1499-1557), también conocido como Tartaglia “el Tartamudo”. Alrededor de 1540, el matemático italiano **Lodovico Farra-ri** (1522-1565) descubrió la fórmula algebraica para encontrar las raíces de la ecuación polinomial general de cuarto grado, o cuártica. Puesto que estas fórmulas son complicadas y difíciles de usar, rara ocasión se analizan en cursos elementales.



Niels Henrik Abel

Durante los siguientes 284 años nadie descubrió ninguna fórmula para encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales de grado 5 o mayor. ¡Por una buena razón! En 1824, a la edad de 22 años, el matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1802-1829) fue el primero en demostrar que es *imposible* encontrar fórmulas para las raíces de ecuaciones polinomiales generales de grado $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Hay problemas con el método de Newton.

- Es necesario calcular $f'(x)$. Aunque no sobra decirlo, la forma de $f'(x)$ podría ser formidable cuando la ecuación $f(x) = 0$ es complicada.
- Si la raíz c de $f(x) = 0$ está próxima a un valor para el cual $f'(x) = 0$, entonces el denominador en (3) tiende a cero. Esto demanda el cálculo de $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ hasta un grado superior de precisión. Para esto se requiere una computadora.
- Es necesario encontrar una ubicación aproximada de una raíz de $f(x) = 0$ antes de escoger a x_0 . Concomitante a esto son las dificultades usuales para graficar. Pero, lo que es peor, la iteración de (3) *puede no converger* para una x_0 escogida de manera imprudente o a ciegas. En la FIGURA 4.10.5 se observa que x_2 está indefinida porque $f'(x_1) = 0$.
- Ahora, algunas buenas nuevas. A pesar de los problemas que acaban de analizarse, la ventaja más importante del método de Newton es que cuando converge a una raíz c de una ecuación $f(x) = 0$, suele no hacerlo de manera rápida. Puede demostrarse que en ciertas circunstancias, el método de Newton converge cuadráticamente; es decir, el error en cualquier paso en el cálculo no es mayor que un múltiplo constante del cuadrado del error en el paso precedente. En términos generales, esto significa que el número de cifras de precisión puede (aunque no necesariamente) duplicarse en cada paso.

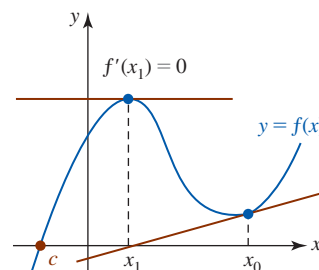


FIGURA 4.10.5 Si $f'(x_1) = 0$, entonces x_2 está indefinido

Ejercicios 4.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-6, determine gráficamente si la ecuación dada tiene raíces reales.

- $x^3 = -2 + \sin x$
- $x^3 - 3x = x^2 - 1$
- $x^4 + x^2 - 2x + 3 = 0$
- $\cot x = x$
- $e^{-x} = x + 2$
- $e^{-x} - 2 \cos x = 0$

En los problemas 7-10, use el método de Newton para encontrar una aproximación para el número dado.

- $\sqrt{10}$
- $1 + \sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[5]{2}$

En los problemas 11-16, use el método de Newton, de ser necesario, para encontrar aproximaciones a todas las raíces reales de la ecuación dada.

- $x^3 = -x + 1$
- $x^3 - x^2 + 1 = 0$

13. $x^4 + x^2 - 3 = 0$

14. $x^4 = 2x + 1$

15. $x^2 = \sin x$

16. $x + \cos x = 0$

17. Encuentre la intersección x más pequeña de la gráfica de $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x$.

18. Considere la función $f(x) = x^5 + x^2$. Use el método de Newton para aproximar el menor número positivo para el cual $f(x) = 4$.

Aplicaciones

19. Una viga voladiza de 20 pies de longitud con una carga de 600 lb en su extremo se desvía por una cantidad $d = (60x^2 - x^3)/16\,000$, donde d se mide en pulgadas y x en pies. Vea la FIGURA 4.10.6. Use el método de Newton para aproximar el valor de x que corresponde a una desviación de 0.01 pulg.

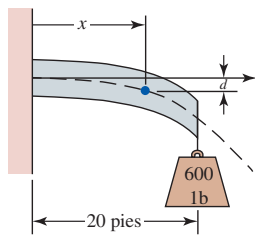


FIGURA 4.10.6 Viga en el problema 19

20. Una columna vertical cilíndrica sólida de radio fijo r que soporta su propio peso termina por flexionarse cuando aumenta su altura. Es posible demostrar que la altura máxima, o crítica, de tal columna es $h_{cr} = kr^{2/3}$, donde k es una constante y r se mide en metros. Use el método de Newton para aproximar el diámetro de una columna para la cual $h_{cr} = 10$ m y $k = 35$.
21. Un haz de luz que se origina en el punto P en el medio A, cuyo índice de refracción es n_1 , choca contra la superficie del medio B, cuyo índice de refracción es n_2 . Con base en la ley de Snell es posible demostrar que el haz se refracta de manera tangente a la superficie para el ángulo crítico que se determina a partir de $\sin \theta_c = n_2/n_1$, $0 < \theta_c < 90^\circ$. Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, toda la luz se refleja internamente al medio A. Vea la FIGURA 4.10.7. Si $n_2 = 1$ para aire y $n_1 = 1.5$ para vidrio, use el método de Newton para aproximar θ_c en radianes.

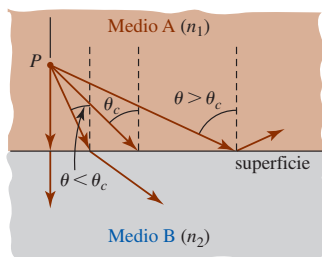


FIGURA 4.10.7 Refracción de la luz en el problema 21

22. Para un puente colgante, la longitud s de un cable entre dos soportes verticales cuya extensión es l (distancia horizontal) está relacionada con la flexión d del cable por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3}.$$

Vea la FIGURA 4.10.8. Si $s = 404$ pies y $l = 400$ pies, use el método de Newton para aproximar la flexión. Redondee su respuesta a una cifra decimal.* [Sugerencia: La raíz c satisface $20 < c < 30$.]

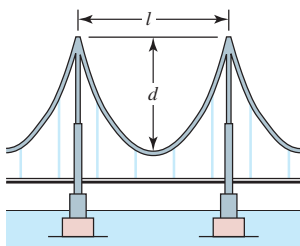


FIGURA 4.10.8 Puente colgante en el problema 22

23. Se vacía un bloque rectangular de acero para formar una tina de grosor uniforme t . Las dimensiones de la tina se muestran en la FIGURA 4.10.9a). Para que la tina flote en agua, como se muestra en la figura 4.10.9b), el peso del agua desplazada debe ser igual al peso de la tina (principio de Arquímedes). Si el peso específico del agua es 62.4 lb/pies³ y el peso específico del acero es 490 lb/pies³, entonces peso del agua desplazada = $62.4 \times$ (volumen del agua desplazada)
peso de la tina = $490 \times$ (volumen de acero de la tina).

a) Demuestre que t satisface la ecuación

$$t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1}{1225} = 0.$$

b) Use el método de Newton para aproximar la máxima raíz positiva de la ecuación en el inciso a).

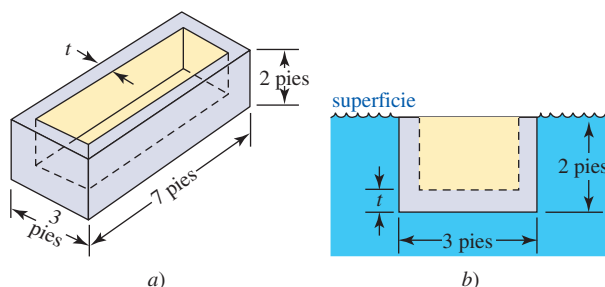


FIGURA 4.10.9 Tina flotante en el problema 23

24. Una banda metálica flexible de 10 m de longitud se dobla en forma de arco circular al asegurar los extremos entre sí por medio de un cable de 8 pies de longitud. Vea la FIGURA 4.10.10. Use el método de Newton para aproximar el radio r del arco circular.

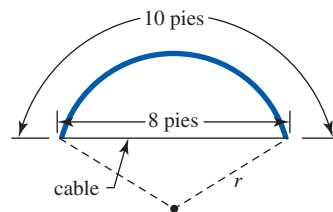


FIGURA 4.10.10 Banda metálica doblada en el problema 24

25. Dos extremos de una vía de ferrocarril de L pies de longitud se empujan ℓ pies a fin de acercarlos entre sí, de modo que la vía se dobla hacia arriba formando un arco de círculo de radio R . Vea la FIGURA 4.10.11. La pregunta es: ¿cuál es la altura h por arriba del nivel del suelo del punto más elevado sobre la vía?

a) Use la figura 4.10.11 para demostrar que

$$h = \frac{L(1 - \ell/L)^2 \theta}{2(1 + \sqrt{1 - (1 - \ell/L)^2 \theta^2})},$$

donde $\theta > 0$ satisface $\sin \theta = (1 - \ell/L)\theta$. [Sugerencia: En un sector circular, ¿cómo están relacionados la longitud de arco, el radio y el ángulo central?]

b) Si $L = 5280$ pies y $\ell = 1$ pie, use el método de Newton para aproximar θ y luego resuelva para el valor correspondiente de h .

* La fórmula para s en sí es sólo una aproximación.

- c) Si ℓ/L y θ son muy pequeños, entonces $h \approx L\theta/4$ y $\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$. Use las dos aproximaciones para demostrar que $h \approx \sqrt{3\ell L}/8$. Use esta fórmula con $L = 5\,280$ pies y $\ell = 1$ pie, y luego compare con el resultado en el inciso b).

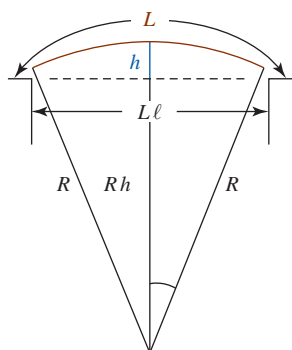


FIGURA 4.10.11 Vía de ferrocarril arqueada en el problema 25

26. En un taller de fundición una esfera metálica de radio 2 pies vuelve a fundirse como barra en forma de cilindro circular recto de 15 pies de longitud en el que se forma un hemisferio en un extremo. El radio r del hemisferio es el mismo que el radio de la base del cilindro. Use el método de Newton para aproximar r .
27. Una rueda redonda pero sin balancear de masa M y radio r está conectada por una cuerda y poleas sin fricción a una masa m , como se muestra en la FIGURA 4.10.12. O es el centro de la rueda y P es su centro de masa. Si la rueda se suelta desde el reposo, es posible demostrar que el ángulo θ al que la rueda se detiene en primera instancia satisface la ecuación

$$Mg \frac{r}{2} \sin \theta - mgr \theta = 0,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de Newton para aproximar θ si la masa de la rueda es cuatro veces la masa m .

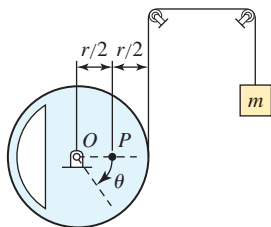


FIGURA 4.10.12 Rueda sin balancear en el problema 27

28. Dos escaleras de longitudes $L_1 = 40$ pies y $L_2 = 30$ pies se colocan contra dos muros verticales como se muestra en la FIGURA 4.10.13. La altura del punto donde las escaleras se cruzan es $h = 10$ pies.

- a) Demuestre que la altura indicada x en la figura puede determinarse por medio de la ecuación

$$x^4 - 2hx^3 + (L_1^2 - L_2^2)x^2 - 2h(L_1^2 - L_2^2)x + h^2(L_1^2 - L_2^2) = 0.$$

- b) Use el método de Newton para aproximar la solución de la ecuación en el inciso a). ¿Por qué tiene sentido escoger $x_0 \geq 10$?
- c) Aproxime la distancia z entre los dos muros.

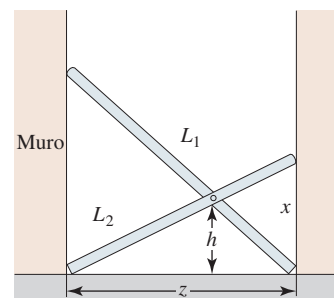


FIGURA 4.10.13 Escaleras en el problema 28

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 29 y 30, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de Newton para aproximar las raíces de $f(x) = 0$ que descubra a partir de la gráfica.

29. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 8x - 8$
30. $f(x) = 4x^{12} + x^{11} - 4x^8 + 3x^3 + 2x^2 + x - 10$
31. a) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = 0.5x^3 - x$ y $g(x) = \cos x$ en el mismo sistema de coordenadas.
- b) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = f(x) - g(x)$, donde f y g se proporcionan en el inciso a).
- c) Use las gráficas en el inciso a) o la gráfica en el inciso b) para determinar el número de raíces de la ecuación $0.5x^3 - x = \cos x$.
- d) Use el método de Newton para aproximar las raíces de la ecuación en el inciso c).

Piense en ello

32. Sea f una función diferenciable. Muestre que si $f(x_0) = -f(x_1)$ y $f'(x_0) = f'(x_1)$, entonces (3) implica $x_2 = x_0$.
33. Para la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x}, & x < 4 \\ \sqrt{x-4}, & x \geq 4 \end{cases}$$

observe que $f(4) = 0$. Demuestre que para cualquier elección de x_0 , el método de Newton no converge a la raíz. [Sugerencia: Vea el problema 32.]

Revisión del capítulo 4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si f es creciente sobre un intervalo, entonces $f'(x) > 0$ sobre el intervalo. _____
2. Una función f tiene un extremo en c cuando $f'(c) = 0$. _____
3. Una partícula en movimiento rectilíneo desacelera cuando su velocidad $v(t)$ disminuye. _____
4. Si la posición de una partícula en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal es $s(t) = t^2 - 2t$, entonces la partícula acelera para $t > 1$. _____
5. Si $f''(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo. _____
6. Si $f''(c) = 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____
7. Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$. _____
8. Si $f(c)$ es un mínimo relativo, entonces $f''(c) > 0$. _____
9. Una función f que es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto sobre el intervalo. _____
10. Todo extremo absoluto también es un extremo relativo. _____
11. Si $c > 0$ es una constante y $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - cx^2$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____
12. $x = 1$ es un número crítico de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. _____
13. Si $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ sobre un intervalo I , entonces $f + g$ es creciente sobre I . _____
14. Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo I , entonces $f''(x) > 0$ sobre I . _____
15. Un límite de la forma $\infty - \infty$ siempre tiene valor 0. _____
16. Un límite de la forma 1^∞ siempre es 1. _____
17. Un límite de la forma ∞/∞ es indeterminado. _____
18. Un límite de la forma $0/\infty$ es indeterminado. _____
19. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ son ambos de la forma ∞/∞ , entonces el primer límite no existe. _____
20. Para una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital establece que el límite de un cociente es lo mismo que la derivada del cociente. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. Para una partícula que se mueve rectilíneamente, la aceleración es la primera derivada de _____.
2. La gráfica de un polinomio cúbico puede tener a lo sumo _____ punto(s) de inflexión.
3. Un ejemplo de una función $y = f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo sobre $(0, \infty)$ y creciente sobre $(-\infty, \infty)$ es _____.
4. Dos números no negativos cuya suma es 8 tales que la suma de sus cuadrados es máximo son _____.
5. Si f es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, entonces en (a, b) existe algún c tal que $f'(c) =$ _____.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} =$ para todo entero n .
7. La suma de un número positivo y su recíproco siempre es mayor que o igual a _____.
8. Si $f(1) = 13$ y $f'(x) = 5x^2$, entonces una linealización de f en $a = 1$ es _____ y $f(1.1) \approx$ _____.

9. Si $y = x^2 - x$, entonces $\Delta y =$ _____.
10. Si $y = x^3 e^{-x}$, entonces $dy =$ _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-4, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^3 - 75x + 150$; $[-3, 4]$ 2. $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{x}$; $[\frac{1}{4}, 1]$
3. $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$; $[-1, 3]$ 4. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^{1/2}$; $[1, 3]$
5. Trace la gráfica de una función continua que tenga las propiedades:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f(2) &= 3 \\ f'(0) &= 0, & f'(2) &\text{no existe} \\ f'(x) &> 0, & x &< 0 \\ f'(x) &> 0, & 0 < x < 2 \\ f'(x) &< 0, & x &> 2. \end{aligned}$$

6. Use las derivadas primera y segunda como ayuda para comparar las gráficas de

$$y = x + \sin x \quad \text{y} \quad y = x + \sin 2x.$$

7. La posición de una partícula que se mueve sobre una línea recta está dada por $s(t) = -t^3 + 6t^2$.
- a) Grafique el movimiento sobre el intervalo de tiempo $[-1, 5]$.
- b) ¿En qué instante la función velocidad es máxima?
- c) ¿Corresponde este instante a la rapidez máxima?
8. La altura por arriba del nivel del suelo alcanzada por un proyectil disparado verticalmente es $s(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 49$, donde s se mide en metros y t en segundos.
- a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?
- b) ¿A qué velocidad choca el proyectil contra el suelo?
9. Suponga que f es una función polinomial con ceros de multiplicidad 2 en $x = a$ y $x = b$; es decir,

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)^2g(x)$$

donde g es una función polinomial.

- a) Demuestre que f' tiene por lo menos tres ceros en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- b) Si $g(x)$ es constante, encuentre los ceros de f' en $[a, b]$.
10. Demuestre que la función $f(x) = x^{1/3}$ no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo $[-1, 8]$, aunque es posible encontrar un número c en $(-1, 8)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Explique.

En los problemas 11-14, encuentre los extremos relativos de la función dada f . Grafique.

11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ 12. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$
13. $f(x) = 4x - 6x^{2/3} + 2$ 14. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

En los problemas 15-18, encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función dada f . No grafique.

15. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$ 16. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5$
17. $f(x) = 10 - (x - 3)^{1/3}$ 18. $f(x) = x(x - 1)^{5/2}$

En los problemas 19-24, relacione cada figura con una o más de las siguientes afirmaciones. Sobre el intervalo correspondiente a la porción de la gráfica de $y = f(x)$ mostrada:

- a) f tiene una primera derivada positiva.
- b) f tiene una segunda derivada negativa.
- c) La gráfica de f tiene un punto de inflexión.
- d) f es diferenciable.

e) f tiene un extremo relativo.

f) Las pendientes de las rectas tangentes crecen cuando x crece.

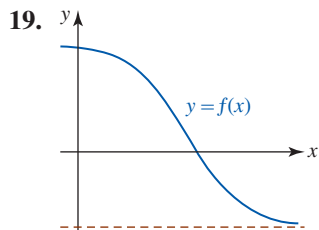


FIGURA 4.R.1 Gráfica para el problema 19

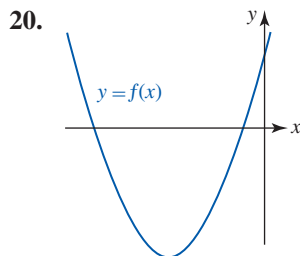


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 20

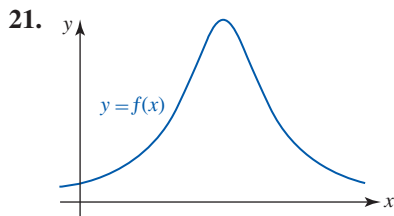


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 21

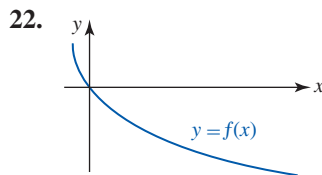


FIGURA 4.R.4 Gráfica para el problema 22

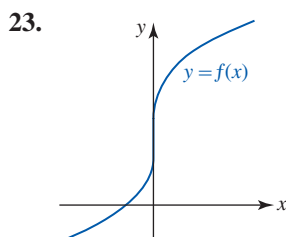


FIGURA 4.R.5 Gráfica para el problema 23

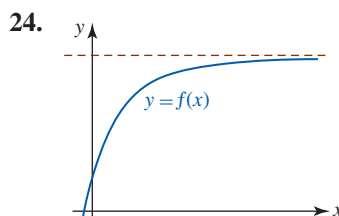


FIGURA 4.R.6 Gráfica para el problema 24

25. Sean a , b y c números reales. Encuentre la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

26. Un triángulo se expande con el tiempo. El área del triángulo crece a razón de $15 \text{ pulg}^2/\text{min}$, mientras la longitud de su base decrece a razón de $\frac{1}{2} \text{ pulg}/\text{min}$. ¿A qué razón cambia la altura del triángulo cuando la altura mide 8 pulg y la base mide 6 pulg?
27. Un cuadrado está inscrito en un círculo de radio r , como se muestra en la FIGURA 4.R.7. ¿A qué razón cambia el área del cuadrado en el instante en que el radio del círculo mide 2 pulg y crece a razón de 4 pulg/min?

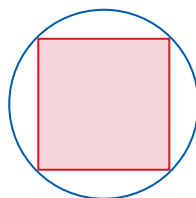


FIGURA 4.R.7 Círculo en el problema 27

28. De un tanque hemisférico de 10 m de radio gotea agua a razón de $\frac{1}{10} \text{ m}^3/\text{min}$, y ésta sale por un orificio en la parte inferior del tanque a razón de $\frac{1}{5} \text{ m}^3/\text{min}$. Es posible demostrar que el volumen del agua en el tanque en t es $V = 10\pi h^2 - (\pi/3)h^3$. Vea la FIGURA 4.R.8.
- a) La profundidad del agua, ¿aumenta o disminuye?
- b) ¿A qué razón cambia la profundidad del agua cuando la profundidad es de 5 m?

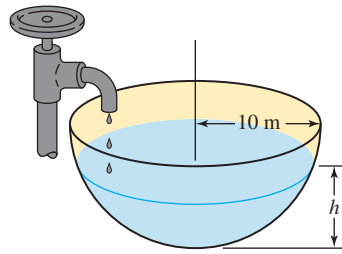


FIGURA 4.R.8 Tanque en el problema 28

29. Dos bobinas que conducen la misma corriente producen en el punto Q sobre el eje x un campo magnético de intensidad

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 r_0^2 I \left\{ \left[r_0^2 + \left(x + \frac{1}{2} r_0 \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[r_0^2 + \left(x - \frac{1}{2} r_0 \right)^2 \right]^{-3/2} \right\},$$

donde μ_0 , r_0 e I son constantes. Vea la FIGURA 4.R.9. Demuestre que el valor máximo de B ocurre en $x = 0$.

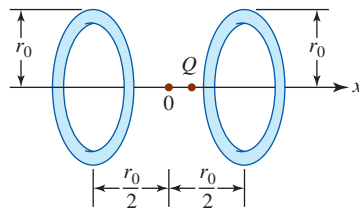


FIGURA 4.R.9 Bobinas en el problema 29

30. Una batería con fem constante E y resistencia interna constante r está conectada en serie con un resistor cuya resistencia es R . Entonces, la corriente en el circuito es $I = E/(r + R)$. Encuentre el valor de R para el que la potencia $P = RI^2$ disipada en la carga externa es máxima. Esto se denomina **comparación de impedancia**.
31. Cuando en el lado de un cilindro lleno de agua se perfora un orificio, la corriente resultante choca contra el piso a una distancia x de la base, donde $x = 2\sqrt{y(h - y)}$. Vea la FIGURA 4.R.10.
- ¿En qué punto debe hacerse el orificio de modo que la corriente alcance una distancia máxima de la base?
 - ¿Cuál es la distancia máxima?

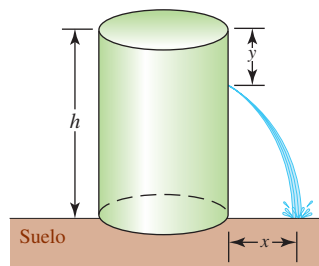


FIGURA 4.R.10 Tanque perforado en el problema 31

32. El área de un sector circular de radio r y longitud de arco s es $A = \frac{1}{2}rs$. Vea la FIGURA 4.R.11. Encuentre el área máxima de un sector limitado por un perímetro de 60 cm.

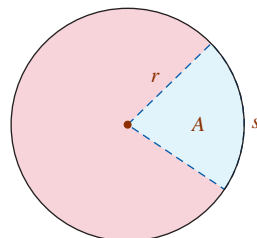


FIGURA 4.R.11 Sector circular en el problema 32

33. Un chiquero, junto a un granero, se delimita usando cerca en dos lados, como se muestra en la FIGURA 4.R.12. La cantidad de cerca que se usará mide 585 pies. Encuentre los valores de x y y indicados en la figura de modo que se delimite la mayor área.

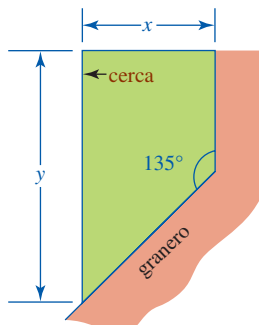


FIGURA 4.R.12 Chiquero en el problema 33

34. Un granjero desea usar 100 m de cerca para construir una valla diagonal que conecte dos muros que se encuentran en ángulo recto. ¿Cómo debe proceder el granjero de modo que el área limitada por los muros y la valla sea máxima?
35. Según el **principio de Fermat**, un rayo de luz que se origina en un punto A y se refleja en una superficie plana hacia el punto B recorre una trayectoria que requiere el menor tiempo. Vea la FIGURA 4.R.13. Suponga que la rapidez de la luz c , así como h_1 , h_2 y d , son constantes. Demuestre que el tiempo es mínimo cuando $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$. Puesto que $0 < \theta_1 < \pi/2$ y $0 < \theta_2 < \pi/2$, se concluye que $\theta_1 = \theta_2$. En otras palabras, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. [Nota: La figura 4.R.13 es inexacta a propósito.]

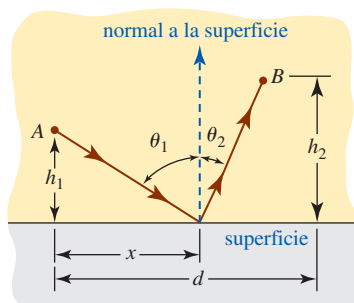


FIGURA 4.R.13 Rayos de luz reflejados en el problema 35

36. Determine las dimensiones de un cono circular recto que tiene volumen mínimo V que circunscribe una esfera de radio r . Vea la FIGURA 4.R.14. [Sugerencia: Use triángulos semejantes.]

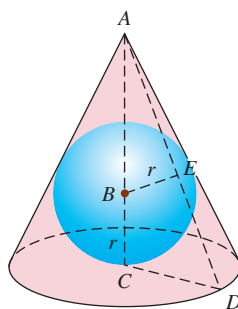


FIGURA 4.R.14 Esfera y cono en el problema 36

37. Un contenedor en forma de cilindro circular recto tiene un volumen de 100 pulg^3 . La parte superior del contenedor cuesta tres veces por unidad de área que la parte inferior y los lados. Demuestre que la dimensión con que se obtiene el menor costo de construcción es una altura igual a cuatro veces el radio.

38. Se va a elaborar una caja con cubierta hecha de una pieza rectangular de cartón de 30 pulg de longitud y 15 pulg de ancho al cortar un cuadrado en un extremo del cartón y cortando un rectángulo de cada esquina del otro extremo, como se muestra en la FIGURA 4.R.15. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

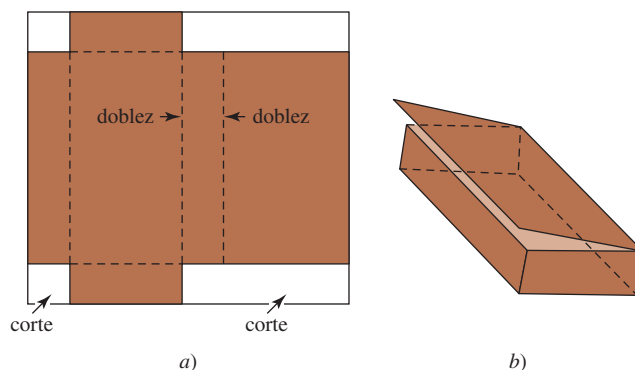


FIGURA 4.R.15 Caja en el problema 38

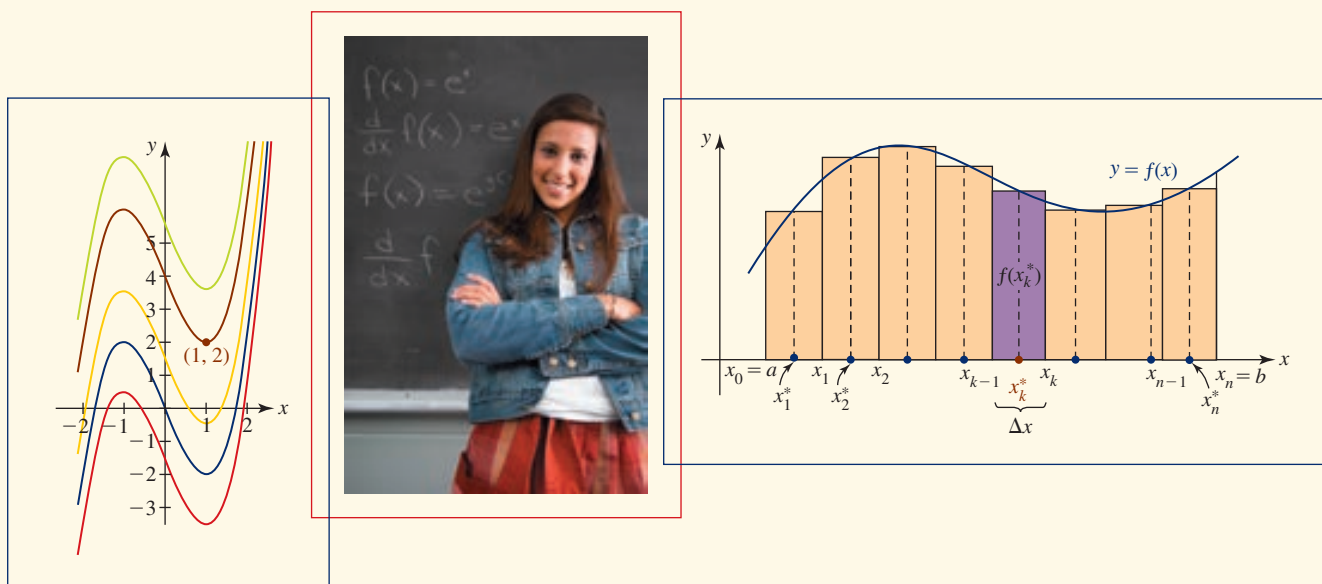
En los problemas 39-48, use la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

39. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} - \tan(\pi/x^2)}{x - \sqrt{3}}$	40. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{10\theta - 5 \sin 2\theta}{10\theta - 2 \sin 5\theta}$
41. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - e^{2/x} \right)$	42. $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\ln(y+1)} \right]$
43. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin t)^2}{\sin t^2}$	44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{e^{3x/2} - e^{-x/2}}$
45. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^{-1/\ln x}$	46. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + e^{3x})^{4/x}$
47. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x + e^{2x}}{1 + e^{4x}} \right)$	48. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$

En los problemas 49 y 50, use el método de Newton para encontrar la raíz indicada. Aplique el método hasta que dos aproximaciones sucesivas coincidan hasta cuatro cifras decimales.

49. $x^3 - 4x + 2 = 0$, la raíz positiva más grande.
50. $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$, la raíz positiva más pequeña.

Integrales



En este capítulo En los dos últimos capítulos analizamos las definiciones, propiedades y aplicaciones de la derivada. Ahora pasaremos del cálculo diferencial al cálculo integral. Leibniz denominó *calculus summatorius* a esta segunda de las dos divisiones más importantes del cálculo. En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz cambió el nombre a *calculus integralis*. Como sugieren las palabras latinas originales, el concepto de *suma* desempeña un papel importante en el desarrollo completo de la integral.

En el capítulo 2 vimos que el problema de la tangente conduce de manera natural a la derivada de una función. En el problema de área, el problema motivacional del cálculo integral, deseamos encontrar el área acotada por la gráfica de una función y el eje x . Este problema lleva al concepto de *integral definida*.

- 5.1 La integral indefinida
 - 5.2 Integración por sustitución u
 - 5.3 El problema de área
 - 5.4 La integral definida
 - 5.5 Teorema fundamental del cálculo
- Revisión del capítulo 5

5.1 La integral indefinida

■ **Introducción** En los capítulos 3 y 4 sólo abordamos el problema básico:

- Dada una función f , encontrar su derivada f' .

En este capítulo y en los subsecuentes veremos cuán importante es el problema de:

- Dada una función f , encontrar una función F cuya derivada sea f .

En otras palabras, para una función dada f , ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f ; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Empezamos con una definición.

Definición 5.1.1 Antiderivada

Se dice que una función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I .

EJEMPLO 1 Una antiderivada

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. ■

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

A continuación demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante*. Por tanto, $F(x) + C$ es la antiderivada más general de $f(x)$.

Teorema 5.1.1 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para toda x en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Suponga que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, por el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C . Por tanto, $g(x) = C$ implica $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$. ■

La notación $F(x) + C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la FIGURA 5.1.1, la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2 .

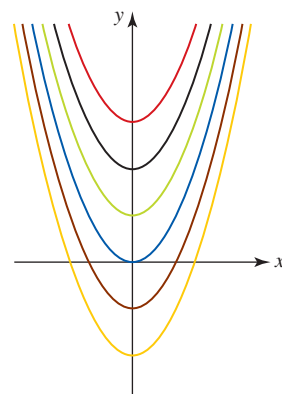


FIGURA 5.1.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

- Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$ puesto que $F'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.
- Una antiderivada de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x$ puesto que $F'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x + C$.

■ **Notación de la integral indefinida** Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x) dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x . La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina **antidiferenciación** o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\)$ denota la operación de diferenciación de $(\)$ con respecto a x , el simbolismo $\int (\) dx$ denota la operación de integración de $(\)$ con respecto a x .

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x) dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f ; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

$$\text{Además,} \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x) = f(x) \quad (2)$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$$\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx} \ln|x| dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx} \sin x dx = \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx} \tan^{-1} x dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C.$$

◀ Este primer resultado sólo es válido si $n \neq -1$.

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada. En la TABLA 5.1.1 se resumen *algunas* fórmulas de derivadas importantes para las funciones que se han estudiado hasta el momento, así como sus fórmulas de integración análogas.

TABLA 5.1.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	10. $\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	12. $\frac{d}{dx} \sec^{-1}x = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$
4. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\frac{d}{dx} b^x = b^x(\ln b),$ ($b > 0, b \neq 1$)	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	14. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	15. $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
7. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	16. $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$		

Con respecto a la entrada 3 de la tabla 5.1.1, es cierto que las fórmulas de derivadas

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\log_b x}{\ln b} = \frac{1}{x}$$

significan que *una* antiderivada de $1/x = x^{-1}$ puede tomarse como $\ln x$, $x > 0$, $\ln|x|$, $x \neq 0$, o $\log_b x / \ln b$, $x > 0$. Pero como resultado más general y útil escribimos

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

Observe también que en la tabla 5.1.1 sólo se proporcionan tres fórmulas que implican funciones trigonométricas inversas. Esto se debe a que, en forma de integral indefinida, las tres fórmulas restantes son redundantes. Por ejemplo, de las derivadas

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

observamos que es posible tomar

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + C \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1}x + C.$$

Observaciones semejantes se cumplen para la cotangente inversa y la cosecante inversa.

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 5.1.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

EJEMPLO 4 Cómo volver a escribir un integrando

Evalúe

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx \quad y \quad b) \int \sqrt{x} dx.$$

Solución

- a) Al volver a escribir $1/x^5$ como x^{-5} e identificar $n = -5$, por la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{x^{-4}}{4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

- b) Primero volvemos a escribir el radical $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ y luego se usa la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = \frac{1}{2}$:

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C. \quad \blacksquare$$

Debe tomarse en cuenta que los *resultados de la integración siempre pueden comprobarse por diferenciación*; por ejemplo, en el inciso b) del ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{3/2-1} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

En el siguiente teorema se proporcionan algunas propiedades de la integral indefinida.

Teorema 5.1.2 Propiedades de la integral indefinida

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

$$i) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx = kF(x) + C, \text{ donde } k \text{ es cualquier constante,}$$

$$ii) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

Estas propiedades se concluyen de inmediato a partir de las propiedades de la derivada. Por ejemplo, *ii)* es una consecuencia del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Observe en el teorema 5.1.2 *ii)* que no hay razón para usar dos constantes de integración, puesto que

$$\begin{aligned} \int [f(x) \pm g(x)] dx &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) \\ &= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm G(x) + C, \end{aligned}$$

donde $C_1 \pm C_2$ se ha sustituido por la simple constante C .

Una integral indefinida de cualquier suma infinita de funciones la podemos obtener al integrar cada término.

EJEMPLO 5 Uso del teorema 5.1.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \sin x \right) dx$.

Solución Por los incisos *i)* y *ii)* del teorema 5.1.2, esta integral indefinida puede escribirse como tres integrales:

$$\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \sin x \right) dx = 4 \int x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \sin x dx.$$

Debido a las fórmulas de integración 2, 3 y 5 en la tabla 5.1.1, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x \right) dx &= 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln|x| + 5 \cdot (-\cos x) + C \\ &= 2x^2 - 2 \ln|x| - 5 \cos x + C.\end{aligned}$$

■ **Uso de la división** Escribir un integrando en forma más manejable algunas veces conlleva a una división. La idea se ilustra con los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\int \frac{6x^3 - 5}{x} dx$.

Si el concepto de común denominador

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

se lee de derecha a izquierda, se está realizando “división término por término”.

► **Solución** Por la división término por término, el teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 2 y 3 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3 - 5}{x} dx &= \int \left(\frac{6x^3}{x} - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= \int \left(6x^2 - \frac{5}{x} \right) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \ln|x| + C = 2x^3 - 5 \ln|x| + C.\end{aligned}$$

Para resolver el problema de evaluar $\int f(x) dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, a continuación se resume una regla práctica que debe tomarse en cuenta en esta subsección y en la subsección subsecuente.

Integración de una función racional

Suponga que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional. Si el grado de la función polinomial $p(x)$ es mayor que o igual al grado de la función polinomial $q(x)$, use división larga antes de integrar; es decir, escriba

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{un polinomio} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

EJEMPLO 7 División larga

Evalúe $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

Solución Puesto que el grado del numerador del integrando es igual al grado del denominador, se efectúa la división larga:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Por ii) del teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 1 y 11 en la tabla 5.1.1 obtenemos

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \tan^{-1} x + C.$$

■ **Ecuaciones diferenciales** En varios conjuntos de ejercicios en el capítulo 3 se pide comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica las derivadas o el diferencial de una función desconocida. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el **orden** de la derivada más alta que

aparece en la ecuación. El objetivo consiste en *resolver* ecuaciones diferenciales. Una **ecuación diferencial de primer orden** de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (3)$$

puede resolverse usando integración indefinida. Por (1) se ve que

$$\int \left(\frac{dy}{dx} \right) dx = y.$$

Así, la solución de (3) es la antiderivada más general de g ; es decir,

$$y = \int g(x) dx. \quad (4)$$

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(1, 2)$ y también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2 - 3$.

Solución Por (3) y (4) se concluye que si

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \quad \text{entonces} \quad y = \int (3x^2 - 3) dx.$$

Es decir,
$$y = \int (3x^2 - 3) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x + C$$

o bien, $y = x^3 - 3x + C$. Así, cuando $x = 1$, $y = 2$, de modo que $2 = 1 - 3 + C$ o $C = 4$. Por tanto, $y = x^3 - 3x + 4$. Entonces, de la familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ que se muestra en la FIGURA 5.1.2, se ve que sólo hay una cuya gráfica (mostrada en rojo) que pasa por $(1, 2)$. ■

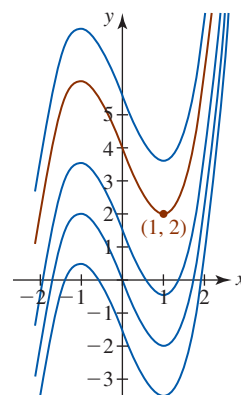


FIGURA 5.1.2 La curva roja es la gráfica de la solución del problema en el ejemplo 8

Al resolver una ecuación diferencial como $dy/dx = 3x^2 - 3$ en el ejemplo 8, la condición lateral especificada de que la gráfica pase por $(1, 2)$, es decir, $f(1) = 2$, se denomina **condición inicial**. Una condición inicial como ésta suele escribirse como $y(1) = 2$. La solución $y = x^3 - 3x + 4$ que fue determinada por la familia de soluciones $y = x^3 - 3x + C$ por la condición inicial se denomina **solución particular**. El problema de resolver (3) sujeto a una condición inicial,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial**.

Observamos que una ecuación diferencial de orden n -ésimo de la forma $d^n y/dx^n = g(x)$ puede resolverse al integrar n veces consecutivas la función $g(x)$. En este caso, la familia de soluciones contiene n constantes de integración.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ tal que $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1$.

Solución La ecuación diferencial dada se integra dos veces consecutivas. Con la primera integración se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int 1 \cdot dx = x + C_1.$$

Con la segunda integración se obtiene $y = f(x)$:

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int (x + C_1) dx = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \quad \blacksquare$$

NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Ejercicios 5.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3 dx$

2. $\int (\pi^2 - 1) dx$

3. $\int x^5 dx$

4. $\int 5x^{1/4} dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

7. $\int (1 - t^{-0.52}) dt$

8. $\int 10w\sqrt{w} dw$

9. $\int (3x^2 + 2x - 1) dx$

10. $\int \left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right) dt$

11. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2) dx$

12. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right) ds$

13. $\int (4x + 1)^2 dx$

14. $\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx$

15. $\int (4w - 1)^3 dw$

16. $\int (5u - 1)(3u^3 + 2) du$

17. $\int \frac{r^2 - 10r + 4}{r^3} dr$

18. $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}} dx$

19. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2} dx$

20. $\int \frac{t^3 - 8t + 1}{(2t)^4} dt$

21. $\int (4 \sin x - 1 + 8x^{-5}) dx$

22. $\int (-3 \cos x + 4 \sec^2 x) dx$

23. $\int \csc x (\csc x - \cot x) dx$

24. $\int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$

25. $\int \frac{2 + 3 \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

26. $\int \left(40 - \frac{2}{\sec \theta}\right) d\theta$

27. $\int (8x + 1 - 9e^x) dx$

28. $\int (15x^{-1} - 4 \sinh x) dx$

29. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1 + x^2} dx$

30. $\int \frac{x^6}{1 + x^2} dx$

En los problemas 31 y 32, use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida dada.

31. $\int \tan^2 x dx$

32. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

En los problemas 33-40, use diferenciación y la regla de la cadena para comprobar el resultado de integración dado.

33. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx = \sqrt{2x + 1} + C$

34. $\int (2x^2 - 4x)^9 (x - 1) dx = \frac{1}{40} (2x^2 - 4x)^{10} + C$

35. $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C$

36. $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

37. $\int x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$

38. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C$

39. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

40. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

En los problemas 41 y 42, efectúe las operaciones indicadas.

41. $\frac{d}{dx} \int (x^2 - 4x + 5) dx$

42. $\int \frac{d}{dx} (x^2 - 4x + 5) dx$

En los problemas 43-48, resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 9$

44. $\frac{dy}{dx} = 10x + 3\sqrt{x}$

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$

46. $\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x)^2}{x^5}$

47. $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x + \sin x$

48. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

49. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(2, 3)$ y que también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 2x - 1$.

50. Encuentre una función $y = f(x)$ de modo que $dy/dx = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

51. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

52. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

53. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en $(1, 1)$ es 3.

54. Si $f^{(n)}(x) = 0$, ¿cuál es f ?

En los problemas 55 y 56, la gráfica de la función f se muestra en azul. De las gráficas de las funciones F , G y H cuyas gráficas se muestran en negro, verde y rojo, respectivamente, ¿cuál función es la gráfica de una antiderivada de f ? Justifique su razonamiento.

55.

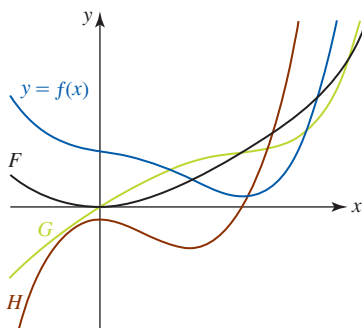


FIGURA 5.1.3 Gráficas para el problema 55

56.

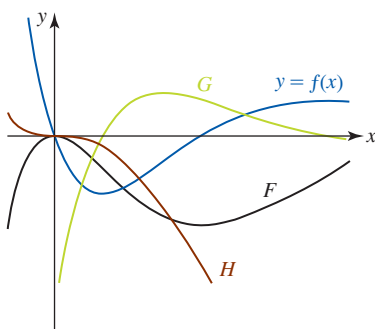


FIGURA 5.1.4 Gráficas para el problema 56

≡ Aplicaciones

57. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω . La forma de la

sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x.$$

Con ejes de coordenadas como se muestra en la FIGURA 5.1.5, encuentre $y = f(x)$.

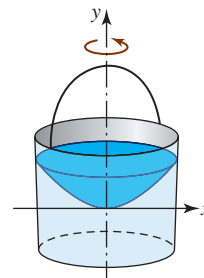


FIGURA 5.1.5 Cubo en el problema 57

58. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la FIGURA 5.1.6. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva elástica) está determinada a partir de

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde E , I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

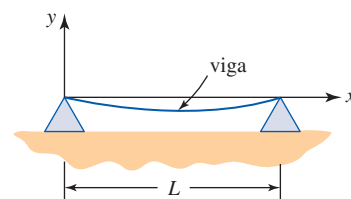


FIGURA 5.1.6 Viga en el problema 58

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, determine f .

59. $\int f(x) dx = \ln|\ln x| + C$

60. $\int f(x) dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

61. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^2$ y $y = 4x + 7$ sea una recta tangente a la gráfica de f .

62. Simplifique la expresión $e^{4\int dx/x}$ tanto como sea posible.

63. Determine cuál de los dos resultados siguientes es correcto:

$$\int (x+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$$

o

$$\int (x+1)^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

64. Dado que $\frac{d}{dx} \sin \pi x = \pi \cos \pi x$, encuentre una antiderivada F de $\cos \pi x$ que tenga la propiedad de que $F(\frac{3}{2}) = 0$.

5.2 Integración por sustitución u

■ **Introducción** En la última sección se analizó el hecho de que para cada fórmula para la derivada de una función hay una fórmula de antiderivada o integral indefinida correspondiente. Por ejemplo, al interpretar cada una de las funciones

$$x^n \quad (n \neq -1), \quad x^{-1} \quad \text{y} \quad \cos x$$

como una antiderivada, se encuentra que la “reversa de la derivada” correspondiente es una familia de antiderivadas:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C. \quad (1)$$

Revise la sección 4.9

En la siguiente exposición se analiza la “reversa de la regla de la cadena”. En este análisis, el concepto de **diferencial** de una función desempeña un papel importante. Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es $du = g'(x) dx$.

Se empieza con un ejemplo.

■ **Potencia de una función** Si deseamos encontrar una función F tal que

$$\int (5x + 1)^{1/2} dx = F(x) + C,$$

debemos tener

$$F'(x) = (5x + 1)^{1/2}.$$

Al razonar “hacia atrás”, podemos argumentar que para obtener $(5x + 1)^{1/2}$ necesitamos haber diferenciado $(5x + 1)^{3/2}$. Entonces, parecería que es posible proceder como en la primera fórmula en (1); a saber: incrementar la potencia por 1 y dividir entre la nueva potencia:

$$\int (5x + 1)^{1/2} dx = \frac{(5x + 1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} (5x + 1)^{3/2} + C. \quad (2)$$

Lamentablemente, la “respuesta” en (2) no concuerda, puesto que con la regla de la cadena, en la forma de la regla de potencias para funciones, se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{2}{3} (5x + 1)^{3/2} + C \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (5x + 1)^{1/2} \cdot 5 = 5(5x + 1)^{1/2} \neq (5x + 1)^{1/2}. \quad (3)$$

Para tomar en cuenta el factor 5 faltante en (2) usamos el teorema 5.1.2i) y un poco de perspicacia:

$$\begin{aligned} \int (5x + 1)^{1/2} dx &= \int (5x + 1)^{1/2} \boxed{\frac{1}{5} \cdot 5} dx \leftarrow \frac{5}{5} = 1 \\ &= \frac{1}{5} \int \boxed{(5x + 1)^{1/2} 5} dx \leftarrow \text{derivada de } \frac{2}{3}(5x + 1)^{3/2} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (5x + 1)^{3/2} + C \leftarrow \text{por (3)} \\ &= \frac{2}{15} (5x + 1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Ahora, usted debe comprobar por diferenciación que la última función es, en efecto, una antiderivada de $(5x + 1)^{1/2}$.

La clave para evaluar integrales indefinidas como

$$\int (5x + 1)^{1/2} dx, \quad \int \frac{x}{(4x^2 + 3)^6} dx \quad \text{y} \quad \int \sin 10x dx \quad (4)$$

reside en el *reconocimiento* de que los integrandos en (4),

$$(5x + 1)^{1/2}, \quad \frac{x}{(4x^2 + 3)^6} \quad \text{y} \quad \sin 10x$$

son resultado de diferenciar una función compuesta por medio de la regla de la cadena. Para hacer este reconocimiento es útil realizar una sustitución en una integral indefinida.

Teorema 5.2.1 Regla de la sustitución u

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I , f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I , entonces

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5)$$

DEMOSTRACIÓN Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

y entonces por la definición de antiderivada tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Puesto que F es un antiderivada de f , es decir, si $F' = f$, entonces la línea precedente se vuelve

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u) du = \int f(u) du. \quad (6) \quad \blacksquare$$

La interpretación del resultado en (6) y su resumen en (5) es sutil. En la sección 5.1, el símbolo dx se usó simplemente como un indicador de que la integración es con respecto a la variable x . En (6) observamos que es permisible interpretar dx y du como *diferenciales*.

■ **Uso de la sustitución u** La idea básica consiste en poder reconocer una integral indefinida en una variable x (como la proporcionada en (4)) que sea la reversa de la regla de la cadena al convertirla en una integral indefinida diferente en la variable u por medio de la sustitución $u = g(x)$. Por conveniencia, a continuación se enumeran algunas directrices para evaluar $\int f(g(x))g'(x) dx$ al efectuar una sustitución u .

Directrices para efectuar una sustitución u

- i) En la integral $\int f(g(x))g'(x) dx$ identifique las funciones $g(x)$ y $g'(x) dx$.
- ii) Exprese la integral *totalmente* en términos del símbolo u al sustituir u y du por $g(x)$ y $g'(x) dx$ respectivamente. En su sustitución no debe haber variables x ; déjelas en la integral.
- iii) Efectúe la integración con respecto a la variable u .
- iv) Finalmente, vuelva a sustituir $g(x)$ por el símbolo u .

■ **Integral indefinida de la potencia de una función** La derivada de la potencia de una función era un caso especial de la regla de la cadena. Recuerde que si $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$, donde n es un número real, $n \neq -1$ y si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x).$$

Entonces, por el teorema 5.2.1 de inmediato se deduce que

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C. \quad (7)$$

En términos de sustituciones

$$u = g(x) \quad \text{y} \quad du = g'(x) dx,$$

(7) puede resumirse como sigue:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \quad (8)$$

En el siguiente ejemplo se evalúa la segunda de las tres integrales indefinidas en (4).

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\int \frac{x}{(4x^2 + 3)^6} dx$.

Solución La integral vuelve a escribirse como

$$\int (4x^2 + 3)^{-6} x dx$$

y se hace la identificación

$$u = 4x^2 + 3 \quad \text{y} \quad du = 8x dx.$$

Luego, para obtener la forma precisa $\int u^{-6} du$ es necesario ajustar el integrando al multiplicar y dividir entre 8:

$$\begin{aligned} \int (4x^2 + 3)^{-6} x dx &= \frac{1}{8} \int \overbrace{(4x^2 + 3)^{-6}}^{u^{-6}} \overbrace{(8x dx)}^{du} \quad \leftarrow \text{sustitución} \\ &= \frac{1}{8} \int u^{-6} du \quad \leftarrow \text{ahora use (8)} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{u^{-5}}{-5} + C \\ &= -\frac{1}{40} (4x^2 + 3)^{-5} + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución} \end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación: Por la regla de potencias para funciones,

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{40} (4x^2 + 3)^{-5} + C \right] = \left(-\frac{1}{40} \right) (-5)(4x^2 + 3)^{-6} (8x) = \frac{x}{(4x^2 + 3)^6}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\int (2x - 5)^{11} dx$.

Solución Si $u = 2x - 5$, entonces $du = 2 dx$. La integral se ajusta al multiplicar y dividir entre 2 para obtener la forma correcta de la diferencial du :

$$\begin{aligned} \int (2x - 5)^{11} dx &= \frac{1}{2} \int \overbrace{(2x - 5)^{11}}^{u^{11}} \overbrace{(2 dx)}^{du} \quad \leftarrow \text{sustitución} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{11} du \quad \leftarrow \text{ahora use (8)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{12}}{12} + C \\ &= \frac{1}{24} (2x - 5)^{12} + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En los ejemplos 1 y 2, el integrando se “arregló” o ajustó al multiplicar y dividir por una constante a fin de obtener la du idónea. Este procedimiento funciona bien si de inmediato se reconoce $g(x)$ en $\int f(g(x))g'(x) dx$ y que a $g'(x) dx$ simplemente le falta un múltiplo constante idóneo. El siguiente ejemplo ilustra una técnica algo diferente.

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\int \cos^4 x \sen x dx$.

Solución Para recalcar, volvemos a escribir el integrando como $\int (\cos x)^4 \sen x dx$. Una vez que se hace la identificación $u = \cos x$, se obtiene $du = -\sen x dx$. Al despejar el producto $\sen x dx$ de la última diferencial obtenemos $\sen x dx = -du$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^4 \sin x \, dx &= \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(\sin x \, dx)}^{-du} \leftarrow \text{sustitución} \\
&= - \int u^4 \, du \quad \leftarrow \text{ahora use (8)} \\
&= -\frac{u^5}{5} + C \\
&= -\frac{1}{5} \cos^5 x + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned}$$

De nuevo, se solicita que el lector diferencie el último resultado. ■

En los ejemplos que restan en esta sección se alternará entre los métodos empleados en los ejemplos 1 y 3.

En un nivel práctico no siempre es evidente que se está tratando con una integral de la forma $\int [g(x)]^n g'(x) \, dx$. Cuando trabaje cada vez más problemas, observará que las integrales no siempre son lo que parecen a primera vista. Por ejemplo, usted debe convencerse de que al usar sustituciones en u la integral $\int \cos^2 x \, dx$ no es de la forma $\int [g(x)]^n g'(x) \, dx$. En un sentido más general, en $\int f(g(x))g'(x) \, dx$ no siempre es evidente qué funciones deben escogerse como u y du .

■ Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} (-\cos u) = \sin u \frac{du}{dx}$$

conducen, a su vez, a las fórmulas de integración

$$\int \cos u \frac{du}{dx} \, dx = \sin u + C \quad (9)$$

$$\text{y} \quad \int \sin u \frac{du}{dx} \, dx = -\cos u + C. \quad (10)$$

Puesto que $du = g'(x) \, dx = \frac{du}{dx} \, dx$, (9) y (10) son, respectivamente, equivalentes a

$$\int \cos u \, du = \sin u + C, \quad (11)$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C. \quad (12)$$

EJEMPLO 4 Uso de (11)

Evalúe $\int \cos 2x \, dx$.

Solución Si $u = 2x$, entonces $du = 2 \, dx$ y $dx = \frac{1}{2} \, du$. En consecuencia, escribimos

$$\begin{aligned}
\int \cos 2x \, dx &= \int \cos \overbrace{2x}^u \overbrace{(dx)}^{\frac{1}{2} du} \leftarrow \text{sustitución} \\
&= \frac{1}{2} \int \cos u \, du \quad \leftarrow \text{ahora use (11)} \\
&= \frac{1}{2} \sin u + C \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned}$$
■

Las fórmulas de integración (8), (11) y (12) son los análogos de la regla de la cadena de las fórmulas de integración 2, 4 y 5 en la tabla 5.1.1. En la tabla 5.2.1 que se muestra a continuación se resumen los análogos de la regla de la cadena de las 16 fórmulas de integración de la tabla 5.1.1.

TABLA 5.2.1

Fórmulas de integración

1. $\int du = u + C$	2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$	4. $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$
5. $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$	6. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$	8. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$	10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$
11. $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u + C$	12. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du = \sec^{-1} u + C$
13. $\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$	14. $\int e^u du = e^u + C$
15. $\int \cosh u du = \sinh u + C$	16. $\int \sinh u du = \cosh u + C$

En otros libros de texto, fórmulas como 3, 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 suelen escribirse con el diferencial du como numerador:

$$\int \frac{du}{u}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \int \frac{du}{1+u^2}, \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

Pero como a lo largo del tiempo hemos encontrado que estas últimas fórmulas a menudo se malinterpretan en un entorno de aula, aquí se prefieren las formas proporcionadas en la tabla.

EJEMPLO 5 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \sec^2(1-4x) dx$.

Solución Reconocemos que la integral indefinida tiene la forma de la fórmula de integración 6 en la tabla 5.2.1. Si $u = 1 - 4x$, entonces $du = -4 dx$. Ajustar el integrando para obtener la forma correcta de la diferencial requiere multiplicar y dividir entre -4 :

$$\begin{aligned}
 \int \sec^2(1-4x) dx &= -\frac{1}{4} \int \sec^2(\overbrace{1-4x}^u) (\overbrace{-4 dx}^{du}) \\
 &= -\frac{1}{4} \int \sec^2 u du \quad \leftarrow \text{fórmula 6 en la tabla 5.2.1} \\
 &= -\frac{1}{4} \tan u + C \\
 &= -\frac{1}{4} \tan(1-4x) + C.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx$.

Solución Si $u = x^3 + 5$, entonces $du = 3x^2 dx$ y $x^2 dx = \frac{1}{3} du$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx &= \int \frac{1}{x^3 + 5} (x^2 dx) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| + C \quad \leftarrow \text{fórmula 3 en la tabla 5.2.1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x^3 + 5| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Vuelta a escribir y uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{1 + e^{-2x}} dx$.

Solución La integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas de integración en la tabla 5.2.1. No obstante, si el numerador y el denominador se multiplican por e^{2x} , obtenemos

$$\int \frac{1}{1 + e^{-2x}} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx.$$

Si $u = e^{2x} + 1$, entonces $du = 2e^{2x} dx$, de modo que por la fórmula 3 de la tabla 5.2.1,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + e^{-2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^{2x} + 1} (2e^{2x} dx) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C.\end{aligned}$$

Observe que el símbolo de valor absoluto puede eliminarse porque $e^{2x} + 1 > 0$ para todos los valores de x .

EJEMPLO 8 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int e^{5x} dx$.

Solución Sea $u = 5x$ de modo que $du = 5 dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^{5x} dx &= \frac{1}{5} \int e^{5x} (5 dx) \\ &= \frac{1}{5} \int e^u du \quad \leftarrow \text{fórmula 14 en la tabla 5.2.1} \\ &= \frac{1}{5} e^u + C \\ &= \frac{1}{5} e^{5x} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx$.

Solución Si hacemos $u = 4/x$, entonces $du = (-4/x^2) dx$ y $(1/x^2) dx = -\frac{1}{4} du$.

De nuevo a partir de la fórmula 14 de la tabla 5.2.1 observamos que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx &= \int e^{4/x} \left(\frac{1}{x^2} dx \right) \\
 &= \int e^u \left(-\frac{1}{4} du \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \int e^u du \\
 &= -\frac{1}{4} e^u + C \\
 &= -\frac{1}{4} e^{4/x} + C.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$.

Solución Como en el ejemplo 7, a primera vista la integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas en la tabla 5.2.1. Pero si la sustitución u se intenta con $u = \tan^{-1} x$ y $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, entonces

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx &= \int \overbrace{(\tan^{-1} x)^2}^u \overbrace{\frac{1}{1+x^2} dx}^{du} \\
 &= \int u^2 du \quad \leftarrow \text{fórmula 2 en la tabla 5.2.1} \\
 &= \frac{u^3}{3} + C \\
 &= \frac{1}{3} (\tan^{-1} x)^3 + C.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}} dx$.

Solución Al factorizar 100 del radical e identificar $u = \frac{1}{10}x$ y $du = \frac{1}{10} dx$, el resultado se obtiene a partir de la fórmula 10 de la tabla 5.2.1:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{10}\right)^2}} \left(\frac{1}{10} dx \right) \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
 &= \sin^{-1} u + C \\
 &= \sin^{-1} \frac{x}{10} + C.
 \end{aligned}$$

■ **Tres fórmulas alternas** Por razones de conveniencia, las fórmulas de integración 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 se extienden como sigue. Para $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C. \quad (15)$$

Para adquirir práctica, compruebe estos resultados por diferenciación. Observe que la integral indefinida en el ejemplo 11 puede evaluarse rápidamente al identificar $u = x$ y $a = 10$ en (13).

■ **Integrales trigonométricas especiales** Las fórmulas de integración que se proporcionan en seguida, que relacionan algunas funciones trigonométricas con el logaritmo natural, a menudo ocurren en la práctica, por lo que merecen atención especial:

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \quad (16)$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \quad (17)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad (18)$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C. \quad (19)$$

En tablas de fórmulas de integrales a menudo observamos (16) escrita como $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$. Por las propiedades de los logaritmos $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$.

Para encontrar (16) escribimos

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad (20)$$

y se identifica $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$, de modo que

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{1}{\cos x} (-\sin x \, dx) \\ &= -\int \frac{1}{u} \, du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Para obtener (18) escribimos

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx. \end{aligned}$$

Si hacemos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) \, dx$ y así,

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec^2 x + \sec x \tan x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

También, cada una de las fórmulas (16)-(19) podemos escribirlas en una forma general:

$$\int \tan u \, dx = -\ln|\cos u| + C \quad (21)$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C \quad (22)$$

$$\int \sec u \, dx = \ln|\sec u + \tan u| + C \quad (23)$$

$$y \quad \int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C. \quad (24)$$

■ **Identidades útiles** Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, a menudo es necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema. Las fórmulas de la mitad de un ángulo para el coseno y el seno en la forma

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{y} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (25)$$

son particularmente útiles en problemas que requieren antiderivadas de $\cos^2 x$ y $\sin^2 x$.

EJEMPLO 12 Uso de la fórmula de la mitad de un ángulo

Evalúe $\int \cos^2 x \, dx$.

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2 \, du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int dx + \int \cos 2x \, dx \right] \leftarrow \text{vea el ejemplo 4} \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Por supuesto, el método ilustrado en el ejemplo 12 funciona igualmente bien para encontrar antiderivadas como $\int \cos^2 5x \, dx$ y $\int \sin^2 \frac{1}{2}x \, dx$. Con x sustituida por $5x$ y luego con x sustituida por $\frac{1}{2}x$, las fórmulas en (25) permiten escribir, respectivamente,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 5x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} \sin 10x + C \\ \int \sin^2 \frac{1}{2}x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

En la sección 7.4 abordaremos antiderivadas de potencias más complicadas de funciones trigonométricas.

NOTAS DESDE EL AULA

El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento común, pero *totalmente incorrecto*, para evaluar una integral indefinida. Ya que $2x/2x = 1$,

$$\begin{aligned} \int (4 + x^2)^{1/2} \, dx &= \int (4 + x^2)^{1/2} \frac{2x}{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{2x} \int (4 + x^2)^{1/2} 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2x} \int u^{1/2} \, du \\ &= \frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{3} (4 + x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la diferenciación de la última función *no* produce $(4 + x^2)^{1/2}$. El error está en la primera línea de la “solución”. Las variables, en este caso $2x$, no pueden sacarse del símbolo de la integral. Si $u = x^2 + 4$, entonces al integrando le falta la función $du = 2x \, dx$; de hecho, no hay ninguna forma de arreglar el problema para adecuarse a la forma dada en (8). Con las “herramientas” con que contamos en este momento, simplemente no es posible evaluar la integral $\int (4 + x^2)^{1/2} \, dx$.

Ejercicios 5.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-50, evalúe la integral indefinida dada usando una sustitución u idónea.

1. $\int \sqrt{1-4x} \, dx$
2. $\int (8x+2)^{1/3} \, dx$
3. $\int \frac{1}{(5x+1)^3} \, dx$
4. $\int (7-x)^{49} \, dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+4} \, dx$
6. $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+9}} \, dt$
7. $\int \sin^5 3x \cos 3x \, dx$
8. $\int \sin 2\theta \cos^4 2\theta \, d\theta$
9. $\int \tan^2 2x \sec^2 2x \, dx$
10. $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$
11. $\int \sin 4x \, dx$
12. $\int 5 \cos \frac{x}{2} \, dx$
13. $\int (\sqrt{2t} - \cos 6t) \, dt$
14. $\int \sin(2-3x) \, dx$
15. $\int x \sin x^2 \, dx$
16. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2} \, dx$
17. $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$
18. $\int \csc^2(0.1x) \, dx$
19. $\int \frac{\csc \sqrt{x} \cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
20. $\int \tan 5v \sec 5v \, dv$
21. $\int \frac{1}{7x+3} \, dx$
22. $\int (5x+6)^{-1} \, dx$
23. $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$
24. $\int \frac{x^2}{5x^3+8} \, dx$
25. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$
26. $\int \frac{(x+3)^2}{x+2} \, dx$
27. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$
28. $\int \frac{1-\sin \theta}{\theta + \cos \theta} \, d\theta$
29. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$
30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$
31. $\int e^{10x} \, dx$
32. $\int \frac{1}{e^{4x}} \, dx$
33. $\int x^2 e^{-2x^3} \, dx$
34. $\int \frac{e^{1/x^3}}{x^4} \, dx$
35. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$
36. $\int \sqrt{e^x} \, dx$
37. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx$
38. $\int e^{3x} \sqrt{1+2e^{3x}} \, dx$
39. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} \, dx$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}} \, dx$
41. $\int \frac{1}{1+25x^2} \, dx$
42. $\int \frac{1}{2+9x^2} \, dx$

43. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$
44. $\int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^4}} \, d\theta$
45. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$
46. $\int \frac{x-8}{x^2+2} \, dx$
47. $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} \, dx$
48. $\int \sqrt{\frac{\sin^{-1} x}{1-x^2}} \, dx$
49. $\int \tan 5x \, dx$
50. $\int e^x \cot e^x \, dx$

En los problemas 51-56, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

51. $\int \sin^2 x \, dx$
52. $\int \cos^2 \pi x \, dx$
53. $\int \cos^2 4x \, dx$
54. $\int \sin^2 \frac{3}{2} x \, dx$
55. $\int (3-2 \sin x)^2 \, dx$
56. $\int (1+\cos 2x)^2 \, dx$

En los problemas 57 y 58, resuelva la ecuación diferencial dada.

57. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1-x}$
58. $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\tan x)^5}{\cos^2 x}$
59. Encuentre una función $y=f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi, -1)$ y también satisfaga $dy/dx = 1-6 \sin 3x$.
60. Encuentre una función f tal que $f''(x) = (1+2x)^5$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$.
61. Demuestre que:
 - a) $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_1$
 - b) $\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_2$
 - c) $\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_3$.
62. En el problema 61:
 - a) Compruebe que la derivada de cada respuesta en los incisos a), b) y c) es $\sin x \cos x$.
 - b) Use una identidad trigonométrica para demostrar que el resultado en el inciso b) puede obtenerse a partir de la respuesta en el inciso a).
 - c) Sume los resultados de los incisos a) y b) para obtener el resultado en el inciso c).

Aplicaciones

63. Considere el péndulo plano mostrado en la FIGURA 5.2.1, que oscila entre los puntos A y C. Si B es el punto medio entre A y C, es posible demostrar que

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{L}{g(s_C^2 - s^2)}},$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

- a) Si $t(0) = 0$, demuestre que el tiempo necesario para que el péndulo vaya de B a P es

$$t(s) = \sqrt{\frac{L}{g}} \sin^{-1}\left(\frac{s}{s_C}\right).$$

- b) Use el resultado del inciso a) para determinar el tiempo de recorrido de B a C .
c) Use b) para determinar el periodo T del péndulo; es decir, el tiempo para hacer una oscilación de A a C y de regreso a A .

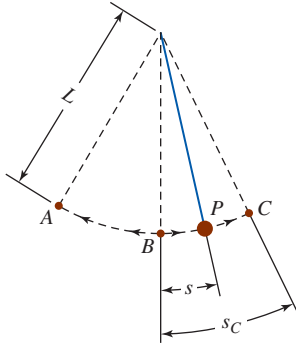


FIGURA 5.2.1 Péndulo en el problema 63

≡ Piense en ello

64. Encuentre una función $y = f(x)$ para la cual $f(\pi/2) = 0$ y $\frac{dy}{dx} = \cos^3 x$. [Sugerencia: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.]

En los problemas 65 y 66, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

$$65. \int \cos^4 x \, dx \qquad 66. \int \sin^4 x \, dx$$

En los problemas 67 y 68, evalúe la integral indefinida dada.

$$67. \int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 16}} \, dx \qquad 68. \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx$$

En los problemas 69 y 70, evalúe la integral indefinida dada.

$$69. \int \frac{1}{1 - \cos x} \, dx \qquad 70. \int \frac{1}{1 + \sin 2x} \, dx$$

En los problemas 71-74, evalúe la integral indefinida dada. Suponga que f es una función diferenciable.

$$71. \int f'(8x) \, dx \qquad 72. \int x f'(5x^2) \, dx$$

$$73. \int \sqrt{f(2x)} f'(2x) \, dx \qquad 74. \int \frac{f'(3x + 1)}{f(3x + 1)} \, dx$$

$$75. \text{ Evalúe } \int f''(4x) \, dx \text{ si } f(x) = \sqrt{x^4 + 1}.$$

$$76. \text{ Evalúe } \int \left\{ \int \sec^2 3x \, dx \right\} dx.$$

5.3 El problema de área

■ **Introducción** Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x . Vea la FIGURA 5.3.1.

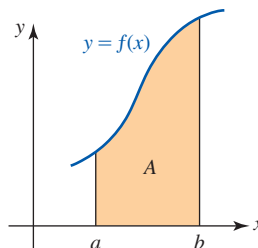


FIGURA 5.3.1 Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

Antes de continuar con la solución del problema de área es necesario hacer una breve digresión para analizar una notación útil para una suma de números como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{y} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

■ **Notación sigma** Sea a_k un número real que depende de un entero k . La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^n a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \quad (1)$$

Puesto que Σ es la letra griega mayúscula *sigma*, (1) se denomina **notación sigma** o **notación de suma**. La variable k se denomina **índice de la suma**. Así,

$$\begin{array}{c} \text{termina con este valor de } k \\ \downarrow \\ \text{el símbolo } \Sigma \text{ indica} \rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \\ \text{la suma de } a_k \\ \uparrow \\ \text{empieza con el valor} \\ \text{indicado de } k \end{array}$$

es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1, k = 2, \dots$, y termina con $k = n$.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma de los diez primeros enteros pares

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20$$

puede escribirse de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{10} 2k$. La suma de los diez enteros positivos impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19$$

puede escribirse como $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$. ■

El índice de la suma no necesita empezar en el valor $k = 1$; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^5 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^5 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Observe que la suma de los diez enteros positivos impares en el ejemplo 1 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^9 (2k + 1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en $k = 1$. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. El índice de la suma a menudo se denomina **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. En general,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{m=1}^n a_m.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}.$$

■ **Propiedades** A continuación se presenta una lista de algunas propiedades importantes de la notación sigma.

Teorema 5.3.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n ,

- i) $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$, donde c es cualquier constante
- ii) $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$
- iii) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k$, $m < n$.

La demostración de la fórmula i) es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Por supuesto, ii) del teorema 5.3.1 se cumple para la suma de más de tres términos; por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k.$$

■ **Fórmulas de sumas especiales** Para tipos especiales de sumas indicadas, particularmente sumas que implican potencias de enteros positivos del índice de la suma (como sumas de enteros positivos consecutivos, cuadrados sucesivos, cubos sucesivos, etc.) es posible encontrar una fórmula que proporcione el valor numérico verdadero de la suma. Para efectos de esta sección, centraremos la atención en las cuatro fórmulas siguientes.

Teorema 5.3.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

- i) $\sum_{k=1}^n c = nc$
- ii) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- iii) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- iv) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Las fórmulas i) y ii) pueden justificarse fácilmente. Si c es una constante, es decir, independiente del índice de la suma, entonces $\sum_{k=1}^n c$ significa $c + c + c + \cdots + c$. Puesto que hay n c , tenemos $\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$, que es i) del teorema 5.3.2. Luego, la suma de los n primeros enteros positivos puede escribirse como $\sum_{k=1}^n k$. Si esta suma se denota por la letra S , entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \quad (2)$$

$$\text{En forma equivalente, } S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \quad (3)$$

Si sumamos (2) y (3) con los primeros términos correspondientes, luego los segundos términos, y así sucesivamente, entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1} = n(n+1).$$

Al despejar S obtenemos $S = n(n+1)/2$, que es ii). Usted debe poder obtener las fórmulas iii) y iv) con las sugerencias que se proporcionan en los problemas 55 y 56 en los ejercicios 5.3.

EJEMPLO 2 Uso de fórmulas de suma

Encuentre el valor numérico de $\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2$.

Solución Al desarrollar $(k + 5)^2$ y usar *i*) y *ii*) del teorema 5.3.1, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} (k + 5)^2 &= \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 10k + 25) \quad \leftarrow \text{se eleva al cuadrado el binomio} \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + 10 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 25. \quad \leftarrow \text{i) y ii) del teorema 5.3.1}\end{aligned}$$

Con la identificación $n = 20$, por las fórmulas de sumas *iii*), *ii*) y *i*) del teorema 5.3.2, respectivamente, se concluye

$$\sum_{k=1}^{20} (k + 5)^2 = \frac{20(21)(41)}{6} + 10 \frac{20(21)}{2} + 20 \cdot 25 = 5\,470. \quad \blacksquare$$

La notación sigma y las fórmulas de sumas anteriores se usarán de inmediato en el siguiente análisis.

■ Área de un triángulo Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 5.3.2a). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 5.3.2b), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Al usar rectángulos, la FIGURA 5.3.3 indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A . Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 5.3.3b). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^* , entonces

$$\begin{aligned}x_1^* &= \Delta x = \frac{b}{n} \\ x_2^* &= 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right) \\ x_3^* &= 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n^* &= n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.\end{aligned}$$

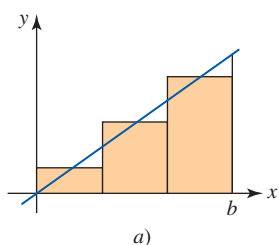
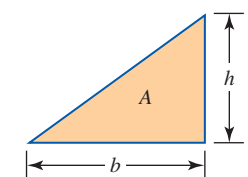
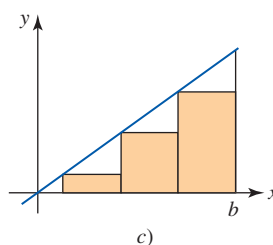
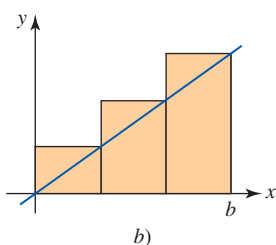
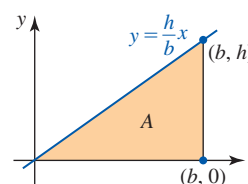


FIGURA 5.3.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos

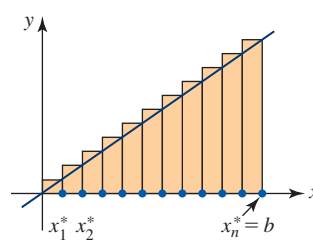


a) Triángulo rectángulo

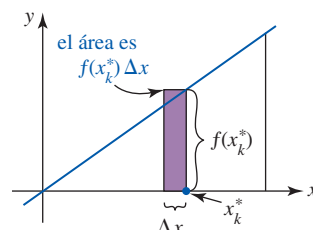


b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas

FIGURA 5.3.2 Encuentre el área A del triángulo rectángulo



a) n rectángulos



b) Área de un rectángulo general

FIGURA 5.3.4 El área A del triángulo es aproximada por la suma de las áreas de n rectángulos

Como se muestra en la FIGURA 5.3.4a), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* $\times$ *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 5.3.4b). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A . Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x. \quad (4)$$

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos ($n \rightarrow \infty$) de anchos decrecientes ($\Delta x \rightarrow 0$). Luego,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de suma ii) del teorema 5.3.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{n} \cdot k \right) \frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{bh}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right). \quad (5)$$

Finalmente, al hacer $n \rightarrow \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}bh.$$

■ **El problema general** Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la FIGURA 5.3.5a), también suponemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Como sugiere la figura 5.3.5b), el área A puede aproximarse al sumar las áreas de n rectángulos que se construyen sobre el intervalo. A continuación se resume un procedimiento posible para determinar A :

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

de modo que cada subintervalo tiene el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta colección de números se denomina **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$. Puesto que el área de un rectángulo es largo $\times$ ancho, $f(x_k^*)\Delta x$ es el área del rectángulo de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx construido sobre el k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra**.
- La suma de las áreas de los n rectángulos

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.

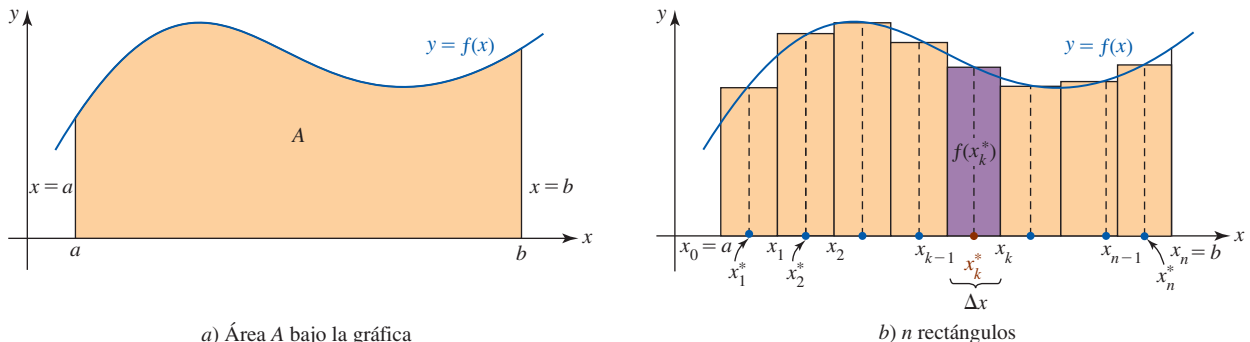


FIGURA 5.3.5 Encuentre el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x. \quad (6)$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \rightarrow \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

■ **Una forma práctica de (6)** Para usar (6), suponga que escogemos x_k^* como se hizo en el análisis de la figura 5.3.4; a saber: sea x_k^* el **punto fronterizo derecho** de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos de igual ancho es $\Delta x = (b - a)/n$, tenemos

$$x_k^* = a + k\Delta x = a + k \frac{b - a}{n}.$$

Luego, para $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1^* &= a + \Delta x = a + \frac{b - a}{n} \\ x_2^* &= a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b - a}{n}\right) \\ x_3^* &= a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b - a}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n^* &= a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b - a}{n}\right) = b. \end{aligned}$$

Al sustituir $a + k(b - a)/n$ por x_k^* y $(b - a)/n$ por Δx en (6), se concluye que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right) \cdot \frac{b - a}{n}. \quad (7)$$

Observamos que puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, $n \rightarrow \infty$ implica $\Delta x \rightarrow 0$.

EJEMPLO 3 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está acotada por el trapecoide indicado en la FIGURA 5.3.6a). Al identificar $a = 0$ y $b = 4$, encontramos

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Así, (7) se vuelve

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(0 + k \frac{4}{n}\right) \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{4k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k}{n} + 2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[\frac{4}{n} \sum_{k=1}^n k + 2 \sum_{k=1}^n 1 \right]. \quad \leftarrow \text{por las propiedades i) y ii) del teorema 5.3.1} \end{aligned}$$

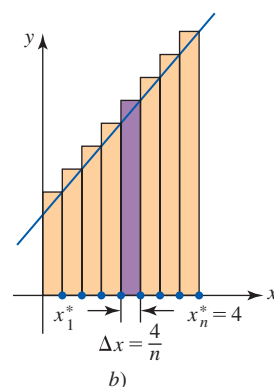
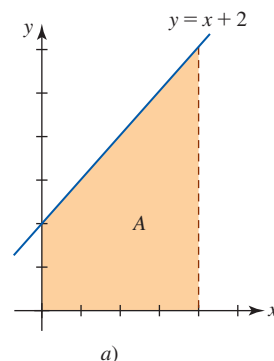


FIGURA 5.3.6 Área bajo la gráfica en el ejemplo 3

Luego, por las fórmulas de suma *i*) y *ii*) del teorema 5.3.2, tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[\frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{16}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} + 8 \right] \quad \leftarrow \text{se divide entre } n^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 8 \right] \\
 &= 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\
 &= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.}
 \end{aligned}$$

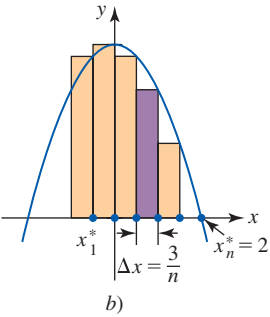
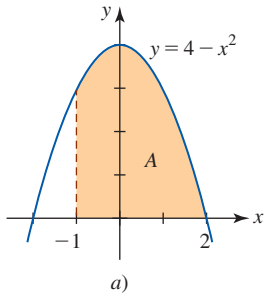


FIGURA 5.3.7 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área se indica en la FIGURA 5.3.7a). Puesto que $a = -1$ y $b = 2$, se concluye que

$$\Delta x = \frac{2 - (-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

A continuación se revisarán los pasos que llevan a (7). El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = (2 - (-1))/n = 3/n$. Luego, empezando en $x = -1$, el punto fronterizo derecho de los n subintervalos es

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= -1 + \frac{3}{n} \\
 x_2^* &= -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{6}{n} \\
 x_3^* &= -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{9}{n} \\
 &\vdots \\
 x_n^* &= -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2.
 \end{aligned}$$

Entonces, la longitud de cada rectángulo es

$$\begin{aligned}
 f(x_1^*) &= f\left(-1 + \frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{3}{n}\right]^2 \\
 f(x_2^*) &= f\left(-1 + \frac{6}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{6}{n}\right]^2 \\
 f(x_3^*) &= f\left(-1 + \frac{9}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{9}{n}\right]^2 \\
 &\vdots \\
 f(x_n^*) &= f\left(-1 + \frac{3n}{n}\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0.
 \end{aligned}$$

El área del k -ésimo rectángulo es *largo* $\times$ *ancho*:

$$f(x_k^*) \frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k \frac{3}{n} \right]^2 \right) \frac{3}{n} = \left(3 + 6 \frac{k}{n} - 9 \frac{k^2}{n^2} \right) \frac{3}{n}.$$

Al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos una aproximación al área bajo la gráfica sobre el intervalo: $A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*) (3/n)$. A medida que el número n de rectángulos crece sin límite, obtenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2} \right) \frac{3}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left[\sum_{k=1}^n 3 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k - \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right].
 \end{aligned}$$

Al usar las fórmulas de sumas i), ii) y iii) del teorema 5.3.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left[3n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] \\
 &= 9 + 9 - 9 = 9 \text{ unidades cuadradas.}
 \end{aligned}$$

■ **Otras elecciones para x_k^*** No hay nada en especial si x_k^* se escoge como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo. Volvemos a recalcar que x_k^* puede tomarse como cualquier número conveniente en $[x_{k-1}, x_k]$. En caso de que se elija x_k^* como el **punto fronterizo izquierdo** de cada subintervalo, entonces

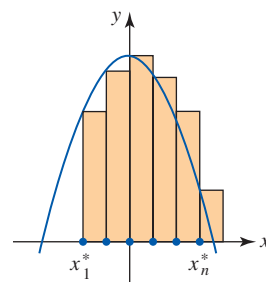
$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

y (7) se volvería

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}. \quad (8)$$

En el ejemplo 4, los rectángulos correspondientes serían como se observa en la FIGURA 5.3.8. En este caso se hubiera tenido $x_k^* = -1 + (k-1)(3/n)$. En los problemas 45 y 46 de los ejercicios 5.3 se le pide resolver el problema de área en el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como primer punto fronterizo izquierdo y punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al elegir x_k^* como el punto medio de cada $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



(9) FIGURA 5.3.8 Rectángulos usando los puntos fronterizos izquierdos de los intervalos

Ejercicios 5.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-10, desarrolle la suma indicada.

- $\sum_{k=1}^5 3k$
- $\sum_{k=1}^5 (2k-3)$
- $\sum_{k=1}^4 \frac{2^k}{k}$
- $\sum_{k=1}^4 \left(\frac{3}{10}\right)^k$
- $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5}$
- $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$
- $\sum_{j=2}^5 (j^2 - 2j)$
- $\sum_{m=0}^4 (m+1)^2$
- $\sum_{k=1}^5 \cos k\pi$
- $\sum_{k=1}^5 \frac{\sin(k\pi/2)}{k}$

En los problemas 11-20, use notación sigma para escribir la suma dada.

- $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$
- $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$
- $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 37$

$$14. 2 + 6 + 10 + 14 + \dots + 38$$

$$15. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$16. -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6}$$

$$17. 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

$$18. 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \dots + 3$$

$$19. \cos \frac{\pi}{p} x - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{p} x + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi}{p} x - \frac{1}{16} \cos \frac{4\pi}{p} x$$

$$\begin{aligned}
 20. & f'(1)(x-1) - \frac{f''(1)}{3}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{5}(x-1)^3 \\
 & - \frac{f^{(4)}(1)}{7}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{9}(x-1)^5
 \end{aligned}$$

En los problemas 21-28, encuentre el valor numérico de la suma dada.

$$21. \sum_{k=1}^{20} 2k$$

$$22. \sum_{k=0}^{50} (-3k)$$

23. $\sum_{k=1}^{10} (k+1)$

24. $\sum_{k=1}^{1000} (2k-1)$

25. $\sum_{k=1}^6 (k^2+3)$

26. $\sum_{k=1}^5 (6k^2-k)$

27. $\sum_{p=0}^{10} (p^3+4)$

28. $\sum_{i=1}^{10} (2i^3-5i+3)$

En los problemas 29-42, use (7) y el teorema 5.3.2 para encontrar el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

29. $f(x) = x$, $[0, 6]$

30. $f(x) = 2x$, $[1, 3]$

31. $f(x) = 2x+1$, $[1, 5]$

32. $f(x) = 3x-6$, $[2, 4]$

33. $f(x) = x^2$, $[0, 2]$

34. $f(x) = x^2$, $[-2, 1]$

35. $f(x) = 1-x^2$, $[-1, 1]$

36. $f(x) = 2x^2+3$, $[-3, -1]$

37. $f(x) = x^2+2x$, $[1, 2]$

38. $f(x) = (x-1)^2$, $[0, 2]$

39. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$

40. $f(x) = x^3-3x^2+4$, $[0, 2]$

41. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x+2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

43. Trace la gráfica de $y = 1/x$ sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Al dividir el intervalo en cuatro subintervalos del mismo ancho, construya rectángulos que aproximen el área A bajo la gráfica sobre el intervalo. Primero use el punto fronterizo derecho de cada subintervalo, y luego use el punto fronterizo izquierdo.

44. Repita el problema 43 para $y = \cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

45. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo. Vea (8).

46. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo. Vea (9).

En los problemas 47 y 48, dibuje la región cuya área A está dada por la fórmula. No intente evaluar.

47. $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \frac{4k^2}{n^2}} \frac{2}{n}$

48. $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n}$

≡ Piense en ello

En los problemas 49 y 50, escriba el número decimal dado usando notación sigma.

49. 0.11111111

50. 0.3737373737

51. Use la fórmula de suma iii) del teorema 5.3.2 para encontrar el valor numérico de $\sum_{k=21}^{60} k^2$.

52. Escriba la suma $8+7+8+9+10+11+12$ usando notación sigma de modo que el índice de la suma empiece con $k=0$. Con $k=1$. Con $k=2$.

53. Despeje $\bar{x}$: $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = 0$.

54. a) Encuentre el valor de $\sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)]$. Se dice que una suma de esta forma es **telescópica**.

b) Use el inciso a) para encontrar el valor numérico de

$$\sum_{k=1}^{400} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

55. a) Use el inciso a) del problema 54 para demostrar que

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = -1 + (n+1)^2 = n^2 + 2n.$$

b) Use el hecho de que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = n + 2 \sum_{k=1}^n k.$$

c) Compare los resultados de los incisos a) y b) para obtener la fórmula de suma iii) del teorema 5.3.2.

56. Muestre cómo el patrón ilustrado en la FIGURA 5.3.9 puede usarse para inferir la fórmula de suma iv) del teorema 5.3.2.

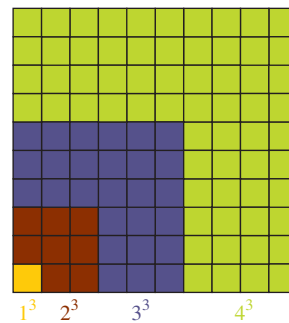


FIGURA 5.3.9 Arreglo para el problema 56

57. Obtenga la fórmula para el área del trapecioide proporcionado en la FIGURA 5.3.10.

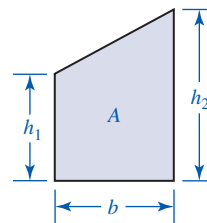


FIGURA 5.3.10 Trapecioide en el problema 57

58. En un supermercado, 136 latas se acomodan en forma triangular como se muestra en la FIGURA 5.3.11. ¿Cuántas latas puede haber en la parte inferior de la pila?

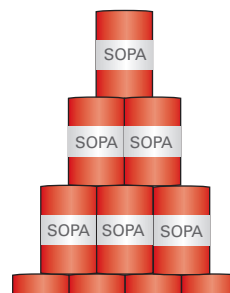


FIGURA 5.3.11 Pila de latas en el problema 58

59. Use (7) y la fórmula de suma

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = 16 - x^4$ sobre $[-2, 2]$.

60. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre $[0, 1]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^2$ sobre $[0, 1]$. Lleve a cabo sus ideas.

61. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ sobre $[0, 8]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^3$ sobre $0 \leq x \leq 2$.

62. a) Suponga que $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ sobre el intervalo $[0, x_0]$. Demuestre que el área bajo la gráfica sobre $[0, x_0]$ está dada por

$$A = a \frac{x_0^3}{3} + b \frac{x_0^2}{2} + cx_0.$$

b) Use el resultado en el inciso a) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = 6x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[2, 5]$.

63. Una fórmula de suma para la suma de los n términos de una sucesión geométrica finita $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$ está dada por

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right).$$

Use esta fórmula de suma, (8) de esta sección, y la regla de L'Hôpital para encontrar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ sobre $[0, 1]$.

64. **Un poco de historia** En un curso de física para principiantes todo mundo sabe que la distancia de un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. **Galileo Galilei** (1564-1642) fue el primero en descubrir este hecho. Galileo encontró que la distancia que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional a un entero positivo impar. Por tanto, la distancia total s que una masa se mueve en n segundos, con n un entero positivo, es proporcional a $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$. Demuestre que esto es lo mismo que afirmar que la distancia total que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional al tiempo transcurrido n .

5.4 La integral definida

■ **Introducción** En la sección previa vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1)$$

La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P .

- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P .
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 5.4.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (2)$$

Sumas del tipo proporcionado en (2) que corresponden a varias particiones de $[a, b]$ se denominan **sumas de Riemann** en honor del famoso matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann**.

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 5.3, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que “área bajo una gráfica” se refiere al *área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x* . Como se muestra en la FIGURA 5.4.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*) \Delta x_k$, donde $f(x_k^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*) \Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x .

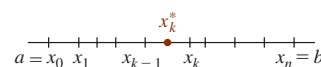


FIGURA 5.4.1 Punto muestra x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$

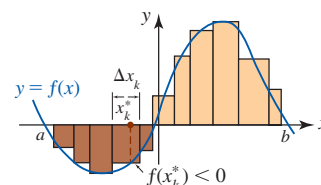


FIGURA 5.4.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

EJEMPLO 1 Una suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ sobre $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por $x_0 = -2, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = \frac{7}{4}, x_5 = 3$ y $x_1^* = -1, x_2^* = -\frac{1}{4}, x_3^* = \frac{1}{2}, x_4^* = \frac{3}{2}, x_5^* = \frac{5}{2}$. Encuentre la norma de la partición.

Solución En la FIGURA 5.4.3 se muestra que los números $x_k, k = 0, 1, \dots, 5$ determinan cinco subintervalos $[-2, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0], [0, 1], [1, \frac{7}{4}]$ y $[\frac{7}{4}, 3]$ del intervalo $[-2, 3]$ y un punto muestra x_k^* (en rojo) dentro de cada subintervalo.

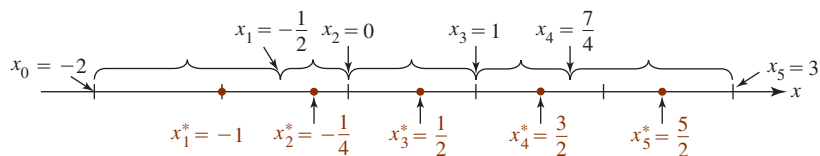


FIGURA 5.4.3 Cinco subintervalos y puntos muestra en el ejemplo 1

Luego, evalúe la función f de cada punto muestra y determine el ancho de cada subintervalo:

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= f(-1) = -3, & \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = -\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2} \\ f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}, & \Delta x_2 &= x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ f(x_3^*) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}, & \Delta x_3 &= x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1 \\ f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, & \Delta x_4 &= x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} \\ f(x_5^*) &= f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}, & \Delta x_5 &= x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Entonces, la **suma de Riemann** para esta partición y esa elección del punto muestra es

$$\begin{aligned} &f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5 \\ &= (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{279}{32} \approx -8.72. \end{aligned}$$

Al analizar los valores de los cinco Δx_k observamos que la norma de la partición es $\|P\| = \frac{3}{2}$. ■

Para una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, hay un número finito de posibles sumas de Riemann para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* pueden escogerse arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

EJEMPLO 2 Otra suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para la función del ejemplo 1 si la partición de $[-2, 3]$ es la misma pero los puntos muestra son $x_1^* = -\frac{3}{2}, x_2^* = -\frac{1}{8}, x_3^* = \frac{3}{4}, x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución Sólo es necesario calcular f en los nuevos puntos muestra, puesto que los números Δx_k son los mismos que antes:

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4} \\ f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64} \\ f(x_3^*) &= f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16} \\ f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4} \\ f(x_5^*) &= f(2.1) = 0.41. \end{aligned}$$

Ahora la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} & f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5 \\ &= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85. \blacksquare \end{aligned}$$

Tenemos interés en un tipo especial de límite de (2). Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k$ están próximas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k = L \quad (3)$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L .

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b** , que se denota por $\int_a^b f(x) dx$, se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k. \quad (4)$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \rightarrow 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \rightarrow \infty$). No obstante, como se muestra en la FIGURA 5.4.4, el hecho de que $n \rightarrow \infty$ no necesariamente implica $\|P\| \rightarrow 0$.

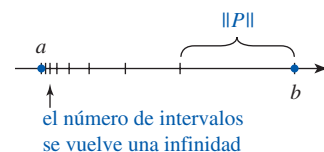


FIGURA 5.4.4 Una infinidad de subintervalos no implica $\|P\| \rightarrow 0$.

■ **Integrabilidad** En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Hay funciones definidas para cada valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite en (4) no existe. También, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida *puede* no existir; por ejemplo, después se verá por qué una integral como $\int_{-3}^2 (1/x) dx$ no existe. Observe que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no está acotada sobre el intervalo. Sin embargo, a partir de este ejemplo no debe concluirse que cuando una función f tiene una discontinuidad en $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ necesariamente no existe. La continuidad de una función sobre $[a, b]$ es condición *suficiente* pero *no necesaria* para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x) dx$. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones que son integrables sobre el intervalo.

El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para integrabilidad sobre $[a, b]$.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

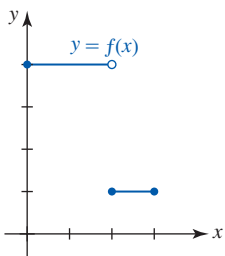


FIGURA 5.4.5 La integral definida de f sobre $[0, 3]$ existe

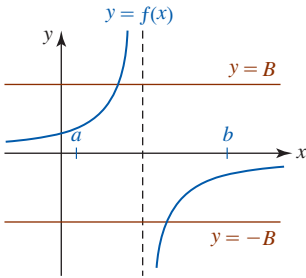


FIGURA 5.4.6 La función f no está acotada sobre $[a, b]$

Cuando una función f está acotada, su gráfica completa debe estar entre dos rectas horizontales, $y = B$ y $y = -B$. En otras palabras, $|f(x)| \leq B$ para toda x en $[a, b]$. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mostrada en la FIGURA 5.4.5 es discontinua en $x = 2$ pero está acotada sobre $[0, 3]$, puesto que $|f(x)| \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$. (Para el caso, $1 \leq f(x) \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$ muestra que f está acotada sobre el intervalo.) Por el teorema 5.4.2 se concluye que $\int_0^3 f(x) dx$ existe. La FIGURA 5.4.6 muestra la gráfica de una función f que no está acotada sobre un intervalo $[a, b]$. Sin importar cuán grande sea el número B escogido, la gráfica de f no puede estar confinada a la región entre las rectas horizontales $y = B$ y $y = -B$.

■ Partición regular Si se sabe que una integral definida existe (por ejemplo, el integrando f es continuo sobre $[a, b]$), entonces:

- El límite en (4) existe para cualquier forma posible de partición $[a, b]$ y para toda forma posible de escoger x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, al escoger los subintervalos del mismo ancho y los puntos muestra como los puntos fronterizos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, es decir,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

la expresión (4) puede escribirse en forma alterna como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}. \quad (5)$$

Recuerde por la sección 5.3 que una partición P de $[a, b]$ donde los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina **partición regular**.

■ Área Tal vez usted concluya que los planteamientos de $\int_a^b f(x) dx$ dados en (4) y (5) son exactamente los mismos que (6) y (7) de la sección 5.3 para el caso general de encontrar el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $[a, b]$. En cierta forma esto es correcto; no obstante, la definición 5.4.1 es un concepto más general puesto que, como ya se observó, no estamos requiriendo que f sea continua sobre $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo. Por tanto, una *integral definida no necesita ser un área*. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora, acepte el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compare esto con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones). El área bajo la gráfica de una función continua no negativa, ¿es una integral definida? La respuesta es *sí*.

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

EJEMPLO 3 El área como integral definida

Considere la integral definida $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. El integrando es continuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función f es el semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$, el área bajo la gráfica es la región sombreada en la FIGURA 5.4.7. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio r es πr^2 , y así con $r = 1$ el área del semicírculo y, por tanto, el valor de la integral definida, es

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi (1)^2 = \frac{1}{2} \pi.$$

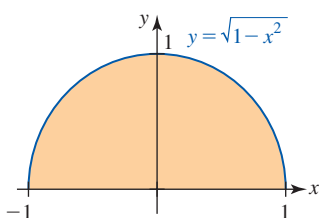


FIGURA 5.4.7 Área en el ejemplo 3

En la sección 6.2 volveremos a la cuestión de encontrar áreas por medio de la integral definida.

EJEMPLO 4 Integral definida usando (5)

Evalúe $\int_{-2}^1 x^3 dx$.

Solución Puesto que $f(x) = x^3$ es continua sobre $[-2, 1]$, por el teorema 5.4.1 sabemos que la integral definida existe. Usamos una partición regular y el resultado dado en (5). Al escoger

$$\Delta x = \frac{1 - (-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = -2 + k \cdot \frac{3}{n}$$

tenemos

$$f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) = \left(-2 + \frac{3k}{n}\right)^3 = -8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right).$$

Luego, por (5) y las fórmulas de suma i), ii), iii) y iv) del teorema 5.3.2 se concluye que

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) \frac{3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[-8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left[-8n + \frac{36}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{54}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-24 + 54\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= -24 + 54 - 27(2) + \frac{81}{4} = -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

En la FIGURA 5.4.8 se muestra que no se está considerando el área bajo la gráfica sobre $[-2, 1]$. ■

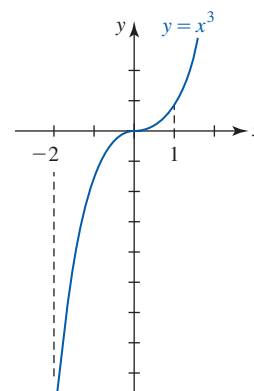


FIGURA 5.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral definida usando (5)

Los valores de las sumas de Riemann en los ejemplos 1 y 2 son aproximaciones al valor de la integral definida $\int_{-2}^3 (x^2 - 4) dx$. Se deja como ejercicio demostrar que (5) da

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 4) dx = -\frac{25}{3} \approx -8.33.$$

Vea el problema 16 en los ejercicios 5.4. ■

■ **Propiedades de la integral definida** A continuación se analizarán algunas propiedades importantes de la integral definida que se definió en (4).

Las dos siguientes definiciones son útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

Definición 5.4.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f , entonces

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (7)$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

La definición 5.4.2i) puede motivarse por el hecho de que el área bajo la gráfica de f y por arriba de un solo punto a sobre el eje x es cero.

En la definición de $\int_a^b f(x) dx$ se supuso que $a < b$, de modo que la dirección de “costumbre” de la integración definida es de izquierda a derecha. El inciso ii) de la definición 5.4.2 establece que invertir esta dirección, es decir, intercambiar los límites de integración, resulta en la negativa de la integral.

EJEMPLO 6 Definición 5.4.2

Por el inciso i) de la definición 5.4.2,

$$\begin{aligned} \text{los límites de integración} &\rightarrow \int_1^1 (x^3 + 3x) dx = 0. \\ \text{son los mismos} &\rightarrow \int_1^1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Otro repaso al ejemplo 4

En el ejemplo 4 vimos que $\int_{-2}^1 x^3 dx = -\frac{15}{4}$. Por el inciso ii) de la definición 5.4.2 se concluye que

$$\int_1^{-2} x^3 dx = -\int_{-2}^1 x^3 dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación sigma proporcionadas en el teorema 5.3.1, así como a las propiedades de la integral indefinida que se analizaron en la sección 5.1.

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$i) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ donde } k \text{ es cualquier constante}$$

$$ii) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

El teorema 5.4.4ii) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \cdots + \int_a^b f_n(x) dx.$$

La variable independiente x en una integral definida se denomina **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(r) dr = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(t) dt \quad (9)$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 8 Otro repaso al ejemplo 4

Por (9), no importa qué símbolo se use como la variable de integración:

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \int_{-2}^1 r^3 dr = \int_{-2}^1 s^3 ds = \int_{-2}^1 t^3 dt = -\frac{15}{4}.$$

Teorema 5.4.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a , b y c , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (10)$$

Resulta fácil interpretar la propiedad aditiva del intervalo dada en el teorema 5.4.5 en el caso especial en que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Como se ve en la FIGURA 5.4.9, el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ más el área bajo la gráfica del intervalo adyacente $[c, b]$ es la misma que el área bajo la gráfica de f sobre todo el intervalo $[a, b]$.

Nota: La conclusión del teorema 5.4.5 se cumple cuando a , b y c son tres números cualesquiera en un intervalo cerrado. En otras palabras, no es necesario tener el orden $a < c < b$ como se muestra en la figura 5.4.9. Además, el resultado en (10) se extiende a cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n$ en el intervalo. Por ejemplo, para un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c_1 y c_2 ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx.$$

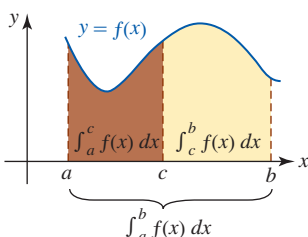


FIGURA 5.4.9 Las áreas son aditivas

Para una partición P dada de un intervalo $[a, b]$, tiene sentido afirmar que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a, \quad (11)$$

en otras palabras, el límite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k$ es simplemente el ancho del intervalo. Como una consecuencia de (11), tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k ,

$$\int_a^b k \, dx = k \int_a^b dx = k(b - a).$$

Si $k > 0$, entonces el teorema 5.4.6 implica que $\int_a^b k \, dx$ es simplemente el área de un rectángulo de ancho $b - a$ y altura k . Vea la FIGURA 5.4.10.

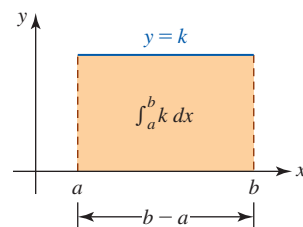


FIGURA 5.4.10 Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b - a)$

EJEMPLO 9 Integral definida de una constante

Por el teorema 5.4.6,

$$\int_2^8 5 \, dx = 5 \int_2^8 dx = 5(8 - 2) = 30. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 10 Uso de los ejemplos 4 y 9

Evalúe $\int_{-2}^1 (x^3 + 5) \, dx$.

Solución Por el teorema 5.4.4ii) podemos escribir la integral dada como dos integrales:

$$\int_{-2}^1 (x^3 + 5) \, dx = \int_{-2}^1 x^3 \, dx + \int_{-2}^1 5 \, dx.$$

Luego, por el ejemplo 4 sabemos que $\int_{-2}^1 x^3 \, dx = -\frac{15}{4}$, y con ayuda del teorema 5.4.6 vemos que $\int_{-2}^1 5 \, dx = 5[1 - (-2)] = 15$. En consecuencia,

$$\int_{-2}^1 (x^3 + 5) \, dx = \left(-\frac{15}{4}\right) + 15 = \frac{45}{4}. \quad \blacksquare$$

Por último, los siguientes resultados no son sorprendentes si la integral se interpreta como un área.

Teorema 5.4.7 Propiedades de comparación

Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$

Las propiedades i) y ii) del teorema 5.4.7 se entienden fácilmente en términos de área. Para i), si se supone $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces sobre el intervalo el área A_1 bajo la gráfica de f es mayor que o igual al área A_2 bajo la gráfica de g . En forma semejante, para ii) si se supone que f es continua y positiva sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el teorema

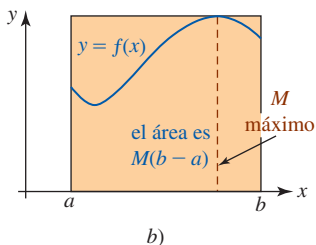
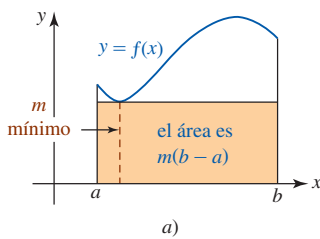


FIGURA 5.4.11 Motivación para el inciso ii) del teorema 5.4.7

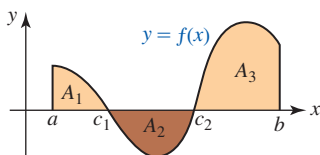


FIGURA 5.4.12 La integral definida de f sobre $[a, b]$ proporciona el área neta con signo

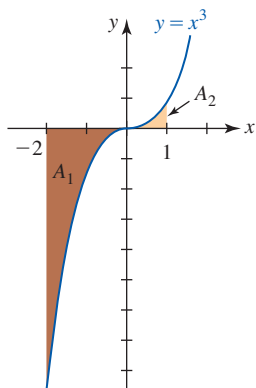


FIGURA 5.4.13 Área neta con signo en el ejemplo 11

del valor extremo, f tiene un mínimo absoluto $m > 0$ y un máximo absoluto $M > 0$ en el intervalo. Entonces, el área bajo la gráfica $\int_a^b f(x) dx$ sobre el intervalo es mayor que o igual al área $m(b-a)$ del rectángulo más pequeño mostrado en la FIGURA 5.4.11a) y menor que o igual al área $M(b-a)$ del rectángulo más grande mostrado en la figura 5.4.11b).

Si en i) del teorema 5.4.7 se hace $g(x) = 0$ y se usa el hecho de que $\int_a^b 0 dx = 0$, se concluye lo siguiente:

• Si $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. (12)

En forma semejante, al escoger $f(x) = 0$ en i), se concluye que:

• Si $g(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x) dx \leq 0$. (13)

■ **Área neta con signo** Debido a que la función f en la FIGURA 5.4.12 asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 5.4.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx. \quad (14)$$

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x) dx = A_1 \quad \text{y} \quad \int_{c_2}^b f(x) dx = A_3,$$

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ en virtud de (13), tenemos $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \leq 0$ y así $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = -A_2$. Por tanto, (14) es

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Vemos que la integral definida proporciona el **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 11 Área neta con signo

El resultado $\int_{-2}^1 x^3 dx = -\frac{15}{4}$ obtenido en el ejemplo 4 puede interpretarse como el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$. Aunque la observación de que

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -A_1 + A_2 = -\frac{15}{4}$$

no proporciona los valores de A_1 y A_2 , el valor negativo es consistente con la FIGURA 5.4.13 donde resulta evidente que el área A_1 es mayor que A_2 . ■

■ **La teoría** Sea f una función definida sobre $[a, b]$ y sea L un número real. El concepto intuitivo de que las sumas de Riemann están próximas a L siempre que la norma $\|P\|$ de una partición P esté cerca de cero puede expresarse en forma precisa usando los símbolos ε - δ introducidos en la sección 2.6. Al afirmar que f es integrable sobre $[a, b]$, se está diciendo que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k - L \right| < \varepsilon, \quad (15)$$

siempre que P sea una partición de $[a, b]$ para la cual $\|P\| < \delta$ y el x_k^* son los números en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. En otras palabras,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

existe y es igual al número L .

■ **Posdata: Un poco de historia** **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) nació en Hanover, Alemania, en 1826. Fue hijo de un ministro luterano. Aunque era cristiano devoto,



Riemann

Riemann no se inclinó por seguir la vocación de su padre y abandonó el estudio de teología en la Universidad de Gotinga para seguir una carrera de estudios en los que su genio era evidente: matemáticas. Es probable que el concepto de sumas de Riemann haya sido resultado de un curso sobre integral definida que tomó en la universidad; este concepto refleja su intento por asignar un significado matemático preciso a la integral definida de Newton y Leibniz. Después de presentar su examen doctoral sobre los fundamentos de las funciones de una variable compleja al comité examinador en la Universidad de Gotinga, Karl Friedrich Gauss, el “príncipe de las matemáticas”, dedicó a Riemann un elogio bastante singular: “La disertación ofrece pruebas concluyentes. . . de una mente creativa, activa, verdaderamente

matemática. . . de fértil originalidad”. Riemann, como muchos otros estudiantes promisorios de la época, era de constitución frágil. Falleció a los 39 años de edad, de pleuresía. Sus originales contribuciones a la geometría diferencial, topología, geometría no euclidiana y sus intrépidas investigaciones concernientes a la naturaleza del espacio, la electricidad y el magnetismo anunciaron el trabajo de Einstein en el siglo siguiente.

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

El procedimiento bosquejado en (5) tenía una utilidad limitada como medio práctico para calcular una integral definida. En la siguiente sección se introducirá un teorema que permite encontrar el número $\int_a^b f(x) dx$ de manera mucho más fácil. Este importante teorema constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Ejercicios 5.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-6, calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ para la partición dada. Especifique $\|P\|$.

- $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos; $x_0 = 0$, $x_0 = 1$,
 $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{7}{3}$, $x_4 = 3$; $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = \frac{4}{3}$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = \frac{8}{3}$
- $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos; $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$; $x_1^* = -\frac{3}{2}$,
 $x_2^* = -\frac{1}{2}$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$, $x_5^* = 4$
- $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$ cuatro subintervalos; $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$,
 $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$; $x_1^* = -\frac{3}{4}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{1}{2}$,
 $x_4^* = \frac{7}{8}$
- $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos; $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$,
 $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 3$; $x_1^* = \frac{5}{4}$, $x_2^* = \frac{7}{4}$, $x_3^* = 3$
- $f(x) = \sin x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos; $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$,
 $x_2 = 3\pi/2$, $x_3 = 2\pi$; $x_1^* = \pi/2$, $x_2^* = 7\pi/6$, $x_3^* = 7\pi/4$
- $f(x) = \cos x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, cuatro subintervalos; $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/3$, $x_4 = \pi/2$;
 $x_1^* = -\pi/3$, $x_2^* = -\pi/6$, $x_3^* = \pi/4$, $x_4^* = \pi/3$
- Dada $f(x) = x - 2$ sobre $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con cinco subintervalos de

la misma longitud. Sea x_k^* , $k = 1, 2, \dots, 5$, el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

- Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con tres subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^* , $k = 1, 2, 3$, el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 9 y 10, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k -ésimo subintervalo. Escriba las sumas dadas como una integral definida sobre el intervalo indicado.

- $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{9 + (x_k^*)^2} \Delta x_k$; $[-2, 4]$
- $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan x_k^*) \Delta x_k$; $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 y 12, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* el punto fronterizo de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n}$; $[0, 2]$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3k}{n}\right) \frac{3}{n}$; $[1, 4]$

En los problemas 13-18, use (5) y las fórmulas de suma en el teorema 5.3.2 para evaluar la integral definida dada.

- $\int_{-3}^1 x dx$
- $\int_0^3 x dx$
- $\int_1^2 (x^2 - x) dx$
- $\int_{-2}^3 (x^2 - 4) dx$

17. $\int_0^1 (x^3 - 1) dx$

18. $\int_0^2 (3 - x^3) dx$

En los problemas 19 y 20, proceda como en los problemas 13-18 para obtener el resultado dado.

19. $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

20. $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

21. Use el problema 19 para evaluar $\int_{-1}^3 x dx$.

22. Use el problema 20 para evaluar $\int_{-1}^3 x^2 dx$.

En los problemas 23 y 24, use el teorema 5.4.6 para evaluar la integral definida dada.

23. $\int_3^6 4 dx$

24. $\int_{-2}^5 (-2) dx$

En los problemas 25-38, use la definición del teorema 5.4.2 y los teoremas 5.4.4, 5.4.5 y 5.4.6 para evaluar la integral definida dada. Donde sea idóneo, use los resultados obtenidos en los problemas 21 y 22.

25. $\int_4^{-2} \frac{1}{2} dx$

26. $\int_5^5 10x^4 dx$

27. $-\int_3^{-1} 10x dx$

28. $\int_{-1}^3 (3x + 1) dx$

29. $\int_3^{-1} t^2 dt$

30. $\int_{-1}^3 (3x^2 - 5) dx$

31. $\int_{-1}^3 (-3x^2 + 4x - 5) dx$

32. $\int_{-1}^3 6x(x - 1) dx$

33. $\int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx$

34. $\int_{-1}^{1.2} 2t dt - \int_3^{1.2} 2t dt$

35. $\int_0^4 x dx + \int_0^4 (9 - x) dx$

36. $\int_{-1}^0 t^2 dt + \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 u^2 du$

37. $\int_0^3 x^3 dx + \int_3^0 t^3 dt$

38. $\int_{-1}^{-1} 5x dx - \int_3^{-1} (x - 4) dx$

En los problemas 39-42, evalúe la integral definida usando la información dada.

39. $\int_2^5 f(x) dx$ si $\int_0^2 f(x) dx = 6$ y $\int_0^5 f(x) dx = 8.5$

40. $\int_1^3 f(x) dx$ si $\int_1^4 f(x) dx = 2.4$ y $\int_3^4 f(x) dx = -1.7$

41. $\int_{-1}^2 [2f(x) + g(x)] dx$ si

$\int_{-1}^2 f(x) dx = 3.4$ y $\int_{-1}^2 3g(x) dx = 12.6$

42. $\int_{-2}^2 g(x) dx$ si

$\int_2^{-2} f(x) dx = 14$ y $\int_{-2}^2 [f(x) - 5g(x)] dx = 24$

En los problemas 43 y 44, evalúe las integrales definidas

a) $\int_a^b f(x) dx$ b) $\int_b^c f(x) dx$ c) $\int_c^d f(x) dx$

d) $\int_a^c f(x) dx$ e) $\int_b^d f(x) dx$ f) $\int_a^d f(x) dx$

usando la información en la figura dada.

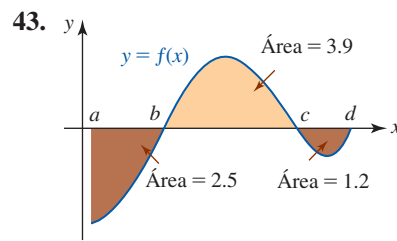


FIGURA 5.4.14 Gráfica para el problema 43

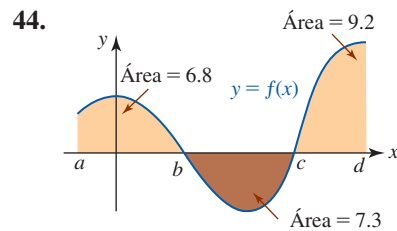


FIGURA 5.4.15 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45-48, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Trace esta región.

45. $\int_{-1}^1 (2x + 3) dx$

46. $\int_0^4 (-x^2 + 4x) dx$

47. $\int_{2\pi}^{3\pi} \sen x dx$

48. $\int_{-2}^0 \sqrt{x+2} dx$

En los problemas 49-52, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área.

49. $\int_{-2}^4 (x + 2) dx$

50. $\int_0^3 |x - 1| dx$

51. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

52. $\int_{-3}^3 (2 + \sqrt{9 - x^2}) dx$

En los problemas 53-56, la integral dada representa la siguiente área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Trace esta región.

53. $\int_0^5 (-2x + 6) dx$

54. $\int_{-1}^2 (1 - x^2) dx$

55. $\int_{-1/2}^3 \frac{4x}{x+1} dx$

56. $\int_0^{5\pi/2} \cos x dx$

En los problemas 57-60, la integral dada representa el área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área neta con signo.

$$57. \int_{-1}^4 2x \, dx \qquad 58. \int_0^8 \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) dx$$

$$59. \int_{-1}^1 (x - \sqrt{1-x^2}) \, dx \qquad 60. \int_{-1}^2 (1 - |x|) \, dx$$

En los problemas 61-64, la función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 3 \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar la integral definida dada.

$$61. \int_{-2}^0 f(x) \, dx \qquad 62. \int_{-1}^3 f(x) \, dx$$

$$63. \int_{-4}^5 f(x) \, dx \qquad 64. \int_0^{10} f(x) \, dx$$

En los problemas 65-68, use el teorema 5.4.7 para establecer la desigualdad dada.

$$65. \int_{-1}^0 e^x \, dx \leq \int_{-1}^0 e^{-x} \, dx$$

$$66. \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx \geq 0$$

$$67. 1 \leq \int_0^1 (x^3 + 1)^{1/2} \, dx \leq 1.42$$

$$68. -2 \leq \int_0^2 (x^2 - 2x) \, dx \leq 0$$

En los problemas 69 y 70, compare las dos integrales dadas por medio de un símbolo de desigualdad $\leq$ o $\geq$.

$$69. \int_0^1 x^2 \, dx, \quad \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$70. \int_0^1 \sqrt{4+x^2} \, dx, \quad \int_0^1 \sqrt{4+x} \, dx$$

≡ Piense en ello

71. Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces también lo es f^2 . Explique por qué $\int_a^b f^2(x) \, dx \geq 0$.

72. Considere la función definida para toda x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable sobre $[-1, 1]$, es decir, $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$ no existe. [Sugerencia: El resultado en (11) puede ser útil.]

73. Evalúe la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ usando una partición de $[0, 1]$ donde los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ están definidos por $[(k-1)^2/n^2, k^2/n^2]$ y escogiendo x_k^* como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

74. Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ usando una partición regular de $[0, \pi/2]$ y escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Use los resultados conocidos

$$i) \cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin(\pi/4n)} = \frac{4}{\pi}.$$

5.5 Teorema fundamental del cálculo

■ Introducción Al final de la sección 5.4 se indicó que hay una forma más sencilla para evaluar una integral definida que calculando el límite de una suma. Esta “manera más sencilla” se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

■ Teorema fundamental del cálculo: primera forma En el siguiente teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Se presentarán dos demostraciones del teorema 5.5.1. En la demostración que se proporciona se usa la premisa básica de que una integral definida es un límite de una suma. Después que se demuestre la segunda forma del teorema fundamental del cálculo, se volverá al teorema 5.5.1 y se presentará una demostración alterna.

DEMOSTRACIÓN Si F es una antiderivada de f , entonces por definición $F'(x) = f(x)$. Puesto que F es diferenciable sobre (a, b) , el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición P :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o} \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ con el último resultado obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*) \Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*) \Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_3^*) \Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*) \Delta x_n. \end{aligned}$$

Si sumamos las columnas precedentes,

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

vemos que la suma de todos los términos, menos los dos sin color en el miembro izquierdo de la igualdad, es igual a 0, con lo cual tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (2)$$

Pero $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, de modo que el límite de (2) cuando $\|P\| \rightarrow 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (3)$$

Por la definición 5.4.1, el miembro derecho de (3) es $\int_a^b f(x) dx$. ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x) \Big|_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{integral definida}} = \underbrace{\left[\int f(x) dx \right]_a^b}_{\text{integral indefinida}} = F(x) \Big|_a^b.$$

Puesto que el teorema 5.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f , siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C) \Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^1 x^3 dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\int_1^3 x dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 5.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Uso de (1)

Evalúe $\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1) dx$.

Solución Aplicamos ii) del teorema 5.1.2 y la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 a cada término del integrando, y luego usamos el teorema fundamental:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1) dx &= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Uso de (1)

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \sin x$. En consecuencia,

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

■ **Teorema fundamental del cálculo: segunda forma** Suponga que f es continua sobre un intervalo $[a, b]$, por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(t) dt$ existe. Para toda x en el intervalo $[a, b]$, la integral definida

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (4)$$

representa un solo número. De esta forma, se ve que (4) es una función con dominio $[a, b]$. En la FIGURA 5.5.1 se muestra que f es una función positiva sobre $[a, b]$, y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar $g(x)$ como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a, x]$. En la segunda forma del teorema fundamental del cálculo se demostrará que $g(x)$ definida en (4) es una función diferenciable.

◀ Tenga en cuenta que una integral definida no depende de la variable de integración t .

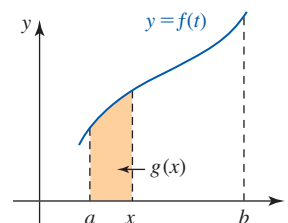


FIGURA 5.5.1 $g(x)$ como área

Teorema 5.5.2 Teorema fundamental del cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y

$$g'(x) = f(x). \quad (5)$$

DEMOSTRACIÓN PARA $h > 0$ Sean x y $x + h$ en (a, b) , donde $h > 0$. Por la definición de derivada,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \quad (6)$$

Al usar las propiedades de la integral definida, la diferencia $g(x+h) - g(x)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \quad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4} \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad \leftarrow \text{por (10) de la sección 5.4}\end{aligned}$$

Por tanto, (6) se vuelve

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (7)$$

Puesto que f es continua sobre el intervalo cerrado $[x, x + h]$, por el teorema del valor extremo (teorema 4.3.1) se sabe que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M sobre el intervalo. Puesto que m y M son constantes con respecto a la integración sobre la variable t , por el teorema 5.4.7ii) se concluye que

$$\int_x^{x+h} m \, dt \leq \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq \int_x^{x+h} M \, dt. \quad (8)$$

Con ayuda del teorema 5.5.1,

$$\int_x^{x+h} m \, dt = mt \Big|_x^{x+h} = m(x + h - x) = mh$$

y
$$\int_x^{x+h} M \, dt = Mt \Big|_x^{x+h} = M(x + h - x) = Mh.$$

Por tanto, la desigualdad en (8) se vuelve

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq Mh \quad \text{o} \quad m \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq M. \quad (9)$$

Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$ tiene sentido afirmar que $\lim_{h \rightarrow 0^+} m = \lim_{h \rightarrow 0^+} M = f(x)$. Al tomar el límite de la segunda expresión en (9) cuando $h \rightarrow 0^+$ obtenemos

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq f(x).$$

Esto demuestra que $g'(x)$ existe y por $f(x) \leq g'(x) \leq f(x)$ concluimos que $g'(x) = f(x)$. Puesto que g es diferenciable, necesariamente es continua. Un razonamiento semejante se cumple para $h < 0$. ■

Otra forma más tradicional de expresar el resultado en (5) es

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x). \quad (10)$$

EJEMPLO 5 Uso de (10)

Por (10),

$$a) \frac{d}{dx} \int_{-2}^x t^3 \, dt = x^3 \quad b) \frac{d}{dx} \int_1^x \sqrt{t^2 + 1} \, dt = \sqrt{x^2 + 1}.$$

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Encuentre $\frac{d}{dx} \int_{\pi}^{x^3} \cos t \, dt$.

Solución Si identificamos $g(x) = \int_{\pi}^x \cos t \, dt$, entonces la integral dada es la composición $g(x^3)$. Realizamos la diferenciación al aplicar la regla de la cadena con $u = x^3$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\pi}^{x^3} \cos t \, dt &= \frac{d}{du} \left(\int_{\pi}^u \cos t \, dt \right) \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^3 \cdot 3x^2 \\ &= 3x^2 \cos x^3. \end{aligned}$$

■ **Demostración alterna del teorema 5.5.1** Vale la pena examinar otra demostración del teorema 5.5.1 usando el teorema 5.5.2. Para una función f continua sobre $[a, b]$, la declaración $g'(x) = f(x)$ para $g(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ significa que $g(x)$ es una antiderivada del integrando f . Si F es cualquier antiderivada de f , por el teorema 5.1.1 sabemos que $g(x) = F(x) - F(a) = F(x) + C$,

donde C es una constante arbitraria. Puesto que $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, para cualquier x en $[a, b]$ se concluye que

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C. \quad (11)$$

Si en (11) sustituimos $x = a$, entonces

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

implica $C = -F(a)$, puesto que $\int_a^a f(t) dt = 0$. Así, (11) se vuelve

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Puesto que la última ecuación es válida en $x = b$, encontramos

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

■ Funciones continuas por partes Se dice que una función f es **continua por partes** sobre un intervalo $[a, b]$ si existe a lo más un número finito de puntos c_k , $k = 1, 2, \dots, n$, ($c_{k-1} < c_k$) en los que f tiene una discontinuidad finita, o salto, sobre cada subintervalo abierto (c_{k-1}, c_k) . Vea la FIGURA 5.5.2. Si una función f es continua por partes sobre $[a, b]$, está acotada sobre el intervalo, y entonces por el teorema 5.4.2, f es integrable sobre $[a, b]$. Una integral definida de una función continua por partes sobre $[a, b]$ puede evaluarse con ayuda del teorema 5.4.5:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

y al tratar a los integrandos de las integrales definidas en el miembro derecho de la ecuación anterior simplemente como si fuesen continuos sobre los intervalos cerrados $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\dots$, $[c_n, b]$.

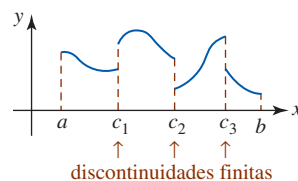


FIGURA 5.5.2 Función continua por partes

EJEMPLO 7 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_{-1}^4 f(x) dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Solución La gráfica de una función f continua por partes se muestra en la FIGURA 5.5.3. Luego, por el análisis precedente y la definición de f :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^2 x dx + \int_2^4 3 dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^2 + 3x \Big|_2^4 = \frac{17}{2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

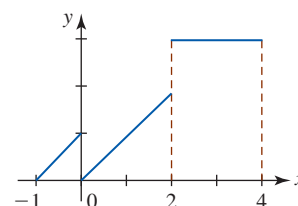


FIGURA 5.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 7

EJEMPLO 8 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_0^3 |x - 2| dx$.

Solución Por la definición de valor absoluto,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

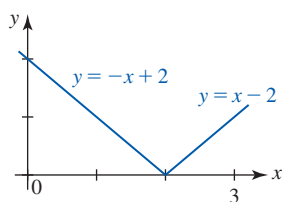


FIGURA 5.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 8

En la FIGURA 5.5.4 se muestra la gráfica de $f(x) = |x - 2|$. Luego, debido a (10) del teorema 5.4.5, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x - 2| \, dx &= \int_0^2 |x - 2| \, dx + \int_2^3 |x - 2| \, dx \\ &= \int_0^2 (-x + 2) \, dx + \int_2^3 (x - 2) \, dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_2^3 \\ &= (-2 + 4) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

■ **Sustitución en una integral definida** Recuerde por la sección 5.2 que algunas veces usamos una sustitución como ayuda para evaluar una integral indefinida de la forma $\int f(g(x))g'(x) \, dx$. Es necesario tener cuidado al usar una sustitución en una integral definida $\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx$, puesto que es posible proceder *de dos formas*.

Directrices para sustituir una integral definida

- Evalúe la integral indefinida $\int f(g(x))g'(x) \, dx$ por medio de la sustitución $u = g(x)$. Vuelva a sustituir $u = g(x)$ en la antiderivada y luego aplique el teorema fundamental del cálculo usando los límites de integración originales $x = a$ y $x = b$.
- En forma alterna, la segunda sustitución puede evitarse al cambiar los límites de integración de modo que correspondan al valor de u en $x = a$ y u en $x = b$. El último método, que suele ser más rápido, se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3 Sustitución en una integral definida

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f una función continua sobre el rango de g . Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = F(d) - F(c). \quad (12)$$

DEMOSTRACIÓN Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x) \, dx$. En consecuencia,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{dx} \, dx = \int_c^d f(u) \, du = F(u) \Big|_c^d = F(d) - F(c). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Sustitución en una integral definida

Evalúe $\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx$.

Solución Primero se ilustrarán los dos procedimientos presentados en las directrices que preceden al teorema 5.5.3.

a) Para evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx$ usamos $u = 2x^2 + 1$ y $du = 4x \, dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx &= \frac{1}{4} \int \sqrt{2x^2 + 1} \, (4x \, dx) \quad \leftarrow \text{sustitución} \\ &= \frac{1}{4} \int u^{1/2} \, du \\ &= \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{3/2} + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 5.5.1,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} x dx &= \frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{6} [9^{3/2} - 1^{3/2}] \\ &= \frac{1}{6} [27 - 1] = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

- b) Si $u = 2x^2 + 1$, entonces $x = 0$ implica $u = 1$, mientras que con $x = 2$ obtenemos $u = 9$. Así, por el teorema 5.5.3,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} x dx &\stackrel{\substack{u \text{ límites} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{4} \int_1^9 u^{1/2} du \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{integración} \\ \text{con respecto a } u \end{array} \\ &= \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{6} [9^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{13}{3}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Cuando la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y (función par) o al origen (función impar), entonces la integral definida de f sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, es decir, $\int_{-a}^a f(x) dx$, puede evaluarse por medio de un “atajo”.

Teorema 5.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (13)$$

Se demostrará el siguiente teorema, pero la demostración del teorema 5.5.4 se deja como ejercicio.

Teorema 5.5.5 Regla de la función impar

Si f es una función impar integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (14)$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es una función impar. Por la propiedad aditiva del intervalo, teorema 5.4.5, tenemos

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

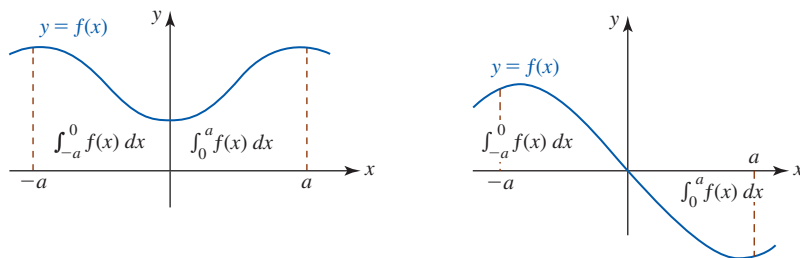
En la primera integral en el miembro izquierdo, sea $x = -t$, de modo que $dx = -dt$, y cuando $x = -a$ y $x = 0$, entonces $t = a$ y $t = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x) dx \quad \leftarrow f(-t) = -f(t), f \text{ una función impar} \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= -\int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx \quad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad \leftarrow t \text{ era una variable de integración "ficticia"} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La cuestión importante en el teorema 5.5.5 es ésta: cuando una función integrable impar f se integra sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, no es necesario encontrar una antiderivada de f ; el valor de la integral siempre es cero.

En la FIGURA 5.5.5 se muestran motivaciones geométricas para los resultados en los teoremas 5.5.4 y 5.5.5.



a) Función par: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el mismo que el valor sobre $[0, a]$

b) Función impar: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el opuesto que el valor sobre $[0, a]$

FIGURA 5.5.5 Regla de la función par en a); regla de la función impar en b)

EJEMPLO 10 Uso de la regla de la función par

Evalúe $\int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx$.

Solución El integrando $f(x) = x^4 + x^2$ es una función polinomial cuyas potencias son todas pares, de modo que f necesariamente es una función par. Puesto que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-1, 1]$, por el teorema 5.5.4 se concluye que es posible integrar sobre $[0, 1]$ y multiplicar el resultado por 2:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx &= 2 \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \\
 &= 2 \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\
 &= 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{15}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Uso de la regla de la función impar

Evalúe $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sen x dx$.

Solución En este caso $f(x) = \sen x$ es una función impar sobre el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Así, por el teorema 5.5.5 de inmediato tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sen x dx = 0.$$



NOTAS DESDE EL AULA

La forma de antiderivada del teorema fundamental del cálculo constituye una herramienta extremadamente importante y poderosa para evaluar integrales definidas. ¿Por qué molestarse con un burdo límite de una suma cuando el valor de $\int_a^b f(x) dx$ puede encontrarse al calcular $\int f(x) dx$ en los dos números a y b ? Esto es cierto hasta cierto punto; no obstante, ya es hora de aprender otro hecho de las matemáticas. Hay funciones continuas para las cuales la

antiderivada $\int f(x) dx$ no puede expresarse en términos de *funciones elementales*: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales. La simple función continua $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ no tiene antiderivada que sea una función elemental. Sin embargo, aunque por el teorema 5.4.1 es posible afirmar que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} dx$ existe, el teorema 5.5.1 no es de ninguna ayuda para encontrar su valor. La integral $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} dx$ se denomina **no elemental**. Las integrales no elementales son importantes y aparecen en muchas aplicaciones como teoría de probabilidad y óptica. A continuación se presentan algunas integrales no elementales:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Vea los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

Ejercicios 5.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-42, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.1 para evaluar la integral definida dada.

1. $\int_3^7 dx$
2. $\int_2^{10} (-4) dx$
3. $\int_{-1}^2 (2x + 3) dx$
4. $\int_{-5}^4 t^2 dt$
5. $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 5) dx$
6. $\int_{-2}^1 (12x^5 - 36) dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$
8. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos \theta d\theta$
9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3t dt$
10. $\int_{1/2}^1 \sin 2\pi x dx$
11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2} du$
12. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$
13. $\int_{-1}^1 e^x dx$
14. $\int_0^2 (2x - 3e^x) dx$
15. $\int_0^2 x(1 - x) dx$
16. $\int_3^2 x(x - 2)(x + 2) dx$
17. $\int_{-1}^1 (7x^3 - 2x^2 + 5x - 4) dx$
18. $\int_{-3}^{-1} (x^2 - 4x + 8) dx$
19. $\int_1^4 \frac{x - 1}{\sqrt{x}} dx$
20. $\int_2^4 \frac{x^2 + 8}{x^2} dx$
21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2} dx$
22. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$
23. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z + 4} dz$
24. $\int_0^{7/2} (2x + 1)^{-1/3} dx$
25. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$
26. $\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2 + 1)^2} dt$

27. $\int_{1/2}^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2} dx$
28. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1 + 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
29. $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$
30. $\int_{-1}^1 \frac{u^3 + u}{(u^4 + 2u^2 + 1)^5} du$
31. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x dx$
32. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x \csc x^2 \cot x^2 dx$
33. $\int_{-1/2}^{3/2} (x - \cos \pi x) dx$
34. $\int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$
35. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \cos x dx$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos \theta}{(\theta + \sin \theta)^2} d\theta$
38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2 dx$
39. $\int_0^{3/4} \sec^2 \pi x dx$
40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx$
41. $\int_1^5 \frac{1}{1 + 2x} dx$
42. $\int_{-1}^1 \tan x dx$

En los problemas 43-48, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar la derivada indicada.

43. $\frac{d}{dx} \int_0^x t e^t dt$
44. $\frac{d}{dx} \int_1^x \ln t dt$
45. $\frac{d}{dt} \int_2^t (3x^2 - 2x)^6 dx$
46. $\frac{d}{dx} \int_x^9 \sqrt[3]{u^2 + 2} du$
47. $\frac{d}{dx} \int_3^{6x-1} \sqrt{4t + 9} dt$
48. $\frac{d}{dx} \int_{\pi}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$

En los problemas 49 y 50, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar $F'(x)$. [Sugerencia: Use dos integrales.]

49. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^3 + 1} dt$
50. $F(x) = \int_{\sin x}^{5x} \sqrt{t^2 + 1} dt$

En los problemas 51 y 52, compruebe el resultado dado al evaluar primero la integral definida y luego diferenciando.

$$51. \frac{d}{dx} \int_1^x (6t^2 - 8t + 5) dt = 6x^2 - 8x + 5$$

$$52. \frac{d}{dt} \int_{\pi}^t \sin \frac{x}{3} dx = \sin \frac{t}{3}$$

53. Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln(2t + 1) dt$. Encuentre el valor funcional indicado.

- a) $f(1)$ b) $f'(1)$
c) $f''(1)$ d) $f'''(1)$

54. Suponga que $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ y $G'(x) = f(x)$. Encuentre la expresión dada.

- a) $G(x^2)$ b) $\frac{d}{dx} G(x^2)$
c) $G(x^3 + 2x)$ d) $\frac{d}{dx} G(x^3 + 2x)$

En los problemas 55 y 56, evalúe $\int_{-1}^2 f(x) dx$ para la función f dada.

$$55. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$56. f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$$

En los problemas 57-60, evalúe la integral definida de la función f continua por partes.

$$57. \int_0^3 f(x) dx, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$58. \int_0^{\pi} f(x) dx, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$59. \int_{-2}^2 f(x) dx, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$60. \int_0^4 f(x) dx, \text{ donde } f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ es la función entero mayor}$$

En los problemas 61-66, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral definida dada.

$$61. \int_{-3}^1 |x| dx \qquad 62. \int_0^4 |2x - 6| dx$$

$$63. \int_{-8}^3 \sqrt{|x| + 1} dx \qquad 64. \int_0^2 |x^2 - 1| dx$$

$$65. \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx \qquad 66. \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

En los problemas 67-70, proceda como en el inciso b) del ejemplo 9 y evalúe la integral definida dada usando la sustitución u indicada.

$$67. \int_{1/2}^e \frac{(\ln 2t)^5}{t} dt; \quad u = \ln 2t$$

$$68. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{(\tan^{-1} x)(1 + x^2)} dx; \quad u = \tan^{-1} x$$

$$69. \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} dx; \quad u = e^{-2x} + 1$$

$$70. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx; \quad u = x^2$$

≡ Aplicaciones

71. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes se definen en términos de integrales no elementales. Una de estas funciones especiales se denomina **función error**, que se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Demuestre que $\operatorname{erf}(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2} [1 + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,$$

y que $y(0) = 1$.

72. Otra función especial definida por una integral no elemental es la **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

La función $\operatorname{Si}(x)$ tiene una infinidad de puntos fronterizos relativos.

a) Encuentre los cuatro primeros números críticos para $x > 0$. Use la prueba de la segunda derivada para determinar si estos números críticos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo.

b) Use un SAC para obtener la gráfica de $\operatorname{Si}(x)$. [Sugerencia: En *Mathematica*, la función integral seno se denota por $\operatorname{SinIntegral}[x]$.]

≡ Piense en ello

En los problemas 73 y 74, sean P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k -ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

$$73. \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5) \Delta x_k; \quad [-1, 3]$$

$$74. \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \cos \frac{x_k^*}{4} \Delta x_k; \quad [0, 2\pi]$$

En los problemas 75 y 76, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k -ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

$$75. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin x_k^* = 2; \quad [0, \pi]$$

$$76. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k^* = 0; \quad [-1, 1]$$

En los problemas 77 y 78, evalúe la integral definida dada.

$$77. \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^x 12t^2 dt \right\} dx \quad 78. \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^t \sen x dx \right\} dt$$

79. Demuestre la prueba de la función par, teorema 5.5.4.

80. Suponga que f es una función impar definida sobre un intervalo $[-4, 4]$. Además, suponga que f es diferenciable sobre el intervalo, $f(-2) = 3.5$, que f tiene ceros en -3 y 3 y números críticos -2 y 2 .

- ¿Cuál es $f(0)$?
- Trace la gráfica aproximada de f .
- Suponga que F es una función definida sobre $[-4, 4]$ por $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$. Encuentre $F(-3)$ y $F(3)$.
- Trace una gráfica aproximada de F .
- Encuentre los números críticos y los puntos de inflexión de F .

81. Determine si el siguiente razonamiento es correcto:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sen^2 t dt &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sen t (-\sen t dt) \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 t} (-\sen t dt) \leftarrow \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\sen t dt \end{cases} \\ &= - \int_0^0 \sqrt{1 - u^2} du = 0. \leftarrow \begin{cases} \text{Teorema 5.5.3} \\ \text{Definición 5.4.2i} \end{cases} \end{aligned}$$

82. Calcule las derivadas.

$$a) \frac{d}{dx} x \int_1^{2x} \sqrt{t^3 + 7} dt \quad b) \frac{d}{dx} x \int_1^4 \sqrt{t^3 + 7} dt$$

Problemas con calculadora/SAC

- Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = \cos^3 x$ y $g(x) = \sen^3 x$.
- Con base en su interpretación de área neta con signo, use las gráficas del inciso a) para conjeturar los valores de $\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx$ y $\int_0^{2\pi} \sen^3 x dx$.

Proyectos

84. **Integración por dardos** En este problema se ilustra un método para aproximar el área bajo una gráfica al “lanzar dardos”. Suponga que deseamos encontrar el área A bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$; es decir, se quiere aproximar $A = \int_0^1 \cos^3(\pi x/2) dx$.

Si se lanza, sin ningún intento particular de ser experto, un gran número de dardos, por ejemplo N , hacia el blanco cuadrado de 1×1 mostrado en la FIGURA 5.5.6 y n dardos se insertan en la región roja bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$, entonces es posible demostrar que la probabilidad de que un dardo se inserte en la región está dada por la relación de dos áreas:

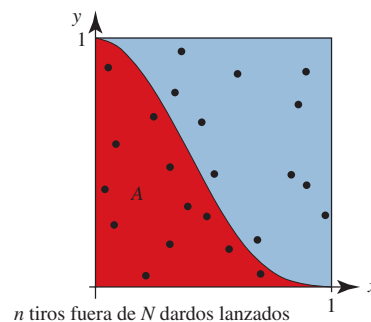
$$\frac{\text{área de la región}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{A}{1}.$$

Además, esta probabilidad teórica es aproximadamente la misma que la probabilidad empírica n/N :

$$\frac{A}{1} \approx \frac{n}{N} \quad \text{o} \quad A \approx \frac{n}{N}.$$

Para simular el lanzamiento de dardos hacia el blanco, use un SAC como *Mathematica* y su función de números aleatorios para generar una tabla de N pares ordenados (x, y) , $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

- Sea $N = 50$. Trace los puntos y la gráfica de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados. Use la figura para contar el número de éxitos n . Construya por lo menos 10 tablas diferentes de puntos aleatorios y gráficas. Para cada gráfica calcule la razón n/N .
- Repita el inciso a) para $N = 100$.
- Use el SAC para encontrar el valor exacto del área A y compare este valor con las aproximaciones obtenidas en los incisos a) y b).



n tiros fuera de N dardos lanzados
FIGURA 5.5.6 Blanco en el problema 84

85. **Derrame de petróleo en expansión** Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que un derrame de petróleo se evapore está dado por la fórmula

$$\frac{RT}{Pv} = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0} du,$$

donde $A(u)$ es el área del derrame en el instante u , RT/Pv es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y V_0 es el volumen inicial del derrame.

- Suponga que el derrame de petróleo se expande en forma circular cuyo radio inicial es r_0 . Vea la FIGURA 5.5.7. Si el radio r del derrame crece a razón $dr/dt = C$ (en metros por segundo), resuelva para t en términos de los otros símbolos.
- Valores típicos para RT/Pv y K son 1.9×10^6 (para el tridecano) y 0.01 mm/s, respectivamente. Si $C = 0.01$ m/s², $r_0 = 100$ m y $V_0 = 10\,000$ m³, determine en cuánto tiempo se evapora el petróleo.
- Use el resultado en el inciso b) para determinar al área final del derrame de petróleo.

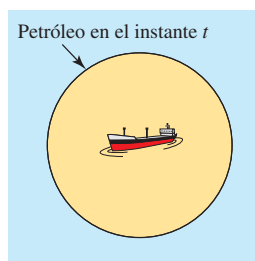
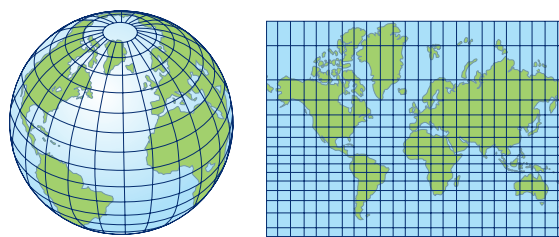


FIGURA 5.5.7 Derrame circular del petróleo en el problema 85

- 86. Proyección de Mercator y la integral de $\sec x$** En términos generales, una mapa de Mercator es una representación de un mapa global tridimensional sobre una superficie tridimensional. Vea la **FIGURA 5.5.8**. Encuentre y estudie el artículo “Mercator’s World Map and the Calculus”, Phillip M. Tuchinsky, UMAP, Unit 206, Newton, MA, 1978. Escriba un informe breve que resuma el artículo y por qué **Gerhardus Mercator** (c. 1569) necesitaba el valor de la integral definida $\int_0^{\theta_0} \sec x \, dx$ para llevar a cabo sus construcciones.



a) Globo
b) Mapa de Mercator
FIGURA 5.5.8 Globo y proyección de Mercator en el problema 86

Revisión del capítulo 5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-16, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

- Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = x^3 + x^2$. _____
- $\sum_{k=2}^6 (2k - 3) = \sum_{j=0}^4 (2j + 1)$ _____
- $\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$ _____
- $\int_1^3 \sqrt{t^2 + 7} \, dt = - \int_3^1 \sqrt{t^2 + 7} \, dt$ _____
- Si f es continua, entonces $\int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^0 f(x) \, dx = 0$. _____
- Si f es integrable, entonces f es continua. _____
- $\int_0^1 (x - x^3) \, dx$ es el área bajo la gráfica de $y = x - x^3$ sobre el intervalo $[0, 1]$. _____
- Si $\int_a^b f(x) \, dx > 0$, entonces $\int_a^b f(x) \, dx$ es el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. _____
- Si P es una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, entonces $n \rightarrow \infty$ implica $\|P\| \rightarrow 0$. _____
- Si $F'(x) = 0$ para toda x , entonces $F(x) = C$ para toda x . _____
- Si f es una función impar integrable sobre $[-\pi, \pi]$, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$. _____
- $\int_{-1}^1 |x| \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx$ _____
- $\int \sin x \, dx = \cos x + C$ _____
- $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$ _____
- $\int_a^b f'(t) \, dt = f(b) - f(a)$ _____
- La función $F(x) = \int_{-5}^{2x} (t + 4)e^{-t} \, dt$ es creciente sobre el intervalo $[-2, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-16, llene los espacios en blanco.

- Si G es una antiderivada de una función f , entonces $G'(x) =$ _____.
- $\int \frac{d}{dx} x^2 dx =$ _____.
- Si $\int f(x) dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$, entonces $f(x) =$ _____.
- El valor de $\frac{d}{dx} \int_3^x \sqrt{t^2 + 5} dt$ en $x = 1$ es _____.
- Si g es diferenciable, entonces $\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^b f(t) dt =$ _____.
- $\frac{d}{dx} \int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt =$ _____.
- Al usar notación sigma, la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11}$ puede expresarse como _____.
- El valor numérico de $\sum_{k=1}^{15} (3k^2 - 2k)$ es _____.
- Si $u = t^2 + 1$, entonces la integral definida $\int_2^4 t(t^2 + 1)^{1/3} dt$ se vuelve $\frac{1}{2} \int_{-}^{-} u^{1/3} du$.
- El área bajo la gráfica de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ es _____, y el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = 2x$ y el eje x sobre $[-1, 2]$ es _____.
- Si el intervalo $[1, 6]$ se parte en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es _____.
- Una partición de un intervalo $[a, b]$ donde todos los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina partición _____.
- Si P es una partición de $[0, 4]$ y x_k^* es un número en el k -ésimo subintervalo, entonces $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k^*} \Delta x_k$ es la definición de la integral definida _____. Por el teorema fundamental del cálculo, el valor de esta integral definida es _____.
- Si $\int_0^6 f(x) dx = 11$ y $\int_0^4 f(x) dx = 15$, entonces $\int_4^6 f(x) dx =$ _____.
- $\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^x e^{-t} dt \right\} dx =$ _____ y $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x e^{-t} dt \right\} dx =$ _____.
- Para $t > 0$, el área neta con signo $\int_0^t (x^3 - x^2) dx = 0$ cuando $t =$ _____.

C. Ejercicios _____

En los problemas 1-20, evalúe la integral dada.

1. $\int_{-1}^1 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1) dx$	2. $\int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int (5t + 1)^{100} dt$	4. $\int w^2 \sqrt{3w^3 + 1} dw$
5. $\int_0^{\pi/4} (\sin 2x - 5 \cos 4x) dx$	6. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} dz$
7. $\int_4^4 (-2x^2 + x^{1/2}) dx$	8. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx$

9. $\int \cot^6 8x \csc^2 8x \, dx$ 10. $\int \csc 3x \cot 3x \, dx$
11. $\int (4x^2 - 16x + 7)^4 (x - 2) \, dx$ 12. $\int (x^2 + 2x - 10)^{2/3} (5x + 5) \, dx$
13. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 16}} \, dx$ 14. $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 16} \, dx$
15. $\int_0^4 \frac{x}{16 + x^2} \, dx$ 16. $\int_0^4 \frac{1}{16 + x^2} \, dx$
17. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$ 18. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$
19. $\int \tan 10x \, dx$ 20. $\int \cot 10x \, dx$
21. Suponga que $\int_0^5 f(x) \, dx = -3$ y $\int_0^7 f(x) \, dx = 2$. Evalúe $\int_5^7 f(x) \, dx$.
22. Suponga que $\int_1^4 f(x) \, dx = 2$ y $\int_4^9 f(x) \, dx = -8$. Evalúe $\int_1^9 f(x) \, dx$.

En los problemas 23-28, evalúe la integral dada.

23. $\int_0^3 (1 + |x - 1|) \, dx$ 24. $\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\frac{10t^4}{(2t^3 + 6t + 1)^2} \right] dt$
25. $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^{10} t}{16t^7 + 1} \, dt$ 26. $\int_{-1}^1 t^5 \sin t^2 \, dt$
27. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 3x^2} \, dx$ 28. $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el límite dado.

29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$ 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

31. En la FIGURA 5.R.1 se muestra un cubo con las dimensiones dadas (en pies) que se llena a razón constante de $dV/dt = \frac{1}{4}$ pies³/min. Cuando $t = 0$, en la balanza se lee 31.2 lb. Si el agua pesa 62.4 lb/pie³, ¿cuál es la lectura de la balanza luego de 8 minutos? ¿Y cuando el cubo está lleno? [Sugerencia: Vea la página FM-2 para la fórmula para el volumen del tronco de un cono. También ignore el peso del cubo.]

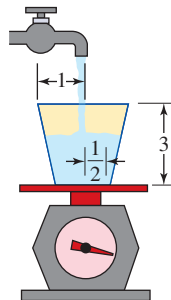


FIGURA 5.R.1 Cubo y balanza en el problema 31

32. La **torre de Hanoi** es una pila de discos circulares, cada uno de los cuales es más grande que el de arriba, colocados en un mástil. Vea la FIGURA 5.R.2. Una vez, un antiguo rey ordenó que esta torre debía construirse con discos de oro con las siguientes especificaciones: el ancho de cada disco debía ser un dedo más grande que el del disco de arriba. El hueco por los centros de los discos debía medir un dedo de ancho de diámetro, y el disco superior debía medir dos dedos de diámetro. Suponga que el ancho de un dedo es 1.5 cm, que el oro pesa 19.3 g/cm³ y que su valor es \$14 por gramo.

- a) Encuentre una fórmula para el valor del oro en la torre de Hanoi del rey si la torre tiene n discos.
- b) El número normal de discos de oro en la torre de Hanoi es 64. ¿Cuál es el valor del oro en la torre?

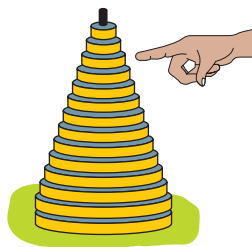


FIGURA 5.R.2 Torre de Hanoi en el problema 32

33. Considere la función uno a uno $f(x) = x^3 + x$ sobre el intervalo $[1, 2]$. Vea la FIGURA 5.R.3. Sin encontrar f^{-1} , determine el valor de

$$\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x) dx.$$

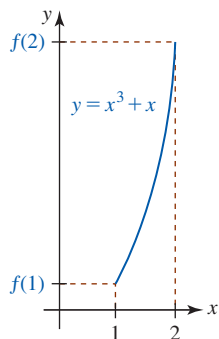
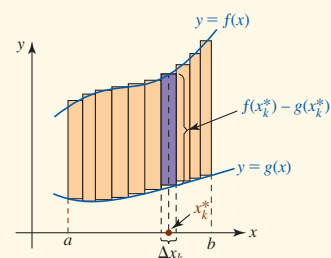
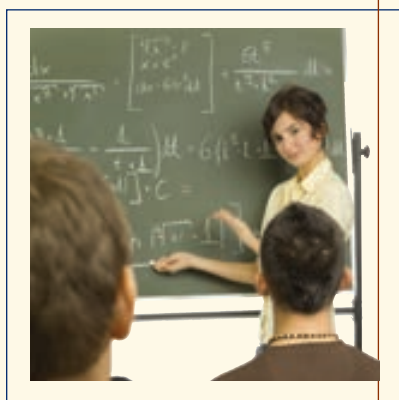


FIGURA 5.R.3 Gráfica para el problema 33

Aplicaciones de la integral



En este capítulo Aunque en la sección 6.2 se volverá al problema de encontrar áreas por integración definida, en las secciones posteriores de este capítulo veremos que la integral definida tiene muchas otras interpretaciones, además del área.

El capítulo empieza con una aplicación de la integral indefinida.

- 6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo
- 6.2 Otro repaso al área
- 6.3 Volúmenes de sólidos: método de las rebanadas
- 6.4 Volúmenes de sólidos: método de los cascarones
- 6.5 Longitud de una gráfica
- 6.6 Área de una superficie de revolución
- 6.7 Valor promedio de una función
- 6.8 Trabajo
- 6.9 Presión y fuerza del fluido
- 6.10 Centros de masa y centroides
- Revisión del capítulo 6

6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo

■ **Introducción** El capítulo 4, *Aplicaciones de la derivada*, empezó con el concepto de movimiento rectilíneo. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t) dt \quad \text{y} \quad v(t) = \int a(t) dt. \quad (1)$$

Si se conocen la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).

Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontalmente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la FIGURA 6.1.1, si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las **condiciones iniciales** son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$. Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad. Esta fuerza provoca la aceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración es aproximadamente

$$32 \text{ pies/s}^2, \quad 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{o bien,} \quad 980 \text{ cm/s}^2.$$

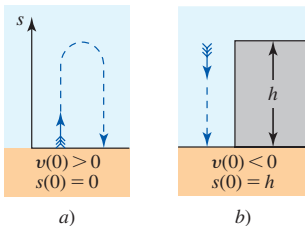


FIGURA 6.1.1 Condiciones iniciales

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8) dt = -9.8t + C_1. \quad (2)$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9.8t + 49) dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \quad (3)$$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \quad (4)$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t - 10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s. ■

Cuando se ignora la resistencia del aire, la magnitud de la velocidad de impacto (rapidez) es la misma que la velocidad inicial hacia arriba desde el nivel del suelo. Vea el problema 32 en los ejercicios 6.1. Esto no es cierto cuando tomamos en consideración la resistencia del aire.

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 6.1.2.

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$$v(t) = \int (-32) dt = -32t + C_1.$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$$v(t) = -32t - 8.$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8) dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$. Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v(\frac{3}{2}) = -56$ pies/s. ■

■ **Distancia** La **distancia total** que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt. \quad (5)$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.

EJEMPLO 3 Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 9]$.

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la FIGURA 6.1.3; a saber: $v < 0$ para $0 \leq t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \geq 0$ para $3 \leq t \leq 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

$$\begin{aligned} \int_0^9 |2t - 6| dt &= \int_0^3 |2t - 6| dt + \int_3^9 |2t - 6| dt \\ &= \int_0^3 -(2t - 6) dt + \int_3^9 (2t - 6) dt \\ &= (-t^2 + 6t) \Big|_0^3 + (t^2 - 6t) \Big|_3^9 = 45 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Por supuesto, el último resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura 6.1.3 entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$. ■

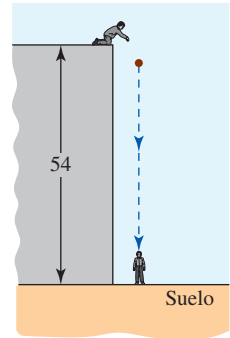


FIGURA 6.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

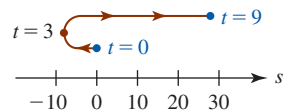


FIGURA 6.1.3 Representación del movimiento del objeto en el ejemplo 3

Ejercicios 6.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ **Fundamentos**

En los problemas 1-6, un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$

2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$

3. $v(t) = t^2 - 4t$; $s = 6$ cuando $t = 3$

4. $v(t) = \sqrt{4t + 5}$; $s = 2$ cuando $t = 1$

5. $v(t) = -10 \cos(4t + \pi/6)$; $s = \frac{5}{4}$ cuando $t = 0$
 6. $v(t) = 2 \sin 3t$; $s = 0$ cuando $t = \pi$

En los problemas 7-12, un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

7. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$
 8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$
 9. $a(t) = 3t^2 - 4t + 5$; $v = -3$ y $s = 10$ cuando $t = 0$
 10. $a(t) = (t - 1)^2$; $v = 4$ y $s = 6$ cuando $t = 1$
 11. $a(t) = 7t^{1/3} - 1$; $v = 50$ y $s = 0$ cuando $t = 8$
 12. $a(t) = 100 \cos 5t$; $v = -20$ y $s = 15$ cuando $t = \pi/2$

En los problemas 13-18, un objeto se mueve en línea recta según la función posición dada. Si s se mide en centímetros, encuentre la distancia total recorrida por el objeto en el instante de tiempo indicado.

13. $s(t) = t^2 - 2t$; $[0, 5]$
 14. $s(t) = -t^2 + 4t + 7$; $[0, 6]$
 15. $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$; $[0, 4]$
 16. $s(t) = t^4 - 32t^2$; $[1, 5]$
 17. $s(t) = 6 \sin \pi t$; $[1, 3]$
 18. $s(t) = (t - 3)^2$; $[2, 7]$

≡ Aplicaciones

19. El conductor de un automóvil que se desplaza en línea recta a velocidad constante de 60 mi/h aparta por 2 s la vista de la carretera. ¿Cuántos pies recorre el automóvil en este instante?
20. Una pelota se deja caer (a partir del reposo) desde una altura de 144 pies. ¿En cuánto tiempo la pelota llega al suelo? ¿A qué velocidad choca contra el suelo?
21. Un huevo se suelta desde la parte superior de un edificio y choca contra el suelo después de 4 s desde que fue soltado. ¿Cuál es la altura del edificio?
22. Una piedra se deja caer en un pozo y el choque de ésta con el agua se escucha 2 s después. Si la velocidad del sonido en el aire es 1 080 pies/s, encuentre la profundidad del pozo.
23. Una flecha se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s. ¿A qué altura llega?
24. ¿Cuán alto llegaría la flecha en el problema 23 en el planeta Marte, donde $g = 3.6$ m/s²?
25. Una pelota de golf se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde del techo de un edificio de 384 pies de altura con una velocidad inicial de 32 pies/s. ¿En qué instante golpea la pelota el suelo?
26. En el problema 25, ¿cuál es la velocidad de la pelota de golf cuando pasa frente a un observador situado en una ventana situada a 256 pies del suelo?
27. Una persona arroja un malvavisco hacia abajo con una velocidad inicial de 16 pies/s desde una ventana que está

a 102 pies del nivel del suelo. Si el malvavisco golpea la cabeza de una persona de 6 pies de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?

28. La persona cuya cabeza fue golpeada en el problema 27 sube hasta la parte superior de una escalera de 22 pies de altura y arroja una roca verticalmente con una velocidad inicial de 96 pies/s. Si la roca choca contra el culpable en el piso a 102 pies, ¿cuál es la velocidad de impacto?

≡ Piense en ello

29. En marzo de 1979, la sonda espacial *Voyager 1* fotografió la erupción de un volcán activo en Io, una de las lunas de Júpiter. Encuentre la velocidad de lanzamiento de una roca desde el volcán Loki si la roca alcanza una altitud de 200 km por arriba de la cima del volcán. En Io, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.8$ m/s².
30. Como se muestra en la FIGURA 6.1.4, desde un punto a 30 pies de un poste de 25 pies de altura se arroja verticalmente hacia abajo una pelota desde una altura de 25 pies con una velocidad inicial de 2 pies/s.
- a) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste.
 b) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste en $t = \frac{1}{2}$.

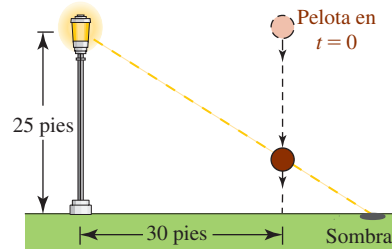


FIGURA 6.1.4 Poste en el problema 30

31. Si un cuerpo se mueve rectilíneamente con aceleración constante a y $v = v_0$ cuando $s = 0$, demuestre que

$$v^2 = v_0^2 + 2as. \quad \left[\text{Sugerencia: } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v. \right]$$

32. Demuestre que, cuando se ignora la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo choca de nuevo contra el suelo con una velocidad igual a la velocidad inicial v_0 .
33. Suponga que la aceleración debida a la gravedad en un planeta es igual a la mitad de la aceleración en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta alcanza una altura máxima que es igual al doble de la altura en la Tierra cuando se aplica la misma velocidad inicial.
34. En el problema 33, suponga que la velocidad inicial de la pelota sobre el planeta es v_0 y que la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra es $2v_0$. Compare las alturas máximas alcanzadas. Determine la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra (en términos de v_0) de modo que la máxima altura alcanzada sea la misma que sobre el planeta.

6.2 Otro repaso al área

■ **Introducción** Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 5.4, el valor de $\int_a^b f(x) dx$ puede interpretarse como al *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.

■ **Área total** Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c]$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 6.2.1a), $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c]$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Como se muestra en la figura 6.2.1b), la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c]$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x . Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 6.2.1b) usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^c (-f(x)) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2)$$

EJEMPLO 1 Área total

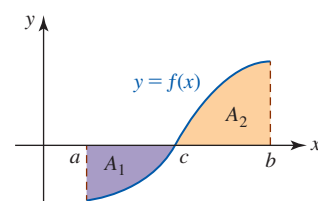
Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$.

Solución Por (2) se tiene

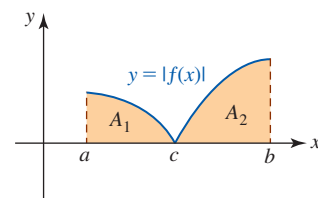
$$A = \int_{-2}^1 |x^3| dx.$$

En la FIGURA 6.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área



b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

FIGURA 6.2.1 El área total es $A = A_1 + A_2$

◀ Vea el teorema 5.4.5.

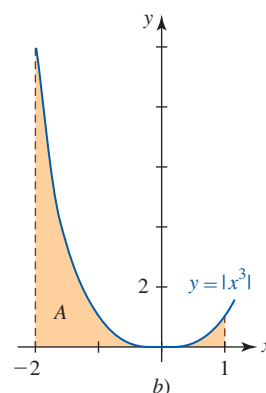
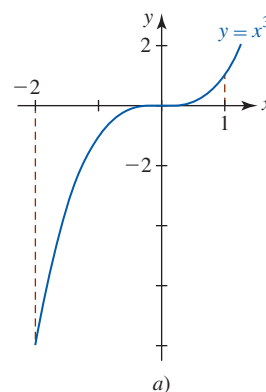


FIGURA 6.2.2 Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

Entonces, por (2) de la definición 6.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^1 |x^3| dx \\
 &= \int_{-2}^0 |x^3| dx + \int_0^1 |x^3| dx \\
 &= \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx \\
 &= -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 \\
 &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.

Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la FIGURA 6.2.3. Luego, por la figura 6.2.3a), vemos que sobre $[-2, 2]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 |x^2 + 2x| dx \\
 &= \int_{-2}^0 |x^2 + 2x| dx + \int_0^2 |x^2 + 2x| dx \\
 &= \int_{-2}^0 -(x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (x^2 + 2x) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_0^2 \\
 &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8.
 \end{aligned}$$

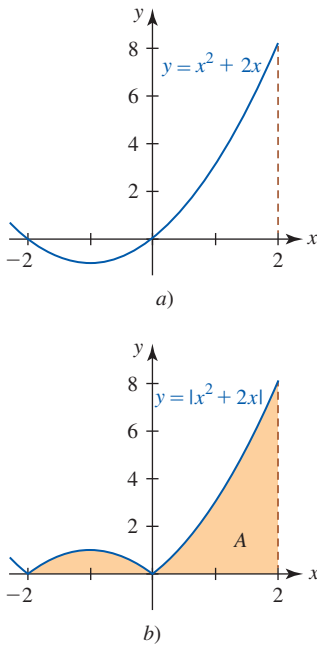


FIGURA 6.2.3 Gráfica y área en el ejemplo 2

■ **Área acotada por dos gráficas** El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la FIGURA 6.2.4a). El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región

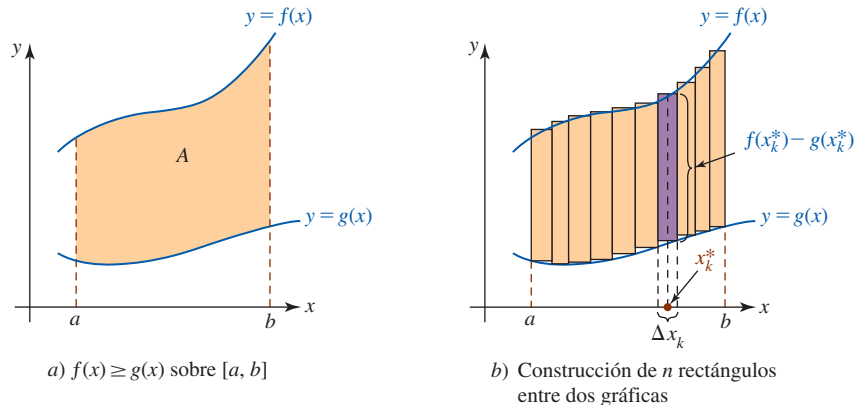


FIGURA 6.2.4 Área A acotada entre dos gráficas

acotada por la gráfica de f y la gráfica de la función $y = 0$ (el eje x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

■ **Construcción de una integral** Suponga que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si escogemos un punto muestra x_k^* en cada subintervalo, es posible construir n rectángulos correspondientes que tengan el área

$$A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Vea la figura 6.2.4b). El área A de la región acotada por las dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$ es aproximada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k,$$

lo cual a su vez sugiere que el área es

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Puesto que f y g son continuas, también lo es $f - g$. Entonces, el límite anterior existe y, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (3)$$

También (3) es válida para las regiones en que una o ambas funciones f y g tienen valores negativos. Vea la FIGURA 6.2.5. Sin embargo, (3) no es válida sobre un intervalo $[a, b]$ donde las gráficas de f y g se cruzan en el intervalo. Observe en la FIGURA 6.2.6 que g es la gráfica superior sobre los intervalos (a, c_1) y (c_2, b) , mientras que f es la gráfica superior sobre el intervalo (c_1, c_2) . En el caso más general, tenemos la siguiente definición.

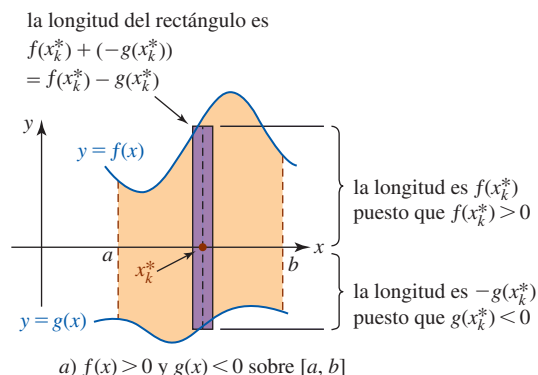


FIGURA 6.2.5 Las gráficas de f y g pueden estar por abajo del eje x

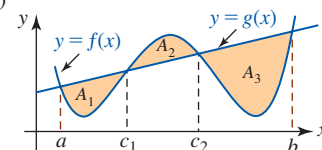
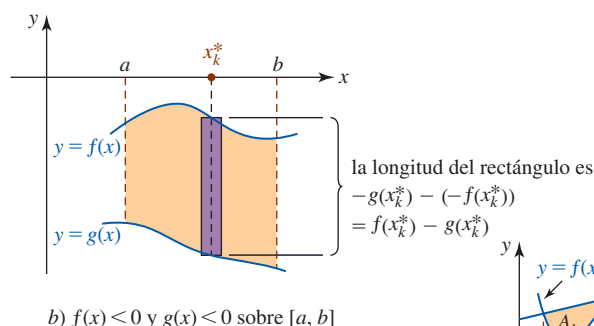


FIGURA 6.2.6 Las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a, b]$

Definición 6.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$

Observe que (4) se reduce a (2) cuando $g(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Antes de usar las fórmulas (3) o (4), se le pide trazar las gráficas necesarias. Si las curvas se cruzan sobre el interva-

La hipótesis de que $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo significa que las gráficas de f y g pueden tocarse pero no cruzarse mutuamente.

lo, entonces como hemos visto en la figura 6.2.6, la posición relativa de las curvas cambia. En cualquier caso, sobre cualquier subintervalo de $[a, b]$, el integrando idóneo siempre es

$$(\text{gráfica superior}) - (\text{gráfica inferior}).$$

Así como en (1), el valor absoluto del integrando está dado por

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & \text{para } f(x) - g(x) < 0 \\ f(x) - g(x), & \text{para } f(x) - g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Una manera más práctica de interpretar (5) consiste en trazar las gráficas de f y g con precisión y determinar visualmente que:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{siempre que } g \text{ es la gráfica superior} \\ f(x) - g(x), & \text{siempre que } f \text{ es la gráfica superior} \end{cases}$$

En la figura 6.2.6, el área A acotada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)| \, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)| \, dx + \int_{c_2}^b |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_a^{c_1} [g(x) - f(x)] \, dx + \int_{c_1}^{c_2} [f(x) - g(x)] \, dx + \int_{c_2}^b [g(x) - f(x)] \, dx. \end{aligned}$$

$\uparrow$ g es la gráfica superior $\uparrow$ f es la gráfica superior $\uparrow$ g es la gráfica superior

EJEMPLO 3 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 6.2.7, la región en cuestión se localiza en el primer cuadrante. Puesto que 0 y 1 son las soluciones de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, las gráficas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$, se concluye que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

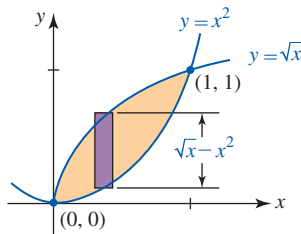


FIGURA 6.2.7 Área en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Solución Las funciones dadas se denotan por

$$y_1 = x^2 + 2x \quad \text{y} \quad y_2 = -x + 4.$$

Como se muestra en la FIGURA 6.2.8, las gráficas se cortan sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Para encontrar los puntos de intersección resolvemos la ecuación $x^2 + 2x = -x + 4$ o $x^2 + 3x - 4 = 0$ y encontramos que $x = -4$ y $x = 1$. El área en cuestión es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-4}^2 |y_2 - y_1| \, dx = \int_{-4}^1 |y_2 - y_1| \, dx + \int_1^2 |y_2 - y_1| \, dx.$$

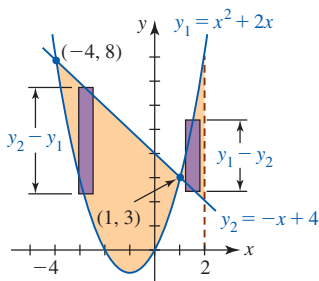


FIGURA 6.2.8 Área en el ejemplo 4

Pero como $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(-4, 1)$ y $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(1, 2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^1 [(-x + 4) - (x^2 + 2x)] dx + \int_1^2 [(x^2 + 2x) - (-x + 4)] dx \\ &= \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) dx + \int_1^2 (x^2 + 3x - 4) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_{-4}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16 \right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right) = \frac{71}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de las cuatro regiones acotadas por las gráficas de $y = \sen x$ y $y = \cos x$ que se muestran en la FIGURA 6.2.9.

Solución Hay una infinidad de regiones acotadas por las gráficas de $y = \sen x$ y $y = \cos x$ y el área de cada región es la misma. En consecuencia, sólo es necesario encontrar el área de la región sobre el intervalo correspondiente a las dos primeras soluciones positivas de la ecuación $\sen x = \cos x$. Al dividir entre $\cos x$, una forma más útil de la última ecuación es $\tan x = 1$. La primera solución positiva es $x = \tan^{-1} 1 = \pi/4$. Luego, como $\tan x$ tiene periodo π , la siguiente solución positiva es $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Sobre el intervalo $(\pi/4, 5\pi/4)$, $y = \sen x$ es la gráfica superior, de modo que el área de las cuatro regiones es

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sen x - \cos x) dx \\ &= 4(-\cos x - \sen x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Al encontrar el área acotada por dos gráficas, no siempre es conveniente integrar con respecto a la variable x .

EJEMPLO 6 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Observamos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ define de manera implícita dos funciones, $y_2 = \sqrt{1 - x}$ y $y_1 = -\sqrt{1 - x}$ para $x \leq 1$. Si definimos $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, por la FIGURA 6.2.10 vemos que la altura de un elemento de área sobre el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras la altura de un elemento sobre el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Por tanto, si se integra con respecto a x , el área deseada es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^0 (y_3 - y_1) dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx.$$

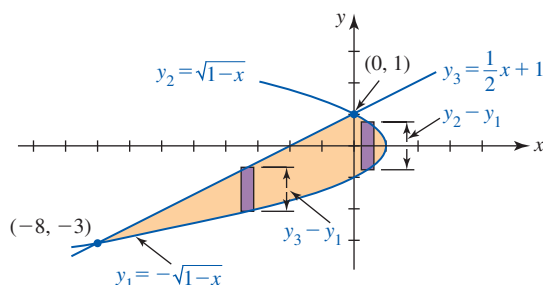


FIGURA 6.2.10 En el ejemplo 6, y_3 es la gráfica superior sobre el intervalo $(-8, 0)$; y_2 es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$

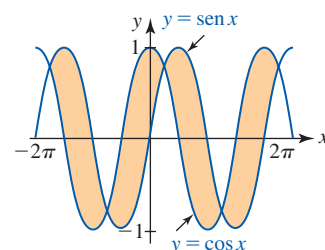


FIGURA 6.2.9 Cada una de las cuatro regiones tiene la misma área en el ejemplo 5

Por tanto, el área de la región es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$; es decir,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-8}^0 \left[\left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - (-\sqrt{1-x}) \right] dx + \int_0^1 [\sqrt{1-x} - (-\sqrt{1-x})] dx \\
 &= \int_{-8}^0 \left(\frac{1}{2}x + 1 + \sqrt{1-x} \right) dx + 2 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \\
 &= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right) \Big|_{-8}^0 - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2} \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} \right) - \frac{4}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot 1^{3/2} = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

La necesidad de usar dos integrales en el ejemplo 6 para encontrar el área se evita al construir rectángulos horizontales y usar a y como variable independiente. Si definimos $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$, entonces, como se muestra en la FIGURA 6.2.11, el área del elemento horizontal es

$$A_k = [\text{gráfica derecha} - \text{gráfica izquierda}] \cdot \text{ancho}.$$

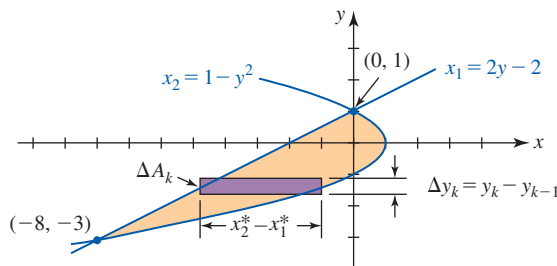


FIGURA 6.2.11 Uso de y como la variable de integración en el ejemplo 7

Es decir,

$$A_k = [x_2^* - x_1^*] \Delta y_k,$$

donde $x_2^* = 1 - (y_k^*)^2$, $x_1^* = 2y_k^* - 2$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Al sumar los rectángulos en la dirección de y positiva obtenemos

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [x_2^*(y) - x_1^*(y)] \Delta y_k,$$

donde $\|P\|$ es la norma de una partición P del intervalo sobre el eje y definida por $-3 \leq y \leq 1$. En otras palabras,

$$A = \int_{-3}^1 (x_2 - x_1) dy,$$

donde el límite inferior -3 y el límite superior 1 son las coordenadas y de los puntos de intersección $(-8, -3)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Luego, al sustituir por x_2 y x_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-3}^1 [(1 - y^2) - (2y - 2)] dy \\
 &= \int_{-3}^1 (-y^2 - 2y + 3) dy \\
 &= \left(-\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y \right) \Big|_{-3}^1 \\
 &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9 \right) = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

Como se mencionó en la introducción, en este capítulo veremos diferentes interpretaciones de la integral definida. En cada sección veremos una variedad de la integral definida, dentro del párrafo *Construyendo una integral*. Antes de memorizar estas fórmulas de integrales, usted debe estar al tanto de que el resultado obtenido en general no es aplicable a toda situación geométrica o física concebible. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 7, para encontrar el área de una región en el plano puede resultar más conveniente integrar con respecto a y y así poder construir una integral totalmente diferente. En lugar de aplicar a ciegas una fórmula, usted debe tratar de comprender el proceso y la práctica de construir integrales al analizar la geometría de cada problema.

Ejercicios 6.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-22, encuentre el área total acotada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1. $y = x^2 - 1$; $[-1, 1]$
2. $y = x^2 - 1$; $[0, 2]$
3. $y = x^3$; $[-3, 0]$
4. $y = 1 - x^3$; $[0, 2]$
5. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
6. $y = -(x + 1)^2$; $[-1, 0]$
7. $y = x^3 - 6x$; $[-1, 1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 2$; $[0, 2]$
9. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $[0, 3]$
10. $y = x(x + 1)(x - 1)$; $[-1, 1]$
11. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $[\frac{1}{2}, 3]$
12. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $[1, 2]$
13. $y = \sqrt{x} - 1$; $[0, 4]$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$; $[0, 9]$
15. $y = \sqrt[3]{x}$; $[-2, 3]$
16. $y = 2 - \sqrt[3]{x}$; $[-1, 8]$
17. $y = \sin x$; $[-\pi, \pi]$
18. $y = 1 + \cos x$; $[0, 3\pi]$
19. $y = -1 + \sin x$; $[-3\pi/2, \pi/2]$
20. $y = \sec^2 x$; $[0, \pi/3]$
21. $y = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$; $[-2, 1]$
22. $y = \begin{cases} x + 2, & -3 \leq x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$; $[-3, 2]$

En los problemas 23-50, encuentre el área de la región acotada por la gráfica de las funciones dadas.

23. $y = x, y = -2x, x = 3$
24. $y = x, y = 4x, x = 2$
25. $y = x^2, y = 4$
26. $y = x^2, y = x$
27. $y = x^3, y = 8, x = -1$
28. $y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante
29. $y = 4(1 - x^2), y = 1 - x^2$
30. $y = 2(1 - x^2), y = x^2 - 1$
31. $y = x, y = 1/x^2, x = 3$
32. $y = x^2, y = 1/x^2, y = 9$, primer cuadrante
33. $y = -x^2 + 6, y = x^2 + 4x$
34. $y = x^2, y = -x^2 + 3x$
35. $y = x^{2/3}, y = 4$

36. $y = 1 - x^{2/3}, y = x^{2/3} - 1$
37. $y = x^2 - 2x - 3, y = 2x + 2$, sobre $[-1, 6]$
38. $y = -x^2 + 4x, y = \frac{3}{2}x$
39. $y = x^3, y = x + 6, y = -\frac{1}{2}x$
40. $x = y^2, x = 0, y = 1$
41. $x = -y, x = 2 - y^2$
42. $x = y^2, x = 6 - y^2$
43. $x = y^2 + 2y + 2, x = -y^2 - 2y + 2$
44. $x = y^2 - 6y + 1, x = -y^2 + 2y + 1$
45. $y = x^3 - x, y = x + 4, x = -1, x = 1$
46. $x = y^3 - y, x = 0$
47. $y = \cos x, y = \sin x, x = 0, x = \pi/2$
48. $y = 2 \sin x, y = -x, x = \pi/2$
49. $y = 4 \sin x, y = 2$, sobre $[\pi/6, 5\pi/6]$
50. $y = 2 \cos x, y = -\cos x$, sobre $[-\pi/2, \pi/2]$

En los problemas 51 y 52, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones. Trace las dos regiones que tienen el área dada por la integral.

51. $\int_0^4 (\sqrt{x} + x) dx$
52. $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3 - x \right) dx$

En los problemas 53 y 54, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones sobre un intervalo. Evalúe la integral dada y trace la región.

53. $\int_0^2 \left| \frac{3}{x+1} - 4x \right| dx$
54. $\int_{-1}^1 |e^x - 2e^{-x}| dx$

En los problemas 55-58, use el hecho de que el área de un círculo de radio r es πr^2 para evaluar la integral definida dada. Trace una región cuya área esté dada por la integral definida.

55. $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$
56. $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$
57. $\int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2}) dx$
58. $\int_{-1}^1 (2x + 3 - \sqrt{1 - x^2}) dx$

59. Establezca una integral definida que represente el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$. Use la idea que se utilizó en los problemas 55-58 para evaluar la integral definida.
60. Encuentre el área del triángulo con vértices en $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 2)$.
61. Considere la región acotada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x - 1)$. Calcule el área de la región al integrar con respecto a x .
62. Calcule el área de la región dada en el problema 61 al integrar con respecto a y .
63. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$ y $y = 2$ mostradas en la FIGURA 6.2.12. Exprese el área de la región como integrales definidas primero usando integración con respecto a x y luego usando integración con respecto a y . Escoja una de estas integrales para encontrar el área.

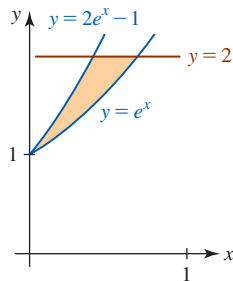


FIGURA 6.2.12 Gráficas para el problema 63

Problemas con calculadora/SAC

64. Use una calculadora o un SAC para aproximar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas mostradas en la FIGURA 6.2.13. Encuentre un valor aproximado del área de la región.

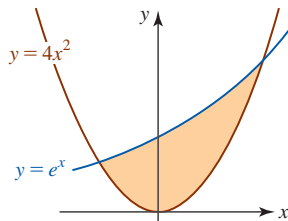


FIGURA 6.2.13 Gráficas para el problema 64

Piense en ello

65. El segmento de recta entre Q y R mostrado en la FIGURA 6.2.14 es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en el punto P . Demuestre que el área del triángulo QOR es independiente de las coordenadas de P .

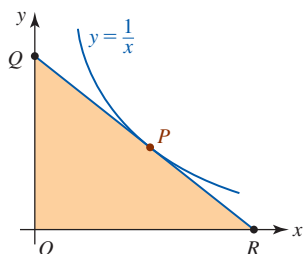


FIGURA 6.2.14 Triángulo en el problema 65

66. Un trapecioide está acotado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Muestre que el área del trapecioide es $\frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$.
67. Exprese el área de la región sombreada mostrada en la FIGURA 6.2.15 en términos del número a . Trate de ser un poco perspicaz.

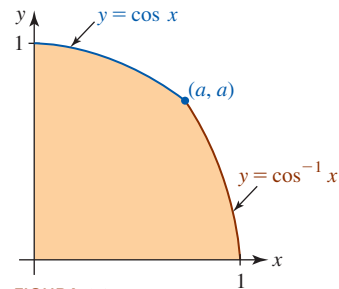


FIGURA 6.2.15 Gráficas para el problema 67

68. Suponga que los dos brochazos de pintura mostrados en la FIGURA 6.2.16 se hacen de una sola pasada usando una brocha de ancho k , $k > 0$, sobre el intervalo $[a, b]$. En la figura 6.2.16b) se supone que la región pintada en rojo es paralela al eje x . ¿Cuál brochazo tiene mayor área? Argumente su respuesta con una demostración matemática sólida. ¿Puede plantear un principio general?

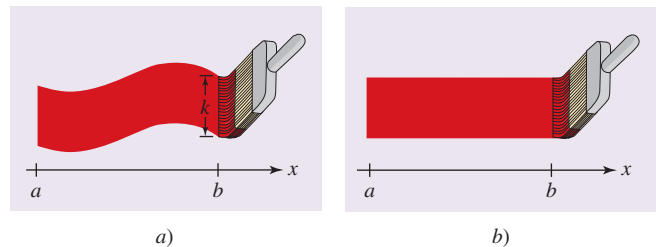


FIGURA 6.2.16 Brochazos de pintura en el problema 68

Proyectos

69. **El área más grande** Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos C y D están sobre una recta paralela a la primera recta. Los puntos en la FIGURA 6.2.17a) forman un rectángulo $ABCD$. Los puntos C y D se mueven a la izquierda como se muestra en la figura 6.2.17b) de modo que $ABC'D'$ forme un paralelogramo. Analice: ¿cuál tiene mayor área, el rectángulo $ABCD$ o el paralelogramo $ABC'D'$?

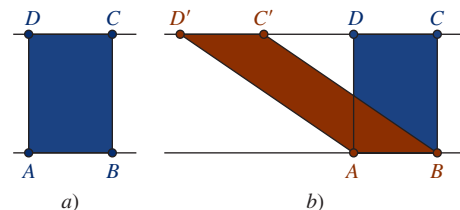


FIGURA 6.2.17 Rectángulo y paralelogramo en el problema 69

70. **Principio de Cavalieri** Escriba un reporte breve acerca del principio de Cavalieri. Analice los problemas 68 y 69 en su reporte.

6.3 Volúmenes de sólidos: método de las rebanadas

■ **Introducción** La forma que indiscutiblemente viene a la mente al evocar las palabras **cilindro recto** es el cilindro *circular* recto; es decir, la conocida forma de una lata de aluminio. Sin embargo, un cilindro recto no necesita ser circular. Por geometría, un **cilindro recto** se define como un sólido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral que es generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos constituyen los límites de las regiones planas. Cuando las regiones son círculos, obtenemos el cilindro circular recto. Si las regiones son rectángulos, el cilindro es un paralelepípedo rectangular. Algo común a todos los cilindros, como los cinco mostrados en la FIGURA 6.3.1, es que su volumen V está dado por la fórmula

$$V = B \cdot h, \quad (1)$$

donde B denota el área de una base (es decir, el área de una de las regiones planas) y h denota la altura del cilindro (es decir, la distancia perpendicular entre las regiones planas).

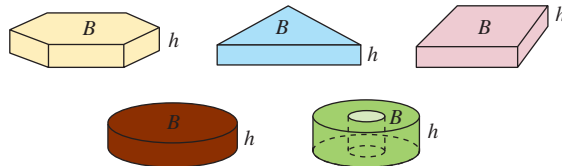


FIGURA 6.3.1 Cinco cilindros rectos diferentes

En esta sección se demostrará cómo es posible usar la integral definida para calcular volúmenes de ciertos tipos de sólidos, específicamente sólidos con sección transversal conocida. La fórmula (1) es especialmente importante en el siguiente análisis.

■ **Método de las rebanadas** Suponga que V es el volumen del sólido mostrado en la FIGURA 6.3.2 acotado por planos que son perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Además, suponga que conoce una función continua $A(x)$ que proporciona el área de una región de sección transversal que se forma al *rebanar* el sólido por un plano perpendicular al eje x ; en otras palabras, una rebanada es la intersección del sólido y un plano. Por ejemplo, para $a < x_1 < x_2 < b$ las áreas de las secciones transversales mostradas en la figura 6.3.2 son $A(x_1)$ y $A(x_2)$. Con esto en mente, suponga que rebana al sólido en cortes delgados por planos paralelos (semejantes a rebanadas de pan de caja comercial) de modo que el grosor o ancho de una rebanada es Δx_k . Al usar cilindros rectos para aproximar los volúmenes de estas rebanadas es posible construir una integral definida que proporcione el volumen V del sólido.

■ **Construcción de una integral** Ahora considere rebana el sólido en n rodajas. Si P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$ y x_k^* es un punto muestra en el k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces una aproximación al volumen del sólido sobre este subintervalo, o rebanada, es el volumen V_k del cilindro recto, que se muestra en la ampliación de la FIGURA 6.3.3. El área B de la base del cilindro recto es el área $A(x_k^*)$ de la sección transversal y su altura h es Δx_k de modo que por (1) su volumen es

$$V_k = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = A(x_k^*) \Delta x_k. \quad (2)$$

Se concluye que la suma de Riemann de los volúmenes $V_k = A(x_k^*) \Delta x_k$ de los n cilindros rectos,

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k,$$

es una aproximación al volumen V del sólido sobre $[a, b]$. Usamos la integral definida

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx$$

como definición del volumen V del sólido.

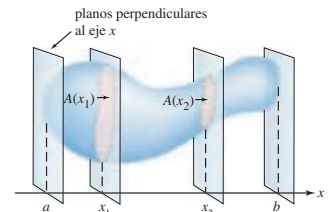


FIGURA 6.3.2 Las regiones o las secciones transversales tienen áreas conocidas



Una pieza de pan es una rodaja formada por dos rebanadas

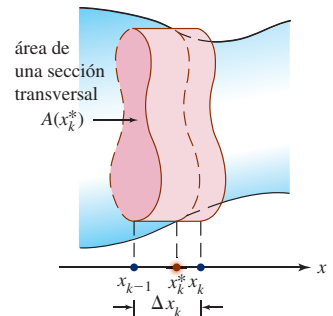


FIGURA 6.3.3 El volumen de un cilindro recto es una aproximación al volumen de una rebanada

Definición 6.3.1 Volumen por rebanadas

Sea V el volumen de un sólido acotado por planos perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Si $A(x)$ es una función continua que proporciona el área de una sección transversal del sólido formado por un plano perpendicular al eje x en cualquier punto en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (3)$$

Tenga presente que no hay nada especial sobre la variable x en (3); dependiendo de la geometría y el análisis del problema también es posible terminar con una integral $\int_c^d A(y) dy$.

EJEMPLO 1 Sólido con secciones transversales cuadradas

Para el sólido en la FIGURA 6.3.4a), las secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular son cuadradas. Dado que el radio de la base es 4 pies, encuentre el volumen del sólido.

Solución Sean x y y ejes como se muestra en la figura 6.3.4a); a saber: el origen está en el centro de la base circular del sólido. En esta figura, una sección transversal cuadrada se muestra perpendicular al eje x . Puesto que la base del sólido es un círculo, tenemos $x^2 + y^2 = 4^2$. En la figura 6.3.4b), la línea discontinua en x_k^* representa la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ en una partición del intervalo $[-4, 4]$. A partir de esto vemos que la longitud de un lado de la sección transversal cuadrada es $2y_k^* = 2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}$. Por tanto, el área de una sección transversal cuadrada es

$$A(x_k^*) = (2\sqrt{16 - (x_k^*)^2})^2 = 64 - 4(x_k^*)^2.$$

El volumen del cilindro recto que aproxima el volumen del sólido o rebanada en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = (64 - 4(x_k^*)^2) \Delta x_k.$$

Al formar la suma $\sum_{k=1}^n V_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ obtenemos la integral definida

$$V = \int_{-4}^4 (64 - 4x^2) dx = 64x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-4}^4 = \frac{512}{3} - \left(-\frac{512}{3}\right) = \frac{1024}{3}.$$

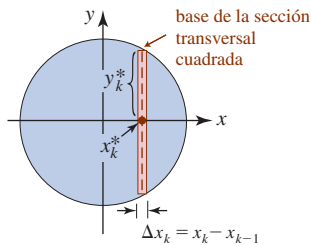
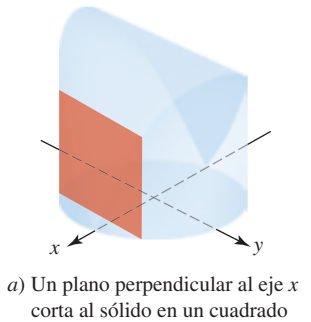


FIGURA 6.3.4 Sólido en el ejemplo 1

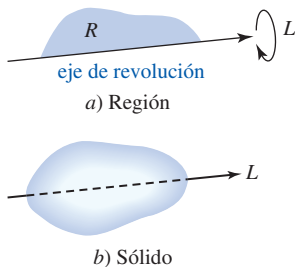


FIGURA 6.3.5 Un sólido de revolución se forma al girar una región plana R alrededor de un eje L

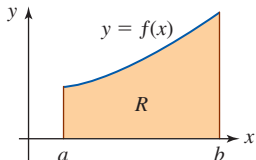


FIGURA 6.3.6 Región a girar alrededor del eje x

Sólidos de revolución Si una región R en el plano xy se hace girar alrededor de un eje L , se genera un sólido denominado **sólido de revolución**. Vea la FIGURA 6.3.5.

Método del disco Como acaba de analizarse, el volumen V de un sólido puede encontrarse por medio de una integral definida siempre que se conoce una función $A(x)$ que proporciona el área de una sección transversal formada al hacer pasar un plano por el sólido de forma perpendicular a un eje. En el caso de encontrar el volumen de un sólido de revolución, siempre es posible encontrar $A(x)$; el eje en cuestión es el eje de revolución L . Vemos que al rebanar el sólido por medio de dos planos paralelos perpendiculares al eje de revolución, el volumen de las rebanadas resultantes del sólido pueden aproximarse por cilindros *circulares* rectos que son discos o arandelas. A continuación se ilustrará la construcción de una integral de volumen usando discos.

Construcción de una integral Sea R la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.6. Si esta región se hace girar alrededor del eje x , encontramos el volumen V del sólido de revolución resultante.

Sea P una partición de $[a, b]$ y sea x_k^* cualquier número en el k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 6.3.7a). A medida que el elemento rectangular de ancho Δx_k y altura $f(x_k^*)$ gira alrededor del eje x , genera un disco sólido. Luego, la sección transversal del sólido determinada por un plano que corta la superficie en x_k^* es un círculo de radio $r = f(x_k^*)$, y así el

área de la sección transversal es $A(x_k^*) = \pi [f(x_k^*)]^2$. El volumen del cilindro circular recto, o disco sólido, de radio $r = f(x_k^*)$ y altura $h = \Delta x_k$ es $\pi r^2 h$ o

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k$$

representa una aproximación al volumen del sólido mostrado en la figura 6.3.7d). Esto sugiere que el volumen V del sólido de revolución está dado por

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k$$

o bien,

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (4)$$

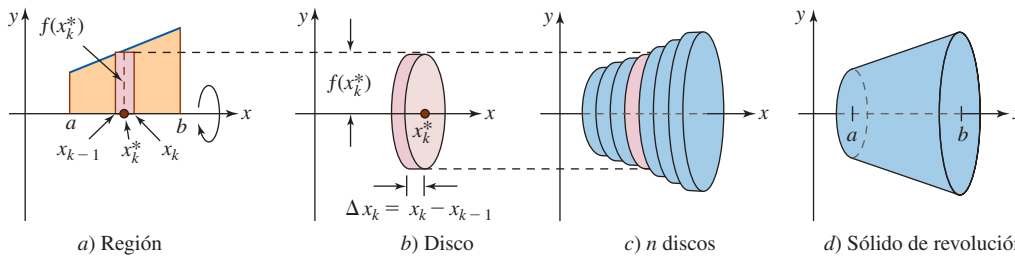


FIGURA 6.3.7 Cuando el elemento rectangular rojo en a) gira alrededor del eje x se genera el disco circular rojo en b)

Si una región R se hace girar alrededor de algún otro eje, entonces (4) puede simplemente no ser aplicable al problema de encontrar el volumen del sólido resultante. En lugar de aplicar una fórmula a ciegas, usted debe establecer una integral con sumo cuidado por medio del análisis de la geometría de cada problema. Un caso así se analizará en el ejemplo 6.

EJEMPLO 2 Método del disco

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

Solución En la FIGURA 6.3.8a) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una rebanada de la sección transversal x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi [f(x_k^*)]^2 = \pi [(x_k^*)^{1/2}]^2 = \pi x_k^*,$$

y así el volumen del disco correspondiente mostrado en la figura 6.3.8b) es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi x_k^* \Delta x_k.$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi.$$

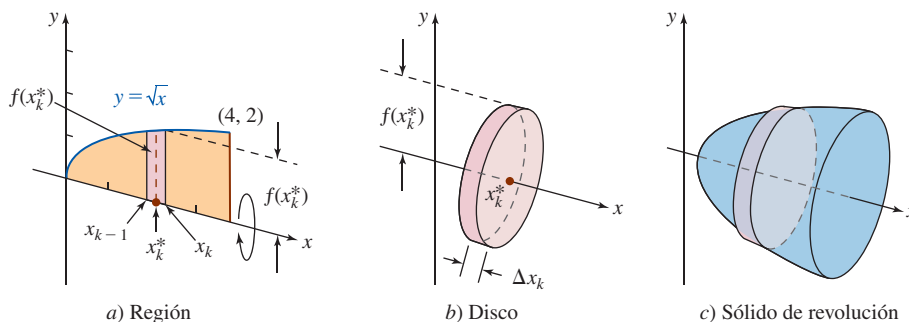


FIGURA 6.3.8 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2

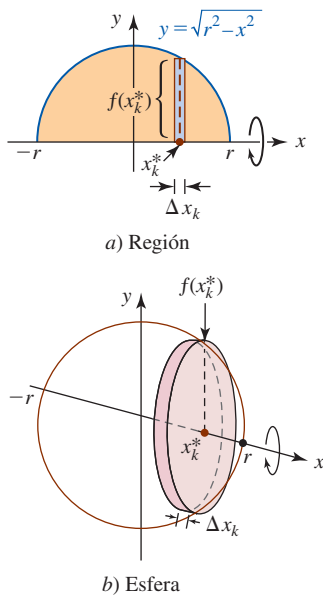


FIGURA 6.3.9 Semicírculo y esfera en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Volumen de una esfera

Demuestre que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución Una esfera de radio r puede generarse al girar un semicírculo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x . Por la FIGURA 6.3.9 vemos que el área de una región de la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi(\sqrt{r^2 - (x_k^*)^2})^2 = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)$$

y por tanto, el volumen de un disco es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi(r^2 - (x_k^*)^2) \Delta x_k.$$

Al usar (4) observamos que el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-r}^r = \pi \frac{2}{3} r^3 - \left(-\pi \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \blacksquare$$

■ Método de la arandela Sea R la región acotada por las gráficas de las funciones continuas $y=f(x)$, $y=g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.10a), que se hace girar alrededor del eje x . Entonces una rebanada perpendicular al eje x del sólido de revolución en x_k^* es una circular o anillo anular. Cuando el elemento rectangular de ancho Δx_k que se muestra en la figura 6.3.10a) gira alrededor del eje x , genera una arandela. El área del anillo es

$$\begin{aligned} A(x_k^*) &= \text{área del círculo} - \text{área del orificio} \\ &= \pi[f(x_k^*)]^2 - \pi[g(x_k^*)]^2 = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \end{aligned}$$

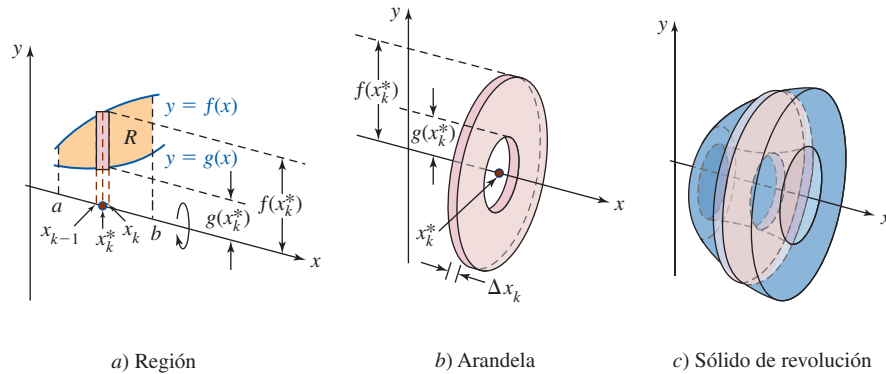
y el volumen V_k de la arandela representativa mostrada en la figura 6.3.10b) es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \Delta x_k.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx. \quad (5)$$

Observe que la integral en (5) se reduce a (4) cuando $g(x) = 0$.

FIGURA 6.3.10 Cuando el elemento rectangular rojo en a) gira alrededor del eje x se genera la arandela circular roja en b)**EJEMPLO 4** Método de la arandela

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = x + 2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución En la FIGURA 6.3.11a) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una sección transversal del sólido correspondiente al plano perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi(x_k^* + 2)^2 - \pi(x_k^*)^2 = \pi(4x_k^* + 4).$$

Como se ve en la figura 6.3.11a) y b), un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k , cuando se hace girar alrededor del eje x , produce una arandela cuyo volumen es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi(4x_k^* + 4) \Delta x_k.$$

El proceso usual de sumas y límites acostumbrado lleva a la integral definida para el volumen V del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_0^3 (4x + 4) dx = \pi(2x^2 + 4x) \Big|_0^3 = 30\pi.$$

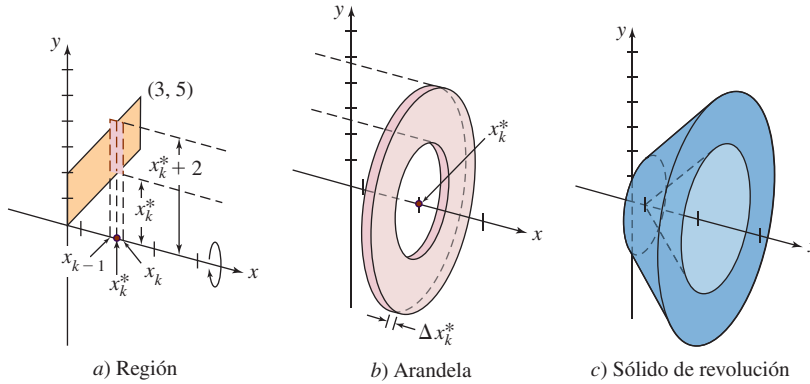


FIGURA 6.3.11 Región y sólido de revolución en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integración con respecto a y

Encuentre el volumen V del sólido formado por la región que gira alrededor del eje x acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Cuando el elemento rectangular horizontal en la FIGURA 6.3.12a) gira alrededor del eje y genera una arandela de ancho Δy_k . El área $A(y_k^*)$ de la región anular en y_k^* es

$$A(y_k^*) = \text{área del círculo} - \text{área del orificio} = \pi(y_k^*)^2 - \pi[(y_k^*)^2]^2 = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4).$$

El radio del círculo y el radio del hueco se obtienen al despejar, a su vez, $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ para x en términos de y :

$$A(y_k^*) = \pi(y_k^*)^2 - \pi[(y_k^*)^2]^2 = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4).$$

Así, el volumen de una arandela es

$$V_k = A(y_k^*) \Delta y_k = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4) \Delta y_k.$$

Usualmente sumando los V_k y tomando el límite de la suma cuando $\|P\| \rightarrow 0$ llevan a la integral definida para el volumen del sólido:

$$V = \pi \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \pi \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \pi.$$

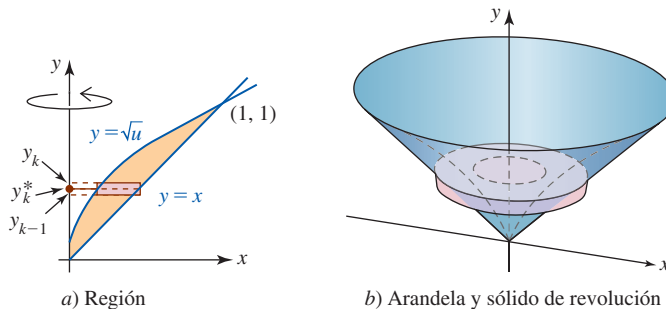


FIGURA 6.3.12 Región y sólido de revolución en el ejemplo 5

■ Revolución alrededor de una recta El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución cuando una región se hace girar alrededor de un eje que no es un eje de coordenadas.

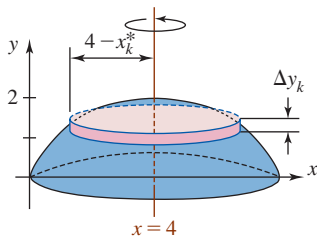


FIGURA 6.3.13 Sólido de revolución en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 4$ que se muestra en el ejemplo 2.

Solución El sólido de revolución en forma de domo se muestra en la FIGURA 6.3.13. Por inspección de la figura vemos que un elemento rectangular horizontal de ancho Δy_k que es perpendicular a la recta vertical $x = 4$ genera un disco sólido cuando gira alrededor de ese eje. El radio r de ese disco es

$$r = (\text{valor } x \text{ más a la derecha}) - (\text{valor } x \text{ más a la izquierda}) = 4 - x_k^*,$$

y entonces su volumen es

$$V_k = \pi(4 - x_k^*)^2 \Delta y_k.$$

Para expresar x en términos de y se usa $y = \sqrt{x}$ para obtener $x_k^* = (y_k^*)^2$. En consecuencia,

$$V_k = \pi(4 - (y_k^*)^2)^2 \Delta y_k.$$

Eso conduce a la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy \\ &= \pi \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{256}{15}\pi. \end{aligned}$$

■

Ejercicios 6.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de las rebanadas para encontrar el volumen del sólido si se proporcionan sus secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular. Suponga que el radio de la base es 4.

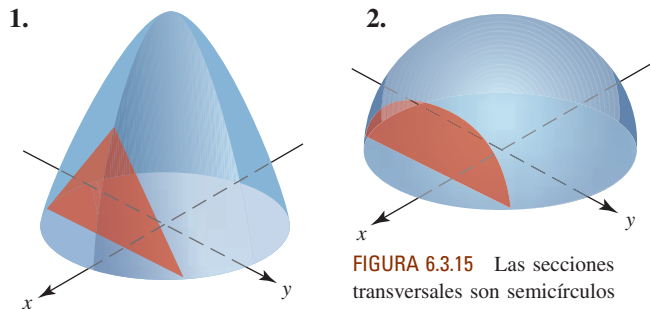


FIGURA 6.3.14 Las secciones transversales son triángulos equiláteros

FIGURA 6.3.15 Las secciones transversales son semicírculos

3. La base de un sólido está acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 4$ en el plano xy . Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos para los cuales la altura es cuatro veces la base. Encuentre el volumen del sólido.

4. La base de un sólido está acotada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x . Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.
5. La base de un sólido es un triángulo isósceles cuya base y altura miden, respectivamente, 4 y 5 pies. Las secciones transversales perpendiculares a la altura son semicírculos. Encuentre el volumen del sólido.
6. Por el centro de una esfera sólida de radio $r = 2$ pies se perfora un orificio de 1 pie de radio. Encuentre el volumen del sólido restante. Vea la FIGURA 6.3.16.

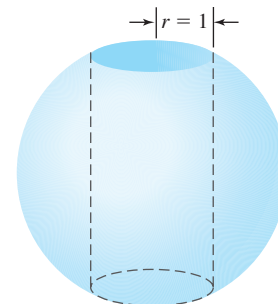


FIGURA 6.3.16 Orificio a través de la esfera en el problema 6

7. La base de un sólido es un triángulo isósceles recto formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.
8. Suponga que la pirámide que se muestra en la FIGURA 6.3.17 tiene altura h y base cuadrada de área B . Demuestre que el volumen de la pirámide está dado por $A = \frac{1}{3}hB$. [Sugerencia: Sea b la longitud de un lado de la base cuadrada.]

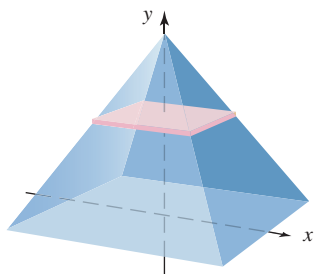


FIGURA 6.3.17 Pirámide en el problema 8

En los problemas 9-14, consulte la FIGURA 6.3.18. Use el método del disco o arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

9. R_1 alrededor de OC	10. R_1 alrededor de OA
11. R_2 alrededor de OA	12. R_2 alrededor de OC
13. R_1 alrededor de AB	14. R_2 alrededor de AB

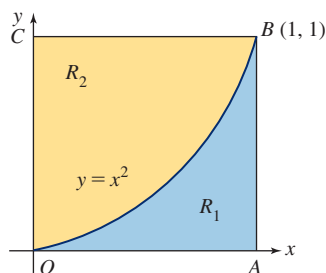


FIGURA 6.3.18 Regiones para los problemas 9-14

En los problemas 15-40, use el método del disco o de la arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

15. $y = 9 - x^2, y = 0$; eje x
16. $y = x^2 + 1, x = 0, y = 5$; eje y
17. $y = \frac{1}{x}, x = 1, y = \frac{1}{2}$; eje y
18. $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}, x = 3, y = 0$; eje x
19. $y = (x - 2)^2, x = 0, y = 0$; eje x
20. $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0$; eje y
21. $y = 4 - x^2, y = 1 - \frac{1}{4}x^2$; eje x
22. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, x = 0$, primer cuadrante; eje y

23. $y = x, y = x + 1, x = 0, y = 2$; eje y
24. $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$; eje x
25. $y = \sqrt{x - 1}, x = 5, y = 0$; $x = 5$
26. $x = y^2, x = 1$; $x = 1$
27. $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$; $y = 2$
28. $x = -y^2 + 2y, x = 0$; $x = 2$
29. $x^2 - y^2 = 16, x = 5$; eje y
30. $y = x^2 - 6x + 9, y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x
31. $x = y^2, y = x - 6$; eje y
32. $y = x^3 + 1, x = 0, y = 9$; eje y
33. $y = x^3 - x, y = 0$; eje x
34. $y = x^3 + 1, x = 1, y = 0$; eje x
35. $y = e^{-x}, x = 1, y = 1$; $y = 2$
36. $y = e^x, y = 1, x = 2$; eje x
37. $y = |\cos x|, y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$; eje x
38. $y = \sec x, x = -\pi/4, x = \pi/4, y = 0$; eje x
39. $y = \tan x, y = 0, x = \pi/4$; eje x
40. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0$, primer cuadrante; eje x

■ Piense en ello

41. Relea los problemas 68-70 acerca del principio de Cavalieri, en los ejercicios 6.2. A continuación muestre que los cilindros circulares de la FIGURA 6.3.19 tienen el mismo volumen.

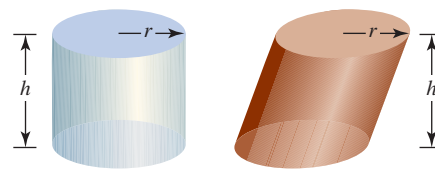


FIGURA 6.3.19 Cilindros en el problema 41

42. Considere el cilindro circular recto de radio a que se muestra en la FIGURA 6.3.20. Un plano inclinado a un ángulo θ con respecto a la base del cilindro pasa por un diámetro de la base. Encuentre el volumen de la cuña resultante que se corta del cilindro cuando
- a) $\theta = 45^\circ$ b) $\theta = 60^\circ$.

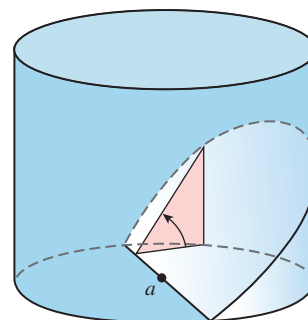


FIGURA 6.3.20 Cilindro y cuña en el problema 42

Proyectos

43. Para las aves Un modelo matemático para la forma de un huevo puede obtenerse al girar la región acotada por las gráficas de $y = 0$ y la función $f(x) = P(x)\sqrt{1-x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio cúbico, alrededor del eje x . Por ejemplo, un huevo de arao común corresponde a $P(x) = -0.07x^3 - 0.02x^2 + 0.2x + 0.56$. En la FIGURA 6.3.21 se muestra la gráfica de f obtenida con ayuda de un SAC.

- Encuentre una fórmula general para el volumen V de un huevo con base en el modelo matemático $f(x) = P(x)\sqrt{1-x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. [Sugerencia: Este problema puede resolverse con cálculos manuales, aunque es lento y “confuso”. Use un SAC para realizar la integración.]
- Use la fórmula obtenida en el inciso a) para estimar el volumen de un huevo de arao común.
- Un huevo de somorgujo petirrojo corresponde a $P(x) = -0.06x^3 + 0.04x^2 + 0.1x + 0.54$. Use un SAC para obtener la gráfica de f .
- Use el inciso a) para estimar el volumen de un huevo del somorgujo petirrojo.



Huevos de arao común

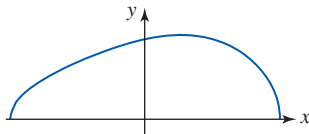


FIGURA 6.3.21 Modelo de la forma del huevo de arao común en el problema 43

44. Ese sentimiento de hundirse Una bola esférica de madera de radio r flota en un estanque de agua tranquila.

Sea h la profundidad a que se hundirá la bola. Vea la FIGURA 6.3.22.

- Demuestre que el volumen de la porción sumergida de la bola está dado por $V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$.
- Suponga que el peso específico de la bola se denota por ρ_{bola} y que el peso específico del agua es ρ_{agua} (medida en lb/pies³). Si $r = 3$ pulg y $\rho_{\text{bola}} = 0.4 \rho_{\text{agua}}$, use el principio de Arquímedes —el peso de la bola es igual al peso del agua desplazada— para determinar la profundidad aproximada h que se hundirá la bola. Necesita una calculadora o un SAC para resolver una ecuación de un polinomio cúbico.

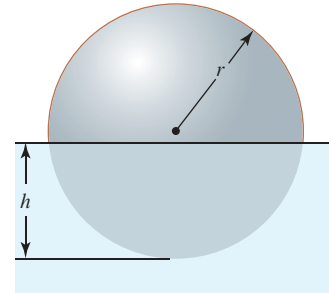


FIGURA 6.3.22 Bola de madera flotante en el problema 44

45. Sólidos de Steinmetz El sólido formado por dos cilindros circulares de radio r cuyos ejes se cortan formando un ángulo recto se denomina **bicilindro** y es un caso especial de los sólidos de Steinmetz. Por razones de claridad se muestra la octava parte del sólido en la FIGURA 6.3.23.

- Encuentre el volumen total del bicilindro ilustrado en la figura.
- Escriba un breve reporte sobre los sólidos de Steinmetz.

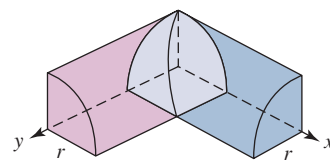


FIGURA 6.3.23 Cilindros circulares rectos que se cortan en el problema 45

6.4 Volúmenes de sólidos: método de los cascarones

■ Introducción En esta sección continuamos el análisis de cómo encontrar volúmenes de sólidos de revolución. Pero en lugar de usar planos perpendiculares al eje de revolución para rebajar el sólido en rodajas cuyo volumen puede aproximarse por cilindros circulares rectos regulares (discos o arandelas), desarrollamos un nuevo método para encontrar volúmenes de sólidos de revolución que utiliza cascarones cilíndricos circulares. Antes de construir un integral que represente el **método de los cascarones** es necesario encontrar el volumen del cascarón cilíndrico general que se muestra en la FIGURA 6.4.1. Si, como se observa en la figura, r_1 y r_2 denotan respectivamente los radios interior y exterior del cascarón, y h es su altura, entonces su volumen está dado por la diferencia

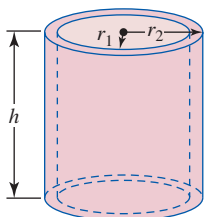


FIGURA 6.4.1 Cascarón cilíndrico

$$\begin{aligned} \text{volumen del cilindro exterior} - \text{volumen del cilindro interior} \\ = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h. \end{aligned} \quad (1)$$

■ **Construcción de una integral** En la sección 6.3 vimos que un elemento rectangular de área que es perpendicular a un eje de revolución genera, al girar, ya sea un disco circular o una arandela circular. No obstante, si hacemos girar el elemento rectangular mostrado en la FIGURA 6.4.2a) alrededor del eje y , generamos un cascarón hueco como se muestra en la figura 6.4.2b). Para encontrar el volumen que se observa en la figura 6.4.2c), sea P una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La partición P divide el intervalo en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, de ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si identificamos el radio exterior como $r_2 = x_k$ y el radio interior como $r_1 = x_{k-1}$ y definimos $x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, entonces x_k^* es el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Con la identificación adicional $h = f(x_k^*)$ por (1) se concluye que el volumen representativo del cascarón en la figura 6.4.2b) puede escribirse como

$$\begin{aligned} V_k &= \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})h \\ &= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2} h(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

o bien,

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Una aproximación al volumen del sólido está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (2)$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero, el límite de (2) es una integral definida que se usa como la definición del volumen V del sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (3)$$

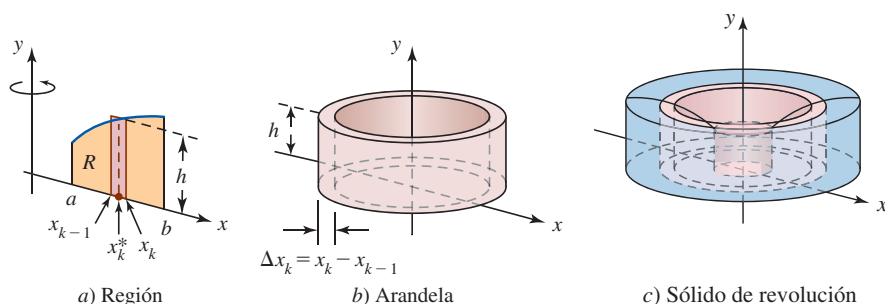
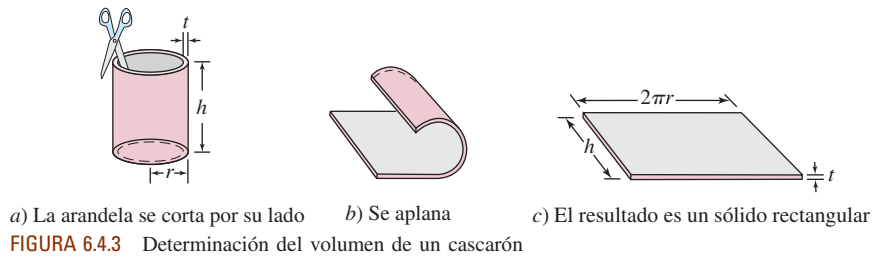


FIGURA 6.4.2 Cuando el elemento rectangular rojo en a) gira alrededor del eje y se genera el cascarón rojo en b)

Como se mencionó en las *Notas desde el aula* al final de la sección 6.2, no es posible obtener una integral, que en este caso representa el volumen de un sólido de revolución, que “funcione” en todos los casos posibles. De nuevo se apremia al lector a que no memorice una fórmula particular como (3). Intente comprender la interpretación geométrica de las componentes del integrando. Por ejemplo, $f(x)$, que representa la altura del rectángulo en la figura 6.4.2, puede ser la diferencia $f(x) - g(x)$ si el elemento rectangular está entre las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$. Para establecer una integral para un problema dado sin adentrarse en un tedioso análisis, considere que un cascarón es una delgada lata de aluminio a la que se han quitado las partes superior e inferior. Para encontrar el volumen de la concha (es decir, el volumen del metal en la analogía de la lata de aluminio), imagine que la lata se corta en forma recta a lo largo de su lado y que se aplanar como se ilustra en la FIGURA 6.4.3a) y b). Como se muestra en la figura 6.4.3c), entonces el volumen de la concha es el volumen de este sólido regular:

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= (\text{longitud}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= (\text{circunferencia del cilindro}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= 2\pi rht. \end{aligned} \quad (4)$$

**EJEMPLO 1** Uso del método de los cascarones

Vuelva a leer el ejemplo 5 en la sección 6.3 antes de abordar este ejemplo.

► Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Este problema se resolvió en el ejemplo 5 de la sección 6.3. En ese ejemplo vimos que usar un elemento rectangular horizontal perpendicular al eje y y de ancho Δy_k generaba una arandela al girarlo alrededor del eje y . En contraste, cuando un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k gira alrededor del eje y genera un cascarón. Con ayuda de la FIGURA 6.4.4a) en (4) se hace la identificación $r = x_k^*$,

$$h = \text{gráfica superior} - \text{gráfica inferior} = \sqrt{x_k^*} - x_k^*,$$

y $t = \Delta x_k$. A partir del volumen del cascarón,

$$V_k = 2\pi x_k^* (\sqrt{x_k^*} - x_k^*) \Delta x_k = 2\pi ((x_k^*)^{3/2} - (x_k^*)^2) \Delta x_k,$$

obtenemos la integral definida al determinar el volumen del sólido:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

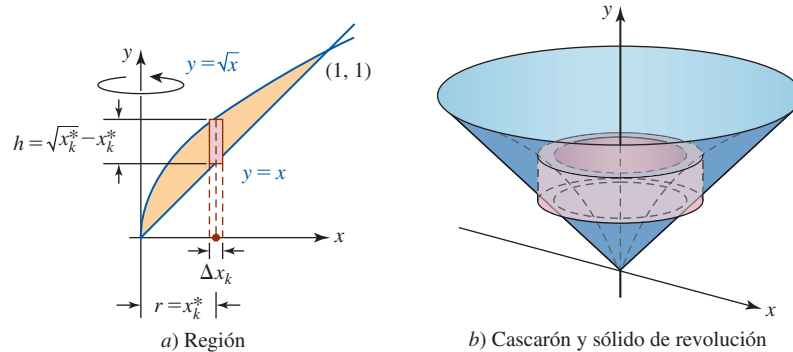


FIGURA 6.4.4 Región y sólido de revolución en el ejemplo 1

No siempre es conveniente o incluso posible usar los métodos del disco o de la arandela analizados en la última sección para encontrar el volumen de un sólido de revolución.

EJEMPLO 2 Uso del método de los cascarones

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la gráfica de $y = \sin x^2$ y $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$.

Solución La gráfica de $y = \sin x^2$ sobre el intervalo indicado en la FIGURA 6.4.5 se obtuvo con ayuda de un SAC.

Si elegimos usar un elemento rectangular horizontal para girarlo alrededor del eje y , se generaría una arandela. Para determinar los radios interior y exterior de la arandela sería necesario despejar x en $y = \sin x^2$ en términos de y . Aunque esto simplemente lleva a x^2 como un seno inverso, plantea un problema práctico: por ahora no es posible integrar una función trigonomé-

trica inversa. Por tanto, atendemos al elemento rectangular vertical mostrado en la figura 6.4.5a). Cuando este elemento gira alrededor del eje y , se genera un cascarón con radio $r = x_k^*$, altura $h = \text{sen}(x_k^*)^2$ y grosor $t = \Delta x_k$. Por (4), el volumen del cascarón es

$$V_k = 2\pi x_k^* \text{sen}(x_k^*)^2 \Delta x_k.$$

Así, por (3) se tiene

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \text{sen } x^2 dx.$$

Si $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$ y $x dx = \frac{1}{2} du$. Los límites de integración u se determinan a partir del hecho de que cuando $x = 0$, $u = 0$ y $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. En consecuencia, el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura 6.4.5b) es

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{sen } u du = -\pi \cos u \Big|_0^{\pi} = \pi(1 + 1) = 2\pi.$$

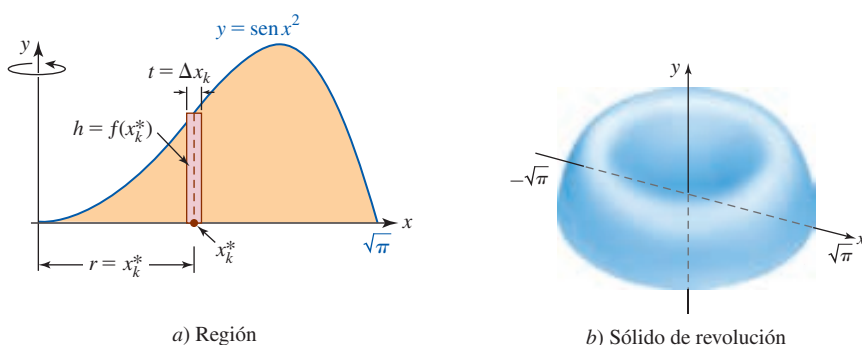


FIGURA 6.4.5 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2

En el siguiente ejemplo ilustramos el método de los cascarones cuando una región gira alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.

Solución En este caso, un elemento rectangular de área perpendicular a una recta horizontal que gire alrededor de la recta $y = 1$ generaría un disco. Puesto que el radio del disco no se mide desde el eje x sino desde la recta $y = 1$, sería necesario resolver $x = y^2 - 2y$ para y en términos de x . Este inconveniente puede evitarse si se usa un elemento horizontal de área, que entonces genera un cascarón como el que se muestra en la FIGURA 6.4.6b). Observe que cuando $x = 3$, la ecuación $3 = y^2 - 2y$, o en forma equivalente $(y + 1)(y - 3) = 0$, tiene las soluciones -1 y 3 . Por tanto, sólo es necesario partir el intervalo $[1, 3]$ sobre el eje y . Después de hacer las identificaciones $r = y_k^* - 1$, $h = 3 - x_k^*$ y $t = \Delta y_k$, por (4) se concluye que el volumen de un cascarón es

$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - x_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - (y_k^*)^2 + 2y_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(-(y_k^*)^3 + 3(y_k^*)^2 + y_k^* - 3)\Delta y_k. \end{aligned}$$

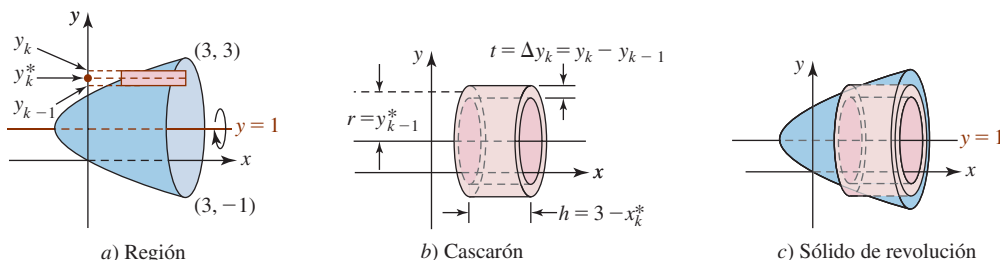


FIGURA 6.4.6 Región, cascarón y sólido de revolución en el ejemplo 3

A partir de la última línea se observa que el volumen del sólido es la integral definida

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3) dy \\
 &= 2\pi \left(-\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3y \right) \Big|_1^3 \\
 &= 2\pi \left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] = 8\pi.
 \end{aligned}$$

Ejercicios 6.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-6, consulte la FIGURA 6.4.7. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

1. R_1 alrededor de OC	2. R_1 alrededor de OA
3. R_2 alrededor de BC	4. R_2 alrededor de OA
5. R_1 alrededor de AB	6. R_2 alrededor de AB

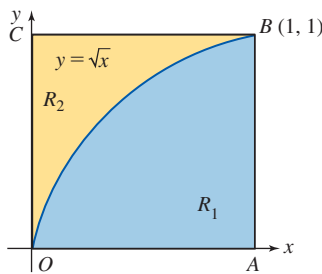


FIGURA 6.4.7 Regiones para los problemas 1-6

En los problemas 7-30, use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

7. $y = x, x = 0, y = 5$; eje x
8. $y = 1 - x, x = 0, y = 0$; $y = -2$
9. $y = x^2, x = 0, y = 3$, primer cuadrante; eje x
10. $y = x^2, x = 2, y = 0$; eje y
11. $y = x^2, x = 1, y = 0$; $x = 3$
12. $y = x^2, y = 9$; eje x
13. $y = x^2 + 4, x = 0, x = 2, y = 2$; eje y
14. $y = x^2 - 5x + 4, y = 0$; eje y
15. $y = (x - 1)^2, y = 1$; eje x
16. $y = (x - 2)^2, y = 4$; $x = 4$
17. $y = x^{1/3}, x = 1, y = 0$; $y = -1$
18. $y = x^{1/3} + 1, y = -x + 1, x = 1$; $x = 1$
19. $y = x^2, y = x$; eje y
20. $y = x^2, y = x$; $x = 2$
21. $y = -x^3 + 3x^2, y = 0$, primer cuadrante; eje y
22. $y = x^3 - x, y = 0$, segundo cuadrante; eje y

23. $y = x^2 - 2, y = -x^2 + 2, x = 0$, segundo y tercer cuadrantes; eje y
24. $y = x^2 - 4x, y = -x^2 + 4x$; $x = -1$
25. $x = y^2 - 5y, x = 0$; eje x
26. $x = y^2 + 2, y = x - 4, y = 1$; eje x
27. $y = x^3, y = x + 6, x = 0$; eje y
28. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1 - x}, y = 0$; eje x
29. $y = \sin x^2, x = 0, y = 1$; eje y
30. $y = e^{x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$; eje y

En los problemas 31-36, la región en el inciso a) gira alrededor del eje indicado, generando el sólido que vemos en el inciso b). Escoja entre los métodos del disco, de la arandela o de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución.

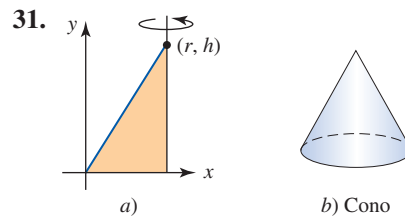


FIGURA 6.4.8 Región y sólido para el problema 31

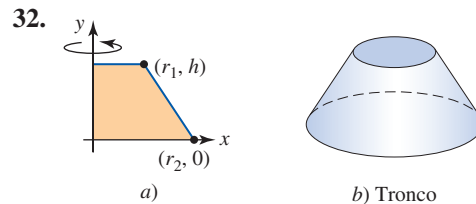


FIGURA 6.4.9 Región y sólido para el problema 32

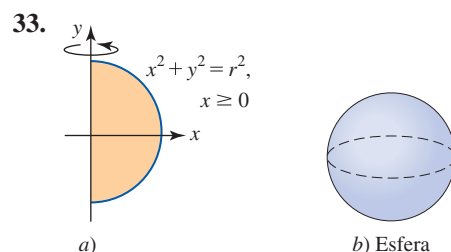
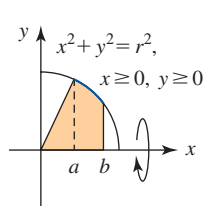
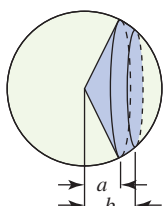


FIGURA 6.4.10 Región y sólido para el problema 33

34.



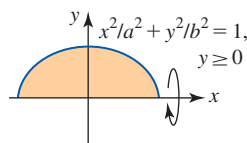
a)



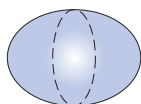
b) Sector esférico

FIGURA 6.4.11 Región y sólido para el problema 34

35.



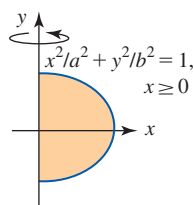
a)



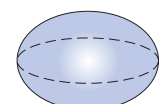
b) Esferoide alargado

FIGURA 6.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.



a)



b) Esferoide achatado

FIGURA 6.4.13 Región y sólido para el problema 36

Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω . Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2 x^2 / (2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h . Vea la FIGURA 6.4.14.
38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

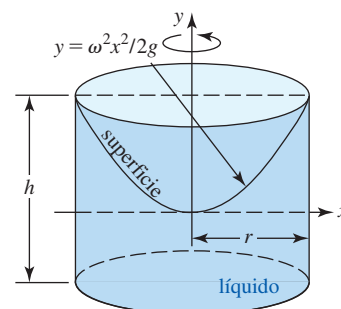


FIGURA 6.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

6.5 Longitud de una gráfica

Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud L** , o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 6.5.1.

Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k -ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 6.5.2a), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Por la figura 6.5.2b), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \quad (1)$$

Por el teorema del valor medio (sección 4.4) sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \quad \text{o bien,} \quad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2 (x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 (1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

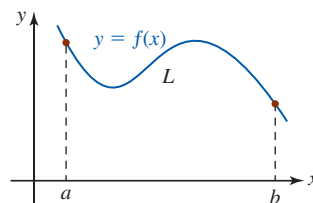
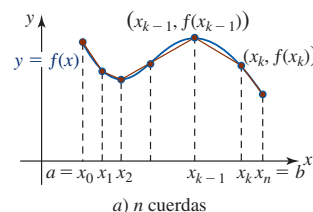
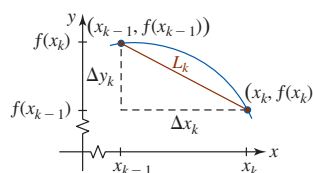
FIGURA 6.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$ a) n cuerdasb) Acercamiento a la cuerda sobre el k -ésimo subintervalo

FIGURA 6.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

representa la longitud de la curva poligonal que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y proporciona una aproximación a la longitud total de la gráfica de $[a, b]$. Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, obtenemos

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2)$$

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición de la longitud de la gráfica sobre el intervalo.

Definición 6.5.1 Longitud de arco

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3)$$

La fórmula para la longitud de arco (3) también se escribe como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (4)$$

Se dice que una gráfica que tiene longitud de arco es **rectificable**.

EJEMPLO 1 Longitud de una curva

Encuentre la longitud de la gráfica $y = 4x^{3/2}$ del origen $(0, 0)$ al punto $(1, 4)$.

Solución La gráfica de la función sobre el intervalo $[0, 1]$ se muestra en la FIGURA 6.5.3. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

es continua sobre el intervalo. En consecuencia, por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2} dx \\ &= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{36} \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2} (36 dx) \\ &= \frac{1}{54} (1 + 36x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} [37^{3/2} - 1] \approx 4.1493. \end{aligned}$$

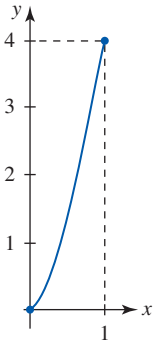


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

■ **Diferencial de longitud de arco** Si C es una curva suave definida por $y = f(x)$, entonces la longitud de arco entre un punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, donde $a \leq x \leq b$, está dada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt, \quad (5)$$

donde t representa una variable de integración ficticia. Resulta evidente que el valor de la integral en (5) depende de x , por lo que se denomina **función de longitud de arco**. Luego, por (10) de la sección 5.5, $ds/dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y, en consecuencia,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (6)$$

La última función se denomina **diferencial de la longitud de arco** y puede usarse para aproximar longitudes de curvas. Con $dy = f'(x) dx$, (6) puede escribirse como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{o bien,} \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (7)$$

En la FIGURA 6.5.4 se muestra que la diferencial ds puede interpretarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos dx y dy .

Si (3) se escribe $L = \int ds$ para abreviar y la curva C se define por $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, entonces la última expresión en (7) puede usarse para resolver ds/dy :

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{o} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Por tanto, la integración con respecto a y análoga de (4) es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (8)$$

Vea los problemas 17 y 18 en los ejercicios 6.5.

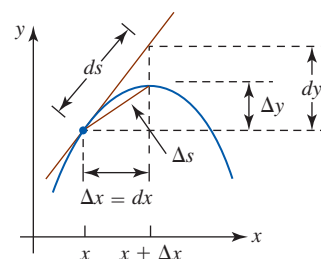


FIGURA 6.5.4 Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, la integral en (3) lleva a problemas en los cuales se requieren técnicas especiales de integración. Vea el capítulo 7. Pero aun con estos procedimientos ulteriores, *no siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ en términos de las conocidas funciones elementales, incluso para algunas de las funciones más simples como $y = x^2$. Vea el problema 45 en los ejercicios 7.8.

Ejercicios 6.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre la longitud de la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica.

- $y = x$; $[-1, 1]$
- $y = 2x + 1$; $[0, 3]$
- $y = x^{3/2} + 4$; $[0, 1]$
- $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$
- $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$
- $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $[-1, 0]$
- $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$
- $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$
- $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$
- $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$
- $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$; $[1, 8]$
- $y = \begin{cases} x - 2, & 2 \leq x < 3 \\ (x - 2)^{2/3}, & 3 \leq x < 10; \\ \frac{1}{2}(x - 6)^{3/2}, & 10 \leq x \leq 15 \end{cases}$ $[2, 15]$

En los problemas 13-16 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la función dada sobre el intervalo indicado.

- $y = x^2$; $[-1, 3]$
- $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$
- $y = \sin x$; $[0, \pi]$
- $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

En los problemas 17 y 18, use (8) para encontrar la longitud de la gráfica de la ecuación dada sobre el intervalo indicado.

- $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$
- $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$
- Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.
 - Muestre que el uso de (3) conduce a un integrando discontinuo.
 - Suponga que el teorema fundamental del cálculo puede usarse para evaluar la integral obtenida en el inciso a) y encuentre la longitud total de la gráfica.
- Establezca, pero no intente evaluar, una integral que proporcione la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.
- Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

- Use la diferencial de la longitud de arco (6) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^4$ desde $(2, 4)$ hasta $(2.1, 4.862025)$. [Sugerencia: Revise (13) de la sección 4.9.]

6.6 Área de una superficie de revolución

■ **Introducción** Como se ha visto en las secciones 6.3 y 6.4, cuando una gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ gira alrededor del eje x , genera un sólido de revolución. En esta sección tenemos interés en encontrar el área S de la superficie correspondiente; es decir, una **superficie de revolución** sobre $[a, b]$ como se muestra en la FIGURA 6.6.1b).

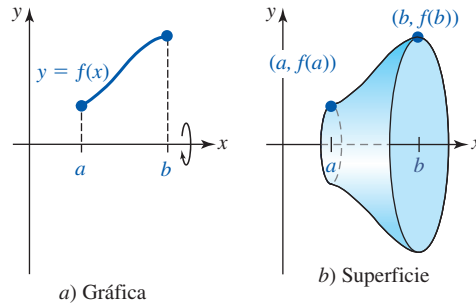


FIGURA 6.6.1 Superficie de revolución

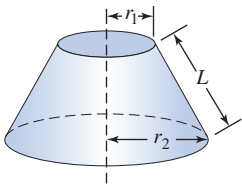


FIGURA 6.6.2 Tronco de un cono

■ **Construcción de una integral** Antes de construir una integral definida para la definición del área de una superficie de revolución, se requiere una fórmula para el área lateral (excluyendo las partes superior e inferior) de un tronco de un cono circular recto. Vea la FIGURA 6.6.2. Si r_1 y r_2 son los radios de las partes superior e inferior y L es la altura oblicua, entonces el área lateral está dada por

$$\pi(r_1 + r_2)L. \quad (1)$$

Vea el problema 17 en los ejercicios 6.6. Ahora suponga que $y = f(x)$ es una función suave y que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Luego, si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ mostrados en la FIGURA 6.6.3a), formamos un trapecioide. Cuando el trapecioide gira alrededor del eje x , genera un tronco de un cono con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. Vea la figura 6.6.3b). Como se muestra en la sección transversal en la figura 6.6.3c), la altura oblicua puede obtenerse a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

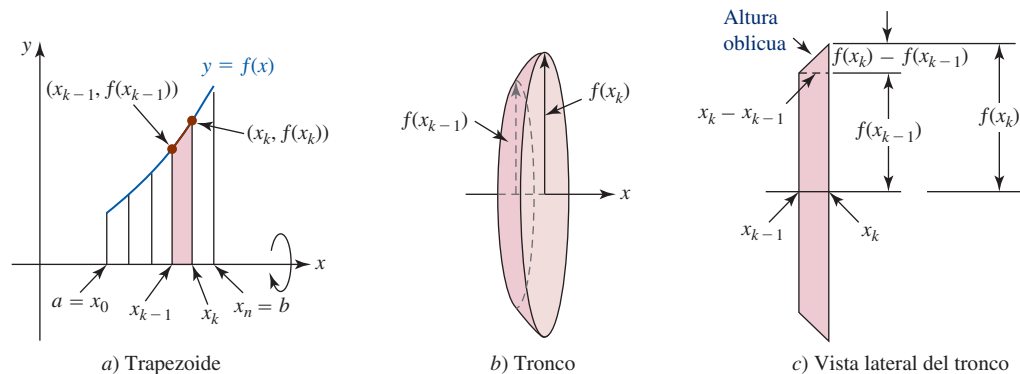


FIGURA 6.6.3 Aproximación del área de la superficie de revolución al sumar áreas de troncos

Así, por (1) el área superficial de este elemento es

$$\begin{aligned} S_k &= \pi [f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \pi [f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \pi [f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \Delta x_k, \end{aligned}$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Esta última cantidad es una aproximación al área verdadera de la superficie de revolución sobre el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Luego, así como en el análisis de la longitud de arco, se invoca el teorema del valor medio para derivadas a fin de afirmar que en el intervalo abierto x_k^* hay un (x_{k-1}, x_k) tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n S_k = \pi \sum_{k=1}^n [f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

es una aproximación al área S sobre $[a, b]$. Esto sugiere que el área superficial S está dada por el límite de la suma de Riemann:

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \pi \sum_{k=1}^n [f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k. \quad (2)$$

Puesto que también se espera que $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ tiendan al límite común $f(x)$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$, tenemos $f(x_k) + f(x_{k-1}) \rightarrow 2f(x)$.

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición del área de la superficie de revolución sobre el intervalo.

Definición 6.6.1 Área de una superficie de revolución

Sean f una función para la cual f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. El **área** S de la superficie que se obtiene al girar la gráfica de f sobre el intervalo alrededor del eje x está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3)$$

EJEMPLO 1 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x .

Solución Se tiene $f(x) = x^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$, y por (3)

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1} dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \int_1^4 (4x+1)^{1/2} (4 dx) = \frac{1}{6}\pi (4x+1)^{3/2} \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{6}\pi [17^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 30.85. \end{aligned}$$

Vea la FIGURA 6.6.4.

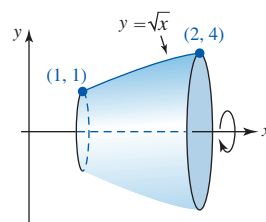


FIGURA 6.6.4 Superficie de revolución alrededor del eje x en el ejemplo 1

■ Revolución alrededor del eje y Es posible mostrar que si la gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre $[a, b]$, $0 \leq a < b$, gira alrededor del eje y , entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4)$$

Así como en (3), en (4) se supone que $f'(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma cuando la gráfica de $y = x^{1/3}$ sobre el intervalo $[0, 8]$ gira alrededor del eje y .

Solución Se tiene $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, de modo que por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^8 x \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4/3}} dx \\ &= 2\pi \int_0^8 x \sqrt{\frac{9x^{4/3} + 1}{9x^{4/3}}} dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^8 x^{1/3} \sqrt{9x^{4/3} + 1} dx. \end{aligned}$$

La última integral se evaluará al revisar el método de sustitución u . Si hacemos $u = 9x^{4/3} + 1$, entonces $du = 12x^{1/3} dx$, $dx = \frac{1}{12}x^{-1/3} du$, $x = 0$ implica $u = 1$, y $x = 8$ proporciona $u = 145$. En consecuencia,

$$S = \frac{1}{18}\pi \int_1^{145} u^{1/2} du = \frac{1}{27}\pi u^{3/2} \Big|_1^{145} = \frac{1}{27}\pi(145^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 203.04.$$

Vea la FIGURA 6.6.5.

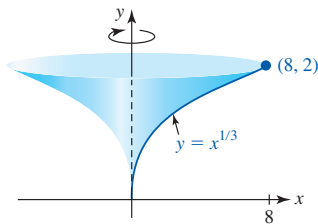


FIGURA 6.6.5 Superficie de revolución alrededor del eje y en el ejemplo 2

Ejercicios 6.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el área de la superficie que se forma al girar cada gráfica sobre el intervalo dado alrededor del eje indicado.

- $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; eje x
- $y = \sqrt{x+1}$, $[1, 5]$; eje x
- $y = x^3$, $[0, 1]$; eje x
- $y = x^{1/3}$, $[1, 8]$; eje y
- $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; eje y
- $y = 4 - x^2$, $[0, 2]$; eje y
- $y = 2x + 1$, $[2, 7]$; eje x
- $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0, \sqrt{7}]$; eje y
- $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $[1, 2]$; eje y
- $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, $[1, 2]$; eje x
- a) La forma de una antena de disco es una parábola que gira alrededor de un eje de simetría, denominada **paraboloide de revolución**. Encuentre el área superficial de una antena de radio r y profundidad h que obtenemos al girar la gráfica de $f(x) = r\sqrt{1 - x/h}$ alrededor del eje x . Vea la FIGURA 6.6.6.

paraboloide de revolución. Encuentre el área superficial de una antena de radio r y profundidad h que obtenemos al girar la gráfica de $f(x) = r\sqrt{1 - x/h}$ alrededor del eje x . Vea la FIGURA 6.6.6.

- b) La profundidad de una antena de disco varía de 10 a 20% de su radio. Si la profundidad h de la antena del inciso a) es 10% del radio, muestre que el área superficial de la antena es aproximadamente la misma que el área de un círculo de radio r . ¿Cuál es el error porcentual en este caso?



Las antenas de disco son paraboloides de revolución

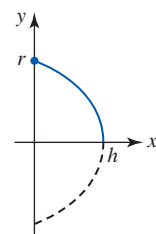


FIGURA 6.6.6 Gráfica de f en el problema 11

12. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Encuentre el área de la zona esférica que se muestra en la FIGURA 6.6.7.

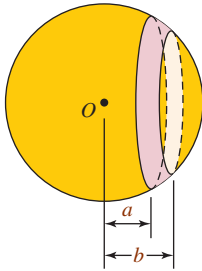


FIGURA 6.6.7 Zona esférica en el problema 12

13. La gráfica de $y = |x + 2|$ sobre $[-4, 2]$, mostrada en la FIGURA 6.6.8, gira alrededor del eje x . Encuentre el área S de la superficie de revolución.

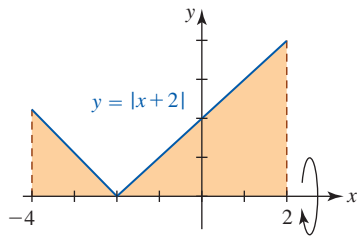


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función en el problema 13

14. Encuentre el área de superficie que se forma al girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, alrededor del eje x .

■ Piense en ello

15. Demuestre que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura oblicua L es πrL . [Sugerencia: Cuando un cono se corta por el lado y se aplanar forma un sector circular con área $\frac{1}{2}L^2\theta$.]
16. Use el problema 15 para mostrar que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Obtenga el mismo resultado usando (3) o (4).
17. Use el problema 15 para obtener la fórmula (1). [Sugerencia: Considere un cono completo de radio r_2 y altura oblicua L_2 . Corte la parte cónica superior. Puede ser de ayuda considerar triángulos semejantes.]
18. Muestre que el área superficial del tronco de un cono circular recto de radios r_1 y r_2 y altura h está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

19. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua sobre $[a, b]$ cuya primera derivada es continua sobre el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f gira alrededor de una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - L| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

20. Use el resultado del problema 19 para encontrar una integral definida que proporcione el área de la superficie que se forma al girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, alrededor de la recta $y = 4$. No evalúe.

■ Proyectos

21. Una vista desde el espacio

- a) Desde una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra a una distancia h de la superficie terrestre, un astronauta puede observar sólo una porción A_s del área total del área superficial de la Tierra, A_e . Vea la FIGURA 6.6.9a). Encuentre una fórmula para la expresión fraccionaria A_s/A_e como una función de h . En la figura 6.6.9b) se muestra la Tierra en sección transversal como un círculo con centro C y radio R . Sean los ejes x y y como se muestra y sean y_B y $y_E = R$ las coordenadas y de los puntos B y E , respectivamente.
- b) ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra ve un astronauta desde una altura de 2 000 km? Considere que el radio terrestre es $R = 6\,380$ km.
- c) ¿A qué altura h el astronauta ve un cuarto de la superficie de la Tierra?
- d) ¿Cuál es el límite de A_s/A_e cuando la altura h crece sin cota ($h \rightarrow \infty$)? ¿Por qué la respuesta tiene sentido intuitivo?
- e) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre ve un astronauta desde la Luna si $h = 3.76 \times 10^5$ km?

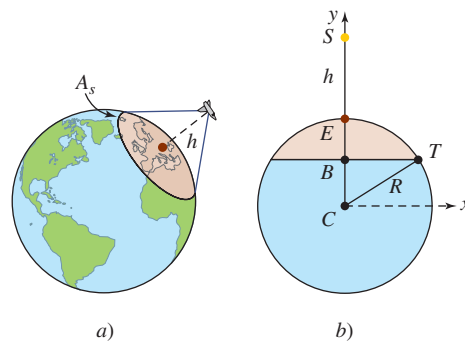


FIGURA 6.6.9 Porción de la superficie terrestre en el problema 21

6.7 Valor promedio de una función

■ **Introducción** Todos los estudiantes saben qué es un promedio. Si un estudiante presenta cuatro exámenes en un semestre y sus calificaciones porcentuales son 80, 75, 85 y 92%, entonces su promedio puntaje es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

o bien, 83%. En general, dados n números $a_1, a_2, \dots, a_n$, se dice que su **media aritmética** o **promedio**, es

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

En esta sección se extiende el concepto de un promedio discreto como (1) al promedio de *todos* los valores de una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.

■ **Promedio de valores funcionales** Ahora suponga que tenemos una función continua f definida sobre un intervalo $[a, b]$. Para los números $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ escogidos de manera arbitraria de modo que $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, entonces por (1) el promedio del conjunto de valores funcionales es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (2)$$

Si ahora se considera el conjunto de valores funcionales $f(x)$ que corresponde a todos los números x en un intervalo, debe resultar evidente que no es posible usar una suma discreta como en (1), puesto que este conjunto de valores funcionales suele ser un conjunto no numerable. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$, los valores de la función varían desde un mínimo de $f(0) = 0$ hasta un máximo de $f(3) = 9$. Como se indica en la FIGURA 6.7.1, de manera intuitiva es de esperar que exista un valor entero promedio f_{pro} tal que $f(0) \leq f_{\text{pro}} \leq f(3)$.

■ **Construcción de una integral** Volviendo al caso general de una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P una partición regular del intervalo en n subintervalos de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_k^* es un número escogido en cada subintervalo, entonces el promedio

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}$$

puede escribirse como

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \quad (3)$$

puesto que $n = (b - a)/\Delta x$. Al volver a escribir (3) como

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

y tomar el límite de esa expresión como $\|P\| = \Delta x \rightarrow 0$, obtenemos la integral definida

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Debido a que se ha supuesto que f es continua sobre $[a, b]$, su mínimo absoluto y su máximo absoluto sobre el intervalo se denotarán por m y M , respectivamente. Si la desigualdad

$$m \leq f(x_k^*) \leq M$$

se multiplica por $\Delta x > 0$ y se suma, obtenemos

$$\sum_{k=1}^n m \Delta x \leq \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \leq \sum_{k=1}^n M \Delta x.$$

Debido a que $\sum_{k=1}^n \Delta x = b - a$, la desigualdad precedente equivale a

$$(b-a)m \leq \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \leq (b-a)M.$$

Y así cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se concluye que

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M.$$

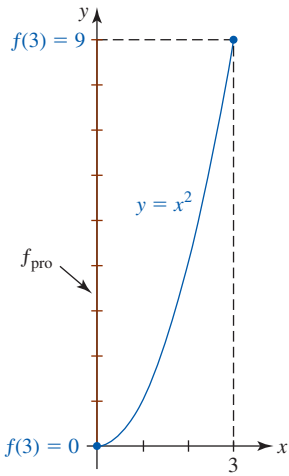


FIGURA 6.7.1 Determinación del promedio de todos los números indicados en rojo sobre el eje y

A partir de la última desigualdad concluimos que el número obtenido a partir de (4) satisface

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, f asume todos los valores entre m y M . Por tanto, el número obtenido a partir de (4) en realidad corresponde a un valor de la función sobre el intervalo. Esto sugiere plantear la siguiente definición.

Definición 6.7.1 Valor promedio de una función

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. El **valor promedio** de f sobre el intervalo es el número

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

Aunque principalmente se tiene interés en funciones continuas, la definición 6.7.1 es válida para cualquier función integrable sobre el intervalo.

EJEMPLO 1 Determinación de un valor promedio

Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$.

Solución Por (5) de la definición 6.7.1, obtenemos

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 3.$$

Algunas veces es posible determinar el valor de x en el intervalo que corresponde al valor promedio de una función.

EJEMPLO 2 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre el valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponde al valor promedio f_{pro} de la función $f(x) = x^2$.

Solución Puesto que la función $f(x) = x^2$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, 3]$, por el teorema del valor intermedio sabemos que entre 0 y 3 existe un número c tal que

$$f(c) = c^2 = f_{\text{pro}}.$$

Pero, por el ejemplo 1, sabemos que $f_{\text{pro}} = 3$. Por tanto, la ecuación $c^2 = 3$ tiene las soluciones $c = \pm\sqrt{3}$. Como se muestra en la FIGURA 6.7.2, la única solución de esta ecuación en $[0, 3]$ es $c = \sqrt{3}$.

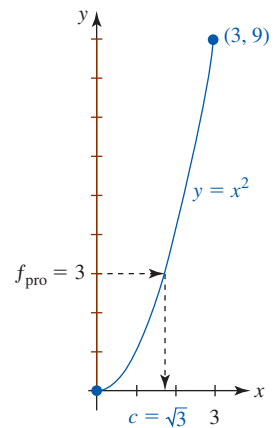


FIGURA 6.7.2 f_{pro} es el valor funcional $f(\sqrt{3})$ en el ejemplo 1

■ **Teorema del valor medio para integrales definidas** A continuación se presenta una consecuencia inmediata del análisis anterior. El resultado se denomina teorema del valor medio para integrales.

Teorema 6.7.1 Teorema del valor medio para integrales

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. Entonces en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

En el caso en que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, el teorema 6.7.1 se interpreta fácilmente en términos de área. El resultado en (6) simplemente establece que en (a, b) existe un número c para el cual el área A de un rectángulo de altura $f(c)$ y ancho $b-a$ mostrado en la FIGURA 6.7.3a) es la misma que el área A bajo la gráfica indicada en la figura 6.7.3b).

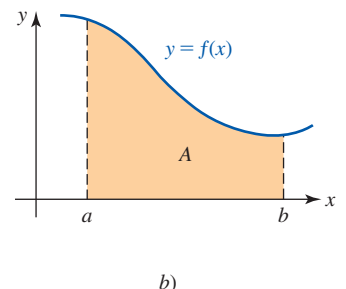
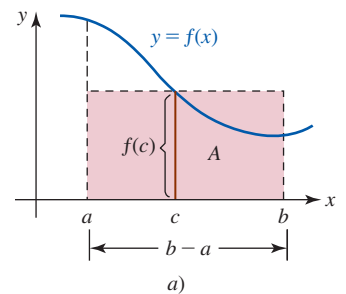


FIGURA 6.7.3 El área A del rectángulo es la misma que el área bajo la gráfica sobre $[a, b]$

EJEMPLO 3 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre la altura $f(c)$ de un rectángulo de modo que el área A bajo la gráfica de $y = x^2 + 1$ sobre $[-2, 2]$ sea la misma que $f(c)[2 - (-2)] = 4f(c)$.

Solución Básicamente, éste es el mismo tipo de problema ilustrado en el ejemplo 2. Así, el área bajo la gráfica mostrada en la FIGURA 6.7.4a) es

$$A = \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{28}{3}.$$

También, $4f(c) = 4(c^2 + 1)$, de modo que $4(c^2 + 1) = \frac{28}{3}$ implica $c^2 = \frac{4}{3}$. Las dos soluciones $c_1 = 2/\sqrt{3}$ y $c_2 = -2/\sqrt{3}$ están en el intervalo $(-2, 2)$. Para cualquier número, observamos que la altura del rectángulo es $f(c_1) = f(c_2) = (\pm 2/\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{7}{3}$. El área del rectángulo mostrado en la figura 6.7.4b) es $f(c)[2 - (-2)] = \frac{7}{3} \cdot 4 = \frac{28}{3}$.

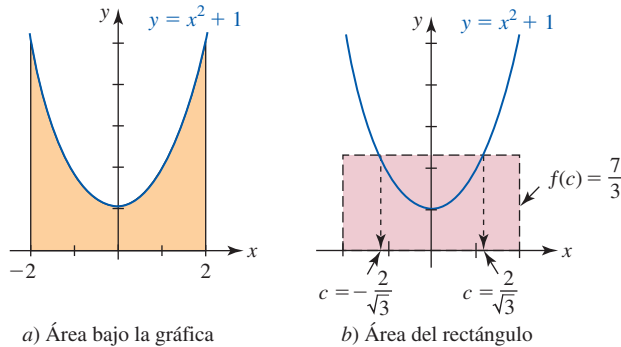


FIGURA 6.7.4 El área en a) es la misma que el área en b) en el ejemplo 3

Ejercicios 6.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre el valor promedio f_{pro} de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x$; $[-3, 1]$
2. $f(x) = 2x + 3$; $[-2, 5]$
3. $f(x) = x^2 + 10$; $[0, 2]$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $[-1, 1]$
5. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $[-1, 3]$
6. $f(x) = (x + 1)^2$; $[0, 2]$
7. $f(x) = x^3$; $[-2, 2]$
8. $f(x) = x(3x - 1)^2$; $[0, 1]$
9. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 9]$
10. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$; $[0, 3]$
11. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}$; $[0, 3]$
12. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} \frac{1}{x^2}$; $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
13. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
14. $f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$; $[1, 4]$
15. $f(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}$; $[3, 5]$
16. $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}$; $[4, 9]$
17. $f(x) = \sin x$; $[-\pi, \pi]$
18. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$
19. $f(x) = \csc^2 x$; $[\pi/6, \pi/2]$
20. $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$; $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

En los problemas 21 y 22, encuentre un valor c en el intervalo dado para el cual $f(c) = f_{\text{pro}}$.

21. $f(x) = x^2 + 2x$; $[-1, 1]$
22. $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $[1, 6]$

23. El valor promedio de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[1, 5]$ es $f_{\text{pro}} = 3$. ¿Cuál es el área bajo la gráfica sobre el intervalo?
24. Para $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, encuentre un valor de b tal que $f_{\text{pro}} = 0$ sobre $[0, b]$. Interprete geoméricamente.

Aplicaciones

25. La función $T(t) = 100 + 3t - \frac{1}{2}t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después de mediodía en un día típico de agosto en Las Vegas. Encuentre la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.
26. Una empresa determina que las ganancias obtenidas después de la venta de x unidades de un producto están dadas por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Encuentre el promedio de las ganancias para ventas de $x = 1$ a $x = 5$. Compare el resultado con el promedio $\frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 R(k)$.
27. Sea $s(t)$ la posición de una partícula sobre un eje horizontal como una función del tiempo t . La velocidad media $\bar{v}$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $\bar{v} = [s(t_2) - s(t_1)] / (t_2 - t_1)$. Use (5) para demostrar que $v_{\text{pro}} = \bar{v}$. [Sugerencia: Recuerde que $ds/dt = v$.]
28. Cuando no hay amortiguamiento, la posición de una masa m sobre un resorte que vibra libremente está dada por la función $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, donde A , ω y ϕ son

constantes. El periodo de oscilación es $2\pi/\omega$. La energía potencial del sistema es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La energía cinética del sistema es $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde $v = dx/dt$. Si $\omega^2 = k/m$, muestre que la energía potencial media y la energía cinética media sobre un periodo son las mismas y que cada una es igual a $\frac{1}{4}kA^2$.

29. En física, el **teorema impulso-cantidad de movimiento** establece que el cambio del impulso de un cuerpo sobre un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es $mv_1 - mv_0 = (t_1 - t_0)\bar{F}$, donde mv_0 es la cantidad de impulso inicial, mv_1 es la cantidad de impulso final y $\bar{F}$ es la fuerza media que actúa sobre el cuerpo durante el intervalo. Encuentre el cambio en el impulso de un martinete que se deja caer sobre un apilamiento entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$ si

$$F(t) = k \left[1 - \left(\frac{2t}{t_1} - 1 \right)^2 \right],$$

donde k es una constante.

30. En una arteria pequeña, la velocidad del torrente sanguíneo (en cm/s) está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, $0 \leq r \leq R$, donde P es la presión sanguínea, ν es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y R es el radio de la arteria. Encuentre el promedio de $v(r)$ sobre el intervalo $[0, R]$.

■ Piense en ello

31. Si $y = f(x)$ es una función impar continua, entonces, ¿cuál es f_{pro} sobre cualquier intervalo $[-a, a]$?
32. Para una función lineal $f(x) = ax + b$, $a > 0$, $b > 0$, el valor promedio de la función sobre $[x_1, x_2]$ es $f_{\text{pro}} = aX + b$, donde X es algún número en el intervalo. Conjeture el valor de X . Demuestre su afirmación.
33. Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, encuentre el valor promedio de f' sobre el intervalo $[x, x + h]$, donde $h > 0$.
34. Dado que n es un entero positivo y $a > 1$, muestre que el valor promedio de $f(x) = (n+1)x^n$ sobre el intervalo $[1, a]$ es $f_{\text{pro}} = a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.
35. Suponga que $y = f(x)$ es una función continua y que f_{pro} es su valor promedio sobre $[a, b]$. Explique: $\int_a^b [f(x) - f_{\text{pro}}] dx = 0$.
36. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor o función piso. Sin integración, ¿cuál es el promedio de f sobre $[0, 1]$?

¿Y sobre $[0, 2]$? ¿Y sobre $[0, 3]$? ¿Y sobre $[0, 4]$? Conjeture el valor promedio de f sobre el intervalo $[0, n]$, donde n es un entero positivo. Demuestre su afirmación.

37. Como se muestra en la FIGURA 6.7.5, una cuerda se traza aleatoriamente entre dos puntos del círculo de radio $r = 1$. Analice: ¿cuál es la longitud media de las cuerdas?

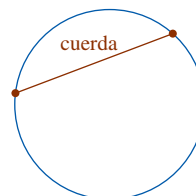


FIGURA 6.7.5 Círculo en el problema 37

■ Proyectos

38. **Miembros humanos** La siguiente fórmula se usa a menudo para aproximar el área superficial S de un miembro humano:

$$S \approx \text{circunferencia media} \times \text{longitud del miembro}.$$

- a) Como se muestra en la FIGURA 6.7.6, un miembro puede considerarse como un sólido de revolución. Para muchos miembros, $f'(x)$ es pequeña. Si $|f'(x)| \leq \varepsilon$ para $a \leq x \leq b$, muestre que

$$\int_a^b 2\pi f(x) dx \leq S \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2} \int_a^b 2\pi f(x) dx.$$

- b) Muestre que $\bar{C}L \leq S \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2} \bar{C}L$, donde $\bar{C}$ es la circunferencia media del miembro sobre el intervalo $[a, b]$. Así, la fórmula de aproximación planteada antes siempre subestima a S pero funciona bien cuando ε es pequeño (como para el antebrazo a la muñeca).

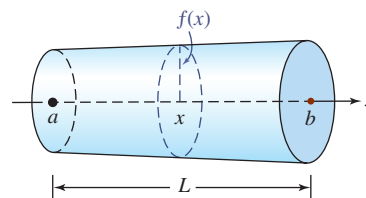


FIGURA 6.7.6 Modelo de un miembro en el problema 38

6.8 Trabajo

■ **Introducción** En física, cuando una fuerza *constante* F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el **trabajo** realizado se define como el producto

$$W = Fd. \quad (1)$$

Por ejemplo, si una fuerza de 10 lb mueve un objeto 7 pies en la misma dirección de la fuerza, entonces el trabajo realizado es 70 pies-lb. En esta sección veremos cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza *variable*.

Antes de examinar el trabajo como integral definida, revisaremos algunas unidades importantes.

■ **Unidades** En la tabla siguiente se enumeran **unidades** de uso común de fuerza, distancia y trabajo.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Fuerza	libra (lb)	newton (N)	dina
Distancia	pie (pie)	metro (m)	centímetro (cm)
Trabajo	pie-libra (pie-lb)	newton-metro (joule)	dina-centímetro (ergio)

Por tanto, si una fuerza de 300 N mueve 15 m un objeto, el trabajo realizado es $W = 300 \cdot 15 = 4\,500$ N-m o 4 500 joules. Para efectos de comparación y conversión de una unidad a otra, se observa que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0.2247 \text{ lb}$$

$$1 \text{ pie-lb} = 1.356 \text{ joules} = 1.356 \times 10^7 \text{ ergios.}$$

De modo que, por ejemplo, 70 pies-lb equivalen a $70 \times 1.356 = 94.92$ joules, y 4 500 joules equivalen a $4\,500/1.356 = 3\,318.584$ pies-lb.

■ **Construcción de una integral** Ahora, si $F(x)$ representa una fuerza variable continua que actúa sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el trabajo no es simplemente un producto como en (1). Suponga que P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y Δx_k es el ancho del k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Sea x_k^* el punto muestra escogido de manera arbitraria en cada subintervalo. Si el ancho de cada $[x_{k-1}, x_k]$ es muy pequeño, entonces, puesto que F es continua, los valores funcionales $F(x)$ no pueden variar mucho en el subintervalo. Por tanto, puede considerarse en forma razonable que la fuerza actúa sobre $[x_{k-1}, x_k]$ como la constante $F(x_k^*)$ y que el trabajo realizado desde x_{k-1} hasta x_k está dado por la aproximación

$$W_k = F(x_k^*) \Delta x_k.$$

Entonces, una aproximación al trabajo total realizado desde a hasta b está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n W_k = F(x_1^*) \Delta x_1 + F(x_2^*) \Delta x_2 + \cdots + F(x_n^*) \Delta x_n = \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k.$$

Resulta natural suponer que el trabajo realizado por F sobre el intervalo es

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k.$$

El análisis anterior se resume en la siguiente definición.

Definición 6.8.1 Trabajo

Sea F continua sobre el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ la fuerza en un número x en el intervalo. Entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza para mover un objeto de a a b es

$$W = \int_a^b F(x) dx. \quad (2)$$

Nota: Si F es constante, $F(x) = k$ para toda x en el intervalo, entonces (2) se vuelve $W = \int_a^b k dx = kx \Big|_a^b = k(b - a)$, lo cual es consistente con (1).

■ **Problemas de resortes** La ley de Hooke establece que cuando un resorte se estira (o comprime) más allá de su longitud natural, la fuerza de reconstitución ejercida por el resorte es directamente proporcional a la cantidad de elongación (o compresión) x . Así, para estirar un resorte x unidades más allá de su longitud natural es necesario aplicar la fuerza

$$F(x) = kx, \quad (3)$$

donde k es una constante de proporcionalidad denominada **constante del resorte**. Vea la FIGURA 6.8.1.

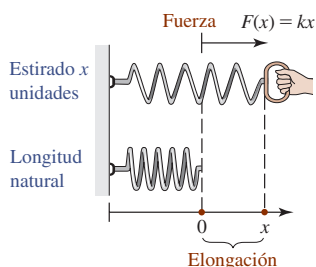


FIGURA 6.8.1 Para estirar un resorte x unidades se requiere una fuerza $F(x) = kx$

EJEMPLO 1 Alargamiento de un resorte

Para estirar un resorte de 50 cm se requiere una fuerza de 130 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 20 cm más allá de su longitud natural (sin estirar).

Solución Cuando una fuerza se mide en newtons, las distancias suelen expresarse en metros. Puesto que $x = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m}$ cuando $F = 130 \text{ N}$, (3) se vuelve $130 = k(\frac{1}{2})$, lo que implica que la constante del resorte es $k = 260 \text{ N/m}$. Por tanto, $F = 260x$. Luego, $20 \text{ cm} = \frac{1}{5} \text{ m}$, de modo que el trabajo realizado para estirar el resorte por esta cantidad es

$$W = \int_0^{1/5} 260x \, dx = 130x^2 \Big|_0^{1/5} = \frac{26}{5} = 5.2 \text{ joules.}$$

Nota: Suponga que la longitud natural del resorte en el ejemplo 1 es de 40 cm. Una forma equivalente de plantear el problema es: encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte hasta una longitud de 60 cm. Puesto que la elongación es $60 - 40 = 20 \text{ cm} = \frac{1}{5} \text{ m}$, se integra $F = 260x$ sobre el intervalo $[0, \frac{1}{5}]$. No obstante, si el problema fuese encontrar el trabajo realizado para estirar el mismo resorte de 50 cm a 60 cm, entonces se integraría sobre el intervalo $[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}]$. En este caso se inicia desde una posición en que el resorte ya está estirado $10 \text{ cm} (\frac{1}{10} \text{ m})$.

Trabajo realizado contra la gravedad A partir de la ley de gravitación universal, la fuerza entre un planeta (o satélite) de masa m_1 y un cuerpo de masa m_2 está dada por

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4)$$

donde k es una constante denominada **constante gravitacional**, y r es la distancia desde el centro del planeta de masa m_2 . Vea la FIGURA 6.8.2. Para elevar la masa m_2 desde la superficie de un planeta de radio R hasta una altura h , el trabajo puede realizarse al usar (4) en (2):

$$W = \int_R^{R+h} \frac{k m_1 m_2}{r^2} \, dr = k m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{R+h} = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right). \quad (5)$$

En unidades SI, $k = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. En la tabla de la derecha se proporcionan algunas masas y valores de R .

EJEMPLO 2 Trabajo realizado para subir una carga útil

El trabajo realizado para subir una carga útil de 5 000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 30 000 m ($0.03 \times 10^6 \text{ m}$) se concluye por (5) y la tabla precedente:

$$W = (6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000) \left(\frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{6.43 \times 10^6} \right) \\ \approx 1.46 \times 10^9 \text{ joules.}$$

Problemas de bombeo Cuando un líquido que pesa $\rho \text{ lb/pie}^3$ se bombea desde un tanque, el trabajo realizado para mover un volumen fijo o una capa de líquido d pies en una dirección vertical es

$$W = \text{fuerza} \cdot \text{distancia} = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{volumen}) \cdot (\text{distancia})$$

$$\text{o bien,} \quad W = \underbrace{\rho \cdot (\text{volumen})}_{\text{fuerza}} \cdot d. \quad (6)$$

En física, la cantidad ρ se denomina **peso específico** del fluido. Para agua, $\rho = 62.4 \text{ lb/pie}^3$, o $9\,800 \text{ N/m}^3$.

En los varios ejemplos siguientes se usará (6) para construir la integral idónea a fin de encontrar el trabajo realizado al bombear agua desde un tanque.

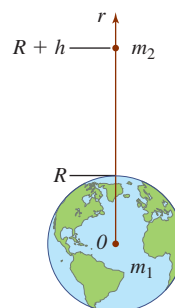


FIGURA 6.8.2 Levantamiento de una masa m_2 hasta una altura h

Planetas	m_1 (en kg)	R (en m)
Venus	4.9×10^{24}	6.2×10^6
Tierra	6.0×10^{24}	6.4×10^6
Luna		
(satélite)	7.3×10^{22}	1.7×10^6
Marte	6.4×10^{23}	3.3×10^6

EJEMPLO 3 Trabajo realizado para bombear agua

Un tanque hemisférico de radio de 20 pies está lleno de agua hasta una profundidad de 15 pies. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.

Solución Como se muestra en la FIGURA 6.8.3, hacemos que el eje x positivo esté dirigido *hacia abajo* y el origen se fija en el punto medio de la parte superior del tanque. Puesto que la sección transversal del tanque es un semicírculo, x y y están relacionadas por $x^2 + y^2 = (20)^2$, $0 \leq x \leq 20$. Ahora suponga que el intervalo $[5, 20]$, que corresponde al agua sobre el eje x , se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de ancho Δx_k . Sea x_k^* cualquier punto muestra en el k -ésimo subintervalo y sea W_k una aproximación al trabajo realizado por la bomba al hacer subir una capa circular de agua de grosor Δx_k hasta la parte superior del tanque. Por (6) se concluye que

$$W_k = \underbrace{[62.4\pi(y_k^*)^2 \Delta x_k]}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_k^*}_{\text{distancia}},$$

donde $(y_k^*)^2 = 400 - (x_k^*)^2$. Por tanto, el trabajo realizado por la bomba es aproximado por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k=1}^n 62.4\pi [400 - (x_k^*)^2] x_k^* \Delta x_k.$$

El trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque es el límite de esta última expresión cuando $\|P\| \rightarrow 0$; es decir,

$$W = \int_5^{20} 62.4\pi(400 - x^2)x \, dx = 62.4\pi \left(200x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_5^{20} \approx 6\,891\,869 \text{ pies-lb.}$$

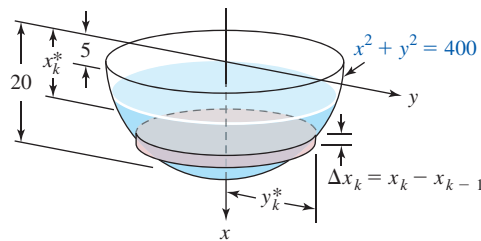


FIGURA 6.8.3 Tanque hemisférico en el ejemplo 3

Merece la pena continuar el análisis del ejemplo 3 para el caso en que el eje x positivo se tome en la dirección *hacia arriba* y el origen esté en el punto medio de la parte inferior del tanque.

EJEMPLO 4 Solución alterna del ejemplo 3

Con los ejes como se muestra en la FIGURA 6.8.4, vemos que una capa circular de agua debe subir una distancia de $20 - x_k^*$ pies. Puesto que el centro del semicírculo está en $(20, 0)$, ahora x y y están relacionadas por $(x - 20)^2 + y^2 = 400$. Entonces,

$$\begin{aligned} W_k &= \underbrace{(62.4\pi(y_k^*)^2 \Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(20 - x_k^*)}_{\text{distancia}} \\ &= 62.4\pi [400 - (x - 20)^2] (20 - x_k^*) \Delta x_k \end{aligned}$$

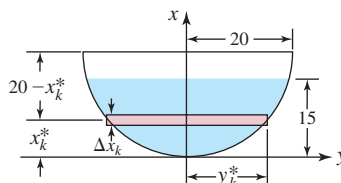


FIGURA 6.8.4 Tanque hemisférico en el ejemplo 4

y así

$$\begin{aligned} W &= 62.4\pi \int_0^{15} [400 - (x - 20)^2](20 - x) dx \\ &= 62.4\pi \int_0^{15} (x^3 - 60x^2 + 800x) dx. \end{aligned}$$

Observe los nuevos límites de integración; esto se debe a que el agua mostrada en la figura 6.8.4 corresponde al intervalo $[0, 15]$ sobre el eje vertical. Usted debe comprobar que el valor de W en este caso es el mismo que en el ejemplo 3. ■

EJEMPLO 5 Otro repaso al ejemplo 3

En el ejemplo 3, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto 10 pies por arriba del tanque hemisférico.

Solución Como en la figura 6.8.3, el eje x positivo se ubica hacia abajo. Luego, por la FIGURA 6.8.5 vemos

$$\begin{aligned} W_k &= (62.4\pi(y_k^*)^2 \Delta x_k) \cdot (10 + x_k^*) \\ &= 62.4\pi [400 - (x_k^*)^2](10 + x_k^*) \Delta x_k. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} W &= 62.4\pi \int_5^{20} (400 - x^2)(10 + x) dx \\ &= 62.4\pi \int_5^{20} (-x^3 - 10x^2 + 400x + 4\,000) dx \\ &= 62.4\pi \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 200x^2 + 4\,000x \right) \Big|_5^{20} \\ &= 13\,508\,063 \text{ pies-lb.} \end{aligned}$$

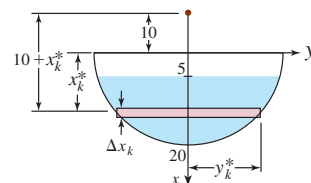


FIGURA 6.8.5 Tanque hemisférico en el ejemplo 5

■ **Problemas con cables** El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que cuando se calcula el trabajo realizado para subir un objeto por medio de un cable (cuerda pesada o cadena), el peso del cable debe tomarse en cuenta.

EJEMPLO 6 Subida de un elevador

Un cable que pesa 6 lb/pie está conectado a un elevador de construcción que pesa 1 500 lb. Encuentre el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies.

Solución Puesto que el peso del elevador es una fuerza constante, por (1) se concluye que el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies es simplemente

$$W_E = (1\,500) \cdot (500) = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

El peso del cable es la fuerza variable. Sea W_C el trabajo realizado para subir el cable. Como se muestra en la FIGURA 6.8.6, suponga que el eje x positivo está dirigido hacia arriba y que el intervalo $[0, 500]$ se parte en n subintervalos con longitudes Δx_k . A una altura de x_k^* pies del suelo, un segmento de cable correspondiente al subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ pesa $6\Delta x_k$ y es necesario jalarlo $500 - x_k^*$ pies adicionales. Por tanto, es posible escribir

$$(W_C)_k = \underbrace{(6 \Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(500 - x_k^*)}_{\text{distancia}} = (3\,000 - 6x_k^*) \Delta x_k$$

y así

$$W_C = \int_0^{500} (3\,000 - 6x) dx = (3\,000x - 3x^2) \Big|_0^{500} = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

Por tanto, el trabajo total realizado para subir el elevador es

$$W = W_E + W_C = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.} \quad \blacksquare$$

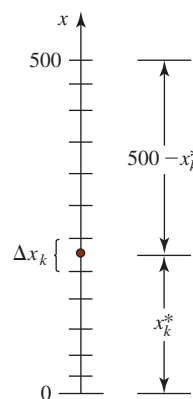


FIGURA 6.8.6 Cable en el ejemplo 6

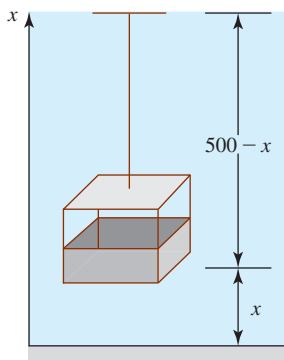


FIGURA 6.8.7 Elevador en los ejemplos 6 y 7

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

Éste es un análisis ligeramente más rápido del ejemplo 6. Como se muestra en la FIGURA 6.8.7, cuando el elevador está a una altura de x pies, es necesario jalarlo $500 - x$ pies adicionales. La fuerza necesaria para subirlo a esa altura es

$$\underbrace{1\,500}_{\text{peso del elevador}} + \underbrace{6(500 - x)}_{\text{peso del cable}} = 4\,500 - 6x.$$

Así, por (2) el trabajo realizado es

$$W = \int_0^{500} (4\,500 - 6x) \, dx = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.}$$

Ejercicios 6.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.**Fundamentos**

- Encuentre el trabajo realizado cuando una fuerza de 55 lb mueve un objeto 20 yd en la misma dirección de la fuerza.
- Una fuerza de 100 N se aplica a un objeto a 30° medidos con respecto a la horizontal. Si el objeto se mueve 8 cm horizontalmente, encuentre el trabajo realizado por la fuerza.
- Una masa que pesa 10 lb estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte. ¿Cuánto estira una masa que pesa 8 lb el mismo resorte?
- La longitud natural de un resorte es 0.5 m. Una fuerza de 50 N estira el resorte una longitud de 0.6 m.
 - ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte x m?
 - ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte una longitud de 1 m?
 - ¿Cuánto mide de largo el resorte cuando lo estira una fuerza de 200 N?
- En el problema 4:
 - Encuentre el trabajo realizado al estirar 0.2 m el resorte.
 - Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.1 m.
- Se requiere una fuerza de $F = \frac{3}{2}x$ lb para estirar x pulg adicionales un resorte de 10 pulg.
 - Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 16 pulg.
 - Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 16 pulg.
- Una masa que pesa 10 lb está suspendida de un resorte de 2 pies. El resorte es estirado 8 pulg y luego se retira la masa.
 - Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 3 pies.
 - Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 4 pies hasta una longitud de 5 pies.
- Una fuerza de 50 lb comprime por 3 pulg un resorte de 15 pulg de largo. Encuentre el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud final de 5 pulg.
- Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 10 000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 500 km.

- Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 50 000 kg en la superficie de la Luna hasta una altura de 200 km.
- Un tanque en forma de cilindro circular recto se llena con agua. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.8. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque.

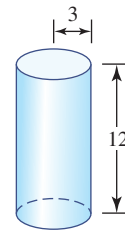


FIGURA 6.8.8 Tanque cilíndrico en el problema 11

- En un tanque en forma de cono circular recto, con el vértice hacia abajo, se vierte agua hasta una profundidad igual a la mitad de su altura. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.9. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque. [Sugerencia: Suponga que el origen es el vértice del cono.]

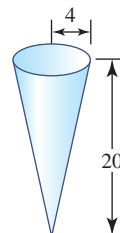


FIGURA 6.8.9 Tanque cónico en el problema 12

- Para el tanque cónico en el problema 12, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.
- Suponga que el tanque cilíndrico en el problema 11 es horizontal. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 2 pies por arriba del tanque. [Sugerencia: Vea los problemas 55-58 en los ejercicios 6.2.]

15. Un tanque tiene secciones transversales en forma de triángulos isósceles con el vértice hacia abajo. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.10. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque al introducirle agua a través de un orificio en el fondo por medio de una bomba situada a 5 pies por abajo del vértice.

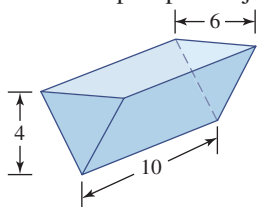


FIGURA 6.8.10 Tanque con secciones transversales triangulares en el problema 15

16. Una tina horizontal con sección transversal semicircular contiene aceite cuya densidad es 80 lb/pie^3 . Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.11. Si la profundidad del aceite es de 3 pies, encuentre el trabajo realizado para bombear todo el aceite hasta la parte superior del tanque.

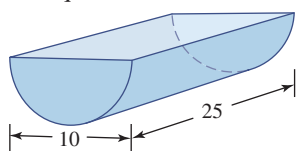


FIGURA 6.8.11 Tina semicircular en el problema 16

17. La cadena de 100 pies de un ancla, que pesa 20 lb/pie , cuelga verticalmente del lado de un barco. ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar 40 pies de la cadena?
18. Un barco está anclado en 200 pies de agua. En el agua, el ancla del barco pesa $3\,000 \text{ lb}$ y la cadena del ancla pesa 40 lb/pie . Si la cadena cuelga verticalmente, ¿cuánto trabajo se realiza al jalar 100 pies de la cadena?
19. Un cubo de arena que pesa 80 lb se levanta verticalmente por medio de una cuerda y una polea hasta una altura de 65 pies. Encuentre el trabajo realizado si
- el peso de la cuerda es despreciable y
 - la cuerda pesa $\frac{1}{2} \text{ lb/pie}$.
20. Un cubo, que originalmente contiene 20 pies^3 de agua, se levanta verticalmente a partir del nivel del suelo. Si en el cubo hay una fuga de agua a razón de $\frac{1}{2} \text{ pie}^3$ por pie vertical, encuentre el trabajo realizado para subir el cubo hasta una altura en que esté vacío.
21. La fuerza de atracción entre un electrón y el núcleo de un átomo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Si la distancia inicial entre un núcleo y un protón es 1 unidad, encuentre el trabajo realizado por una fuerza externa que mueve el electrón una distancia igual a cuatro veces la distancia de separación original.
22. En su lanzamiento, un cohete que pesa $2\,500\,000 \text{ lb}$ lleva un transbordador espacial de $200\,000 \text{ lb}$. Suponga que en las etapas iniciales del lanzamiento el cohete consume combustible a razón de 100 lb/pie .

- Expresar el peso total del sistema en términos de su altura por arriba de la superficie terrestre. Vea la FIGURA 6.8.12.
- Encuentre el trabajo realizado para que el sistema llegue a una altura de 1 000 pies.

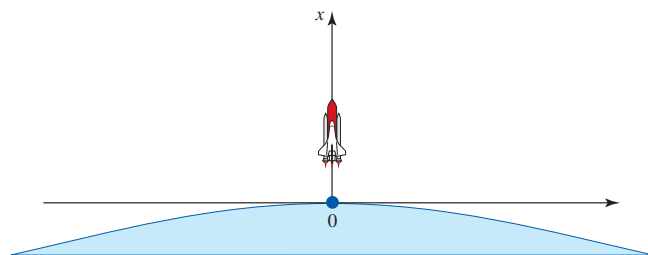


FIGURA 6.8.12 Cohete en el problema 22

23. En termodinámica, si un gas confinado en un cilindro se expande contra un pistón de modo que el volumen del gas cambia de v_1 a v_2 , entonces el trabajo realizado sobre el pistón está dado por $W = \int_{v_1}^{v_2} p \, dv$, donde p es la presión (fuerza por unidad de área). Vea la FIGURA 6.8.13. En una expansión adiabática de un gas ideal, la presión y el volumen están relacionados por $pv^\gamma = k$, donde γ y k son constantes. Muestre que si $\gamma \neq 1$, entonces

$$W = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - \gamma}$$

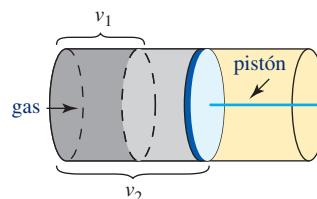


FIGURA 6.8.13 Pistón en el problema 23

24. Muestre que cuando un cuerpo de peso mg se eleva verticalmente desde un punto y_1 hasta un punto y_2 , $y_2 > y_1$, el trabajo realizado es el cambio en energía potencial $W = mgy_2 - mgy_1$.

≡ Piense en ello

25. Cuando una persona empuja sobre una pared inmóvil con una fuerza horizontal de 75 lb , ¿cuánto trabajo realiza?
26. En la FIGURA 6.8.14 se muestra la gráfica de una fuerza variable F . Encuentre el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde $x = 0$ hasta $x = 6$.

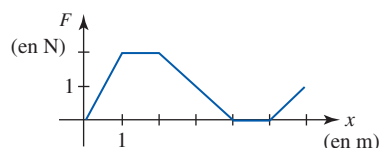


FIGURA 6.8.14 Gráfica de la fuerza en el problema 26

- 27. Un poco de historia: Una gran verdadera historia**
En 1977, George Willig, conocido como la “Mosca humana” o el “Hombre araña”, escaló la parte exterior de la torre sur del edificio del World Trade Center en Nueva York hasta una altura de 1 350 pies en 3.5 h a razón de 6.4 pies/min. En esa época Willig pesaba 165 lb. ¿Cuánto trabajo realizó George? (Por su esfuerzo, fue multado con \$1.10; 1 centavo por cada uno de los 110 pisos del edificio.)
- 28.** Un cubo que contiene agua pesa 200 lb. Cuando el cubo es levantado por una cuerda, en su parte inferior hay una fuga a razón constante, de modo que cuando el cubo llega a una altura de 10 pies pesa 180 lb. Suponga que el peso de la cuerda es despreciable. Analice: explique por qué $\frac{200 + 180}{2} \cdot 10 = 1\,900$ pies/lb es una aproximación razonable al trabajo realizado. Sin integración, muestre que la “aproximación” anterior es también el valor exacto del trabajo realizado.
- 29.** Como se muestra en la FIGURA 6.8.15, un cuerpo de masa m es movido por una fuerza horizontal F sobre una superficie sin fricción desde una posición x_1 hasta una posición x_2 . En esos puntos respectivos, el cuerpo se mueve a velocidades v_1 y v_2 , donde $v_2 > v_1$. Muestre que el trabajo

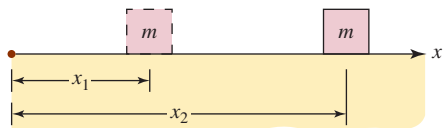


FIGURA 6.8.15 Masa en el problema 29

realizado por la fuerza es el incremento en energía cinética $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. [Sugerencia: Use la segunda ley de Newton, $F = ma$, y exprese la aceleración a en términos de la velocidad v . Integre con respecto al tiempo t y haga una sustitución.]

- 30.** Como se muestra en la FIGURA 6.8.16, un cubo que contiene concreto y está suspendido por un cable se empuja horizontalmente desde la vertical por un obrero de la construcción. La longitud del cable es de 30 m y la masa combinada m del cubo y el concreto es de 550 kg. Por principios de física es posible mostrar que la fuerza requerida para mover el cubo x m está dada por $F = mg \tan \theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Encuentre el trabajo realizado por el obrero de la construcción al empujar el cubo una distancia horizontal de 3 m. [Sugerencia: Use (2) y una sustitución.]

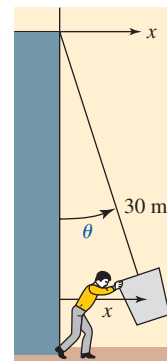


FIGURA 6.8.16 Cubo en el problema 30

6.9 Presión y fuerza del fluido

Los fluidos incluyen líquidos (como agua y aceite) y gases (como el nitrógeno).

■ Introducción Todo el mundo ha experimentado que se le “tapan los oídos” e incluso dolor en los oídos cuando desciende en avión (o en un elevador), o cuando bucea hacia el fondo de una piscina. Estas sensaciones molestas en los oídos se deben a un incremento en la *presión* ejercida por el aire o el agua sobre mecanismos en el oído medio. El aire y el agua son ejemplos de fluidos. En esta sección se mostrará la forma en que la integral definida puede usarse para encontrar la fuerza ejercida por un fluido.

■ Fuerza y presión Suponga que una placa *horizontal* plana se sumerge en un fluido como agua. La fuerza ejercida por el fluido exactamente arriba de la placa, denominada **fuerza F del fluido**, se define como

$$\begin{aligned} F &= \underbrace{(\text{fuerza por unidad de área})}_{\text{presión del fluido } P} \cdot (\text{área de superficie}) \\ &= PA. \end{aligned} \quad (1)$$

Si ρ denota el peso específico del fluido (peso por unidad de volumen) y A es el área de la placa horizontal sumergida hasta una profundidad h , mostrado en la FIGURA 6.9.1a), entonces la **presión P del fluido** sobre la placa puede expresarse en términos de ρ :

$$P = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{profundidad}) = \rho h. \quad (2)$$

En consecuencia, la fuerza (1) del fluido es la misma que

$$F = (\text{presión de fluido}) \cdot (\text{área de superficie}) = \rho h A. \quad (3)$$

No obstante, cuando se sumerge una placa *vertical*, la presión del fluido y la fuerza del fluido sobre un lado de la placa varían con la profundidad. Vea la figura 6.9.1b). Por ejemplo, la presión del fluido sobre una presa vertical es menor en la parte superior que en su base.

Antes de empezar, considere un ejemplo simple de presión y fuerza de una placa sumergida horizontalmente.

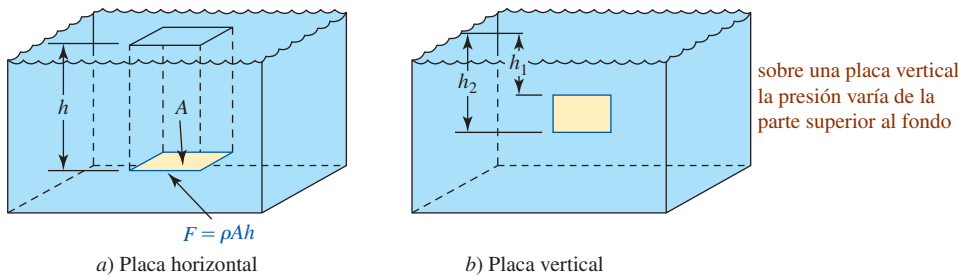


FIGURA 6.9.1 La presión y la fuerza del fluido son constantes sobre una placa sumergida horizontalmente, pero la presión y la fuerza del fluido varían con la profundidad en una placa sumergida verticalmente

EJEMPLO 1 Presión y fuerza

Una placa rectangular plana de 5 pies $\times$ 6 pies se sumerge horizontalmente en agua a una profundidad de 10 pies. Determine la presión y la fuerza ejercidas sobre la placa por el agua arriba de ésta.

Solución Recuerde que el peso específico del agua es 62.4 lb/pie^3 . Así, por (2) la presión del fluido es

$$P = \rho h = (62.4 \text{ lb/pie}^3) \cdot (10 \text{ pies}) = 624 \text{ lb/pie}^2.$$

Puesto que el área superficial de la placa es $A = 30 \text{ pies}^2$, por (3) se concluye que la fuerza del fluido sobre la placa es

$$F = PA = (\rho h)A = (624 \text{ lb/pie}^2) \cdot (30 \text{ pies}^2) = 18\,720 \text{ lb}.$$

Para determinar la fuerza total F ejercida por un fluido sobre un lado de una superficie plana sumergida verticalmente, se emplea una forma del **principio de Pascal**:

- La presión ejercida por un fluido a una profundidad h es la misma en todas direcciones.

Entonces, si en un gran contenedor con fondo plano y paredes verticales se vierte agua hasta una profundidad de 10 pies, la presión de 624 lb/pie^2 en el fondo se ejerce de la misma forma sobre las paredes. Vea la **FIGURA 6.9.2**.

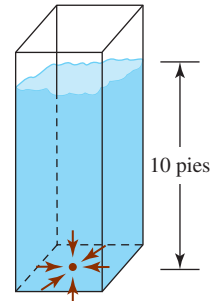


FIGURA 6.9.2 Una presión de 640 lb/pie^2 se aplica en todas direcciones

■ Construcción de una integral Considere que el eje x positivo está dirigido hacia abajo con el origen en la superficie del fluido. Suponga que una placa plana vertical, limitada por las rectas horizontales $x = a$ y $x = b$, se sumerge en el fluido como se muestra en la **FIGURA 6.9.3a**). Sea $w(x)$ una función que denota el ancho de la placa en cualquier número x en $[a, b]$ y sea P cualquier partición del intervalo. Si x_k^* es un punto muestra en el k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces por (3) con las identificaciones $h = x_k^*$ y $A = w(x_k^*) \Delta x_k$, la fuerza F_k ejercida por el fluido sobre el elemento rectangular correspondiente es aproximada por

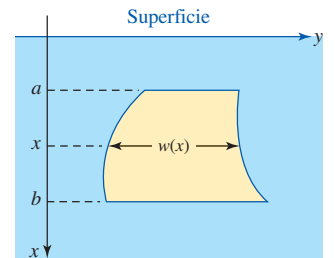
$$F_k = \rho \cdot x_k^* \cdot w(x_k^*) \Delta x_k,$$

donde, como antes, ρ denota el peso específico del fluido. Así, una aproximación a la fuerza del fluido sobre un lado de la placa está dada por la suma de Riemann

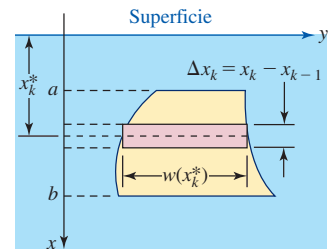
$$\sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n \rho x_k^* w(x_k^*) \Delta x_k.$$

Esto sugiere que la fuerza total del fluido sobre la placa es

$$F = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho x_k^* w(x_k^*) \Delta x_k.$$



a)



b)

FIGURA 6.9.3 Placa vertical sumergida con ancho variable $w(x)$ sobre $[a, b]$

Definición 6.9.1 Fuerza ejercida por un fluido

Sea ρ el peso específico de un fluido y sea $w(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ que describe el ancho de una placa plana sumergida verticalmente a una profundidad x . La **fuerza** F ejercida por el fluido sobre un lado de la placa sumergida es

$$F = \int_a^b \rho x w(x) dx. \quad (4)$$

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido

Una placa en forma de triángulo isósceles de 3 pies de altura y 4 pies de ancho se sumerge verticalmente en agua, con la base hacia abajo, hasta que la base queda a 5 pies por debajo de la superficie. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

Solución Por conveniencia, el eje x positivo se coloca a lo largo del eje de simetría de la placa triangular con el origen en la superficie del agua. Como se indica en la FIGURA 6.9.4, el intervalo $[2, 5]$ se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, y en cada subintervalo se escoge un punto x_k^* . Puesto que la ecuación de la línea recta que contiene a los puntos $(2, 0)$ y $(5, 2)$ es $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, por simetría se concluye que el ancho del elemento rectangular, mostrado en rojo en la figura 6.9.4, es

$$2y_k^* = 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right).$$

Luego, $\rho = 62.4 \text{ lb/pie}^3$, de modo que la fuerza del fluido sobre esa porción de la placa que corresponde al k -ésimo subintervalo es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot x_k^* \cdot 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right) \Delta x_k.$$

Al formar la suma $\sum_{k=1}^n F_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_2^5 (62.4)2x\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx \\ &= (62.4)\frac{4}{3} \int_2^5 (x^2 - 2x) dx \\ &= 83.2 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \Big|_2^5 \\ &= (83.2) \cdot 18 = 1\,497.6 \text{ lb.} \end{aligned}$$

En problemas como el ejemplo 2, los ejes x y y se colocan donde convenga. Si el eje y se coloca perpendicular al eje x en la parte superior de la placa en el punto $(2, 0)$, entonces los cuatro puntos $(2, 0)$, $(5, -2)$, $(5, 0)$ y $(5, 2)$ en la figura 6.9.4 se vuelven $(0, 0)$, $(3, -2)$, $(3, 0)$ y $(3, 2)$, respectivamente. La ecuación de la línea recta que contiene a los puntos $(0, 0)$ y $(3, 2)$ es $y = \frac{2}{3}x$. Usted debe comprobar que la fuerza F ejercida por el agua contra la placa está dada por la integral definida

$$F = (62.4)\frac{4}{3} \int_0^3 x(x + 2) dx.$$

EJEMPLO 3 Fuerza del agua contra una presa

Una presa tiene una cara rectangular vertical. Encuentre la fuerza ejercida por el agua contra la cara vertical de la presa si la profundidad del agua es h pies y su ancho mide l pies. Vea la FIGURA 6.9.5a).

Solución Para variar, el eje x positivo apunta hacia arriba desde el fondo de la cara rectangular de la presa, como se muestra en la figura 6.9.5b). Luego, el intervalo $[0, h]$ se divide en n subintervalos. Al eliminar uno de los subíndices, la fuerza F_k del fluido contra esa porción rectangular de la placa que corresponde al k -ésimo subintervalo, mostrado en rojo claro en la figura 6.9.5b), es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot (h - x) \cdot (l \Delta x).$$

Aquí la profundidad es $h - x$ y el área del elemento rectangular es $l \Delta x$. Al sumar estas aproximaciones y tomar el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ se llega a

$$F = \int_0^h 62.4l(h - x) dx = \frac{1}{2}(62.4)lh^2.$$

En el ejemplo 3, si, por ejemplo, la profundidad del agua es 100 pies y su ancho mide 300 pies, entonces la fuerza del fluido sobre la cara de la presa es 93 600 000 lb.

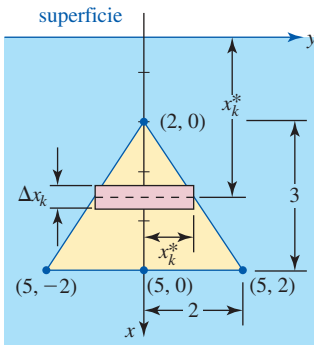
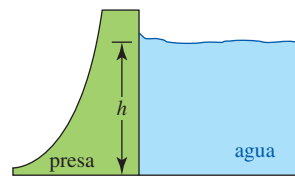
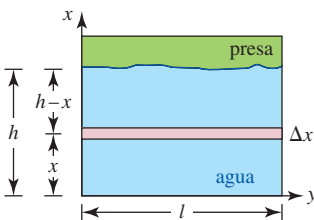


FIGURA 6.9.4 Placa triangular en el ejemplo 2



a) Vista lateral de la presa y el agua



b) Agua contra la cara de la presa
FIGURA 6.9.5 Presa en el ejemplo 3

Ejercicios 6.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

1. Considere los tanques con fondos circulares que se muestran en la FIGURA 6.9.6. Cada tanque está lleno de agua cuyo peso específico es 62.4 lb/pie^3 . Encuentre la presión y la fuerza ejercidas por el agua sobre el fondo de cada tanque.

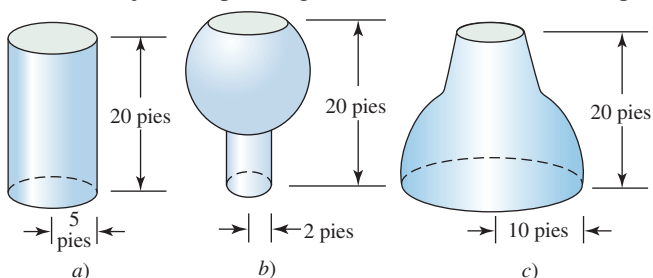


FIGURA 6.9.6 Tanques en el problema 1

2. El buque tanque mostrado en la FIGURA 6.9.7 tiene fondo plano y está lleno de petróleo cuyo peso específico es 55 lb/pie^3 . El buque mide 350 pies de largo.
- ¿Cuál es la presión que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
 - ¿Cuál es la presión que ejerce el agua sobre el fondo del buque?
 - ¿Cuál es la fuerza que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
 - ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del buque?

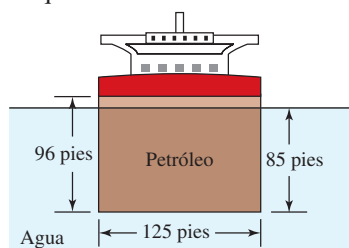


FIGURA 6.9.7 Buque tanque en el problema 2

3. Las dimensiones de una piscina rectangular en forma de paralelepípedo rectangular son $30 \text{ pies} \times 15 \text{ pies} \times 9 \text{ pies}$.
- Si la piscina está llena de agua hasta una profundidad de 8 pies, encuentre la presión y la fuerza ejercidas sobre el fondo plano de la piscina. Vea la FIGURA 6.9.8.
 - Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre una de las paredes verticales de la piscina, así como sobre un lado vertical.

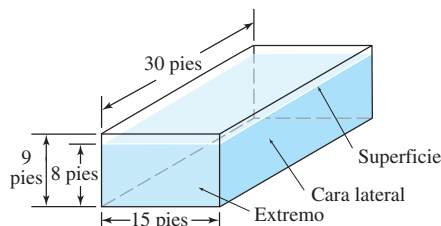


FIGURA 6.9.8 Piscina en el problema 3

4. Una placa en forma de triángulo equilátero de $\sqrt{3}$ pie por lado se sumerge verticalmente, con la base hacia abajo,

con el vértice a 1 pie por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

5. Encuentre la fuerza sobre un lado de la placa en el problema 4 si la placa está suspendida con la base hacia arriba a 1 pie por abajo de la superficie del agua.
6. Una placa triangular se sumerge verticalmente en agua como se muestra en la FIGURA 6.9.9. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

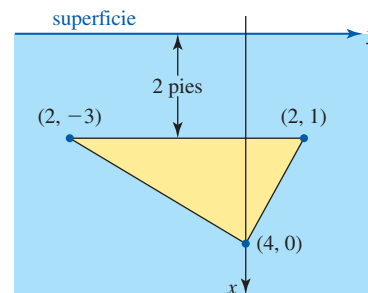


FIGURA 6.9.9 Placa triangular en el problema 6

7. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 4$ se sumerge verticalmente en aceite cuyo peso específico es 50 lb/pie^3 . Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.
8. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo, y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = -x + 2$ se sumerge verticalmente en agua. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.
9. Un canalón lleno de agua tiene extremos verticales en forma de trapecioide como se muestra en la FIGURA 6.9.10. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

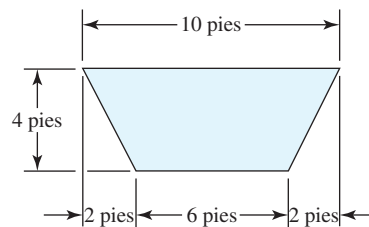


FIGURA 6.9.10 Canalón de agua en el problema 9

10. Un canalón lleno de agua tiene extremos en la forma que se muestra en la FIGURA 6.9.11. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

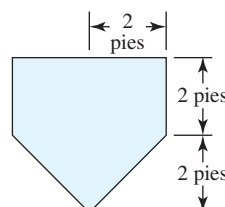


FIGURA 6.9.11 Canalón de agua en el problema 10

11. Un extremo vertical de una piscina tiene la forma que se muestra en la FIGURA 6.9.12. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre este lado de la piscina.

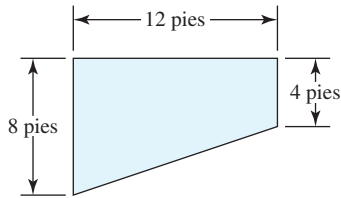


FIGURA 6.9.12 Extremo de la piscina en el problema 11

12. Un tanque en forma de cilindro circular recto de 10 pies de diámetro reposa sobre su costado. El tanque contiene petróleo hasta la mitad de su capacidad, y el peso específico del petróleo es de 60 lb/pie^3 . Encuentre la fuerza que ejerce el petróleo sobre uno de los extremos del tanque.
13. Una placa circular de 4 pies de radio se sumerge verticalmente de modo que el centro de la placa está a 10 pies por debajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre un lado de la placa. [Sugerencia: Para facilitar las cosas, considere que el origen está en el centro de la placa, con el eje x positivo hacia abajo. También vea los problemas 55-58 en los ejercicios 6.2.]
14. Un tanque cuyos extremos tienen forma elíptica $x^2/4 + y^2/9 = 1$ se sumerge en un líquido cuyo peso específico es ρ , de modo que las placas extremas son verticales. Encuentre la fuerza que el líquido ejerce sobre un extremo si su centro está a 10 pies por debajo de la superficie del líquido. [Sugerencia: Proceda como en el problema 13 y use el hecho de que el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab .]
15. Un bloque sólido en forma de cubo de 2 pies de arista se sumerge en un gran tanque de agua. La parte superior del bloque es horizontal y se ubica a 3 pies por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza total sobre el bloque (seis lados) provocada por la presión del líquido. Vea la FIGURA 6.9.13.

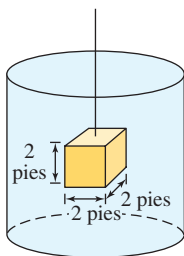


FIGURA 6.9.13 Bloque sumergido en el problema 15

16. En el problema 15, ¿cuál es la diferencia entre la fuerza sobre el fondo del bloque y la fuerza sobre la parte superior del bloque? La diferencia es la fuerza de empuje del agua y, por el principio de Arquímedes, es igual al peso

del agua desplazada. ¿Cuál es el peso del agua desplazada? ¿Cuál es el peso del agua desplazada por el bloque?

≡ Piense en ello

17. Considere la piscina rectangular que se muestra en la FIGURA 6.9.14a) cuyos extremos son trapezoides. La piscina está llena de agua. Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 6.9.14b) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre el fondo de la piscina. [Sugerencia: Expresé la profundidad d en términos de x .]

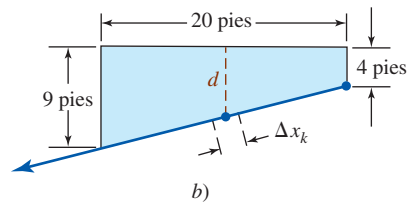
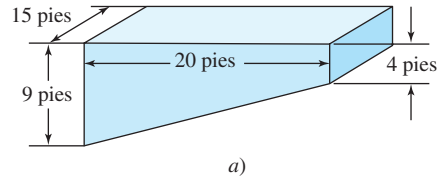


FIGURA 6.9.14 Piscina en el problema 17

18. Se construye una presa de barro cuyas dimensiones se muestran en la FIGURA 6.9.15a). Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 6.9.15b) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre la pared inclinada de la presa.

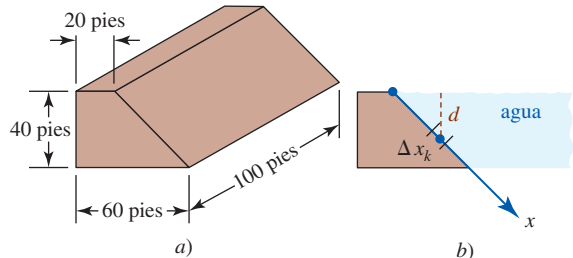
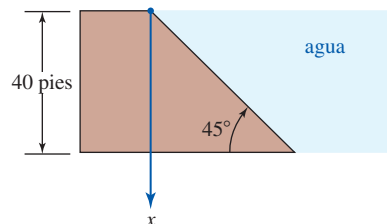


FIGURA 6.9.15 Presa en el problema 18

19. Analice el problema 18 con el eje x positivo que se muestra en la FIGURA 6.9.16.

FIGURA 6.9.16 Orientación del eje x en el problema 19

6.10 Centros de masa y centroides

■ **Introducción** En esta sección consideramos otra aplicación de la física. Usamos la integral definida para encontrar el centro de masa de barras y regiones planas. Empezamos con una revisión de la forma de encontrar el centro de masa de sistemas bidimensionales y tridimensionales de n masas discretas o puntuales.

■ **Sistemas unidimensionales** Si x denota la distancia dirigida del origen O a una masa m , se dice que el producto mx es el **momento de masa** respecto al origen. En la tabla siguiente se resumen algunas unidades.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Masa	slug	kilogramo (kg)	gramo (g)
Momento de masa	slug-pie	kilogramo-metro	gramo-centímetro

Luego, para n masas puntuales $m_1, m_2, \dots, m_n$ a distancias dirigidas $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, a partir de O , como en la FIGURA 6.10.1, decimos que

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$$

es la **masa total del sistema**, y que

$$M_O = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = \sum_{k=1}^n m_kx_k$$

es el **momento del sistema respecto al origen**. Si $\sum_{k=1}^n m_kx_k = 0$, se dice que el sistema está en **equilibrio**. Vea la FIGURA 6.10.2. Si el sistema de masas de la figura 6.10.1 no está en equilibrio, hay un punto P con coordenada $\bar{x}$ tal que

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - \bar{x}) = 0 \quad \text{o bien,} \quad \sum_{k=1}^n m_kx_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n m_k = 0.$$

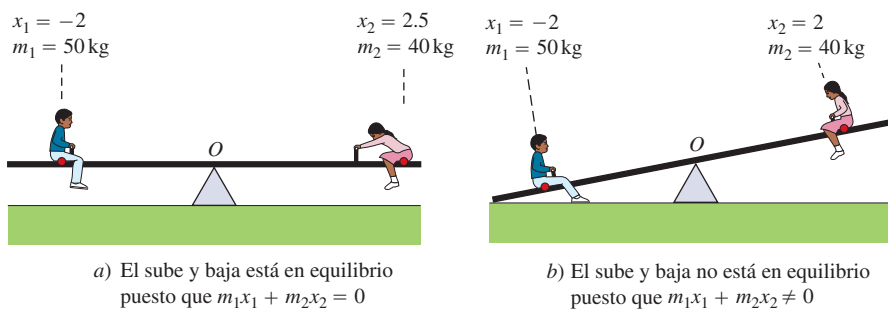


FIGURA 6.10.2 a) Sube y baja en equilibrio; b) no está en equilibrio

Al despejar $\bar{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_kx_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (1)$$

El punto con coordenada $\bar{x}$ se llama **centro de masa** o **centro de gravedad** del sistema.

Puesto que (1) implica $\bar{x}(\sum_{k=1}^n m_k) = \sum_{k=1}^n m_kx_k$, se concluye que $\bar{x}$ es la distancia dirigida desde el origen hasta un punto en que puede considerarse que está concentrada la masa total del sistema.

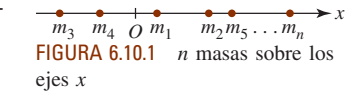


FIGURA 6.10.1 n masas sobre los ejes x

◀ En un sistema en que la aceleración de la gravedad varía de una masa a otra, el centro de gravedad no es el mismo que el centro de masa.

EJEMPLO 1 Centro de masa de tres objetos

Tres cuerpos de masas 4, 6 y 10 kilogramos se colocan en $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 9$, respectivamente. Las distancias se miden en metros. Encuentre el centro de masa.

Solución Por (1),

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 9}{4 + 6 + 10} = \frac{106}{20} = 5.3.$$

La FIGURA 6.10.3 muestra que el centro de masa $\bar{x}$ está 5.3 m a la derecha del origen. ■

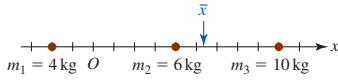


FIGURA 6.10.3 Centro de masa de tres masas puntuales

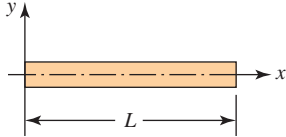


FIGURA 6.10.4 Barra de longitud L que coincide con el eje x

■ **Construcción de una integral** Ahora se considerará el problema de encontrar el centro de masa de una barra de longitud L que tiene una **densidad lineal variable** ρ (la masa/longitud unitaria se mide en slugs/pie, kg/m o g/cm). Se supone que la barra coincide con el eje x sobre el intervalo $[0, L]$, como se muestra en la FIGURA 6.10.4, y la densidad es una función continua $\rho(x)$. Después de formar una partición P del intervalo, se escoge un punto x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$. El número

$$m_k = \rho(x_k^*) \Delta x_k$$

es una aproximación a la masa de esa porción de la barra sobre el subintervalo. También, el momento de este elemento de masa respecto al origen es aproximado por

$$(M_O)_k = x_k^* \rho(x_k^*) \Delta x_k.$$

Así, se concluye que

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k^*) \Delta x_k = \int_0^L \rho(x) dx$$

y

$$M_O = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x_k^* \rho(x_k^*) \Delta x_k = \int_0^L x \rho(x) dx$$

son la **masa de la barra** y su **momento respecto al origen**, respectivamente. Luego, por $\bar{x} = M_O/m$ se concluye que el centro de masa de la barra está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}. \quad (2)$$

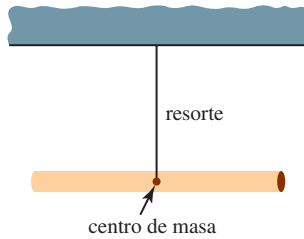


FIGURA 6.10.5 Barra suspendida en equilibrio

Como se muestra en la FIGURA 6.10.5, una barra suspendida por un resorte sujeta a su centro de masa podría colgar en perfecto equilibrio.

EJEMPLO 2 Centro de masa de una barra

Una barra de 16 cm de largo tiene densidad lineal, medida en g/cm, dada por $\rho(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 16$. Encuentre su centro de masa.

Solución En gramos, la masa de la barra es

$$m = \int_0^{16} x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^{16} = \frac{128}{3}.$$

El momento respecto al origen (en g-cm) es

$$M_O = \int_0^{16} x \cdot x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^{16} = \frac{2048}{5}.$$

Por (2) encontramos

$$\bar{x} = \frac{2048/5}{128/3} = 9.6.$$

Es decir, el centro de masa $\bar{x}$ de la barra está a 9.6 cm del extremo izquierdo de la barra que coincide con el origen. ■

■ **Sistemas bidimensionales** Para n masas puntuales situadas en el plano xy , como se indica en la FIGURA 6.10.6, el **centro de masa del sistema** se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa total}},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa total}}.$$

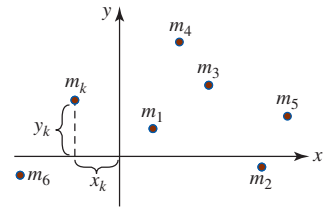


FIGURA 6.10.6 n masas en el plano xy

■ **Lámina** Ahora se analizará el problema de encontrar el centro de masa, o punto de equilibrio, de un frotis de materia, o **lámina** delgada bidimensional, que tiene densidad constante ρ (masa por unidad de área). Vea la FIGURA 6.10.7. Cuando ρ es constante, se dice que la lámina es **homogénea**.

■ **Construcción de una integral** Como se muestra en la FIGURA 6.10.8a), suponga que la lámina coincide con una región R en el plano xy acotada por la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces la masa del elemento rectangular que se muestra en la figura 6.8.10b) es

$$m_k = \rho \Delta A_k = \rho f(x_k^*) \Delta x_k,$$

donde, en este caso, tomamos x_k^* como el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y ρ es la densidad constante. El momento de este elemento con respecto al eje y es

$$(M_y)_k = x_k^* \Delta m_k = x_k^* (\rho \Delta A_k) = \rho x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k.$$

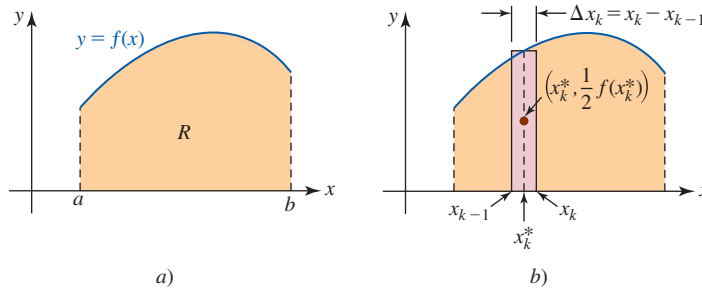


FIGURA 6.10.8 Encontrar el centro de masa de la región R

Puesto que la densidad es constante, el centro de masa del elemento necesariamente está en su centro geométrico $(x_k^*, \frac{1}{2}f(x_k^*))$. Por tanto, el momento del elemento respecto al eje x es

$$(M_x)_k = \frac{1}{2} f(x_k^*) (\rho \Delta A_k) = \frac{1}{2} \rho [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k.$$

Concluimos que

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x) dx,$$

$$M_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b \rho x f(x) dx,$$

y

$$M_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \rho [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k = \frac{1}{2} \int_a^b \rho [f(x)]^2 dx.$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa de la lámina se definen como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho x f(x) dx}{\int_a^b \rho f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \rho [f(x)]^2 dx}{\int_a^b \rho f(x) dx}. \quad (3)$$

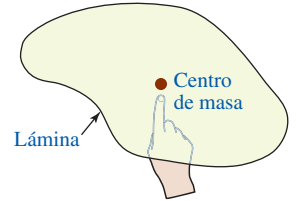


FIGURA 6.10.7 Centro de masa de una lámina

Centroide Observamos que la densidad constante ρ se cancela en las ecuaciones (3) para $\bar{x}$ y $\bar{y}$, y que el denominador de $\int_a^b f(x) dx$ es el área A de la región R . En otras palabras, el centro de masa sólo depende de la forma de R :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (4)$$

Para recalcar la diferencia, aunque menor, entre el objeto físico, que es la lámina homogénea, y el objeto geométrico, que es la región plana R , se dice que las ecuaciones en (4) definen las coordenadas del **centroide** de la región.

Nota: Es importante que comprenda el resultado en (4), pero no intente memorizar las integrales porque para abreviar el análisis se ha supuesto que R está acotada por la gráfica de una función f y el eje x . R también podría ser la región acotada entre las gráficas de dos funciones f y g . Vea el ejemplo 5.

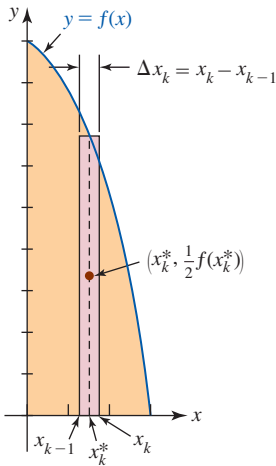


FIGURA 6.10.9 Región en el ejemplo 3

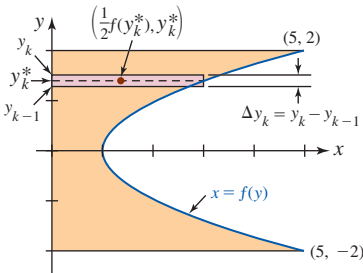


FIGURA 6.10.10 Región en el ejemplo 4

EJEMPLO 3 Centroide de una región

Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = 9 - x^2$, el eje x y el eje y .

Solución La región se muestra en la FIGURA 6.10.9. Luego, si $f(x) = 9 - x^2$, entonces

$$A_k = f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$(M_y)_k = x f(x_k^*) \Delta x_k$$

y

$$(M_x)_k = \frac{1}{2} f(x_k^*) (f(x_k^*) \Delta x_k) = \frac{1}{2} [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k.$$

Por tanto,

$$A = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 = 18$$

$$M_y = \int_0^3 x(9 - x^2) dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^3 (9 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(81x - 6x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^3 = \frac{324}{5}. \end{aligned}$$

Por (4) se concluye que las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{81/4}{18} = \frac{9}{8}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{324/5}{18} = \frac{54}{15}.$$

EJEMPLO 4 Integración con respecto a y

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = -2$.

Solución La región se muestra en la FIGURA 6.10.10. El análisis de la figura sugiere el uso de elementos rectangulares horizontales. Si $f(y) = y^2 + 1$, entonces

$$A_k = f(y_k^*) \Delta y_k$$

$$(M_x)_k = y_k^* f(y_k^*) \Delta y_k$$

$$(M_y)_k = \frac{1}{2} f(y_k^*) (f(y_k^*) \Delta y_k) = -\frac{1}{2} [f(y_k^*)]^2 \Delta y_k$$

y así

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 (y^2 + 1) dy = \left(\frac{1}{3}y^3 + y \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{28}{3}, \\
 M_x &= \int_{-2}^2 y(y^2 + 1) dy = \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{-2}^2 = 0, \\
 M_y &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (y^2 + 1)^2 dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (y^4 + 2y^2 + 1) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{206}{15}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{206/15}{28/3} = \frac{103}{70}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{0}{28/3} = 0.$$

Como es de esperar, puesto que la lámina es simétrica respecto al eje x , el centroide está en el eje de simetría. También se observa que el centroide está fuera de la región. ■

EJEMPLO 5 Región entre dos gráficas

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = -x^2 + 3$ y $y = x^2 - 2x - 1$.

Solución En la FIGURA 6.10.11 se muestra la región en cuestión. Se observa que los puntos de intersección de las gráficas son $(-1, 2)$ y $(2, -1)$. Luego, si $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x - 1$, entonces el área de la región es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\
 &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = 9.
 \end{aligned}$$

Puesto que las coordenadas del punto medio del elemento indicado son $(x_k^*, \frac{1}{2}[f(x_k^*) + g(x_k^*)])$, se concluye que

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_{-1}^2 x[f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-2x^3 + 2x^2 + 4x) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (4x^3 - 8x^2 - 4x + 8) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}.$$

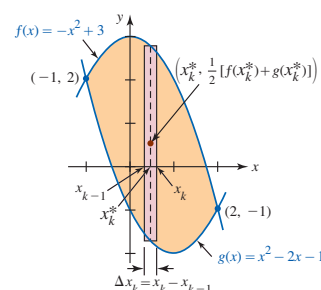


FIGURA 6.10.11 Región en el ejemplo 5

Ejercicios 6.10 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21**Fundamentos**

En los problemas 1-4, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está situada sobre el eje x en un punto cuya distancia dirigida desde el origen es x_k . Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

- $m_1 = 2, m_2 = 5; x_1 = 4, x_2 = -2$
- $m_1 = 6, m_2 = 1, m_3 = 3; x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -3, x_3 = 8$
- $m_1 = 10, m_2 = 5, m_3 = 8, m_4 = 7; x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = -3$
- $m_1 = 2, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = \frac{7}{2}, m_4 = \frac{1}{2}; x_1 = 9, x_2 = -4, x_3 = -6, x_4 = -10$
- Dos masas están colocadas en los extremos de una tabla uniforme de masa despreciable, como se muestra en la FIGURA 6.10.12. ¿Dónde debe colocarse el fulcro de modo que el sistema esté en equilibrio? [Sugerencia: Aunque el origen puede situarse en cualquier parte, se supondrá que se establece en el punto medio entre las masas.]

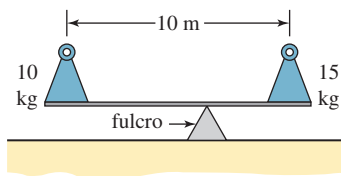


FIGURA 6.10.12 Masas en el problema 5

- Encuentre el centro de masa de las tres masas m_1, m_2 y m_3 que están en los vértices del triángulo equilátero mostrado en la FIGURA 6.10.13. [Sugerencia: Primero encuentre el centro de masa de m_1 y m_2 .]

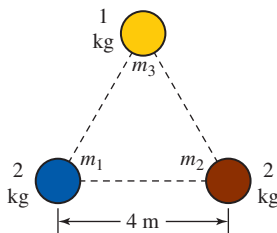


FIGURA 6.10.13 Masas en el problema 6

En los problemas 7-14, una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo indicado. Encuentre su centro de masa.

- $\rho(x) = 2x + 1; [0, 5]$
- $\rho(x) = -x^2 + 2x; [0, 2]$
- $\rho(x) = x^{1/3}; [0, 1]$
- $\rho(x) = -x^2 + 1; [0, 1]$
- $\rho(x) = |x - 3|; [0, 4]$
- $\rho(x) = 1 + |x - 1|; [0, 3]$

$$13. \rho(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}; [0, 2]$$

$$14. \rho(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}; [0, 3]$$

- La densidad de una barra de 10 pies varía con el cuadrado de la distancia al extremo izquierdo. Encuentre su centro de masa si la densidad en su centro es 12.5 slug/pie.
- La densidad lineal de una barra de 3 m varía con la distancia al extremo derecho. Encuentre la densidad lineal en el centro de la barra si su masa total es de 6 kg.

En los problemas 17-20, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está en el punto P_k . Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

- $m_1 = 3, m_2 = 4; P_1 = (-2, 3), P_2 = (1, 2)$
- $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2; P_1 = (-4, 1), P_2 = (2, 2), P_3 = (5, -2)$
- $m_1 = 4, m_2 = 8, m_3 = 10; P_1 = (1, 1), P_2 = (-5, 2), P_3 = (7, -6)$
- $m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = 4, m_4 = \frac{5}{2}; P_1 = (9, 3), P_2 = (-4, -6), P_3 = (\frac{3}{2}, -1), P_4 = (-2, 10)$

En los problemas 21-38, encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

- $y = 2x + 4, y = 0, x = 0, x = 2$
- $y = x + 1, y = 0, x = 3$
- $y = x^2, y = 0, x = 1$
- $y = x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 2$
- $y = x^3, y = 0, x = 3$
- $y = x^3, y = 8, x = 0$
- $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$
- $x = y^2, x = 1$
- $y = x^2, y - x = 2$
- $y = x^2, y = \sqrt{x}$
- $y = x^3, y = x^{1/3}$, primer cuadrante
- $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$, segundo cuadrante
- $y = 1/x^3, y = 0, x = 1, x = 3$
- $y = x^2 - 2x + 1, y = -4x + 9$
- $x = y^2 - 1, y = -1, y = 2, x = -2$
- $y = x^2 - 4x + 6, y = 0, x = 0, x = 4$
- $y = 4 - 4x^2, y = 1 - x^2$
- $y^2 + x = 1, y + x = -1$

En los problemas 39 y 40, use simetría para localizar $\bar{x}$ e integración para encontrar $\bar{y}$ de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas.

39. $y = 1 + \cos x$, $y = 1$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

40. $y = 4 \sin x$, $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

≡ Piense en ello

41. Un teorema atribuido a **Pappus de Alejandría** (c. 350 d.C.) afirma lo siguiente:

Sean L un eje en un plano y R una región en el mismo plano que no corta a L . Cuando R gira alrededor de L , el volumen V del sólido de revolución resultante es igual al área A de R multiplicada por la longitud de la ruta recorrida por el centroide de R .

- a) Como se muestra en la FIGURA 6.10.14, sea R la región acotada por las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Muestre que si R gira alrededor del eje x , entonces $V = (2\pi\bar{y})A$, donde A es el área de la región.
- b) ¿Qué considera que proporciona V cuando la región R gira alrededor del eje y ?

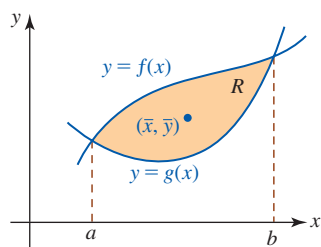


FIGURA 6.10.14 Región en el problema 41

42. Compruebe el teorema de Pappus en el problema 41 cuando la región acotada por $y = x^2 + 1$, $y = 1$, $x = 2$ gira alrededor del eje x .

43. Use el teorema de Pappus en el problema 41 para encontrar el volumen del toroide que se muestra en la FIGURA 6.10.15.

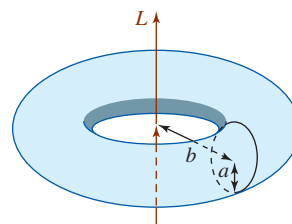


FIGURA 6.10.15 Toroide en el problema 43

44. Una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x sobre el intervalo $[0, 6]$. Si $\rho(x) = x(6 - x) + 1$, ¿dónde se espera de manera intuitiva que esté el centro de masa? Demuestre su respuesta.
45. Considere la región triangular R en la FIGURA 6.10.16. ¿Dónde cree que está el centroide del triángulo? Piense geoméricamente.

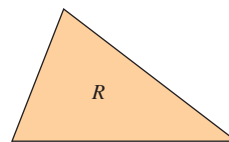


FIGURA 6.10.16 Región triangular en el problema 45

46. Sin integración, determine el centroide de la región R mostrada en la FIGURA 6.10.17.

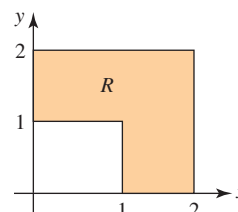


FIGURA 6.10.17 Región en el problema 46

Revisión del capítulo 6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-12, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Cuando $\int_a^b f(x) dx > 0$, la integral proporciona el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. _____
2. $\int_0^3 (x - 1) dx$ es el área bajo la gráfica $y = x - 1$ sobre $[0, 3]$. _____
3. La integral $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ proporciona el área entre las gráficas de las funciones continuas f y g siempre que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. _____
4. Los métodos del disco y la arandela para encontrar volúmenes de sólidos de revolución son casos especiales del método de rebanar. _____
5. El valor promedio f_{pro} de una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ necesariamente es un número que satisface $m \leq f_{\text{pro}} \leq M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo de f sobre el intervalo, respectivamente. _____
6. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces el valor medio de $f + g$ es $(f + g)_{\text{pro}} = f_{\text{pro}} + g_{\text{pro}}$. _____

7. El centro de masa de un lápiz con densidad lineal constante ρ está en su centro geométrico. _____
8. El centro de masa de una lámina que coincide con una región plana R es un punto en R donde la lámina colgaría en equilibrio. _____
9. La presión sobre el fondo plano de una piscina es la misma que la presión horizontal sobre la pared vertical a la misma profundidad. _____
10. Considere una delgada lata de aluminio con radio de 6 pulg y un depósito circular con radio de 50 pies. Si cada uno tiene fondo plano y contiene agua hasta una profundidad de 1 pie, entonces la presión del líquido sobre el fondo del depósito es mayor que la presión sobre el fondo de la lata de aluminio. _____
11. Si $s(t)$ es la función de posición de un cuerpo que se mueve en línea recta, entonces $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ es la distancia que el cuerpo se mueve en el intervalo $[t_1, t_2]$. _____
12. Cuando no hay resistencia del aire y desde la misma altura se sueltan al mismo tiempo una bala de cañón y un dulce, la bala de cañón llega primero al suelo. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-8, llene los espacios en blanco.

1. La unidad de trabajo en el sistema SI es _____.
2. Para calentarse, un corredor de 200 lb empuja contra un árbol durante 5 minutos con fuerza constante de 60 lb y luego corre 2 mi en 10 minutos. El trabajo total realizado es _____.
3. El trabajo realizado por una fuerza constante de 100 lb aplicada a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal durante una distancia de 50 pies es _____.
4. A un resorte que mide inicialmente 1 m de longitud se le aplica una fuerza de 80 N, y se logra una longitud de 1.5 m. El resorte medirá _____ m de longitud cuando se aplique una fuerza de 100 N.
5. Las coordenadas del centroide de una región R son $(2, 5)$ y el momento de la región con respecto al eje x es 30. Por tanto, el área de R es _____ unidades cuadradas.
6. El peso específico del agua es _____ lb/pie³.
7. Se dice que la gráfica de una función con primera derivada continua es _____.
8. Una pelota soltada desde una gran altura choca contra el suelo en T segundos con una velocidad v_{impacto} . Si la función velocidad es $v(t) = -gt$, entonces la velocidad media v_{pro} de la pelota para $0 \leq t \leq T$ en términos de v_{impacto} es _____.

C. Ejercicios _____

En los problemas 1-8, establezca la(s) integral(es) definida(s) para encontrar el área de la región sombreada en cada figura.

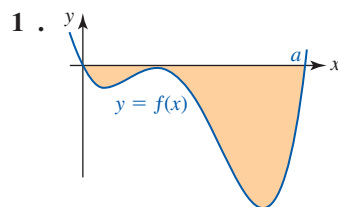


FIGURA 6.R.1 Gráfica para el problema 1

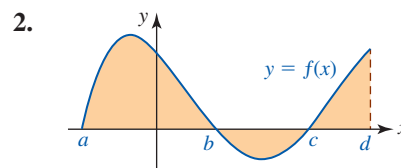


FIGURA 6.R.2 Gráfica para el problema 2

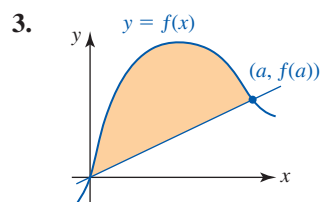


FIGURA 6.R.3 Gráfica para el problema 3

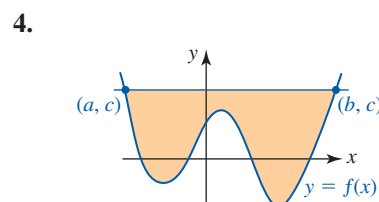


FIGURA 6.R.4 Gráfica para el problema 4

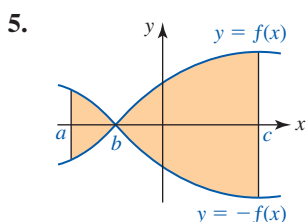


FIGURA 6.R.5 Gráfica para el problema 5

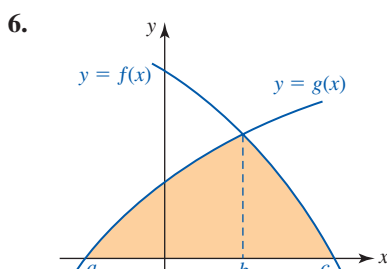


FIGURA 6.R.6 Gráfica para el problema 6

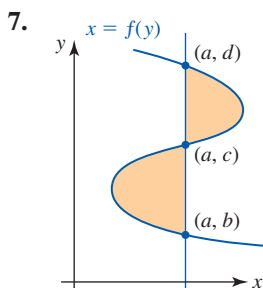


FIGURA 6.R.7 Gráfica para el problema 7

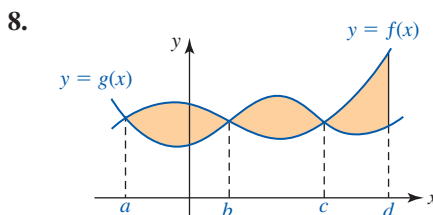


FIGURA 6.R.8 Gráfica para el problema 8

En los problemas 9 y 10, use la integral definida para encontrar el área de la región sombreada en términos de a y b .

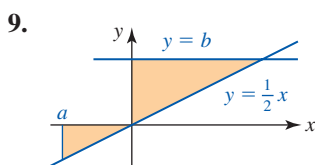


FIGURA 6.R.9 Gráfica para el problema 9

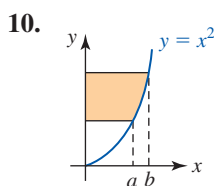


FIGURA 6.R.10 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11-16, considere la región R en la FIGURA 6.R.11. Establezca la(s) integral(es) definida(s) para la cantidad indicada.

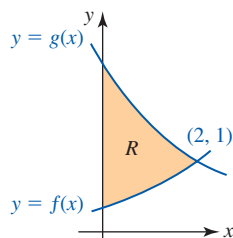


FIGURA 6.R.11 Región para los problemas 11-16

11. El centroide de la región
12. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x
13. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y
14. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $y = -1$
15. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $x = 2$
16. El volumen del sólido con R como su base de modo que las secciones transversales del sólido paralelas al eje y son cuadradas
17. Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sin x$ y $y = \sin 2x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$.
18. Considere la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = \ln 2$.
 - a) Encuentre el área de la región.
 - b) Encuentre el volumen del sólido de revolución si la región gira alrededor del eje x .

19. Considere la región R acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = \sqrt{2}$. Use el método de rebanadas para encontrar el volumen del sólido si la región R es su base y
 - a) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son cuadrados,
 - b) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son círculos.
20. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región R acotada por las gráficas de $x = 2y - y^2$ y $x = 0$ gira alrededor de la recta $y = 3$.
21. La nariz de un cohete espacial es un cono circular recto de 8 pies de altura y 10 pies de radio. La superficie lateral debe cubrirse con tela excepto por una sección de 1 pie de altura en el ápice del cono de la nariz. Encuentre el área de la tela necesaria.
22. El área bajo la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[-3, 4]$ es 21 unidades cuadradas. ¿Cuál es el valor medio de la función sobre el intervalo?
23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$ sobre $[1, 4]$.
24. Encuentre un valor x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponda al valor promedio de la función $f(x) = 2x - 1$.
25. Un resorte de longitud de $\frac{1}{2}$ m sin estirar se alarga hasta una longitud de 1 m por medio de una fuerza de 50 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.5 m.
26. El trabajo realizado para estirar un resorte 6 pulg más allá de su longitud natural es 10 pies-lb. Encuentre la constante del resorte.
27. Un tanque de agua, en forma de cubo de 10 pies de lado, se llena con agua. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.
28. Un cubo que pesa 2 lb contiene 30 lb de líquido. A medida que el cubo se levanta verticalmente a razón de 1 pie/s, el líquido se fuga a razón de $\frac{1}{4}$ lb/s. Encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo una distancia de 5 pies.
29. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo hasta un punto en que esté vacío.
30. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo con fuga hasta una distancia de 5 pies si la cuerda que sujeta al cubo pesa $\frac{1}{8}$ lb/pie.
31. Un tanque en la parte superior de una torre de 15 pies de altura consta de un tronco de un cono sobrepuesto por un cilindro circular recto. Las dimensiones (en pies) se muestran en la FIGURA 6.R.12. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque con agua desde el nivel del suelo.

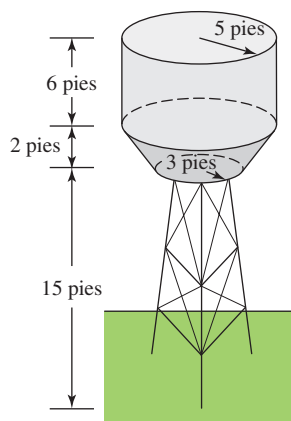


FIGURA 6.R.12 Tanque en el problema 31

32. Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna con una velocidad inicial de 44 pies/s.
 - a) Si la aceleración de la gravedad en la Luna es 5.5 pies/s^2 , encuentre la altura máxima que se alcanza. Compare con la Tierra.
 - b) En su descenso, la roca choca contra la cabeza de un astronauta de 6 pies de estatura. ¿Cuál es la velocidad de impacto de la roca?
33. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = (x - 1)^{3/2}$ desde $(1, 0)$ hasta $(5, 8)$.

34. La densidad lineal de una barra de 6 m de longitud es una función lineal de la distancia a su extremo izquierdo. La densidad en la parte media de la barra es 11 kg/m y en el extremo derecho es 17 kg/m. Encuentre el centro de masa de la barra.
35. Una placa plana, en forma de cuarto de círculo, se sumerge verticalmente en aceite como se muestra en la FIGURA 6.R.13. Si el peso específico del aceite es 800 kg/m^3 , encuentre la fuerza que ejerce el aceite sobre un lado de la placa.

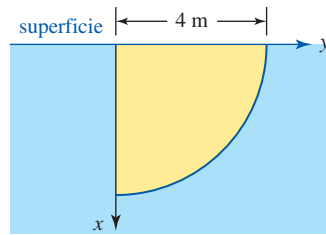


FIGURA 6.R.13 Placa vertical sumergida en el problema 35

36. Una barra metálica uniforme de masa 4 kg y longitud 2 m soporta dos masas, como se muestra en la FIGURA 6.R.14. ¿Dónde debe atarse el cable a la barra de modo que el sistema cuelgue en equilibrio?

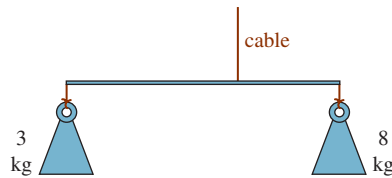


FIGURA 6.R.14 Masas en el problema 36

37. Tres masas están suspendidas de barras uniformes de masa despreciable como se muestra en la FIGURA 6.R.15. Determine dónde deben colocarse los cables indicados de modo que todo el sistema cuelgue en equilibrio.

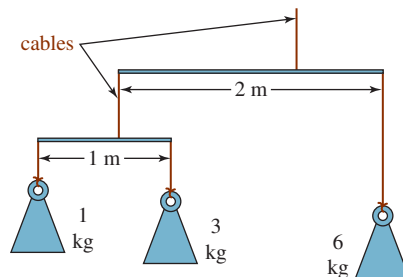
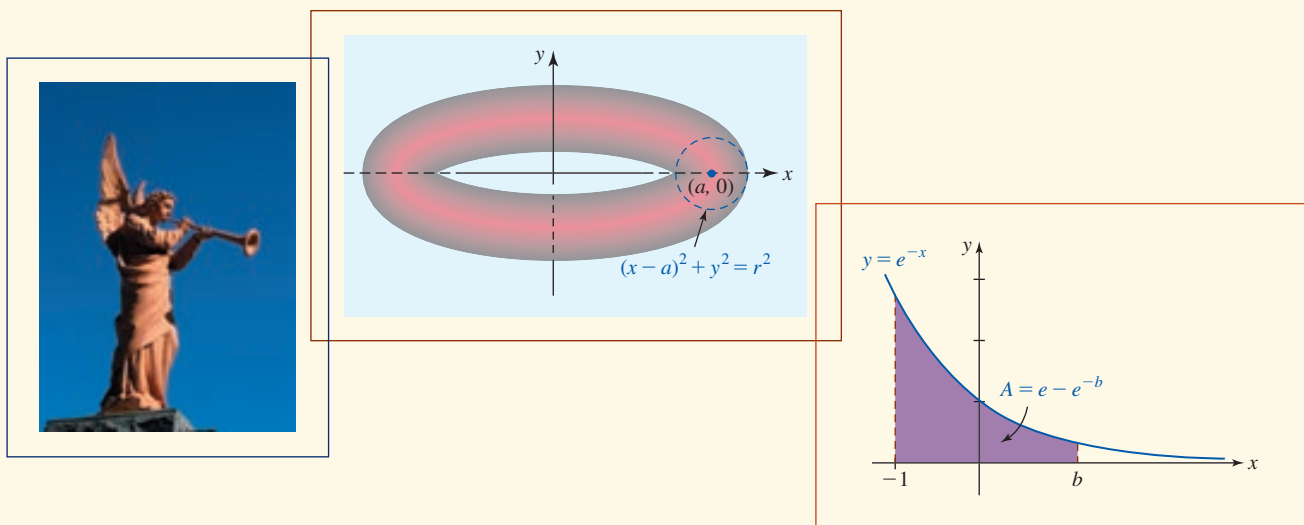


FIGURA 6.R.15 Masas en el problema 37

Técnicas de integración



En este capítulo A menudo uno se encuentra una integral que no puede clasificarse en una forma conocida como $\int u^n du$ o $\int e^u du$. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$ mediante la aplicación inmediata de cualquiera de las fórmulas enumeradas en las páginas 380-381. No obstante, al aplicar una **técnica de integración** algunas veces es posible reducir una integral como ésta a una o más de estas formas conocidas.

- 7.1 Integración: tres recursos
- 7.2 Integración por sustitución
- 7.3 Integración por partes
- 7.4 Potencias de funciones trigonométricas
- 7.5 Sustituciones trigonométricas
- 7.6 Fracciones parciales
- 7.7 Integrales impropias
- 7.8 Integración aproximada
- Revisión del capítulo 7

7.1 Integración: tres recursos

■ **Introducción** En este capítulo vamos a resumir el estudio de antiderivadas que empezó en el capítulo 5, en el que mostramos superficialmente cómo obtener antiderivadas de una función f . Recuerde que una integral definida

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

es una familia $F(x) + C$ de antiderivadas de la función f ; es decir, F está relacionada con f por el hecho de que $F'(x) = f(x)$. De esta manera, a la derivada de una función específica (sen x , cos x , e^x , ln x , etc.) corresponde una integral indefinida análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{implica} \quad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C.$$

■ **Tablas** La TABLA 7.1.1 que se muestra a continuación es una versión ampliada de la tabla 5.2.1. Puesto que resume en notación integral indefinida todas las derivadas de la regla de la cadena de las funciones analizadas en los capítulos 1 y 3, referiremos las entradas de la tabla 7.1.1 a formas *familiares* o *básicas*. El objetivo de este capítulo consiste en evaluar integrales que, en su mayor parte, no caen en ninguna de las formas proporcionadas en la tabla.

La tabla 7.1.1 es sólo la punta de un *iceberg* más bien enorme; los manuales de referencia solían incluir cientos de fórmulas de integración. Aunque aquí no somos tan ambiciosos, en la sección *Fórmulas matemáticas* al final de este texto proporcionamos una tabla más amplia de fórmulas de integración. Como de costumbre, en ambas se usa notación diferencial. Si $u = g(x)$ denota una función diferenciable, entonces la diferencial de u es el producto $du = g'(x) dx$.

TABLA 7.1.1

Fórmulas de integración

Integrandos constantes

$$1. \int du = u + C$$

$$2. \int k du = ku + C$$

Integrandos que son potencias

$$3. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$4. \int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

Integrandos exponenciales

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

$$6. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

Integrandos trigonométricos

$$7. \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$8. \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$9. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$10. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$11. \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$12. \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$13. \int \tan u du = -\ln |\cos u| + C$$

$$14. \int \cot u du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$15. \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$16. \int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$$

(continúa)

Integrandos hiperbólicos

17. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$

18. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$

19. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$

20. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$

21. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

22. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrandos algebraicos

23. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$

24. $\int \frac{1}{a^2 + u^2} \, du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

25. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$

28. $\int \frac{1}{a^2 - u^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$

29. $\int \frac{1}{u^2 - a^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$

30. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$

31. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}} \, du = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$

Aunque estas fórmulas de integración se han designado como *familiares* o *básicas*, tal vez usted observe que puede no estar *familiarizado* con algunas de ellas, especialmente las fórmulas 17-22 y 26-31. Debido a que los profesores a veces prestan poca atención a las funciones hiperbólicas, se le solicita revisar (o, en caso de ser necesario, estudiar por primera vez) la sección 3.10. Las fórmulas 26-31, que semejan a las fórmulas 23-25, son las formas de integral indefinida de las fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas combinadas con el hecho de que toda función hiperbólica inversa es un logaritmo natural. Vea la página 183.

■ **Técnicas de integración** En las siguientes secciones, las integrales que analizaremos no pueden clasificarse como una simple forma familiar como $\int u^n \, du$, $\int e^u \, du$ o $\int \sin u \, du$. A pesar de ello, la tabla 7.1.1 es importante; a medida que avance en este capítulo, necesariamente se le hará referencia a esa tabla. Una gran cantidad de integrales puede evaluarse al ejecutar operaciones específicas sobre el integrando —denominada **técnica de integración**— y reducir una integral dada a una o más de las formas familiares en la tabla. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int \ln x \, dx$ al identificarla con cualquiera de las fórmulas de integración en la tabla 7.1.1. No obstante, en la sección 7.3 veremos que al aplicar una técnica de integración, $\int \ln x \, dx$ puede evaluarse en pocos segundos al usar la derivada de $\ln x$ junto con la fórmula 1 en la tabla.

Para efecto de repaso, se solicita al lector que trabaje los problemas en los ejercicios 7.1. Por medio de una sustitución u idónea, cada problema puede hacerse corresponder con una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

Pero ni una tabla, sin importar cuán grande sea, ni las técnicas de integración, sin importar lo poderosas que sean, constituye un remedio para todos los problemas de integración. Mientras algunas integrales, como $\int e^{x^2} \, dx$, desafían por completo a las tablas y técnicas de integración, otras sólo *parecen* desafiar tales recursos. Por ejemplo, la integral $\int e^{\sin x} \sin 2x \, dx$ no aparece en ninguna tabla pero *es posible* evaluarla por medio de una técnica de integración. El problema aquí es que no resulta evidente de forma inmediata *cuál* técnica puede aplicarse. Algunas veces se espera que el lector proporcione algunas ideas para replantear un integrando en una forma más receptiva para una técnica de integración.

◀ En la sección 5.5 se indicó (vea las páginas 312-313) que una función continua f puede no tener una antiderivada que sea una función elemental.

■ **Tecnología** Unas palabras sobre tecnología: si usted no ha trabajado con un sistema algebraico computarizado (SAC) como *Mathematica*, *Maple*, *Derive* o *Axiom*, debe corregir esta deficiencia lo más pronto posible. Un sistema algebraico computarizado es un programa extremada-

mente sofisticado diseñado para realizar una amplia gama de operaciones matemáticas simbólicas como álgebra normal, álgebra matricial, aritmética con números complejos, resolver ecuaciones polinomiales, aproximar raíces de ecuaciones, diferenciación, integración, graficado de ecuaciones en dos o tres dimensiones, resolver ecuaciones diferenciales, manipular funciones especiales ya contempladas en el SAC, etcétera. Si usted piensa convertirse en un estudiante serio de matemáticas, ciencias o ingeniería, entonces una ayuda ideal para sus clases teóricas y prácticas (así como para su carrera futura) sería contar con una computadora portátil equipada con un programa como *Mathematica*, *Maple* o *MATLAB*. También verifique en los laboratorios de matemáticas de su departamento de matemáticas o física; las computadoras que ahí encuentre indudablemente cuentan con uno o más de estos programas.

A medida que conozca y se sienta cómodo al usar un SAC, tal vez se interese en investigar sitios en la web como:

<http://scienceworld.wolfram.com>

<http://mathworld.wolfram.com>

Wolfram Research es el desarrollador del sistema computacional de álgebra *Mathematica*.

Ejercicios 7.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

En los problemas 1-32, use una sustitución u y la tabla 7.1.1 para evaluar la integral dada.

1. $\int 5^{-5x} dx$	2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} dx$	15. $\int \frac{6}{(3-5t)^{2.2}} dx$	16. $\int x^2 \sqrt{(1-x^3)^5} dx$
3. $\int \frac{\sin \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx$	4. $\int \frac{\cos e^{-x}}{e^x} dx$	17. $\int \sec 3x dx$	18. $\int 2 \csc 2x dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}} dx$	6. $\int \frac{1}{\sqrt{25-4x^2}} dx$	19. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	20. $\int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x} dx$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-25}} dx$	8. $\int \frac{1}{\sqrt{25+4x^2}} dx$	21. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$	22. $\int \frac{\cos(\ln 9x)}{x} dx$
9. $\int \frac{1}{25+4x^2} dx$	10. $\int \frac{x}{25+4x^2} dx$	23. $\int \frac{x^3}{\cosh^2 x^4} dx$	24. $\int \tanh x dx$
11. $\int \frac{1}{4x^2-25} dx$	12. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+25}} dx$	25. $\int \tan 2x \sec 2x dx$	25. $\int \sin x \sin(\cos x) dx$
13. $\int \cot 10x dx$	14. $\int x \csc^2 x^2 dx$	27. $\int \sin x \csc(\cos x) \cot(\cos x) dx$	28. $\int \cos x \csc^2(\sin x) dx$
		29. $\int (1+\tan x)^2 \sec^2 x dx$	30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
		31. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$	32. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

7.2 Integración por sustitución

■ Introducción En esta sección se ampliará la idea de **sustitución u** presentada en la sección 5.2, donde esta sustitución se usó básicamente como ayuda para identificar que una integral era una de las fórmulas de integración familiares como $\int u^n du$, $\int du/u$, $\int e^u du$, etcétera. Por ejemplo, con la sustitución $u = \ln x$ y $du = (1/x) dx$ reconocemos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad \text{es lo mismo que} \quad \int u^2 du.$$

Usted debe comprobar que $\int x^2 \sqrt{2x+1} dx$ no se ajusta a *ninguna* de las 31 fórmulas de integración de la tabla 7.1.1. No obstante, con ayuda de una sustitución es posible reducir la integral a *varios* casos de una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

El primer ejemplo ilustra la idea general.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx$.

Solución Si se hace $u = 2x + 1$, entonces la integral dada puede replantearse en términos de la variable u . Para ello, observe que

$$x = \frac{1}{2}(u - 1), \quad dx = \frac{1}{2} du,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u - 1)^2 = \frac{1}{4}(u^2 - 2u + 1) \text{ y } \sqrt{2x+1} = u^{1/2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la integral dada se obtiene:

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \int \frac{1}{4}(u^2 - 2u + 1) u^{1/2} \frac{1}{2} du,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx &= \frac{1}{8} \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} \, du \\ &= \frac{1}{8} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) \, du &< \text{tres aplicaciones de la} \\ &&\text{fórmula 3 en la tabla 7.1.1} \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{2}{7} u^{7/2} - \frac{4}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C &< \text{ahora se vuelve a sustituir para } u \\ &= \frac{1}{28} (2x+1)^{7/2} - \frac{1}{10} (2x+1)^{5/2} + \frac{1}{12} (2x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la derivada de la última línea en realidad es $x^2 \sqrt{2x+1}$. ■

La elección de cuál sustitución usar, en caso de haber alguna, no siempre es evidente. En general, si el integrando contiene una potencia de una función, entonces una buena idea consiste en intentar que u sea esa función o potencia de la función en sí. En el ejemplo 1, la sustitución alterna $u = \sqrt{2x+1}$ o $u^2 = 2x+1$ lleva a la integral diferente $\frac{1}{4} \int (1-u^2)^2 u^2 \, du$. La última puede evaluarse al desarrollar el integrando e integrar cada término.

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$ de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u \, du$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx &= \int \frac{1}{1+u} 2u \, du \\ &= \int \frac{2u}{1+u} \, du &< \text{ahora se usa división larga} \\ &= \int \left(2 - \frac{2}{1+u} \right) du &< \text{fórmulas 2 y 4} \\ &&\text{en tabla 7.1.1} \\ &= 2u - 2 \ln|1+u| + C &< \text{se vuelve a sustituir para } u \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

■ **Integrandos que contienen una expresión cuadrática** Si un integrando contiene una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa. Por supuesto, también es posible que integrales más complicadas produzcan otras funciones.

EJEMPLO 3 Completar el cuadrado

Evalúe $\int \frac{x+4}{x^2+6x+18} dx$.

Solución Después de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18} dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9} dx.$$

Ahora, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+6x+18} dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9} du \quad \leftarrow \text{división término a término} \\ &= \int \frac{u}{u^2+9} du + \int \frac{1}{u^2+9} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+9} du + \int \frac{1}{u^2+9} du \quad \leftarrow \text{fórmulas 4 y 24 en la tabla 7.1.1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2+9) + \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{u}{3} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln[(x+3)^2+9] + \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x+3}{3} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x+3}{3} + C. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra una sustitución algebraica en una integral definida.

EJEMPLO 4 Una integral definida

Evalúe $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$.

Solución Si $u = 3x + 2$, entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(u-2), & dx &= \frac{1}{3} du, \\ 6x+1 &= 2(u-2)+1 = 2u-3 \text{ y } \sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}. \end{aligned}$$

Puesto que se cambiará la variable de integración, es necesario convertir los límites de integración x en límites de integración u . Observe que cuando $x = 0$, $u = 2$ y cuando $x = 2$, $u = 8$. En consecuencia, la integral original se vuelve

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}} \frac{1}{3} du \quad \leftarrow \text{de nuevo división término a término} \\ &= \int_2^8 \left(\frac{2}{3} u^{2/3} - u^{-1/3} \right) du \\ &= \left(\frac{2}{5} u^{5/3} - \frac{3}{2} u^{2/3} \right) \Big|_2^8 \\ &= \left(\frac{2}{5} \cdot 2^5 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{2}{5} \cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2} \cdot 2^{2/3} \right) \\ &= \frac{34}{5} - \frac{2}{5} \cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2} \cdot 2^{2/3} \approx 7.9112. \end{aligned}$$

Se pide que el lector vuelva a trabajar el ejemplo 4. La segunda vez use $u = \sqrt[3]{3x+2}$.

NOTAS DESDE EL AULA

- i) Cuando trabaje los ejercicios presentados en este capítulo, no se preocupe demasiado si no siempre obtiene la misma respuesta que se proporciona en el texto. Al aplicar técnicas diferentes al mismo problema es posible obtener respuestas que parecen diferentes. Recuerde que dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho por una constante. Intente conciliar los conflictos que se presenten.
- ii) También podría ser de utilidad en este punto recordar que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $p(x)/q(x)$, suele empezar con división larga si el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$. Vea el ejemplo 2.
- iii) Busque problemas que sea posible resolver con métodos previos.

Ejercicios 7.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-26, use una sustitución para evaluar la integral dada.

1. $\int x(x+1)^3 dx$
2. $\int \frac{x^2-3}{(x+1)^3} dx$
3. $\int (2x+1)\sqrt{x-5} dx$
4. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1} dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$
7. $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}} dx$
8. $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7} dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$
10. $\int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$
11. $\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t+1}} dt$
12. $\int \frac{\sqrt{r}+3}{r+3} dr$
13. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$
14. $\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}} dx$
15. $\int \frac{x^2}{(x-1)^4} dx$
16. $\int \frac{2x+1}{(x+7)^2} dx$
17. $\int \sqrt{e^x-1} dx$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$
19. $\int \sqrt{1-\sqrt{v}} dv$
20. $\int \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}} dw$
21. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$
22. $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}} dt$
23. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5} dx$
24. $\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10} dx$
25. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}} dx$
26. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}} dx$

En los problemas 27 y 28, use la sustitución $u = x^{1/6}$ para evaluar la integral.

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$
28. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

En los problemas 29-40, use una sustitución para evaluar la integral definida dada.

29. $\int_0^1 x\sqrt{5x+4} dx$
30. $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1} dx$
31. $\int_1^{16} \frac{1}{10+\sqrt{x}} dx$
32. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$
33. $\int_2^9 \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}} dx$
34. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$
35. $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{50} dx$
36. $\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} dx$
37. $\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}} dx$
38. $\int_1^{64} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2} dx$
39. $\int_0^1 x^2(1-x)^5 dx$
40. $\int_0^6 \frac{2x+5}{\sqrt{2x+4}} dx$

En los problemas 41 y 42, use una sustitución para establecer el resultado dado. Suponga $x > 0$.

41. $\int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \int_1^x \frac{1}{t} dt$
42. $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Repaso de aplicaciones

43. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{x^{1/3}+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.
44. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
45. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$ alrededor del eje y .
46. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje x la región en el problema 45.
47. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ en el intervalo $[0, 9]$.
48. La **ecuación diferencial de Bertalanffy** es un modelo matemático para el crecimiento de un organismo donde se supone que el metabolismo constructivo (anabolismo)

del organismo procede en razón proporcional al área superficial, mientras el metabolismo destructivo (catabolismo) procede en razón proporcional al volumen. Si también se supone que el área superficial es proporcional a la potencia dos tercios del volumen y que el peso w del organismo es proporcional al volumen, entonces es posible escribir la ecuación de Bertalanffy como

$$\frac{dw}{dt} = Aw^{2/3} - Bw,$$

donde A y B son parámetros positivos. A partir de esta ecuación puede concluirse que el tiempo necesario para que tal organismo aumente de peso desde w_1 hasta w_2 está dado por la integral definida

$$T = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{Aw^{2/3} - Bw} dw.$$

Evalúe esta integral. Encuentre un límite superior sobre cuánto puede crecer el organismo.

7.3 Integración por partes

■ **Introducción** En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial. Recuerde que si $v = g(x)$, entonces su diferencial es la función $dv = g'(x) dx$.

■ **Integración de productos** Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \quad (1)$$

A su vez, la integración de ambos miembros de (1),

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] dx = \int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx$$

$$\text{o} \quad f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx,$$

produce la fórmula

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (2)$$

La fórmula (2) suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x) dx$ y $dv = g'(x) dx$:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

El procedimiento definido por la fórmula (3) se denomina **integración por partes**. La idea esencial detrás de (3) es evaluar la integral $\int u dv$ mediante la evaluación de otra, que se espera sea más simple, integral $\int v du$.

Directrices para la integración por partes

- El **primer paso** en este proceso de integración por partes consta en la elección e integración de dv en la integral dada. Como cuestión práctica, la función dv *suele* ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse usando una de las fórmulas básicas en la tabla 7.1.1.
- El **segundo paso** es la diferenciación del factor restante u en la integral dada. Luego se forma

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

se diferencia
↓
↓
se integra
↑
↑

- El **tercer paso**, por supuesto, es la evaluación de $\int v du$.

Algunas veces los problemas de integración pueden efectuarse aplicando varios métodos. En el primer ejemplo, la integral puede evaluarse por medio de una sustitución algebraica (sección 7.2) así como por integración por partes.

EJEMPLO 1 Uso de (3)

Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Solución Primero, la integral se escribe como

$$\int x(x+1)^{-1/2} dx.$$

A partir de esta última forma vemos que para la función dv hay varias opciones. De las posibles opciones para dv ,

$$dv = (x+1)^{-1/2} dx, \quad dv = x dx \quad \text{o} \quad dv = dx,$$

escogemos

$$dv = (x+1)^{-1/2} dx \quad \text{y} \quad u = x.$$

Luego, por integración de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1 encontramos

$$v = \int (x+1)^{-1/2} dx = 2(x+1)^{1/2}.$$

Al sustituir $v = 2(x+1)^{1/2}$ y $du = dx$ en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \overbrace{\tilde{x}}^u \overbrace{(x+1)^{-1/2} dx}^{dv} &= \overbrace{\tilde{x}}^u \cdot \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^v - \int \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^v \overbrace{dx}^{du} \\ &= 2x(x+1)^{1/2} - 2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \quad \leftarrow \text{se usó la fórmula 3} \\ &= 2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C. \quad \text{en la tabla 7.1.1} \end{aligned}$$

◀ Cuando se integra dv no se requiere ninguna constante de integración.

Comprobación por diferenciación Para verificar el resultado precedente se usa la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C \right) &= 2x \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}(x+1)^{1/2} \\ &= x(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - 2(x+1)^{1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

La clave para que la integración por partes funcione consiste en hacer la elección “correcta” de la función dv . En las directrices antes del ejemplo 1 se afirmó que dv suele ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse de inmediato por medio de una fórmula conocida de antemano. Sin embargo, esto no puede tomarse como una regla estricta. Considerando que la opción “correcta” para dv que se ha hecho a menudo se basa en retrospectiva pragmática, ¿la segunda integral $\int v du$ es menos complicada que la primera integral $\int u dv$? ¿Es posible evaluar esta segunda integral? Para ver qué ocurre cuando se hace una elección “mala”, de nuevo se considerará el ejemplo 1, aunque esta vez se escoge

$$dv = x dx \quad \text{y} \quad u = (x+1)^{-1/2}$$

de modo que
$$v = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2} dx.$$

En este caso, al aplicar (3) se obtiene

$$\int x(x+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4} \int x^2(x+1)^{-3/2} dx.$$

Aquí la dificultad es evidente: la segunda integral $\int v \, du$ es más complicada que la original $\int u \, dv$. La selección alterna $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

EJEMPLO 2 Uso de (3)

Evalúe $\int x^3 \ln x \, dx$.

Solución De nuevo, hay varias opciones posibles para la función dv :

$$dv = \ln x \, dx, \quad dv = x^3 \, dx \quad \text{o} \quad dv = dx. \quad (4)$$

Aunque la elección $dv = \ln x \, dx$ es indudablemente el factor más complicado en el producto $x^3 \ln x \, dx$, esta opción se rechaza porque no coincide con ninguna fórmula en la tabla 7.1.1. De las dos funciones restantes en (4), la segunda es la más “complicada”, de modo que se escoge

$$dv = x^3 \, dx \quad \text{y} \quad u = \ln x,$$

$$\text{entonces} \quad v = \frac{1}{4}x^4 \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{x} \, dx.$$

Así, por (3),

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \overbrace{\ln x}^u \cdot \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^v - \int \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^v \cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{du} \, dx \quad \leftarrow \text{se simplifica el integrando} \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \quad \leftarrow \text{se integra } x^3 \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\int x \tan^{-1} x \, dx$.

Solución La elección $dv = \tan^{-1} x \, dx$ no es prudente, puesto que no es posible integrar de inmediato esta función con base en un resultado previo conocido. Así, escogemos

$$dv = x \, dx \quad \text{y} \quad u = \tan^{-1} x$$

$$\text{y se encuentra} \quad v = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

En consecuencia, con (3) se obtiene

$$\int (\tan^{-1} x) (x \, dx) = \overbrace{(\tan^{-1} x)}^u \cdot \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^v - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^v \cdot \overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{du} \, dx. \quad \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

Para evaluar la integral indefinida $\int x^2 \, dx / (1 + x^2)$, usamos la división larga (vea el ejemplo 7 de la sección 5.1). Por tanto,

$$\begin{aligned} \int x \tan^{-1} x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C. \end{aligned}$$

■ **Integraciones sucesivas** Un problema puede requerir integración por partes varias veces consecutivas. Como regla, integrales del tipo

$$\int p(x) \sin kx \, dx, \quad \int p(x) \cos kx \, dx \quad \text{y} \quad \int p(x) e^{kx} \, dx, \quad (5)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y k es una constante, requieren integración por partes n veces. Además, una integral como

$$\int x^k (\ln x)^n dx, \quad (6)$$

donde de nuevo n es un entero positivo, también requiere n aplicaciones de (3). La integral en el ejemplo 2 es de la forma (6) con $k = 3$ y $n = 1$.

EJEMPLO 4 Uso de (3) dos veces consecutivas

Evalúe $\int x^2 \cos x dx$.

Solución La integral $\int x^2 \cos x dx$ es la segunda de tres formas en (5) con $p(x) = x^2$ y $n = 2$. En consecuencia, (3) se aplica dos veces consecutivas. En la primera integración se usa

$$dv = \cos x dx \quad y \quad u = x^2$$

de modo que $v = \sin x$ y $du = 2x dx$.

Por tanto, (3) se vuelve

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int \overset{\text{se requiere integración por partes}}{\downarrow} x \sin x dx. \quad (7)$$

La segunda integral en (7) es la primera forma en (5) y sólo requiere una integración por partes, puesto que el grado del polinomio $p(x) = x$ es $n = 1$. En esta segunda integral se escoge $dv = \sin x dx$ y $u = x$:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2 \left[x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \right] \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{fórmula 8 en} \\ \text{la tabla 7.1.1} \end{array} \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned} \quad (8) \quad \blacksquare$$

El resultado en (8) puede obtenerse con un atajo sistemático. Si consideramos la integral en el ejemplo 4 como $\int f(x)g'(x) dx$ donde $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, entonces podemos mostrar las derivadas y la integral en un arreglo:

$f(x)$ y sus derivadas		$g'(x)$ y sus integrales
x^2	$\xrightarrow{+}$	$\cos x$
$2x$	$\xrightarrow{-}$	$\sin x$
2	$\xrightarrow{+}$	$-\cos x$
0	$\xrightarrow{+}$	$-\sin x$

Luego formamos los productos de las funciones unidas por las flechas y sumamos o restamos un producto según el signo algebraico indicado en azul:

$$\int x^2 \cos x dx = +x^2(\sin x) - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + C.$$

El último cero en la columna de las derivadas indica que ya no es necesario integrar más $g'(x)$; los productos de ese punto son cero.

Esta técnica de integración sucesiva por partes funciona para todas las integrales del tipo mostrado en (5) y se denomina **integración tabular**. Para una integral como $\int x^4 e^{-2x} dx$ podríamos escoger $f(x) = x^4$ y $g'(x) = e^{-2x}$. Usted debe comprobar que con integración tabular se obtiene

$$\begin{aligned} \int x^4 e^{-2x} dx &= +x^4 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - 4x^3 \left(\frac{1}{4} e^{-2x} \right) + 12x^2 \left(-\frac{1}{8} e^{-2x} \right) - 24x \left(\frac{1}{16} e^{-2x} \right) + 24 \left(-\frac{1}{32} e^{-2x} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} - x^3 e^{-2x} - \frac{3}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{3}{2} x e^{-2x} - \frac{3}{4} e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

Despeje de integrales Para ciertas integrales, una o más aplicaciones de la integración por partes puede resultar en una situación en que la integral original aparece en el miembro derecho. En este caso el problema de evaluar la integral se completa al *despejar* la integral original. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 5 Despeje de la integral original

Evalúe $\int \sec^3 x \, dx$.

Solución Al examinar la integral no se observa ninguna elección evidente para dv . No obstante, al escribir el integrando como el producto $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, identificamos

$$dv = \sec^2 x \, dx \quad \text{y} \quad u = \sec x$$

de modo que $v = \tan x$ y $du = \sec x \tan x \, dx$.

Por (3) se concluye que

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica para } \tan^2 x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx. \end{aligned}$$

Vea (18) en la sección 5.2 para la evaluación de la integral $\int \sec x \, dx$. También, vea la fórmula 15 en la tabla 7.1.1.

En la última ecuación despejamos $\int \sec^3 x \, dx$ y sumamos una constante de integración:

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\text{y así} \quad \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C. \quad \blacksquare$$

Integrales del tipo

$$\int e^{ax} \sen bx \, dx \quad \text{y} \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx \quad (9)$$

son importantes en ciertos aspectos de matemáticas aplicadas. Estas integrales requieren dos aplicaciones de la integración por partes antes de recuperar la integral original en el miembro derecho.

EJEMPLO 6 Despeje de la integral original

Evalúe $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$.

Solución Si se escoge

$$dv = e^{2x} \, dx \quad \text{y} \quad u = \cos 3x,$$

$$\text{entonces} \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \text{y} \quad du = -3 \sen 3x \, dx.$$

Luego, la fórmula (3) de integración por partes proporciona

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sen 3x \, dx.$$

A la integral destacada en color le aplicamos de nuevo integración por partes con $dv = e^{2x} dx$ y $u = \sin 3x$:

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos 3x dx &= \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x} (3 \cos 3x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx.\end{aligned}$$

Al despejar $\int e^{2x} \cos 3x dx$ de la última ecuación se obtiene

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x} \sin 3x.$$

Después de dividir entre $\frac{13}{4}$ y fijar una constante de integración obtenemos

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{2}{13}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x} \sin 3x + C. \quad \blacksquare$$

Al evaluar las integrales $\int e^{ax} \sin bx dx$ y $\int e^{ax} \cos bx dx$ no importa cuáles funciones se escojan como dv y u . En el ejemplo 6 escogimos $dv = e^{2x} dx$ y $u = \cos 3x$; se le solicita volver a trabajar este ejemplo usando $dv = \cos 3x dx$ y $u = e^{2x}$.

■ Integrales definidas Una integral definida puede evaluarse usando integración por partes como sigue:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

Por conveniencia, la ecuación anterior suele escribirse como

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (10)$$

donde se entiende que los *límites de integración son valores de x* y las integraciones en las integrales se llevan a cabo con respecto a la variable x .

EJEMPLO 7 Área bajo la gráfica

Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $[1, e]$.

Solución Por la FIGURA 7.3.1 vemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el área A está dada por la integral definida

$$A = \int_1^e \ln x dx.$$

Al escoger $dv = dx$ y $u = \ln x$,

entonces $v = x$ y $du = \frac{1}{x} dx$.

Por (10) tenemos

$$\begin{aligned}A &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^e - \left[x \right]_1^e \\ &= e \ln e - \ln 1 - e + 1 = 1.\end{aligned}$$

Aquí usamos $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$. ■

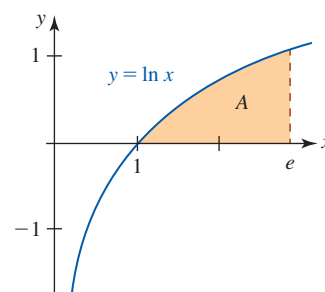


FIGURA 7.3.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 7

Ejercicios 7.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use integración por partes para evaluar la integral dada.

1. $\int x\sqrt{x+3} \, dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}} \, dx$
3. $\int \ln 4x \, dx$
4. $\int \ln(x+1) \, dx$
5. $\int x \ln 2x \, dx$
6. $\int x^{1/2} \ln x \, dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} \, dx$
9. $\int (\ln t)^2 \, dt$
10. $\int (t \ln t)^2 \, dt$
11. $\int \sin^{-1} x \, dx$
12. $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$
13. $\int xe^{3x} \, dx$
14. $\int x^2 e^{5x} \, dx$
15. $\int x^3 e^{-4x} \, dx$
16. $\int x^5 e^x \, dx$
17. $\int x^3 e^{x^2} \, dx$
18. $\int x^5 e^{2x^3} \, dx$
19. $\int t \cos 8t \, dt$
20. $\int x \sinh x \, dx$
21. $\int x^2 \sin x \, dx$
22. $\int x^2 \cos \frac{x}{2} \, dx$
23. $\int x^3 \cos 3x \, dx$
24. $\int x^4 \sin 2x \, dx$
25. $\int e^x \sin 4x \, dx$
26. $\int e^{-x} \cos 5x \, dx$
27. $\int e^{-2\theta} \cos \theta \, d\theta$
28. $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$
29. $\int \theta \sec \theta \tan \theta \, d\theta$
30. $\int e^{2t} \cos e^t \, dt$
31. $\int \sin x \cos 2x \, dx$
32. $\int \cosh x \cosh 2x \, dx$
33. $\int x^3 \sqrt{x^2+4} \, dx$
34. $\int \frac{t^5}{(t^3+1)^2} \, dt$
35. $\int \sin(\ln x) \, dx$
36. $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$
37. $\int \csc^3 x \, dx$
38. $\int x \sec^{-1} x \, dx$
39. $\int x \sec^2 x \, dx$
40. $\int x \tan^2 x \, dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_0^2 x \ln(x+1) \, dx$
42. $\int_0^1 \ln(x^2+1) \, dx$
43. $\int_2^4 xe^{-x/2} \, dx$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x \, dx$
45. $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$
46. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \cos^{-1} x \, dx$

Repaso de aplicaciones

47. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = 1 + \ln x$ sobre el intervalo $[e^{-1}, 3]$.
48. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
49. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $x = 5$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
50. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$ y $y = 3$ gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
51. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \sin x$ y $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.
53. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \tan^{-1}(x/2)$ sobre el intervalo $[0, 2]$.
54. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = e^{-t} \sin t$, donde v se mide en cm/s. Encuentre la función posición $s(t)$ si se sabe que $s = 0$ cuando $t = 0$.
55. Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t) = te^{-t}$, donde a se mide en cm/s^2 . Encuentre la función velocidad $v(t)$ y la función posición $s(t)$ si $v(0) = 1$ y $s(0) = -1$.
56. Un tanque de agua se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sin \pi x$ y $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje x , que se toma en la dirección hacia abajo. El tanque contiene agua hasta una profundidad de $\frac{1}{2}$ pie. Determine el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.
57. Encuentre la fuerza provocada por la presión de un líquido sobre un lado de la placa vertical que se muestra en la FIGURA 7.3.2. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

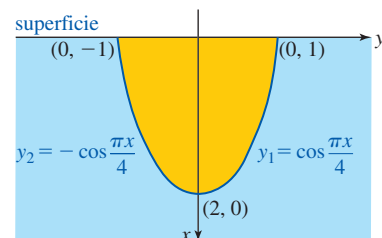


FIGURA 7.3.2 Placa sumergida en el problema 57

58. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sin x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

En los problemas 59-62, evalúe la integral usando primero una sustitución seguida de integración por partes.

59. $\int_1^4 \frac{\tan^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

60. $\int x e^{\sqrt{x}} dx$

61. $\int \sin \sqrt{x+2} dx$

62. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{t} dt$

En los problemas 63-66, use integración por partes para establecer la **fórmula de reducción** dada.

63. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$

64. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$

65. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$

66. $\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx,$

En los problemas 67-70, use una fórmula de reducción para los problemas 63-66 para evaluar la integral dada.

67. $\int \sin^3 x dx$

68. $\int \sec^4 x dx$

69. $\int \cos^3 10x dx$

70. $\int \cos^4 x dx$

71. Use el problema 64 para demostrar que para $n \geq 2$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx.$$

72. Demuestre cómo el uso repetido de la fórmula en el problema 71 sirve para obtener los siguientes resultados.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n},$
 $n \text{ par y } n \geq 2$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n},$
 $n \text{ impar y } n \geq 3$

73. Use el inciso a) del problema 72 para evaluar $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx.$

74. Use el inciso b) del problema 72 para evaluar $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx.$

≡ Piense en ello

En los problemas 75-82, la integración por partes es algo más desafiante. Evalúe la integral dada.

75. $\int e^{2x} \tan^{-1} e^x dx$

76. $\int (\sin^{-1} x)^2 dx$

77. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

78. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

79. $\int x e^x \sin x dx$

80. $\int x e^{-x} \cos 2x dx$

81. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

82. $\int e^{\sin^{-1} x} dx$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = 3 + 2 \sin^2 x - 5 \sin^4 x$.

- b) Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada en el inciso a) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

84. a) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = x \sin x$ y $y = x \cos x$.

- b) Encuentre el área de la región acotada por las gráficas sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas x positivas correspondientes a los puntos primero y segundo de intersección de las gráficas para $x > 0$.

7.4 Potencias de funciones trigonométricas

■ **Introducción** En la sección 5.2 vimos cómo integrar $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$. En esta sección veremos cómo integrar potencias superiores de $\sin x$ y $\cos x$, determinados productos de potencias de $\sin x$ y $\cos x$, y productos de potencias de $\sec x$ y $\tan x$. Las técnicas ilustradas en esta sección dependen de identidades trigonométricas.

■ **Integrales de la forma $\int \sin^m x \cos^n x dx$** Para evaluar integrales del tipo

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (1)$$

distinguiamos dos casos.

CASO I: m o n es un entero positivo impar

Primero suponemos que $m = 2k + 1$ en (1) es un entero positivo impar. Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sin x$ de $\sin^{2k+1} x$, es decir, se escribe $\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x$, donde ahora $2k$ es par.
- Usamos la identidad pitagórica básica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, para volver a escribir

$$\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(1 - \cos^2 x)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (1) como una suma de potencias de $\cos x$ multiplicadas por $\sin x$. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \cos^r x \sin x \, dx = - \int \overbrace{(\cos x)^r}^{u^r} \overbrace{(-\sin x \, dx)}^{du} = - \int u^r \, du.$$

Si $n = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (1), entonces el procedimiento es el mismo, excepto que escribimos $\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x$, usamos $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, y escribimos la integral como una suma de integrales de la forma

$$\int \sin^r x \cos x \, dx = \int \overbrace{(\sin x)^r}^{u^r} \overbrace{(\cos x \, dx)}^{du} = \int u^r \, du.$$

Observamos que el exponente r no necesita ser un entero.

EJEMPLO 1 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

Solución Empezamos por escribir la potencia de $\sin x$ como $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int \cos^2 x \sin^4 x \sin x \, dx \\ &= \int \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx && \leftarrow \text{reemplace } \sin^2 x \text{ por } 1 - \cos^2 x \\ &= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\ &= \int \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx && \leftarrow \text{se escribe como tres integrales} \\ &= - \int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-\sin x \, dx)}^{du} + 2 \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(-\sin x \, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\cos x)^6}^{u^6} \overbrace{(-\sin x \, dx)}^{du} \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \sin^3 x \, dx$.

Solución Como en el ejemplo 1, volvemos a escribir la potencia de $\sin x$ como $\sin^2 x \sin x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx + \int (\cos x)^2 (-\sin x \, dx) \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$.

Solución En esta ocasión volvemos a escribir la potencia de $\cos x$ como $\cos^2 x \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx && \leftarrow \text{se escribe como dos integrales} \\ &= \int \overbrace{(\sin x)^4}^{u^4} \overbrace{(\cos x \, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\sin x)^6}^{u^6} \overbrace{(\cos x \, dx)}^{du} \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$

CASO II: m y n son ambos enteros no negativos pares

Cuando m y n son enteros no negativos pares, la evaluación de (1) depende de las identidades trigonométricas

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x). \quad (2)$$

En la sección 5.2 vimos las dos últimas identidades como las formas útiles para las fórmulas de la mitad de un ángulo para el seno y el coseno.

EJEMPLO 4 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Solución La integral se evaluará en dos formas. Empezamos por usar las fórmulas segunda y tercera en (2):

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \, dx && \leftarrow \text{tercera identidad en (2) con } x \text{ sustituida por } 2x \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

Solución alterna Ahora usamos la primera fórmula en (2):

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx. \end{aligned}$$

El resto de la solución es igual que antes.

EJEMPLO 5 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \cos^4 x \, dx$.

Solución Empezamos por volver a escribir $\cos^4 x$ como $(\cos^2 x)^2$ y luego usamos la tercera identidad en (2):

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx \\
 &= \int \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right]^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \quad \leftarrow \text{se usa la tercera fórmula en (2) por segunda ocasión} \\
 &= \frac{1}{4} \int \left[1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx \\
 &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

■ **Integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$** Para evaluar una integral que implique potencias de la secante y la tangente,

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx, \quad (3)$$

consideramos tres casos. El procedimiento en los dos primeros casos es semejante al caso I para la integral (1) en el sentido de que a partir del producto $\tan^m x \sec^n x$ descomponemos un factor para que funcione como parte de la diferencial du .

CASO I: m es un entero positivo impar

Cuando $m = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (3), $2k$ es par. Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec x \tan x$ a partir de $\tan^{2k+1} x \sec^n x$, es decir, escribimos $\tan^{2k+1} x \sec^n x = \tan^{2k} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x$, donde $2k$ ahora es par.
- Usamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para volver a escribir

$$\tan^{2k} x = (\tan^2 x)^k = (\sec^2 x - 1)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(\sec^2 x - 1)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\sec x$ multiplicada por $\sec x \tan x$. Ahora, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de las cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\sec x)^r}^{u^r} \overbrace{(\sec x \tan x \, dx)}^{du} = \int u^r \, du.$$

EJEMPLO 6 Caso I de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^3 x \sec^7 x \, dx$.

Solución Al escribir $\tan^3 x \sec^7 x = \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x$, la integral puede escribirse como dos integrales que pueden evaluarse:

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \sec^7 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x \, dx \\
 &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^6 x \sec x \tan x \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \overbrace{(\sec x)^8}^{u^8} \overbrace{(\sec x \tan x \, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\sec x)^6}^{u^6} \overbrace{(\sec x \tan x \, dx)}^{du} \\
&= \frac{1}{9} \sec^9 x - \frac{1}{7} \sec^7 x + C.
\end{aligned}$$

CASO II: n es un entero positivo par

Sea $n = 2k$ un entero positivo par en (3). Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec^2 x$ de $\sec^{2k} x \tan^m x$, es decir, escribimos $\sec^{2k} x \tan^m x = \sec^{2(k-1)} x \tan^m x \sec^2 x$.
- Usamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para volver a escribir
$$\sec^{2(k-1)} x = (\sec^2 x)^{k-1} = (1 + \tan^2 x)^{k-1}.$$
- Desarrollamos el binomio $(1 + \tan^2 x)^{k-1}$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\tan x$ multiplicadas por $\sec^2 x$. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de las cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\tan x)^r}^{u^r} \overbrace{(\sec^2 x \, dx)}^{du} = \int u^r \, du.$$

EJEMPLO 7 Caso II de la integral (3)

Evalúe $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx$.

Solución Volvemos a escribir el integrando usando $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx &= \int (\tan x)^{1/2} \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int (\tan x)^{1/2} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\
&= \int \overbrace{(\tan x)^{1/2}}^{u^{1/2}} \overbrace{(\sec^2 x \, dx)}^{du} + \int \overbrace{(\tan x)^{5/2}}^{u^{5/2}} \overbrace{(\sec^2 x \, dx)}^{du} \\
&= \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2} + C.
\end{aligned}$$

CASO III: m es par y n es impar

Finalmente, si m es un entero positivo par y n es un entero positivo impar, escribimos el integrando de (3) en términos de $\sec x$ y usamos integración por partes.

EJEMPLO 8 Caso III de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^2 x \sec x \, dx$.

Solución Al escribir

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\
&= \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx
\end{aligned}$$

encontramos dos integrales que ya fueron evaluadas:

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C_1, \quad (4)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_2. \quad (5)$$

Para el resultado en (4), vea el ejemplo 5 en la sección 7.3.
Para (5), vea (18) en la sección 5.2.

Al restar los resultados en (4) y (5) se llega al resultado deseado:

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C. \quad \blacksquare$$

Integrales del tipo

$$\int \cot^m x \csc^n x \, dx \quad (6)$$

se manejan de manera análoga a (3). En este caso usamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

Ejercicios 7.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-40, evalúe la integral indefinida. Observe que algunas integrales no caen, hablando estrictamente, en ninguno de los casos considerados en esta sección. Usted debe evaluar estas integrales aplicando métodos previos.

1. $\int (\sin x)^{1/2} \cos x \, dx$
2. $\int \cos^4 5x \sin 5x \, dx$
3. $\int \cos^3 x \, dx$
4. $\int \sin^3 4x \, dx$
5. $\int \sin^5 t \, dt$
6. $\int \cos^5 t \, dt$
7. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$
8. $\int \sin^5 2x \cos^2 2x \, dx$
9. $\int \sin^4 t \, dt$
10. $\int \cos^6 \theta \, d\theta$
11. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$
12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx$
13. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$
14. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x \, dx$
15. $\int \tan^3 2t \sec^4 2t \, dt$
16. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x \, dx$
17. $\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx$
18. $\int \tan^2 3x \sec^2 3x \, dx$
19. $\int \tan^3 x (\sec x)^{-1/2} \, dx$
20. $\int \tan^3 \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2} \, dx$
21. $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$
22. $\int \tan^5 x \sec x \, dx$
23. $\int \sec^5 x \, dx$
24. $\int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$
25. $\int \cos^2 x \cot x \, dx$
26. $\int \sin x \sec^7 x \, dx$

27. $\int \cot^{10} x \csc^4 x \, dx$
28. $\int (1 + \csc^2 t)^2 \, dt$
29. $\int \frac{\sec^4(1-t)}{\tan^8(1-t)} \, dt$
30. $\int \frac{\sin^3 \sqrt{t} \cos^2 \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$
31. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x \, dx$
32. $\int (\tan x + \cot x)^2 \, dx$
33. $\int \tan^4 x \, dx$
34. $\int \tan^5 x \, dx$
35. $\int \cot^3 t \, dt$
36. $\int \csc^5 t \, dt$
37. $\int (\tan^6 x - \tan^2 x) \, dx$
38. $\int \cot 2x \csc^{5/2} 2x \, dx$
39. $\int x \sin^3 x^2 \, dx$
40. $\int x \tan^8(x^2) \sec^2(x^2) \, dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 \theta \sqrt{\cos \theta} \, d\theta$
42. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x \, dx$
43. $\int_0^{\pi} \sin^3 2t \, dt$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos^2 x \, dx$
45. $\int_0^{\pi/4} \tan y \sec^4 y \, dy$
46. $\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^{3/2} x \, dx$

En los problemas 47-52, use las identidades trigonométricas

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

para evaluar la integral trigonométrica dada.

47. $\int \sin x \cos 2x \, dx$
48. $\int \cos 3x \cos 5x \, dx$

49. $\int \sin 2x \sin 4x \, dx$
50. $\int \frac{5 - 3 \sin 2x}{\sec 6x} \, dx$
51. $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cos x \, dx$
52. $\int_0^{\pi/2} \sin \frac{3}{2}x \sin \frac{1}{2}x \, dx$
53. Demuestre que
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$
54. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$.

Repaso de aplicaciones

En los problemas 55 y 56 se proporcionan las gráficas de $f(x) = \sec^2(x/2)$ (problema 55) y $f(x) = \sin^2 x$ (problema 56). Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R acotada por la función de f sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ alrededor del eje indicado.

55. El eje x :

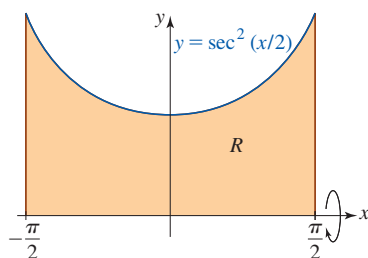


FIGURA 7.4.1 Región en el problema 55

56. La recta $y = 1$;

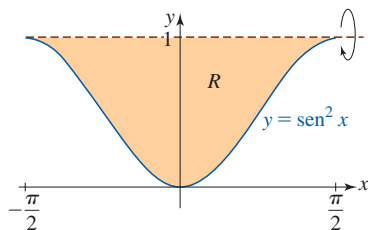


FIGURA 7.4.2 Región en el problema 56

57. Encuentre el área de la región R acotada por las gráficas de $y = \sin^3 x$ y $y = \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$. Vea la FIGURA 7.4.3.

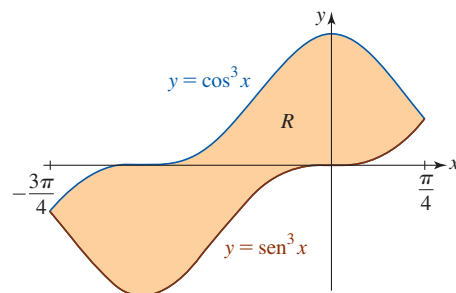


FIGURA 7.4.3 Gráficas para el problema 57

58. La gráfica de la ecuación $r = |\sin 4\theta \sin \frac{1}{2}\theta|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, encierra una región que es un modelo matemático para la forma de una hoja de castaño. Vea la FIGURA 7.4.4. En el capítulo 10 verá que el área acotada por esta gráfica está dada por $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta$. Encuentre esta área. [Sugerencia: Use una de las identidades dadas en las instrucciones para los problemas 47-52.]

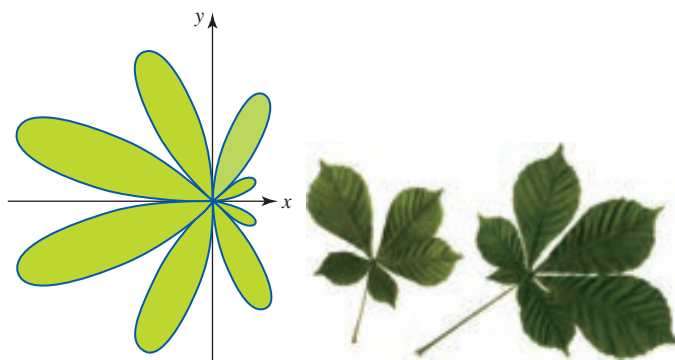


FIGURA 7.4.4 Región en el problema 58

Problemas con calculadora/SAC

59. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = \cos^3 x$, $y = \cos^5 x$ y $y = \cos^7 x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$. Use las gráficas para conjeturar los valores de las integrales definidas

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^5 x \, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi} \cos^7 x \, dx.$$

60. En el problema 59, ¿cuál cree que es el valor de $\int_0^{\pi} \cos^n x \, dx$, donde n es un entero positivo impar? Demuestre su conjetura.

7.5 Sustituciones trigonométricas

Introducción Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2}, \quad a > 0 \quad (1)$$

podemos evaluar la integral por medio de sustituciones trigonométricas. Los tres casos que consideramos en esta sección dependen, a su vez, de las identidades pitagóricas fundamentales escritas en la forma:

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{y} \quad \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta.$$

El procedimiento para una integral indefinida es semejante al análisis en las secciones 5.2 y 7.2:

- Hacer una sustitución en una integral.
- Después de simplificar, efectuar la integración con respecto a la nueva variable.
- Volver a la variable original por resustitución.

Antes de proceder, se harán corresponder la sustitución trigonométrica y los radicales en (1).

Directrices para las sustituciones trigonométricas

Para integrandos que contienen

- $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \sen \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
- $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
- $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$, sea $u = a \sec \theta$, donde $\begin{cases} 0 \leq \theta < \pi/2, & \text{si } u \geq a \\ \pi/2 < \theta \leq \pi, & \text{si } u \leq -a. \end{cases}$

Vea la sección 1.5 para un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

En cada caso, la restricción impuesta sobre la variable θ es precisamente la que acompaña a la función trigonométrica inversa correspondiente. En otras palabras, si queremos escribir $\theta = \sen^{-1}(u/a)$, etcétera. Además, con ayuda de las identidades anteriores, cada una de estas sustituciones produce un cuadrado perfecto. Con la restricción sobre θ para las sustituciones $u = a \sen \theta$ y $u = a \tan \theta$, la raíz cuadrada puede tomarse sin recurrir a valores absolutos. Como verá, debe tener más cuidado al usar la sustitución $u = a \sec \theta$.

- Si $u = a \sen \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sen^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sen^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$

- Si $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, entonces

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta.$$

- Si $u = a \sec \theta$, donde $0 \leq \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \leq \pi$, entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a|\tan \theta|.$$

Cuando una expresión como $\sqrt{a^2 - u^2}$ aparece en el denominador de un integrando, hay una restricción adicional sobre la variable θ ; en este caso, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Después de llevar a cabo la integración en θ es necesario volver a la variable original x . Si se construye un triángulo rectángulo de referencia, uno donde $\sen \theta = u/a$, $\tan \theta = u/a$, o $\sec \theta = u/a$ como se muestra en la FIGURA 7.5.1, entonces las otras funciones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de u .

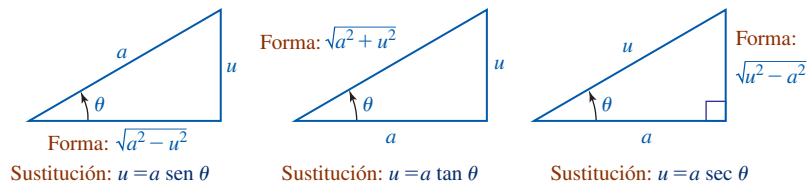


FIGURA 7.5.1 Triángulos rectángulos de referencia usados para expresar funciones trigonométricas en términos de una expresión algebraica en u y a

En los dos primeros ejemplos, el integrando contiene la forma radical $\sqrt{a^2 - u^2}$.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$.

Solución Al identificar $u = x$ y $a = 3$ se llega a las sustituciones

$$x = 3 \sen \theta \quad \text{y} \quad dx = 3 \cos \theta d\theta,$$

donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. La integral se vuelve

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int \frac{9 \sin^2 \theta}{\sqrt{9-9 \sin^2 \theta}} (3 \cos \theta d\theta) \quad \leftarrow \text{se simplifica} \\ &= 9 \int \sin^2 \theta d\theta.\end{aligned}$$

Recuerde que para evaluar esta última integral trigonométrica usamos la identidad de la mitad del ángulo $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \frac{9}{2} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \theta - \frac{9}{4} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{9}{2} \theta - \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta + C. \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}\end{aligned}$$

Para expresar este resultado de nuevo en términos de la variable x , usamos $\sin \theta = x/3$ y $\theta = \sin^{-1}(x/3)$. Luego, por el triángulo rectángulo de referencia en la FIGURA 7.5.2 vemos que $\cos \theta = \sqrt{9-x^2}/3$, de modo que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} x \sqrt{9-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

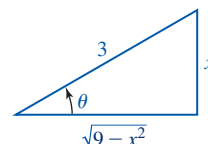


FIGURA 7.5.2 Triángulo rectángulo en el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} dx$.

Solución Al identificar $u = 2x$, $a = 1$ se hace $2x = \sin \theta$, y así $x = \frac{1}{2} \sin \theta$ y $dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{\frac{1}{2} \sin \theta} \left(\frac{1}{2} \cos \theta d\theta\right) \quad \leftarrow \text{se simplifica} \\ &= \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \leftarrow \text{se usa división término a término} \\ &= \int (\csc \theta - \sin \theta) d\theta \quad \leftarrow \text{fórmulas 16 y 7 en la tabla 7.1.1} \\ &= \ln |\csc \theta - \cot \theta| + \cos \theta + C.\end{aligned}$$

En la FIGURA 7.5.3 se ha construido un triángulo rectángulo para el cual $\sin \theta = 2x$ y $\cos \theta = \sqrt{1-4x^2}$. En consecuencia, $\csc \theta = 1/\sin \theta = 1/(2x)$ y $\cot \theta = \cos \theta/\sin \theta = \sqrt{1-4x^2}/(2x)$. Por tanto, el resultado obtenido al integrar con respecto a θ puede escribirse en términos de x como

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} dx = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{1-4x^2} + C. \quad \blacksquare$$

Como recordatorio para las habilidades de integración, se solicita que el lector compruebe periódicamente que la derivada de la antiderivada que obtuvo es el integrando de la integral original. La derivada de la respuesta final en el ejemplo 2,

$$\frac{d}{dx} \left[\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{1-4x^2} + C \right] = \frac{-1 + 4x^2 + \sqrt{1-4x^2}}{x(-1 + \sqrt{1-4x^2})},$$

está antes, no en el integrando en el ejemplo 2. Use álgebra para resolver la diferencia entre este resultado y el integrando $\sqrt{1-4x^2}/x$.

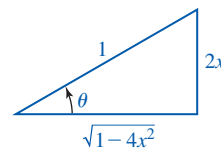


FIGURA 7.5.3 Triángulo rectángulo en el ejemplo 2

En los dos ejemplos siguientes, el integrando contiene una potencia entera de la forma radical $\sqrt{a^2 + u^2}$.

EJEMPLO 3 Uso de una sustitución tangente

Evalúe $\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}} dx$.

Solución Observe que el integrando es una potencia entera de $\sqrt{4 + x^2}$, puesto que $(4 + x^2)^{3/2} = (\sqrt{4 + x^2})^3$. Luego, cuando $u = x$, $x = 2 \tan \theta$ y $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$ se tiene $\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 \sec^2 \theta} = 2 \sec \theta$ y $(4 + x^2)^{3/2} = 8 \sec^3 \theta$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{1}{8 \sec^3 \theta} (2 \sec^2 \theta d\theta) \\ &= \frac{1}{4} \int \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \sin \theta + C. \end{aligned}$$

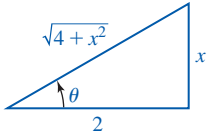


FIGURA 7.5.4 Triángulo rectángulo en el ejemplo 3

A partir del triángulo en la FIGURA 7.5.4, vemos que $\sin \theta = x/\sqrt{4 + x^2}$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Longitud de arco

Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

Solución Recuerde que la fórmula para la longitud de arco es $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. Puesto que $dy/dx = x$, tenemos

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Luego, si $u = x$, entonces se sustituye $x \tan \theta$ y $dx = \sec^2 \theta d\theta$. Los límites de integración θ en la integral trigonométrica definida se obtienen a partir de los límites x en la integral original:

$$x = 0: \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0$$

$$x = 1: \quad \theta = \tan^{-1} 1 = \pi/4.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

La integral definida de $\sec^3 \theta$ se encontró en el ejemplo 5 de la sección 7.3 usando integración por partes:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \left| \sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 1.1478. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En los dos ejemplos siguientes, los integrandos contienen una potencia entera de la forma radical $\sqrt{u^2 - a^2}$.

EJEMPLO 5 Uso de una sustitución secante

Evalúe $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4} dx$ suponiendo que $x > 4$.

Solución Si $u = x$ y $x = 4 \sec \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, y $dx = 4 \sec \theta \tan \theta d\theta$, la integral se vuelve

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{16 \sec^2 \theta - 16}}{256 \sec^4 \theta} (4 \sec \theta \tan \theta d\theta) \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int (\sin \theta)^2 (\cos \theta d\theta) \\ &= \frac{1}{48} \sin^3 \theta + C. \end{aligned}$$

El triángulo rectángulo en la FIGURA 7.5.5 se construyó de modo que $\sec \theta = x/4$ o $\cos \theta = 4/x$, por lo que vemos que $\sin \theta = \sqrt{x^2 - 16}/x$. Debido a que $\sin^3 \theta = (\sqrt{x^2 - 16})^3/x^3$, se concluye que

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4} dx = \frac{1}{48} \frac{(x^2 - 16)^{3/2}}{x^3} + C. \quad \blacksquare$$

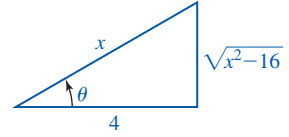


FIGURA 7.5.5 Triángulo rectángulo en el ejemplo 5

EJEMPLO 6 Una integral definida

Evalúe $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$.

Solución Se identifica $u = x$ y $a = 1$ y usamos las sustituciones $x = \sec \theta$ y $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$. En este caso suponemos que $\pi/2 < \theta \leq \pi$ puesto que el intervalo de integración indica que $x \leq -a$, donde $-a = -1$. Vea la FIGURA 7.5.6 para una gráfica del integrando $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$.

Así como en el ejemplo 4, obtenemos los límites θ de integración a partir de los límites de integración originales:

$$x = -2: \quad \theta = \sec^{-1}(-2) = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = -1: \quad \theta = \sec^{-1}(-1) = \pi.$$

$$\begin{aligned} \text{En consecuencia, } \int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta} (\sec \theta \tan \theta d\theta) \\ &= \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2 \theta} (\tan \theta d\theta). \end{aligned}$$

Porque $\pi/2 < \theta \leq \pi$, $\tan \theta \leq 0$, $\sqrt{\tan^2 \theta} = |\tan \theta| = -\tan \theta$, la última integral se vuelve

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2 \theta} (\tan \theta d\theta) \\ &= - \int_{2\pi/3}^{\pi} \tan^2 \theta d\theta \quad \leftarrow \text{se usa una identidad trigonométrica} \\ &= - \int_{2\pi/3}^{\pi} (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -(\tan \theta - \theta) \Big|_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= - \left[(0 - \pi) - \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.6849. \end{aligned}$$

La respuesta negativa tiene sentido, puesto que en la figura 7.5.6 vemos que $f(x) \leq 0$ sobre el intervalo $[-2, -1]$. \blacksquare

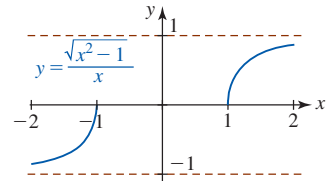


FIGURA 7.5.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 6

■ **Integrandos que contienen una cuadrática** Una sustitución trigonométrica también puede usarse cuando un integrando contiene una potencia entera de la raíz cuadrada de una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$. Al completar el cuadrado, el radical puede expresarse como una de las formas:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

Si, por ejemplo, el integrando contiene una potencia entera de

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{3 + (x + 2)^2},$$

es necesario identificar $u = x + 2$, $a = \sqrt{3}$, y usar la sustitución $x + 2 = \sqrt{3} \tan \theta$.

EJEMPLO 7 Completar el cuadrado

Evalúe $\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} dx$.

Solución Al completar el cuadrado en x , reconocemos que el integrando contiene una potencia entera de $a^2 + u^2$,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{[9 + (x + 4)^2]^{3/2}} dx,$$

donde $u = x + 4$ y $a = 3$. Al usar las sustituciones $x + 4 = 3 \tan \theta$ y $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$ encontramos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} &= \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{[9 + 9 \tan^2 \theta]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{9} \sin \theta + C. \end{aligned}$$

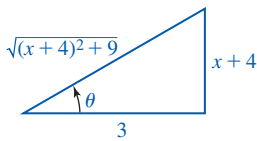


FIGURA 7.5.7 Triángulo rectángulo en el ejemplo 7

El examen del triángulo en la FIGURA 7.5.7 indica cómo expresar $\sin \theta$ en términos de x . Se concluye que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} = \frac{1}{9} \frac{x + 4}{\sqrt{(x + 4)^2 + 9}} + C = \frac{x + 4}{9\sqrt{x^2 + 8x + 25}} + C. \quad \blacksquare$$

NOTAS DESDE EL AULA

Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{u^2 - a^2} du$$

pueden evaluarse rápidamente por medio de sustituciones trigonométricas. Al analizar la tabla 7.1.1 de fórmulas integrales vemos que cada una de estas fórmulas es un logaritmo. Pero quienes tienen buena memoria deben reconocer que éstas son las formas integrales indefinidas de las fórmulas de diferenciación para tres de las funciones hiperbólicas inversas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \frac{du}{dx}, & \frac{d}{dx} \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} \frac{du}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{a^2 - u^2} \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Toda función hiperbólica inversa puede expresarse como un logaritmo natural. Vea (25)-(27) en la sección 3.10.

Ejercicios 7.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

Fundamentos

En los problemas 1-38, evalúe la integral indefinida dada por medio de una sustitución trigonométrica cuando así convenga. Usted debe evaluar algunas de las integrales sin una sustitución.

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}} dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}} dx$
4. $\int \sqrt{3-x^2} dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+7} dx$
6. $\int (1-x^2)^{3/2} dx$
7. $\int x^3\sqrt{1-x^2} dx$
8. $\int x^3\sqrt{x^2-1} dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2-4)^{3/2}} dx$
10. $\int (9-x^2)^{3/2} dx$
11. $\int \sqrt{x^2+4} dx$
12. $\int \frac{x}{25+x^2} dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}} dx$
15. $\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}} dx$
16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}} dx$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$
18. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$
19. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$
21. $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}} dx$
22. $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^{3/2}} dx$
23. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
24. $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$
25. $\int \frac{1}{(4+x^2)^{5/2}} dx$
26. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}} dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}} dx$
28. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
29. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2} dx$
30. $\int \frac{1}{(11-10x-x^2)^2} dx$
31. $\int \frac{x-3}{(5-4x-x^2)^{3/2}} dx$
32. $\int \frac{1}{(x^2+2x)^{3/2}} dx$
33. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx$
34. $\int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx$
35. $\int \frac{x^2}{x^2+16} dx$
36. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x} dx$
37. $\int \sqrt{6x-x^2} dx$
38. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx$

En los problemas 39-44, evalúe la integral definida dada.

39. $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx$
40. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$
41. $\int_0^5 \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}} dx$
42. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$
43. $\int_1^{6/5} \frac{16}{x^4\sqrt{4-x^2}} dx$
44. $\int_0^{1/2} x^3(1+x^2)^{-1/2} dx$

En los problemas 45 y 46, use integración por partes seguida de una sustitución trigonométrica.

45. $\int x^2 \sin^{-1} x dx$
46. $\int x \cos^{-1} x dx$

Repaso de aplicaciones

47. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{x\sqrt{3+x^2}}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
48. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = x^5\sqrt{1-x^2}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[0, 1]$.
49. Demuestre que el área de un círculo dado por $x^2 + y^2 = a^2$ es πa^2 .
50. Demuestre que el área de una elipse dada por $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ es πab .
51. La región descrita en el problema 47 gira alrededor del eje x . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{4}{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
53. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x\sqrt{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
54. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido de revolución.
55. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
56. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ sobre el intervalo $[1, 2]$.
57. Una mujer, M , empezando en el origen, se mueve en la dirección del eje y positivo jalando una masa a lo largo de la curva C , denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 7.5.8. La masa, que inicialmente está sobre el eje x en

$(a, 0)$, es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso a). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es $(10, 0)$ y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

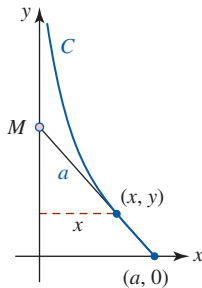


FIGURA 7.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 7.5.9.

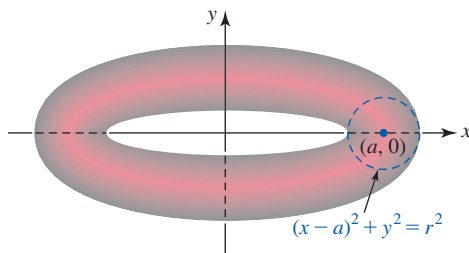


FIGURA 7.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 7.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

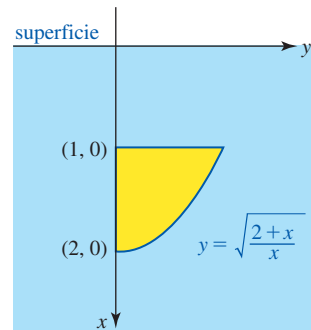


FIGURA 7.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

≡ Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx \quad b) \int \sqrt{e^{2x} - 1} dx$$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente mostrada en amarillo en la FIGURA 7.5.11. La región, fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b , $a \neq b$, se denomina **luna**.

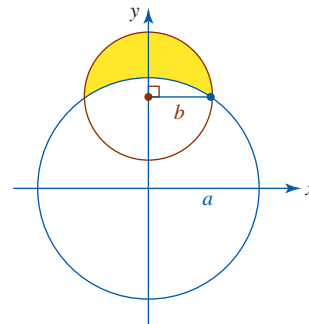


FIGURA 7.5.11 Luna en el problema 62

7.6 Fracciones parciales

■ **Introducción** Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5} \left(\frac{x+1}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1} \left(\frac{x+5}{x+5} \right). \quad (1)$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}. \quad (2)$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f . Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x+7}{(x+5)(x+1)} dx = \int \left[\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} \right] dx = 2 \ln|x+5| + \ln|x+1| + C.$$

Este ejemplo ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$. Este método consiste en invertir el proceso ilustrado en (1); en otras palabras, empezamos con una función racional —como (2)— y la separamos en fracciones componentes más simples $g(x) = 2/(x+5)$ y $h(x) = 1/(x+1)$, denominadas **fracciones parciales**. Luego evaluamos la integral término a término.

■ **Fracciones parciales** El proceso algebraico para separar una expresión racional, como (2), en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia supondremos que la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; es decir, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. También supondremos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En esta sección estudiaremos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

■ **Factores lineales distintos** El siguiente hecho del álgebra se plantea sin demostración. Si el denominador $q(x)$ contiene un producto de n factores lineales distintos,

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n),$$

donde las a_i y b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene la suma

$$\frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores lineales $a_ix + b_i$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evalúe $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} dx$.

Solución Se establece la hipótesis de que el integrando puede escribirse como

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Al combinar los términos del miembro derecho de la ecuación sobre un común denominador obtenemos

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores de las dos expresiones deben ser idénticamente iguales:

$$2x + 1 = A(x+3) + B(x-1). \quad (3)$$

Puesto que la última línea es una identidad, los coeficientes de las potencias de x son los mismos

$$\begin{array}{c} \text{iguales} \swarrow \searrow \\ 2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0 \\ \nwarrow \nearrow \text{iguales} \end{array}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \quad (4)$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$, de modo que encontramos $A = \frac{3}{4}$. Luego, al sustituir este valor en cualquier ecuación de (4) obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} dx = \int \left[\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3} \right] dx = \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{5}{4} \ln|x+3| + C. \quad \blacksquare$$

■ **Un atajo que vale la pena conocer** Si el denominador contiene, por ejemplo, tres factores lineales, como en $\frac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales aparece como sigue:

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}.$$

Al seguir los mismos pasos que en el ejemplo 1, sería deseable encontrar que el análogo de (4) ahora son tres ecuaciones en las tres incógnitas A , B y C . La cuestión es ésta: mientras más fracciones lineales haya en el denominador, más grande es el sistema de ecuaciones que habrá que resolver. Hay un procedimiento algebraico que vale la pena conocer porque permite abreviar algo del álgebra. Para ilustrarlo, se volverá a la identidad (3). Puesto que la igualdad es cierta para todo valor de x , se cumple para $x=1$ y $x=-3$, los ceros del denominador. Al hacer $x=1$ en (3) obtenemos $3=4A$, a partir de lo cual se concluye de inmediato que $A=\frac{3}{4}$. En forma semejante, al hacer $x=-3$ en (3) obtenemos $-5=(-4)B$ o $B=\frac{5}{4}$.

Vea las *Notas desde el aula* al final de esta sección para consultar otro método rápido para determinar las constantes.

EJEMPLO 2 Área bajo una gráfica

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

Solución El área en cuestión se muestra en la FIGURA 7.6.1. Puesto que $f(x)$ es positiva para toda x en el intervalo, el área es la integral definida

$$A = \int_{1/2}^2 \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

Al usar fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

se concluye que

$$1 = A(x+1) + Bx. \quad (5)$$

Al seguir el atajo previo a este ejemplo, vemos, a la vez, que $x=0$ y $x=-1$ en (5) y obtenemos $A=1$ y $B=-1$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/2}^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx = (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_{1/2}^2 \\ &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_{1/2}^2 = \ln 2 \approx 0.6931. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ **Factores lineales repetidos** Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax+b)^n$, $n > 1$, donde a y b son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales de f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax+b$.

EJEMPLO 3 Factor lineal repetido

Evalúe $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^3} dx$.

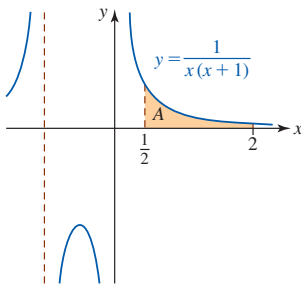


FIGURA 7.6.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 2

Solución La descomposición del integrando contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de $x + 1$:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}.$$

Al igualar los numeradores obtenemos

$$x^2 + 2x + 4 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C = Ax^2 + (2A + B)x + (A + B + C). \quad (6)$$

Observe que al hacer $x = -1$ (el único cero del denominador) en (6) obtenemos sólo $C = 3$. Pero los coeficientes de x^2 y x en (6) producen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 2 &= 2A + B. \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones vemos que $A = 1$ y $B = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3} dx &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^3} \right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + 3(x + 1)^{-3} \right] dx \\ &= \ln|x + 1| - \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + D. \end{aligned}$$

Cuando el denominador $q(x)$ contiene factores lineales y también repetidos, se combinan los dos casos que acaban de considerarse.

EJEMPLO 4 Factor repetido y factor distinto

Evalúe $\int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} dx$.

Solución Puesto que x es un factor lineal repetido en el denominador del integrando, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de x y una fracción parcial para el factor lineal distinto $2x - 1$:

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x - 1}.$$

Después de escribir el miembro derecho sobre un común denominador, se igualan los numeradores:

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3 \quad (7)$$

$$= (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C. \quad (8)$$

Si $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ en (7), encontramos $C = 1$ y $D = 16$, respectivamente. Entonces, al igualar los coeficientes de x^3 y x^2 en (8) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2A + D \\ 0 &= -A + 2B. \end{aligned}$$

Puesto que conocemos el valor de D , la primera ecuación produce $A = -\frac{1}{2}D = -8$. Luego, con la segunda obtenemos $B = \frac{1}{2}A = -4$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} dx &= \int \left[-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x - 1} \right] dx \\ &= -8 \ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8 \ln|2x - 1| + E \\ &= 8 \ln \left| \frac{2x - 1}{x} \right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E. \end{aligned}$$

La palabra *irreducible* significa que la expresión cuadrática no se factoriza sobre el conjunto de los números reales.

■ **Factores cuadráticos distintos** Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un producto de n factores cuadráticos *irreducibles*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \cdots (a_nx^2 + b_nx + c_n),$$

donde los coeficientes a_i, b_i y $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales para f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}.$$

En forma análoga al caso en que $q(x)$ contiene un producto de factores lineales distintos, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores cuadráticos $a_ix^2 + b_ix + c_i$.

EJEMPLO 5 Factor lineal repetido y uno cuadrático distinto

Evalúe $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2} dx$.

Solución A partir de $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$, vemos que el problema combina el factor cuadrático irreducible $x^2 + 9$ con el factor lineal repetido x . En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+3}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}.$$

Al proceder como de costumbre, encontramos

$$x+3 = Ax(x^2+9) + B(x^2+9) + (Cx+D)x^2 \quad (9)$$

$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 9Ax + 9B. \quad (10)$$

Al hacer $x=0$ en (9) obtenemos $B = \frac{1}{3}$. Luego, con (10) obtenemos

$$0 = A + C$$

$$0 = B + D$$

$$1 = 9A.$$

A partir de este sistema obtenemos $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Así se llega a

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2(x^2+9)} dx &= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2+9} \right] dx \\ &= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} - \frac{1}{18} \frac{2x}{x^2+9} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+9} \right] dx \\ &= \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{3} x^{-1} - \frac{1}{18} \ln(x^2+9) - \frac{1}{9} \tan^{-1} \frac{x}{3} + E \\ &= \frac{1}{18} \ln \frac{x^2}{x^2+9} - \frac{1}{3} x^{-1} - \frac{1}{9} \tan^{-1} \frac{x}{3} + E. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Factores cuadráticos distintos

Evalúe $\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} dx$.

Solución Puesto que cada factor cuadrático en el denominador del integrando es irreducible, escribimos

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

a partir de lo cual encontramos

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D). \end{aligned}$$

Puesto que el denominador del integrando no tiene ceros reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x :

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= 2A + B + D \\ 4 &= 3A + 2B + C \\ 0 &= 3B + D. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones obtenemos $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = -3$. En consecuencia,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx = \int \left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} \right] dx.$$

Ahora, la integral de cada término sigue representando un ligero desafío. Para el primer término en el integrando usamos división término a término para escribir

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}, \quad (11)$$

y luego en el segundo término se completa el cuadrado:

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x + 1 + 2}{(x + 1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 2}. \quad (12)$$

En los miembros derechos de (11) y (12) identificamos que las integrales de los términos primero y segundo son, respectivamente, de las formas $\int du/u$ y $\int du/(u^2 + a^2)$. Por último, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln[(x + 1)^2 + 2] - \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) + E \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3} \right) + \tan^{-1} x - \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) + E. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ Factores cuadráticos repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n > 1$, donde a , b y c son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Es decir, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Factor cuadrático repetido

Evalúe $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$.

Solución La descomposición en fracciones parciales del integrando

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{lleva a} \quad x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D \\
 &= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D) \\
 \text{y} \quad 0 &= A \\
 1 &= B \\
 0 &= 4A + C \\
 0 &= 4B + D.
 \end{aligned}$$

A partir de este sistema encontramos $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. En consecuencia,

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \int \left[\frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4}{(x^2 + 4)^2} \right] dx.$$

La integral del primer término es una tangente inversa. No obstante, para evaluar la integral del segundo término, empleamos la sustitución trigonométrica $x = 2 \tan \theta$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(4 \tan^2 \theta + 4)^2} \\
 &= \frac{1}{8} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{16} \left(\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta \right) \quad \leftarrow \text{aquí se usa la fórmula del ángulo doble} \\
 &= \frac{1}{16} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{16} \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} \right] \\
 &= \frac{1}{16} \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2 + 4} \right].
 \end{aligned}$$

Por tanto, la integral original es

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} - 4 \left[\frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2 + 4} \right] + E \\
 &= \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 4} + E.
 \end{aligned}$$

Revise la sección 5.1.

► **■ Fracciones impropias** En cada uno de los ejemplos precedentes el integrando $f(x) = p(x)/q(x)$ era una fracción propia. Recordemos que cuando $f(x) = p(x)/q(x)$ es una **fracción impropia**, es decir, cuando el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$, procedemos con una división larga.

EJEMPLO 8 El integrando es una fracción impropia

$$\text{Evalúe } \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Solución El integrando se identifica como una fracción impropia y el numerador se divide entre el denominador:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}.$$

Luego, como el denominador se factoriza como $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, el residuo se descompone en fracciones parciales:

$$\frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}.$$

Con esta información, la evaluación de la integral es inmediata:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int \left[x - 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 - 3x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + C.
 \end{aligned}$$

NOTAS DESDE EL AULA

Hay otra forma, denominada **método de encubrimiento**, para determinar los coeficientes en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}.$$

Este método se ilustrará por medio de un ejemplo específico. A partir del análisis anterior sabemos que existen constantes únicas A , B y C tales que

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}. \quad (13)$$

Suponga que multiplicamos por $x - 1$, que se simplifica y luego se hace $x = 1$, a ambos miembros de esta última expresión. Puesto que los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left. \frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 2)(x + 3)} \right|_{x=1} = A \quad \text{o} \quad A = -1.$$

Escrito de otra forma,

$$\left. \frac{x^2 + 4x - 1}{\boxed{(x - 1)}(x - 2)(x + 3)} \right|_{x=1} = A$$

donde sombreamos o cubrimos el factor que se cancela cuando el miembro izquierdo de (13) se multiplica por $x - 1$. *Este factor cubierto no se evalúa en $x = 1$.* Luego, para obtener B y C simplemente evaluamos el miembro izquierdo de (13) mientras se cubren, a la vez, $x - 2$ y $x + 3$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\boxed{(x - 2)}(x + 3)} \right|_{x=2} &= B \quad \text{o} \quad B = \frac{11}{5} \\ \left. \frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)\boxed{(x + 3)}} \right|_{x=-3} &= C \quad \text{o} \quad C = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos la descomposición

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{\frac{11}{5}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x + 3}.$$

Ejercicios 7.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

Fundamentos

En los problemas 1-8, escriba la forma idónea de la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada. No evalúe los coeficientes.

1. $\frac{x - 1}{x^2 + x}$

2. $\frac{9x - 8}{(x - 3)(2x - 5)}$

3. $\frac{x^3}{(x - 1)(x + 2)^3}$

4. $\frac{2x^2 - 3}{x^3 + 6x^2}$

5. $\frac{4}{x^3(x^2 + 3)}$

6. $\frac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + x + 1)}$

7. $\frac{2x^3 - x}{(x^2 + 9)^2}$

8. $\frac{3x^2 - x + 4}{x^4 + 2x^3 + x}$

En los problemas 9-42, use fracciones parciales para evaluar la integral dada.

9. $\int \frac{1}{x(x - 2)} dx$

10. $\int \frac{1}{x(2x + 3)} dx$

11. $\int \frac{x + 2}{2x^2 - x} dx$

12. $\int \frac{3x + 10}{x^2 + 2x} dx$

13. $\int \frac{x + 1}{x^2 - 16} dx$

14. $\int \frac{1}{4x^2 - 25} dx$

15. $\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 2} dx$

16. $\int \frac{x + 5}{(x + 4)(x^2 - 1)} dx$

17. $\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - x} dx$

18. $\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x} dx$

19. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$ 20. $\int \frac{1}{(4x^2-1)(x+7)} dx$
21. $\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2} dt$ 22. $\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2} dx$
23. $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x} dx$ 24. $\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2} dt$
25. $\int \frac{2x-1}{(x+1)^3} dx$ 26. $\int \frac{1}{x^2(x^2-4)^2} dx$
27. $\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2} dx$
28. $\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)} dx$
29. $\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4} dx$ 30. $\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2} dx$
31. $\int \frac{x-1}{x(x^2+1)} dx$ 32. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)} dx$
33. $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ 34. $\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x^2+4)} dx$
35. $\int \frac{1}{x^4+5x^2+4} dx$ 36. $\int \frac{1}{x^4+13x^2+36} dx$
37. $\int \frac{1}{x^3-1} dx$ 38. $\int \frac{81}{x^4+27x} dx$
39. $\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx$
40. $\int \frac{4x+12}{(x-2)(x^2+4x+8)} dx$
41. $\int \frac{x^2-x+4}{(x^2+4)^2} dx$ 42. $\int \frac{1}{x^3(x^2+1)^2} dx$

En los problemas 43 y 44, proceda como en el ejemplo 7 para evaluar la integral dada.

43. $\int \frac{x^3-2x^2+x-3}{x^4+8x^2+16} dx$ 44. $\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2} dx$

En los problemas 45 y 46, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral dada.

45. $\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2} dx$ 46. $\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9} dx$

En los problemas 47-54, evalúe la integral definida dada.

47. $\int_2^4 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$ 48. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$
49. $\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2} dx$ 50. $\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2} dx$
51. $\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx$ 52. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+8x^2+16} dx$
53. $\int_{-1}^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6} dx$ 54. $\int_1^2 \frac{1}{x^5+4x^4+5x^3} dx$

En los problemas 55-58, evalúe la integral definida dada usando primero la sustitución indicada seguida por fracciones parciales.

55. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} dx; u^2 = 1-x^2$
56. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx; u^2 = \frac{x-1}{x+1}$
57. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx; u^3 = x+1$
58. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} dx; u^6 = x$

Repaso de aplicaciones

En los problemas 59 y 60, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

59. $y = \frac{1}{x^2+2x-3}; [2, 4]$
60. $y = \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)}; [0, 4]$

En los problemas 61 y 62, encuentre el área acotada por la gráfica de la función dada y el eje x sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

61. $y = \frac{x}{(x+2)(x+3)}; [-1, 1]$
62. $y = \frac{3x^3}{x^3-8}; [-2, 1]$

En los problemas 63-66, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada en el primer cuadrante por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor del eje indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada.

63. $y = \frac{2}{x(x+1)}, x=1, x=3, y=0$; eje x
64. $y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}}, x=0, x=2, y=0$; eje x
65. $y = \frac{4}{(x+1)^2}, x=0, x=1, y=0$; eje y
66. $y = \frac{8}{(x^2+1)(x^2+4)}, x=0, x=1, y=0$; eje y

Piense en ello

En los problemas 67-70, evalúe la integral dada haciendo primero la sustitución seguida de una descomposición en fracciones parciales.

67. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx$ 68. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos^3 x} dx$
69. $\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)} dt$ 70. $\int \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^3} dt$

71. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = e^x$ sobre el intervalo $[0, \ln 2]$. [Sugerencia: Evalúe la integral empezando con una sustitución.]

72. Explique por qué una descomposición en fracciones parciales podría ser innecesaria o inadecuada para la integral dada. Analice cómo es posible evaluar estas integrales.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{x^3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx & b) \int \frac{3x + 4}{x^2 + 4} dx \\ c) \int \frac{x}{(x^2 + 5)^2} dx & d) \int \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx \end{array}$$

73. Aunque para evaluar

$$\int \frac{x^5}{(x - 1)^{10}(x + 1)^{10}} dx$$

puede usarse descomposición en fracciones parciales, sería necesario resolver 20 ecuaciones en 20 incógnitas. Evalúe la integral usando una técnica de integración más sencilla.

74. ¿Por qué la respuesta al problema 53 podría obtenerse *sin ningún trabajo*?

7.7 Integrales impropias

■ **Introducción** Hasta el momento, en el estudio de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$, entendíamos que

- los límites de integración eran números finitos, y que
- la función f era *continua* sobre $[a, b]$ o, en caso de ser discontinua, que estaba *acotada* sobre el intervalo.

Cuando se omite una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una **integral impropia**. En el siguiente análisis, primero consideramos integrales de funciones que están definidas y son continuas sobre intervalos no acotados; en otras palabras,

- por lo menos uno de los límites de integración es ∞ o $-\infty$.

Después de eso examinamos integrales sobre intervalos acotados de funciones que se vuelven no acotadas sobre un intervalo. En el segundo tipo de integral impropia,

- el integrando f tiene una *discontinuidad infinita* en algún número en el intervalo de integración.

■ **Integrales impropias: intervalos no acotados** Si el integrando f está definido sobre un intervalo no acotado, hay tres **integrales impropias** posibles con límites de integración infinitos. Sus definiciones se resumen como sigue:

Definición 7.7.1 Intervalos no acotados

i) Si f es continua sobre $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

ii) Si f es continua sobre $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

iii) Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx. \quad (3)$$

Cuando los límites (1) y (2) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se dice que las integrales **divergen**. En (3) la integral $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ converge en el supuesto de que *ambas* $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ y $\int_c^\infty f(x) dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ o $\int_c^\infty f(x) dx$ diverge, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ diverge.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Evalúe $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Solución Por (1),

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_2^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-2} - 2^{-2}).$$

Puesto que el límite $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{-2} = \lim_{b \rightarrow \infty} (1/b^2)$ existe,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-2} - 2^{-2}) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4} \right) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

la integral dada converge, y

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}.$$

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\int_1^{\infty} x^2 dx$.

Solución Por (1),

$$\int_1^{\infty} x^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} \right).$$

Puesto que $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} \right) = \infty$ existe, se concluye que la integral diverge.

EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$.

Solución Puesto que c puede escogerse de manera arbitraria en (3), se elige $c = 1$ y escribimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \int_{-\infty}^1 x^2 dx + \int_1^{\infty} x^2 dx.$$

Pero en el ejemplo 2 vimos que $\int_1^{\infty} x^2 dx$ diverge. Esto es suficiente para concluir que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$ también diverge.

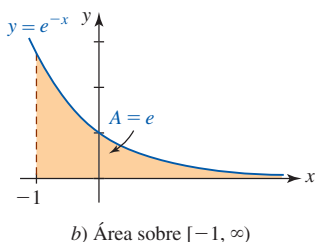
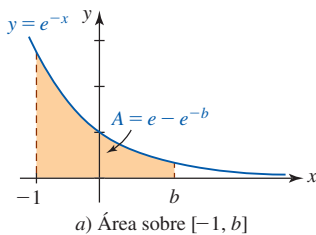


FIGURA 7.7.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

■ **Área** Si $f(x) \geq 0$ para toda x sobre $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, \infty)$, entonces cada una de las integrales en (1), (2) y (3) puede interpretarse como área bajo la gráfica de f sobre el intervalo siempre que la integral converja.

EJEMPLO 4 Área

Evalúe $\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx$. Interprete geoméricamente.

Solución Por (1),

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-1}^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_{-1}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (e - e^{-b}).$$

Puesto que $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 0$, $\lim_{b \rightarrow \infty} (e - e^{-b}) = e$ y así la integral dada converge a e . En la **FIGURA 7.7.1a)** vemos que el área bajo la gráfica de la función positiva $f(x) = e^{-x}$ sobre el intervalo $[-1, b]$ es $e - e^{-b}$. Pero, al tomar $b \rightarrow \infty$, $e^{-b} \rightarrow 0$, y entonces, como se muestra en la figura 7.7.1b), es posible interpretar $\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = e$ como una medida del área bajo la gráfica de f sobre $[-1, \infty)$.

EJEMPLO 5 Uso de (2)

Evalúe $\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx$.

Solución Por (2),

$$\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\sin x \right]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\sin a).$$

Puesto que $\sin a$ oscila entre -1 y 1 , concluimos que $\lim_{a \rightarrow -\infty} (-\sin a)$ no existe. Por tanto, $\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx$ diverge. ■

EJEMPLO 6 Uso de (3)

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$.

Solución Al escoger $c = 0$, es posible escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = I_1 + I_2.$$

Primero, se analizará I_1 :

$$I_1 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x + 1) \right]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\ln 2 - \ln(e^a + 1)].$$

Luego, $e^a + 1 \rightarrow 1$ puesto que $e^a \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow -\infty$. En consecuencia, $\ln(e^a + 1) \rightarrow \ln 1 = 0$ cuando $a \rightarrow -\infty$. Por tanto, $I_1 = \ln 2$.

Segundo, se tiene

$$I_2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(e^b + 1) - \ln 2].$$

No obstante, $e^b + 1 \rightarrow \infty$ cuando $b \rightarrow \infty$, de modo que $\ln(e^b + 1) \rightarrow \infty$. Por tanto, I_2 diverge.

Debido a que ambas I_1 e I_2 no convergen, se concluye que la integral dada es divergente. ■

EJEMPLO 7 Uso de (3)

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$ converge porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

El resultado se concluye a partir de los hechos de que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\lim_{a \rightarrow -\infty} \tan^{-1} a = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Trabajo

En (5) de la sección 6.8 vimos que el trabajo realizado para levantar una masa m_2 desde la superficie de un planeta de masa m_1 hasta una altura h está dado por

$$W = \int_R^{R+h} \frac{km_1 m_2}{r^2} \, dr,$$

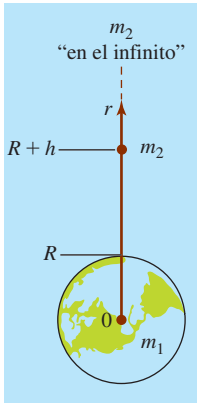


FIGURA 7.7.2 Masa m_2 levantada hasta el “infinito” en el ejemplo 8

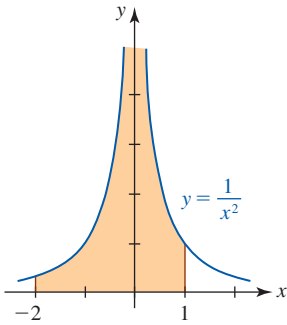


FIGURA 7.7.3 $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x^2$

donde R es el radio del planeta. Así, la cantidad de trabajo realizado para levantar m_2 hasta una distancia ilimitada o “infinita” desde la superficie del planeta es

$$\begin{aligned} W &= \int_R^\infty \frac{km_1 m_2}{r^2} dr \\ &= km_1 m_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_R^b r^{-2} dr \\ &= km_1 m_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{km_1 m_2}{R}. \end{aligned}$$

Vea la FIGURA 7.7.2. A partir de los datos en el ejemplo 2 de la sección 6.8 se concluye que el trabajo realizado para levantar una carga útil de 5 000 kg hasta una “distancia infinita” desde la superficie terrestre es

$$W = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000)}{6.4 \times 10^6} \approx 3.13 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Recuerde que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ existe. Además, si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no es posible evaluar una integral como

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (4)$$

mediante el mismo procedimiento, puesto que $f(x) = 1/x^2$ tiene una discontinuidad infinita en $[-2, 1]$. Vea la FIGURA 7.7.3. En otras palabras, para la integral en (4), el “procedimiento”

$$-x^{-1} \Big|_{-2}^1 = (-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

carece de sentido. Por tanto, se tiene otro tipo de integral que demanda un tratamiento especial.

■ Integrales impropias: discontinuidades infinitas De una integral $\int_a^b f(x) dx$ también se dice que es **impropia** si f no está acotada sobre $[a, b]$, es decir, si f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración. Hay tres **integrales impropias** posibles de este tipo. Sus definiciones se resumen a continuación.

Definición 7.7.2 Discontinuidades infinitas

i) Si f es continua sobre $[a, b)$ y $|f(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow b^-$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (5)$$

ii) Si f es continua sobre $(a, b]$ y $|f(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^+$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^b f(x) dx. \quad (6)$$

iii) Si $|f(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c$ para alguna c en (a, b) y f es continua en todos los demás números en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7)$$

Cuando los límites en (5) y (6) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral **diverge**. En (7) la integral $\int_a^b f(x) dx$ converge siempre que ambas $\int_a^c f(x) dx$ y $\int_c^b f(x) dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_a^c f(x) dx$ o $\int_c^b f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

EJEMPLO 9 Uso de (6)

Evalúe $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Solución Observe que $f(x) = 1/\sqrt{x} \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, es decir, $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de f . Así, por (6) de la definición 7.7.2,

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^4 x^{-1/2} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_s^4 = \lim_{s \rightarrow 0^+} [4 - 2s^{1/2}].$$

Puesto que $\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{1/2} = 0$ se tiene $\lim_{s \rightarrow 0^+} [4 - 2s^{1/2}] = 4$. Entonces, la integral dada converge y

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4.$$

Como vemos en la FIGURA 7.7.4, el número 4 puede considerarse como el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

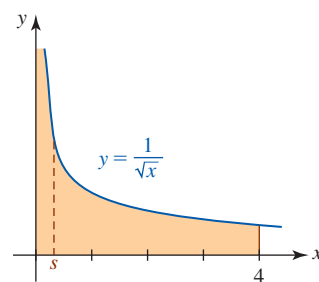


FIGURA 7.7.4 Área bajo la gráfica en el ejemplo 9

EJEMPLO 10 Uso de (6)

Evalúe $\int_0^e \ln x dx$.

Solución En este caso se sabe que $f(x) = \ln x \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. Al usar (6) e integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^e \ln x dx &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^e \ln x dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_s^e \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} [(e \ln e - e) - (s \ln s - s)] \quad \leftarrow \ln e = 1 \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s(1 - \ln s). \end{aligned}$$

Luego, el último límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, pero si se escribe como

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s},$$

identificamos que la forma indeterminada ahora es ∞/∞ . Entonces, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s} \stackrel{h}{=} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-1/s}{-1/s^2} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s = 0.$$

En consecuencia, la integral converge y $\int_0^e \ln x dx = 0$.

El resultado $\int_0^e \ln x dx = 0$ en el ejemplo 10 indica que el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = \ln x$ y el eje x sobre $[0, e]$ es 0. A partir de la FIGURA 7.7.5 vemos que

$$\int_0^e \ln x dx = \int_0^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -A_1 + A_2 = 0.$$

En el ejemplo 7 de la sección 7.3 vimos que $\int_1^e \ln x dx = 1$, y así $A_1 = A_2 = 1$.

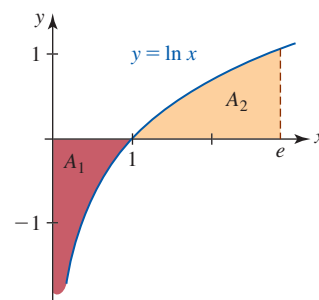


FIGURA 7.7.5 Área neta con signo en el ejemplo 10

EJEMPLO 11 Uso de (7)

Evalúe $\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx$.

Solución En el intervalo $[1, 5]$ el integrando tiene una discontinuidad infinita en 2. En consecuencia, a partir de (7) escribimos

$$\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx = \int_1^2 (x-2)^{-1/3} dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3} dx = I_1 + I_2.$$

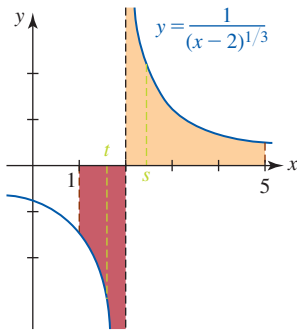


FIGURA 7.7.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 11

Ahora,

$$I_1 = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t (x-2)^{-1/3} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{3}{2} (x-2)^{2/3} \right]_1^t$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 2^-} [(t-2)^{2/3} - 1] = -\frac{3}{2}.$$

De forma similar,

$$I_2 = \lim_{s \rightarrow 2^+} \int_s^5 (x-2)^{-1/3} dx = \lim_{s \rightarrow 2^+} \left[\frac{3}{2} (x-2)^{2/3} \right]_s^5$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{s \rightarrow 2^+} [3^{2/3} - (s-2)^{2/3}] = \frac{3^{5/3}}{2}.$$

Puesto que ambas I_1 e I_2 convergen, la integral dada converge y

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = -\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 1.62.$$

Observe a partir de la FIGURA 7.7.6 que este último número representa un área neta con signo sobre el intervalo $[1, 5]$. ■

EJEMPLO 12 Otro repaso a la integral en (4)

Evalúe $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Solución Ésta es la integral analizada en (4). Puesto que en el intervalo $[-2, 1]$ el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0, escribimos

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = I_1 + I_2.$$

Luego, el resultado

$$I_1 = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-x^{-1}) \Big|_{-2}^t = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right] = \infty$$

indica que no hay necesidad de evaluar $I_2 = \int_0^1 dx/x^2$. La integral $\int_{-2}^1 dx/x^2$ diverge.

NOTAS DESDE EL AULA

- i) Usted debe comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx$ diverge, puesto que ambas $\int_{-\infty}^0 x dx$ y $\int_0^{\infty} x dx$ divergen. Un error común que se comete al trabajar con integrales con límites infinitos dobles es usar un límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-t}^t = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} [t^2 - t^2] = 0.$$

Por supuesto, esta “respuesta” es incorrecta. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ requieren la evaluación de dos límites *independientes*.

- ii) En el trabajo previo a menudo escribimos sin pensar que la integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (8)$$

Para integrales impropias es necesario proceder con más cautela. Por ejemplo, la integral

$\int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx$ converge (vea el problema 25 en los ejercicios 7.7), pero

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx \neq \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{x+1} dx.$$

La propiedad en (8) sigue siendo válida para integrales impropias siempre que ambas integrales en el miembro derecho de la igualdad converjan.

- iii) Para ejemplos, problemas y gráficas como la figura 7.7.1, los estudiantes a menudo quedan con la impresión de que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ es una condición necesaria para que la integral $\int_a^\infty f(x) dx$ converja. Esto no es así. Cuando llegue a los ejercicios 9.3 trabaje el problema 70.
- iv) Es posible que una integral tenga límites de integración infinitos y un integrando con una discontinuidad infinita. Para determinar si una integral como

$$\begin{array}{l} \text{límite infinito} \rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ \text{el integrando es discontinuo en } x=1 \rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \end{array}$$

converge, la integración se interrumpe en algún punto de continuidad conveniente del integrando; por ejemplo, $x=2$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = I_1 + I_2. \quad (9)$$

I_1 e I_2 son integrales impropias; I_1 es del tipo dado en (6) e I_2 es del tipo dado en (1). Si ambas I_1 e I_2 convergen, entonces la integral original converge. Vea los problemas 85 y 86 en los ejercicios 7.7.

- v) El integrando de $\int_a^b f(x) dx$ también puede tener discontinuidades infinitas tanto en $x=a$ como en $x=b$. En este caso la integral impropia se define en forma análoga a (7). Si un integrando f tiene una discontinuidad infinita en varios números en (a, b) , entonces la integral impropia se define mediante una extensión natural de (7). Vea los problemas 87 y 88 en los ejercicios 7.7.
- vi) Algunas veces ocurren cosas raras cuando se trabaja con integrales impropias. Es posible girar una región con área infinita alrededor de un eje y el volumen resultante del sólido de revolución puede ser finito. Un ejemplo bastante famoso de esta clase se proporciona en el problema 89 de los ejercicios 7.7.

Ejercicios 7.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^4} dx$
2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}} dx$
4. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.01}} dx$
5. $\int_{-\infty}^3 e^{2x} dx$
6. $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$
7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$
8. $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2} dt$
9. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$
10. $\int_e^\infty \ln x dx$
11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} dx$
12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$
13. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+9)^2} dx$
14. $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{3x+1}} dx$
15. $\int_2^\infty ue^{-u} du$
16. $\int_{-\infty}^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx$
17. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$
18. $\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2} dt$

19. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2} dx$
20. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+2x+3} dx$
21. $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$
22. $\int_{-\infty}^0 e^x \cos 2x dx$
23. $\int_{1/2}^\infty \frac{x+1}{x^3} dx$
24. $\int_0^\infty (e^{-x} - e^{-2x})^2 dx$
25. $\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx$
26. $\int_3^\infty \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9} \right] dx$
27. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+6x+5} dx$
28. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$
29. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$
30. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

En los problemas 31-52, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

31. $\int_0^5 \frac{1}{x} dx$
32. $\int_0^8 \frac{1}{x^{2/3}} dx$
33. $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.99}} dx$
34. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.01}} dx$
35. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$
36. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

37. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx$ 38. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$
39. $\int_0^2 (x-1)^{-2/3} dx$ 40. $\int_0^{27} \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{2/3}} dx$
41. $\int_0^1 x \ln x dx$ 42. $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$
43. $\int_0^{\pi/2} \tan t dt$ 44. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\tan \theta}} d\theta$
45. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ 46. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$
47. $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ 48. $\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx$
49. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 50. $\int_0^2 \frac{e^w}{\sqrt{e^w - 1}} dw$
51. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ 52. $\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] dx$

En los problemas 53 y 54, use una sustitución para evaluar la integral dada.

53. $\int_{12}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx$ 54. $\int_1^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

Repaso de aplicaciones

En los problemas 55-58, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

55. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$; $[1, \infty)$
56. $f(x) = \frac{10}{x^2 + 25}$; $(-\infty, 5]$
57. $f(x) = e^{-|x|}$; $(-\infty, \infty)$
58. $f(x) = |x|^3 e^{-x^4}$; $(-\infty, \infty)$
59. Encuentre el área de la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x-1}$ y $y = -1/\sqrt{x-1}$ sobre el intervalo $[1, 5]$.
60. Considere la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x+2}$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.
- a) Demuestre que el área de la región es finita.
- b) Demuestre que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen infinito.

61. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de

$$y = \frac{1}{x} \quad y \quad y = \frac{1}{x(x^2 + 1)}.$$

Determine si el área de la región acotada por estas gráficas sobre el intervalo $[0, 1]$ es finita.

62. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$ y $y = 0$ sobre $[0, \infty)$ alrededor del eje x .
63. Encuentre el trabajo realizado contra la gravedad al levantar una carga de 10 000 kg hasta una distancia infinita por arriba de la superficie de la Luna. [Sugerencia: Revise la página 357 de la sección 6.8.]

ta por arriba de la superficie de la Luna. [Sugerencia: Revise la página 357 de la sección 6.8.]

64. El trabajo realizado por una fuerza externa para mover una prueba de carga q_0 radialmente desde el punto A hasta el punto B en el campo eléctrico de una carga q se define como

$$W = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr.$$

Vea la FIGURA 7.7.7.

a) Demuestre que $W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$.

- b) Encuentre el trabajo realizado para llevar la carga de prueba hasta una distancia infinita del punto B .

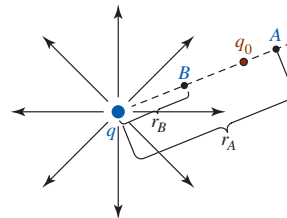


FIGURA 7.7.7 Carga en el problema 64

La **transformada de Laplace** de una función $y = f(x)$, definida por la integral

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

es muy útil en algunas áreas de las matemáticas aplicadas. En los problemas 65-72, encuentre la transformada de Laplace de la función e imponga una restricción sobre s para la cual la integral converja.

65. $f(x) = 1$ 66. $f(x) = x$
67. $f(x) = e^x$ 68. $f(x) = e^{-5x}$
69. $f(x) = \sin x$ 70. $f(x) = \cos 2x$
71. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 72. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 3 \\ e^{-x}, & x \geq 3 \end{cases}$

73. Una **función de densidad de probabilidad** es cualquier función no negativa f definida sobre un intervalo $[a, b]$ para la cual $\int_a^b f(x) dx = 1$. Compruebe que para $k > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ke^{-kx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

74. Otra integral de matemáticas aplicadas es la **función gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

- a) Demuestre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
- b) Use el resultado en el inciso a) para demostrar que

$$\Gamma(n + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n = n!,$$

donde el símbolo $n!$ se lee “ n factorial”. Debido a esta propiedad, la función gamma se denomina **función factorial generalizada**.

■ Piense en ello

En los problemas 75-78, determine todos los valores de k tales que la integral dada sea convergente.

$$75. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx$$

$$76. \int_{-\infty}^1 x^{2k} dx$$

$$77. \int_0^{\infty} e^{kx} dx$$

$$78. \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} dx$$

La siguiente es una **prueba de comparación** para integrales impropias. Suponga que f y g son continuas y que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$. Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ también converge. En los problemas 79-82, use este resultado para demostrar que la integral dada es convergente.

$$79. \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$80. \int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + 4} dx$$

$$81. \int_0^{\infty} \frac{1}{x + e^x} dx$$

$$82. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

En la prueba de comparación para integrales impropias, si la integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x) dx$ es divergente. En los problemas 83 y 84, use este resultado para demostrar que la integral dada es divergente.

$$83. \int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$84. \int_1^{\infty} e^{x^2} dx$$

En los problemas 85-88, determine si la integral dada es convergente o divergente.

$$85. \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$86. \int_{-\infty}^4 \frac{1}{(x - 1)^{2/3}} dx$$

$$87. \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$88. \int_0^2 \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}} dx$$

■ Proyectos

89. Un clásico matemático El matemático y físico italiano **Evangelista Torricelli** (1608-1647) fue el primero en investigar las interesantes propiedades de la región acotada por las gráficas de $y = 1/x$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[1, \infty)$.

- Demuestre que el área de la región es infinita.
- Demuestre, no obstante, que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen finito. Al sólido mostrado en la FIGURA 7.7.8 se le denomina **trompeta de Gabriel** o **trompeta de Torricelli**. En algunas tradiciones religiosas se afirma

que Gabriel es el ángel del juicio, el destructor de Sodoma y Gomorra, y a menudo se le identifica como el ángel que tocará la trompeta para anunciar el día del Juicio Final.

- Use (3) de la sección 6.6 para demostrar que el área superficial S del sólido de revolución está dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx.$$

Use la versión de la prueba de comparación dada en los problemas 83 y 84 para demostrar que el área superficial es infinita.

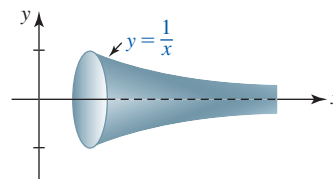


FIGURA 7.7.8 Trompeta de Gabriel en el problema 89

- Un poco de historia: Regreso a la peste** Un estudio de la epidemia de Bombay de 1905-1906 encontró que la tasa de mortalidad de la epidemia podía aproximarse con el modelo matemático

$$R = 890 \operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4),$$

donde R es el número de muertes por semana y t es el tiempo (en semanas) desde el inicio de la epidemia.

- ¿Cuál es la tasa pico de mortalidad y cuándo ocurre?
- Estime el número total de muertes al calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t) dt$.
- Demuestre que más de 99% de muertes ocurrió en las 34 primeras semanas de la epidemia; es decir, compare $\int_0^{34} R(t) dt$ con el resultado en el inciso b).
- Suponga que se desea usar un modelo “más simple” para encontrar la tasa de mortalidad de la forma

$$R_0 = \frac{a}{t^2 - 2bt + c},$$

donde $c > b^2$. Se quiere que este modelo tenga la misma tasa pico de mortalidad que el modelo original y también que el número de muertes, $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t) dt$, sea el mismo. Encuentre coeficientes a , b y c que satisfagan estos requerimientos.

- Para el modelo en el inciso d), demuestre que menos de 89% de las muertes ocurre en las 34 primeras semanas de la epidemia.

7.8 Integración aproximada

■ Introducción La vida en matemáticas podría ser bastante placentera si la antiderivada de cualquier función pudiera expresarse en términos de funciones elementales como funciones polinomiales, racionales, exponenciales o trigonométricas. Como se analizó en las *Notas desde el aula* en la sección 5.5, éste no es el caso. Por tanto, el teorema 5.5.1 no puede usarse para evaluar cualquier integral definida. Algunas veces lo mejor que podemos esperar es una aproximación del valor de una integral definida $\int_a^b f(x) dx$. En esta última sección del capítulo consideraremos tres de estos procedimientos numéricos o de *integración aproximada*.

En el siguiente análisis, de nuevo será de utilidad interpretar la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ como el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. Aunque la continuidad de f es esencial, realmente no hay ningún requerimiento de que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo.

■ Regla del punto medio Una forma de aproximar una integral definida es proceder de la misma manera que en el análisis inicial sobre cómo encontrar el área bajo una gráfica; a saber: construir elementos rectangulares bajo la gráfica y sumar sus áreas. En particular, se supondrá que $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y que este intervalo se divide en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$. (Recuerde que esta partición se denomina *partición regular*.) Una regla de aproximación sencilla, aunque razonablemente precisa, consiste en sumar las áreas de n elementos rectangulares cuyas longitudes se calculan en el punto medio de cada subintervalo. Vea la FIGURA 7.8.1a).

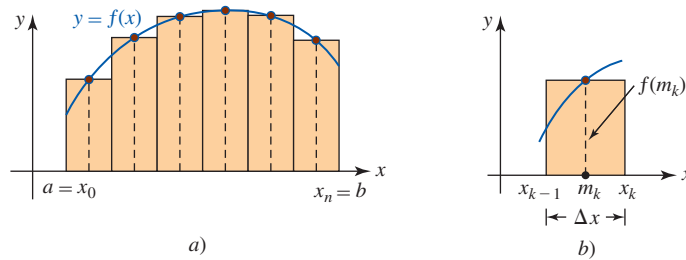


FIGURA 7.8.1 Uso de n rectángulos para aproximar la integral definida

Ahora, si $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ es el punto medio de un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces el área del elemento rectangular mostrado en la figura 7.8.1b) es

$$A_k = f(m_k) \Delta x = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \Delta x.$$

Al identificar $a = x_0$ y $b = x_n$ y sumar las n áreas, obtenemos

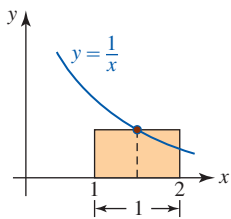
$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \Delta x + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Delta x + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \Delta x.$$

Si Δx se sustituye por $(b - a)/n$, esta regla de aproximación del punto medio puede resumirse como sigue:

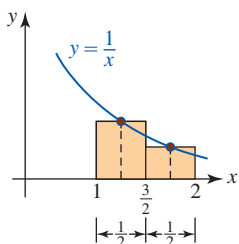
Definición 7.8.1 Regla del punto medio

La **regla del punto medio** es la aproximación $\int_a^b f(x) dx \approx M_n$, donde

$$M_n = \frac{b - a}{n} \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right]. \quad (1)$$



a)



b)

FIGURA 7.8.2 Rectángulos en el ejemplo 1

Puesto que la función $f(x) = 1/x$ es continua sobre cualquier intervalo $[a, b]$ que no incluya el origen, se sabe que $\int_a^b (1/x) dx$ existe. Para efectos del siguiente ejemplo, olvide que sabe que $\ln|x|$ es una antiderivada de $1/x$.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Aproxime $\int_1^2 (1/x) dx$ por la regla del punto medio para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 5$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 7.8.2a), el caso $n = 1$ es un rectángulo donde $\Delta x = 1$. El punto medio del intervalo es $m_1 = \frac{3}{2}$ y $f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$. En consecuencia, por (1),

$$M_1 = 1 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.6666.$$

Cuando $n = 2$, la figura 7.8.2b) muestra $\Delta x = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{3}{2}$ y $x_2 = 1 + 2\Delta x = 2$. Los puntos medios de los intervalos $[1, \frac{3}{2}]$ y $[\frac{3}{2}, 2]$ son, respectivamente, $m_1 = \frac{5}{4}$ y $m_2 = \frac{7}{4}$, de modo que $f(\frac{5}{4}) = \frac{4}{5}$ y $f(\frac{7}{4}) = \frac{4}{7}$. Por tanto, con (1) obtenemos

$$M_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right] \approx 0.6857.$$

Finalmente, para $n = 5$, $\Delta x = \frac{1}{5}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{6}{5}$, $x_2 = 1 + 2\Delta x = \frac{7}{5}$, $\dots$, $x_5 = 1 + 5\Delta x = 2$. Los puntos medios de los cinco subintervalos $[1, \frac{6}{5}]$, $[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}]$, $[\frac{7}{5}, \frac{8}{5}]$, $[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}]$, $[\frac{9}{5}, 2]$ y los valores funcionales correspondientes se proporcionan en la tabla de la derecha. Así, con la información en la tabla obtenemos

$$M_5 = \frac{1}{5} \left[\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19} \right] \approx 0.6919.$$

En otras palabras, $\int_1^2 (1/x) dx \approx M_5$ o $\int_1^2 (1/x) dx \approx 0.6919$. ■

■ **Error en la regla del punto medio** Suponga que $I = \int_a^b f(x) dx$ y que M_n es una aproximación a I usando n rectángulos. El error en el método se define como

$$E_n = |I - M_n|.$$

Por medio del siguiente resultado es posible encontrar una cota superior para el error. Se omite la demostración.

Teorema 7.8.1 Cota para el error de la regla del punto medio

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}. \quad (2)$$

Observe que esta cota superior para el error E_n es inversamente proporcional a n^2 . Por tanto, la precisión en el método mejora a medida que tomamos cada vez más rectángulos. Por ejemplo, si se duplica el número de rectángulos, el error E_{2n} es menor que un cuarto de la cota para el error para E_n . Así, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = I$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo la cota para el error (2) puede usarse para determinar el número de rectángulos con los que obtenemos una precisión prescrita.

EJEMPLO 2 Uso de (2)

Determine un valor de n de modo que (1) proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x) dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución La regla del punto medio es precisa hasta dos cifras decimales para los valores de n para los cuales la cota superior $M(b-a)^3/24n^2$ para el error es estrictamente menor que 0.005. Para $f(x) = 1/x$, se tiene $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que f'' decrece sobre $[1, 2]$, se concluye que $f''(x) \leq f''(1) = 2$ para toda x en el intervalo. Así, con $M = 2$, $b - a = 1$, se tiene

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{50}{3} \approx 16.67.$$

Al tomar $n \geq 5$ obtenemos la precisión deseada. ■

El ejemplo 2 indica que la tercera aproximación $\int_1^2 (1/x) dx \approx 0.6919$ obtenida en el ejemplo 1 es precisa hasta dos cifras decimales. Para efectos de comparación, el valor exacto de la integral, usando el teorema 5.5.1,

$$\left[\frac{1}{x} dx = \ln x \right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931$$

es correcto hasta cuatro cifras decimales. Así, para $n = 5$ el error en el método E_n es aproximadamente 0.0012.

k	m_k	$f(m_k)$
1	$\frac{11}{10}$	$\frac{10}{11}$
2	$\frac{13}{10}$	$\frac{10}{13}$
3	$\frac{15}{10}$	$\frac{10}{15}$
4	$\frac{17}{10}$	$\frac{10}{17}$
5	$\frac{19}{10}$	$\frac{10}{19}$

◀ Si se desea una precisión hasta tres cifras decimales, se usa 0.0005, etcétera.

■ **Regla trapezoidal** Un método más conocido para aproximar una integral se basa en la validez de que es posible obtener una mejor estimación de $\int_a^b f(x) dx$ al sumar las áreas de trapezoides en lugar de rectángulos. Vea la FIGURA 7.8.3a). El área del trapezoide mostrado en la figura 7.8.3b) es $h(l_1 + l_2)/2$. Así, el área A_k del elemento trapezoidal mostrado en la figura 7.8.3c) es

$$A_k = \Delta x \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

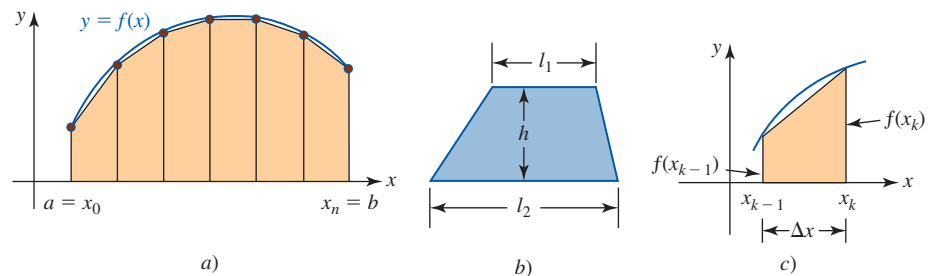


FIGURA 7.8.3 Uso de n trapezoides para aproximar la integral definida

Así, para una partición regular en el intervalo $[a, b]$ sobre el que f es continua, obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \Delta x \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}.$$

Esta nueva regla de aproximación se resume en la siguiente definición después de combinar términos semejantes y sustituir $\Delta x = (b - a)/n$.

Definición 7.8.2 Regla trapezoidal

La **regla trapezoidal** es la aproximación $\int_a^b f(x) dx \approx T_n$, donde

$$T_n = \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \quad (3)$$

■ **Error en la regla trapezoidal** El error en el método para la regla trapezoidal está dado por $E_n = |I - T_n|$, donde $I = \int_a^b f(x) dx$. Como lo demuestra el siguiente teorema, la cota del error para la regla trapezoidal es casi la misma que para la regla del punto medio.

Teorema 7.8.2 Cota para el error para la regla trapezoidal

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \quad (4)$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
5	$\frac{11}{6}$	$\frac{6}{11}$
6	2	$\frac{1}{2}$

EJEMPLO 3 Uso de (4) y (3)

Determine un valor de n de modo que la regla trapezoidal proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x) dx$ precisa hasta dos cifras decimales. Aproxime la integral.

Solución Al usar la información en el ejemplo 2, de inmediato tenemos:

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{100}{3} \approx 33.33.$$

En este caso se toma $n \geq 6$ para obtener la precisión deseada. Entonces, $\Delta x = \frac{1}{6}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{7}{6}$, ..., $x_6 = 1 + 6\Delta x = 2$. Con la información en la tabla acompañante, (3) proporciona

$$T_6 = \frac{1}{12} \left[1 + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{1}{2} \right] \approx 0.6949. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Uso de (4) y (3)

Aproxime $\int_{1/2}^1 \cos \sqrt{x} \, dx$ por la regla trapezoidal de modo que el error sea menor que 0.001.

Solución La segunda derivada de $f(x) = \cos \sqrt{x}$ es

$$f''(x) = \frac{1}{4x} \left(\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cos \sqrt{x} \right).$$

Para x en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ se tiene $0 < (\sin \sqrt{x})/\sqrt{x} \leq 1$ y $0 < \cos \sqrt{x} \leq 1$, y en consecuencia $|f''(x)| \leq \frac{1}{4x}$. Por tanto, sobre el intervalo, $|f''(x)| \leq \frac{1}{2}$. Así, con $M = \frac{1}{2}$ y $b - a = \frac{1}{2}$, por (4) se concluye que deseamos

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3}{12n^2} < 0.001 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{125}{24} \approx 5.21.$$

Así, para obtener la precisión deseada es suficiente escoger $n = 3$ y $\Delta x = \frac{1}{6}$. Con ayuda de una calculadora para obtener la información en la tabla acompañante, a partir de (3) encontramos la siguiente aproximación para $\int_{1/2}^1 \cos \sqrt{x} \, dx$:

$$T_3 = \frac{1}{12} \left[\cos \sqrt{\frac{1}{2}} + 2 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \cos \sqrt{\frac{5}{6}} + \cos 1 \right] \approx 0.3244. \quad \blacksquare$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	$\frac{1}{2}$	0.7602
1	$\frac{2}{3}$	0.6848
2	$\frac{5}{6}$	0.6115
3	1	0.5403

Aunque no es evidente a partir de una figura, un método mejorado de aproximación a una integral definida $\int_a^b f(x) \, dx$ puede obtenerse al considerar una serie de arcos parabólicos en lugar de una serie de cuerdas usadas en la regla trapezoidal. Es posible demostrar, en ciertas condiciones, que un arco parabólico que pasa por tres puntos específicos “ajusta” la gráfica de f mejor que una sola línea recta. Vea la FIGURA 7.8.4. Al sumar las áreas bajo arcos parabólicos obtenemos una aproximación a la integral.

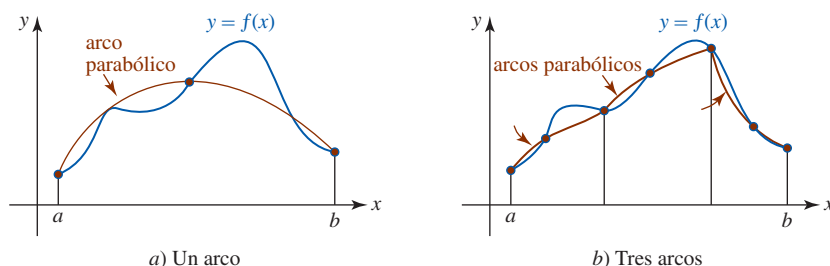


FIGURA 7.8.4 Ajuste de un arco parabólico a través de tres puntos consecutivos sobre la gráfica de una función

Para empezar, encontramos el área bajo un arco de una parábola que pasa por tres puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, donde $x_0 < x_1 < x_2$ y $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$. Como se muestra en la FIGURA 7.8.5, esto puede hacerse al encontrar el área bajo la gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[-h, h]$ de modo que P_0 , P_1 y P_2 tienen coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) , respectivamente. El intervalo $[-h, h]$ se escoge por simplicidad; el área en cuestión no depende de la ubicación del eje y . Al usar el teorema 5.5.1, el área es

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) \, dx = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \quad (5)$$

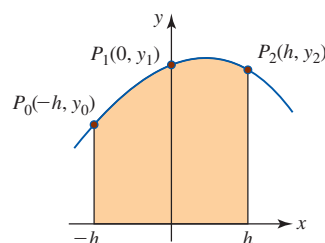


FIGURA 7.8.5 Área bajo un arco parabólico

Pero, puesto que la gráfica pasa por $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) , debe tenerse

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C \quad (6)$$

$$y_1 = C \quad (7)$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C. \quad (8)$$

Al sumar (6) y (8) y usar (7), encontramos $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$. Por tanto, (5) puede expresarse como

$$\text{área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (9)$$

■ **Regla de Simpson** Ahora suponga que el intervalo $[a, b]$ se parte en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$, donde n es un entero par. Como se muestra en la FIGURA 7.8.6, sobre cada subintervalo $[x_{k-2}, x_k]$ de ancho $2\Delta x$ la gráfica de f se aproxima por un arco de parábola que pasa por los puntos P_{k-2} , P_{k-1} y P_k sobre la gráfica que corresponde a los puntos frontera y al punto medio del subintervalo. Si A_k denota el área bajo la parábola sobre $[x_{k-2}, x_k]$, por (9) se concluye que

$$A_k = \frac{\Delta x}{3}[f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)].$$

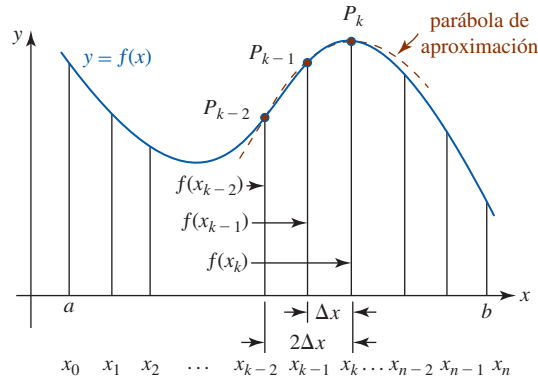


FIGURA 7.8.6 Aproximación de la función por un arco parabólico

Por tanto, al sumar todas las A_k obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Esta regla de aproximación, denominada así en honor del matemático inglés **Thomas Simpson** (1710-1761), se resume en la siguiente definición.

Definición 7.8.3 Regla de Simpson

La **regla de Simpson** es la aproximación $\int_a^b f(x) dx \approx S_n$, donde

$$S_n = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \quad (10)$$

De nuevo observamos que el entero n en (10) debe ser par, ya que cada A_k representa el área bajo un arco parabólico sobre un subintervalo de ancho $2\Delta x$.

■ **Error en la regla de Simpson** Si $I = \int_a^b f(x) dx$, el siguiente teorema establece una cota superior para el error en el método $E_n = |I - S_n|$ usando una cota superior para la cuarta derivada.

Teorema 7.8.3 Cota para el error para la regla de Simpson

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \quad (11)$$

EJEMPLO 5 Uso de (11)

Determine un valor de n tal que (10) proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x) dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución Para $f(x) = 1/x$, $f^{(4)}(x) = 24/x^5$ y sobre $[1, 2]$, $f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(1) = 24$. Así, con $M = 24$ se concluye de (11) que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^4 > \frac{80}{3} \approx 26.67$$

y así $n > 2.27$. Puesto que n debe ser un entero, es suficiente tomar $n \geq 4$. ■

EJEMPLO 6 Uso de (10)

Aproxime $\int_1^2 (1/x) dx$ por la regla de Simpson para $n = 4$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene $\Delta x = \frac{1}{4}$. Por (10) y la tabla acompañante obtenemos

$$S_4 = \frac{1}{12} \left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2} \right] \approx 0.6933. \quad \blacksquare$$

k	m_k	$f(m_k)$
0	1	1
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$
4	2	$\frac{1}{2}$

En el ejemplo 6, tenga en cuenta que aun cuando se use $n = 4$, la integral definida $\int_1^2 (1/x) dx$ se está aproximando por el área de sólo dos arcos parabólicos. Recuerde que con la regla del punto medio se obtuvo $\int_1^2 (1/x) dx \approx 0.6919$ con $n = 5$, la regla trapezoidal proporcionó $\int_1^2 (1/x) dx \approx 0.6949$ con $n = 6$, y 0.6931 es una aproximación de la integral correcta hasta cuatro cifras decimales.

En algunas aplicaciones sólo puede ser posible obtener valores numéricos de una cantidad $Q(x)$; por ejemplo, por medición o experimentación, en puntos específicos en algún intervalo $[a, b]$ y aun así ser necesario tener alguna idea del valor de la integral definida $\int_a^b Q(x) dx$. Aun cuando Q no esté definida por medio de alguna fórmula explícita, sigue siendo posible aplicar la regla trapezoidal o la regla de Simpson para aproximar la integral.

EJEMPLO 7 Área de un terreno

Suponga que desea encontrar el área de un terreno de forma irregular acotado por un camino recto y la orilla de un lago. Los límites del terreno se indican mediante las líneas trazadas en la FIGURA 7.8.7a). Suponga que la frontera de 1 milla a lo largo del camino se divide, por ejemplo, en $n = 8$ subintervalos y que luego, como se muestra en la figura 7.8.7b), se miden las distancias perpendiculares desde el camino hasta la orilla del lago. Ahora es posible aproximar el área del terreno $A = \int_a^b f(x) dx$ por medio de la regla de Simpson. Con $b - a = 1$ mi = 5 280 pies, $\Delta x = (b - a)/n = 5\,280/8 = 660$ y las identificaciones $f(x_0) = 83, \dots, f(x_8) = 28$, de (10) obtenemos la siguiente aproximación para A :

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{660}{3} [83 + 4(82) + 2(96) + 4(100) + 2(82) + 4(55) + 2(63) + 4(54) + 28] \\ &= 386\,540 \text{ pies}^2. \end{aligned}$$

Sabiendo que 1 acre = 43 560 pies², vemos que el terreno mide aproximadamente 8.9 acres.

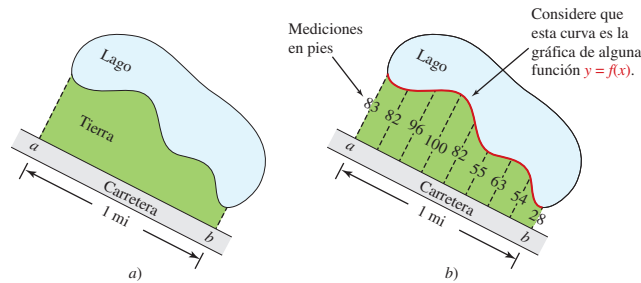


FIGURA 7.8.7 Orilla del lago en el ejemplo 7

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) A pesar de la popularidad de la regla trapezoidal, una comparación de las cotas de error (2) y (4) muestra que la regla del punto medio es más precisa que la trapezoidal. Específicamente, (2) sugiere que en algunos casos el error en la regla del punto medio puede ser la mitad que en la regla trapezoidal. Vea el problema 33 en los ejercicios 7.8.
- ii) En algunas circunstancias, las reglas consideradas en el análisis previo proporcionan el valor *exacto* de una integral $\int_a^b f(x) dx$. Las cotas de error (2) y (4) indican que M_n y T_n producirán el valor preciso siempre que f sea una función lineal. Vea los problemas 31, 32 y 35 en los ejercicios 7.8. La regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x) dx$ siempre que f sea una función lineal, cuadrática o polinomial. Vea los problemas 34 y 36 en los ejercicios 7.8.
- iii) En general, la regla de Simpson proporciona mejor precisión que la regla del punto medio y que la trapezoidal. Así, ¿por qué molestarse con estas dos reglas? En algunos casos, las reglas del punto medio y trapezoidal producen una precisión que es suficiente para los efectos del caso en cuestión. Además, el requerimiento de que n debe ser un entero par en la regla de Simpson puede evitar su aplicación a un problema dado. También, para encontrar una cota de error para la regla de Simpson es necesario calcular y luego encontrar una cota superior para la cuarta derivada. La expresión para $f^{(4)}(x)$ puede, por supuesto, ser muy complicada. Las cotas de error para las otras dos reglas dependen de la segunda derivada.

Ejercicios 7.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla del punto medio para el valor indicado de n .

$$1. \int_1^4 (3x^2 + 2x) dx; \quad n = 3 \quad 2. \int_0^{\pi/6} \cos x dx; \quad n = 4$$

En los problemas 3 y 4, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla trapezoidal para el valor indicado de n .

$$3. \int_1^3 (x^3 + 1) dx; \quad n = 4 \quad 4. \int_0^2 \sqrt{x+1} dx; \quad n = 6$$

En los problemas 5-12, use la regla del punto medio y la regla trapezoidal para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n .

$$\begin{array}{ll} 5. \int_1^6 \frac{1}{x} dx; \quad n = 5 & 6. \int_0^2 \frac{1}{3x+1} dx; \quad n = 4 \\ 7. \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx; \quad n = 10 & 8. \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx; \quad n = 5 \\ 9. \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx; \quad n = 6 & 10. \int_0^{\pi/4} \tan x dx; \quad n = 3 \\ 11. \int_0^2 \cos x^2 dx; \quad n = 6 \end{array}$$

12. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; $n = 5$ [Sugerencia: Defina $f(0) = 1$.]

En los problemas 13 y 14, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla de Simpson para el valor indicado de n .

13. $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$; $n = 4$ 14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$; $n = 2$

En los problemas 15-22, use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n .

15. $\int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{x} dx$; $n = 4$ 16. $\int_0^5 \frac{1}{x+2} dx$; $n = 6$

17. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$; $n = 4$ 18. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1} dx$; $n = 2$

19. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+\pi} dx$; $n = 6$ 20. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$; $n = 4$

21. $\int_2^4 \sqrt{x^3+x} dx$; $n = 4$ 22. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin x} dx$; $n = 2$

23. Determine el número de rectángulos necesarios de modo que una aproximación a $\int_{-1}^2 dx/(x+3)$ sea precisa hasta dos cifras decimales.

24. Determine el número de trapezoides necesarios de modo que el error en una aproximación a $\int_0^{1.5} \sin^2 x dx$ sea menor que 0.0001.

25. Use la regla trapezoidal de modo que una aproximación al área bajo la gráfica de $f(x) = 1/(1+x^2)$ sobre $[0, 2]$ sea precisa hasta dos cifras decimales. [Sugerencia: Analice $f'''(x)$.]

26. El dominio de $f(x) = 10^x$ es el conjunto de números reales y $f(x) > 0$ para toda x . Use la regla trapezoidal para aproximar el área bajo la gráfica de f sobre $[-2, 2]$ con $n = 4$.

27. Use la regla de Simpson para determinar n de modo que el error al aproximar $\int_1^3 dx/x$ sea menor que 10^{-5} . Compare con la n necesaria en la regla trapezoidal para obtener la misma precisión.

28. Encuentre una cota superior para el error al aproximar $\int_0^3 dx/(2x+1)$ por la regla de Simpson con $n = 6$.

En los problemas 29 y 30, use los datos proporcionados en la tabla y una norma para aproximar la integral definida indicada.

29. $\int_{2.05}^{2.30} f(x) dx$;

x	2.05	2.10	2.15	2.20	2.25	2.30
$f(x)$	4.91	4.80	4.66	4.41	3.93	3.58

30. $\int_0^{1.20} f(x) dx$;

x	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.00	1.20
$f(x)$	-0.72	-0.55	-0.16	0.62	0.78	1.34	1.47	1.61	1.51

x	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.00	1.20
$f(x)$	-0.72	-0.55	-0.16	0.62	0.78	1.34	1.47	1.61	1.51

31. Compare el valor exacto de la integral $\int_0^4 (2x+5) dx$ con la aproximación obtenida con la regla del punto medio con $n = 2$ y $n = 4$.

32. Repita el problema 31 usando la regla trapezoidal.

33. a) Encuentre el valor exacto de la integral $I = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2) dx$.

b) Use la regla del punto medio con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I .

c) Use la regla trapezoidal con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I .

d) Compare los errores $E_8 = |I - M_8|$ y $E_8 = |I - T_8|$.

34. Compare el valor exacto de la integral $\int_{-1}^1 (x^3 - x^2) dx$ con las aproximaciones obtenidas con la regla de Simpson con $n = 2$ y $n = 4$.

35. Demuestre que la regla trapezoidal proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x) dx$ cuando $f(x) = c_1x + c_0$, con c_0 y c_1 constantes. Geométricamente, ¿por qué esto tiene sentido?

36. Demuestre que la regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x) dx$ donde $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, con c_0, c_1, c_2 y c_3 constantes.

37. Use los datos mostrados en la FIGURA 7.8.8 y la regla de Simpson para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica de la función continua f sobre el intervalo $[1, 4]$.

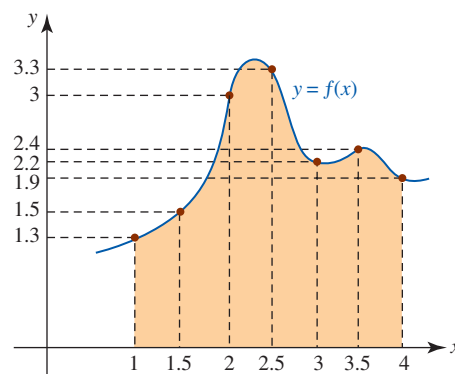


FIGURA 7.8.8 Gráfica para el problema 37

38. Use la regla trapezoidal con $n = 9$ para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica en la FIGURA 7.8.9. ¿Proporciona esta regla el valor exacto del área?

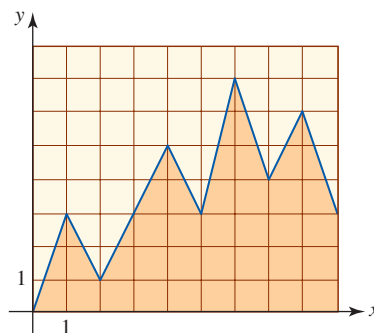


FIGURA 7.8.9 Gráfica para el problema 38

39. El gran estanque para peces en forma irregular que se muestra en la FIGURA 7.8.10 contiene agua hasta una profundidad uniforme de 4 pies. Use la regla de Simpson para encontrar una aproximación al número de galones de agua que hay en el estanque. Las medidas están en pies; la separación vertical entre las mediciones horizontales es 1.86 pies. En 1 pie³ de agua hay 7.48 galones de agua.

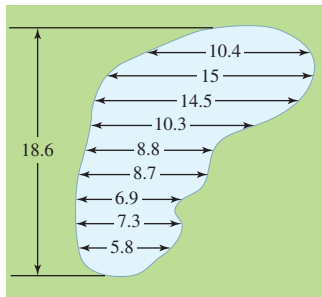
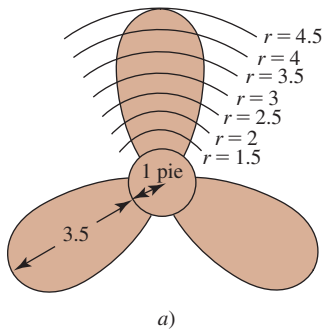


FIGURA 7.8.10 Estanque en el problema 39

40. El momento de inercia I de la hélice con tres aspas de un barco cuyas dimensiones se proporcionan en la FIGURA 7.8.11a) está dado por

$$I = \frac{3\rho\pi}{2g} + \frac{3\rho}{g} \int_1^{4.5} r^2 A \, dr,$$

donde ρ es la densidad del metal, g es la aceleración de la gravedad y A es el área de una sección transversal de la hélice a una distancia de r pies del centro del cubo. Si $\rho = 570$ lb/pie³ para el bronce, use los datos en la figura 7.8.11b) y la regla trapezoidal para encontrar una aproximación a I .



a)

r (pies)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
A (pies)	0.3	0.50	0.62	0.70	0.60	0.50	0.27	0

b)

FIGURA 7.8.11 Hélice en el problema 40

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 41 y 42, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use la regla de Simpson para aproximar el área acotada por la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo indicado. Use $n = 10$.

41. $f(x) = \sqrt[5]{(5^{2.5} - |x|^{2.5})^2}$; $[-5, 5]$
42. $f(x) = 1 + |\sin x|^x$; $[0, 2\pi]$ [Sugerencia: Use la gráfica para discernir $f(0)$.]
43. a) Demuestre que la integral convergente $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^{5/2}} dx$ puede escribirse como $\int_0^1 t^{1/2} e^t dt$.
b) Use el resultado en el inciso a) y la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la integral impropia original.
44. Use (3) de la sección 6.5 y la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ desde el punto $(0, 1)$ hasta $(2, \frac{11}{3})$.

45. Use (3) de la sección 6.5 y la regla trapezoidal con $n = 10$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = x^2$ desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.
46. Use (3) de la sección 6.5 y la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, 2]$.
47. Use (3) de la sección 6.6 y la regla del punto medio con $n = 5$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$ alrededor del eje x .
48. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $x = y^2 + 1$ para $-1 \leq y \leq 1$ alrededor del eje y .

Piense en ello

49. a) Calcule la longitud L de la gráfica que se muestra en la FIGURA 7.8.12 sobre el intervalo $[1, 8]$.
b) Explique por qué usar la regla trapezoidal con $n = 7$ no es una buena idea.

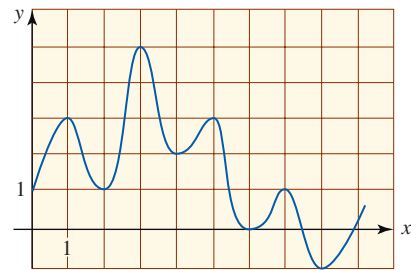


FIGURA 7.8.12 Gráfica para el problema 49

50. **Un poco de historia** La función integral logarítmica, $\text{Li}(x)$, se define por la integral

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$$

para $x > 2$. En 1896, el matemático francés **Jacques Hadamard** (1865-1963) y el matemático belga **Charles-Jean de la Vallée Poussin** (1886-1962) demostraron —de manera independiente— el teorema de los números primos, que establece que el número de números primos $(2, 3, 5, 7, 11, \text{etc.})$ menores que o iguales a x , denotado por $\pi(x)$, puede aproximarse por la integral logarítmica, lo cual significa que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1.$$

- a) Demuestre que $\pi(x)$ también puede aproximarse por la función $x/\ln x$ al usar la regla de L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Li}(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Puesto que hay una infinidad de números primos, $\text{Li}(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

- b) Use la regla de Simpson para aproximar $\text{Li}(100)$. Calcule $x/\ln x$ para $x = 100$. Compare estas cifras con el número real de números primos menores que 100.

Revisión del capítulo 7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Bajo el cambio de variable $u = 2x + 3$, la integral $\int_1^5 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}} dx$ se vuelve $\int_5^{13} (u^{1/2} - 3u^{-1/2}) du$. _____
2. La sustitución trigonométrica $u = a \sec \theta$ es idónea para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$. _____
3. El método de integración por partes se obtiene a partir de la regla del producto para diferenciación. _____
4. $\int_1^e 2x \ln x^2 dx = e^2 + 1$. _____
5. Las fracciones parciales no son aplicables a $\int \frac{1}{(x-1)^3} dx$. _____
6. Una descomposición en fracciones parciales de $x^2/(x+1)^2$ puede encontrarse al tener la forma $A/(x+1) + B/(x+1)^2$, donde A y B son constantes. _____
7. Para evaluar $\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$, se supone que es posible encontrar constantes A, B, C y D tales que $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$. _____
8. Para evaluar $\int x^n e^x dx$, n un entero positivo, la integración por partes se usa $n-1$ veces. _____
9. Para evaluar $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$, es necesario usar $x = 3 \sin \theta$. _____
10. Cuando se evalúa, la integral $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ puede expresarse como una suma de potencias de $\cos x$. _____
11. Si $\int_a^\infty f(x) dx$ y $\int_a^\infty g(x) dx$ convergen, entonces $\int_a^\infty [f(x) + g(x)] dx$ converge. _____
12. Si $\int_a^\infty [f(x) + g(x)] dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ converge. _____
13. Si f es continua para toda x y $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ diverge. _____
14. La integral $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ es definida por $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$. _____
15. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1 + \ln x} dx$ es una integral impropia. _____
16. $\int_{-1}^1 x^{-3} dx = 0$. _____
17. $\int_0^4 x^{-0.999} dx$ converge. _____
18. $\int_1^\infty x^{-0.999} dx$ diverge. _____
19. $\int_2^\infty \left[\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} \right] dx$ diverge, ya que $\int_2^\infty \frac{e^x}{e^x+1} dx$ diverge. _____
20. Si una función f positiva tiene una discontinuidad infinita en un número $[a, b]$, entonces el área bajo la gráfica sobre el intervalo también es infinita. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-6, llene los espacios en blanco.

1. $\int_0^\infty e^{-5x} dx =$ _____.
2. Si $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx =$ _____.
3. Si $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____.
4. La integral $\int_1^\infty x^p dx$ converge para $p <$ _____ y diverge para $p \geq$ _____.

5. $\int_0^x e^{-2t} dt = \int_x^\infty e^{-2t} dt$ para $x =$ _____.

6. $\int \sin x \ln(\sin x) dx =$ _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-80, use los métodos de este capítulo, o de capítulos previos, para evaluar la integral dada.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + 9} dx$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

5. $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx$

7. $\int \frac{x^2 + 4}{x^2} dx$

9. $\int \frac{x - 5}{x^2 + 4} dx$

11. $\int \frac{(\ln x)^9}{x} dx$

13. $\int t \sin^{-1} t dt$

15. $\int (x + 1)^3(x - 2) dx$

17. $\int \ln(x^2 + 4) dx$

19. $\int \frac{1}{x^4 + 10x^3 + 25x^2} dx$

21. $\int \frac{x}{x^3 + 3x^2 - 9x - 27} dx$

23. $\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt$

25. $\int \tan^{10} x \sec^4 x dx$

27. $\int y \cos y dy$

29. $\int (1 + \sin^2 t) \cos^3 t dt$

31. $\int e^w(1 + e^w)^5 dw$

33. $\int \cot^3 4x dx$

35. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \tan x dx$

37. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

39. $\int_0^1 \frac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} dx$

41. $\int e^x \cos 3x dx$

2. $\int e^{\sqrt{x+1}} dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

6. $\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$

8. $\int \frac{3x - 1}{x(x^2 - 4)} dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{x + 27}}{x} dx$

12. $\int (\ln 3x)^2 dx$

14. $\int \frac{\ln x}{(x - 1)^2} dx$

16. $\int \frac{1}{(x + 1)^3(x - 2)} dx$

18. $\int 8te^{2t^2} dt$

20. $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 25} dx$

22. $\int \frac{x + 1}{(x^2 - x)(x^2 + 3)} dx$

24. $\int \frac{\sin^3 \theta}{(\cos \theta)^{3/2}} d\theta$

26. $\int \frac{x \tan x}{\cos x} dx$

28. $\int x^2 \sin x^3 dx$

30. $\int \frac{\sec^3 \theta}{\tan \theta} d\theta$

32. $\int (x - 1)e^{-x} dx$

34. $\int (3 - \sec x)^2 dx$

36. $\int_0^{\pi/3} \sin^4 x \tan x dx$

38. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$

40. $\int_{\ln 3}^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx$

42. $\int x(x - 5)^9 dx$

43. $\int \cos(\ln t) dt$
44. $\int \sec^2 x \ln(\tan x) dx$
45. $\int \cos \sqrt{x} dx$
46. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
47. $\int \cos x \sin 2x dx$
48. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$
49. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$
50. $\int \frac{1}{(8 - 2x - x^2)^{3/2}} dx$
51. $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$
52. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$
53. $\int \frac{t^5}{1 + t^2} dt$
54. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
55. $\int \frac{5x^3 + x^2 + 6x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$
56. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2} dx$
57. $\int x \sin^2 x dx$
58. $\int (t + 1)^2 e^{3t} dt$
59. $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$
60. $\int e^x \tan^2 e^x dx$
61. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$
62. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$
63. $\int \sinh^{-1} t dt$
64. $\int x \cot x^2 dx$
65. $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$
66. $\int \frac{t+3}{t^2+2t+1} dt$
67. $\int \frac{\sec^4 3u}{\cot^{12} 3u} du$
68. $\int_0^2 x^5 \sqrt{x^2 + 4} dx$
69. $\int \frac{3 + \sin x}{\cos^2 x} dx$
70. $\int \frac{\sin 2x}{5 + \cos^2 x} dx$
71. $\int x(1 + \ln x)^2 dx$
72. $\int x \cos^2 x dx$
73. $\int e^x e^{e^x} dx$
74. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx$
75. $\int \frac{2t}{1 + e^{t^2}} dt$
76. $\int \cos x \cos 2x dx$
77. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}} dx$
78. $\int (\ln 2x) \ln x dx$
79. $\int \cos x \ln|\sin x| dx$
80. $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$

En los problemas 81-92, evalúe la integral dada o demuestre que diverge.

81. $\int_0^3 x(x^2 - 9)^{-2/3} dx$
82. $\int_0^5 x(x^2 - 9)^{-2/3} dx$
83. $\int_{-\infty}^0 (x + 1)e^x dx$
84. $\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx$
85. $\int_3^{\infty} \frac{1}{1 + 5x} dx$
86. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx$
87. $\int_0^e \ln \sqrt{x} dx$
88. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t} dt$

$$89. \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos x} dx$$

$$91. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} dx$$

$$90. \int_0^{\infty} \frac{x}{x+1} dx$$

$$92. \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} dx$$

En los problemas 93 y 94, demuestre el resultado que se proporciona.

$$93. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$94. \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \pi$$

En los problemas 95 y 96, use el hecho de que $\int_0^{\infty} e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{t^2} dt = \infty$ para evaluar el límite dado.

$$95. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$$

$$96. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{x^2}}$$

97. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = e^{-3x}$ sobre $[0, \infty)$.

98. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt[3]{1-x}$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

- Encuentre el área de la región.
- Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del eje x .
- Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 1$.

99. Considere la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ dada en la FIGURA 7.R.1.

- Determine si la región R_1 , que está acotada entre las gráficas de f y su asíntota horizontal, es finita.
- Determine si las regiones R_2 y R_3 tienen áreas finitas.

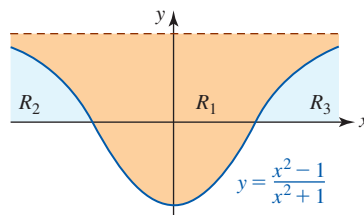


FIGURA 7.R.1 Gráfica para el problema 99

100. Use el método de Newton para encontrar el número x^* para el cual la región sombreada R en la FIGURA 7.R.2 es 99% del área total bajo la gráfica de $y = xe^{-x}$ sobre $[0, \infty)$.

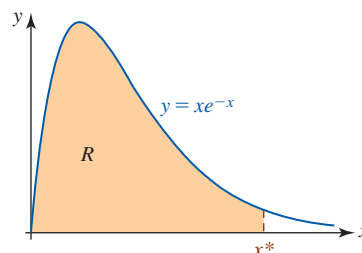


FIGURA 7.R.2 Gráfica para el problema 100

101. Una fuerza variable continua $f(x)$ actúa sobre el intervalo $[0, 1]$, donde F se mide en newtons y x en metros. Empíricamente se ha determinado que

x (m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$ (N)	0	50	90	150	210	260

Use una técnica numérica idónea para aproximar el trabajo realizado sobre el intervalo.

102. En la FIGURA 7.R.3 se muestra la gráfica de una fuerza variable F .

- a) Use elementos rectangulares de área para encontrar una aproximación al trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde $x = 1$ hasta $x = 5$.
- b) Use la regla trapezoidal para aproximar el trabajo realizado.

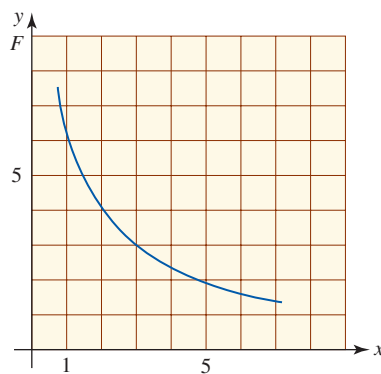
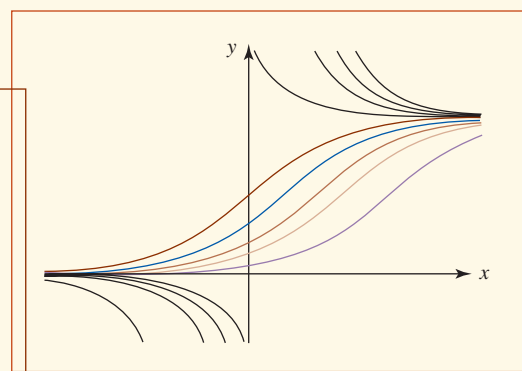
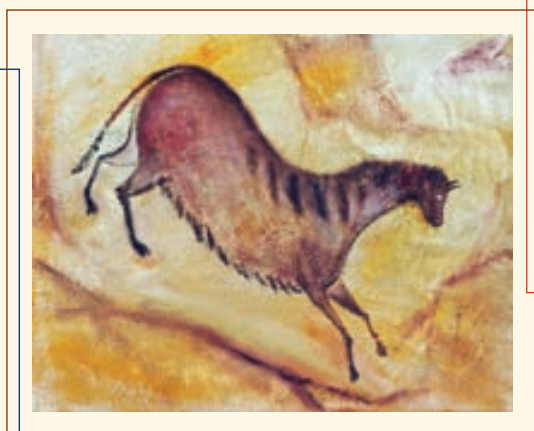


FIGURA 7.R.3 Gráfica para el problema 102

Ecuaciones diferenciales de primer orden



En este capítulo Ahora estudiaremos ecuaciones diferenciales que tienen la forma $dy/dx = F(x, y)$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales de primer orden*. Analizaremos dos métodos de solución y algunas aplicaciones de estas ecuaciones. Las ecuaciones diferenciales de orden superior se considerarán en el capítulo 16.

- 8.1 Ecuaciones separables
- 8.2 Ecuaciones lineales
- 8.3 Modelos matemáticos
- 8.4 Curvas solución sin solución
- 8.5 Método de Euler
- Revisión del capítulo 8

8.1 Ecuaciones separables

■ **Introducción** En varios conjuntos de ejercicios previos se pidió comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica una función y desconocida y una o más derivadas de y . Las ecuaciones diferenciales se clasifican por el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$\begin{array}{c} \text{derivada de orden más alto} \\ \downarrow \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \end{array} \quad (1)$$

Por supuesto, a menudo se usan símbolos diferentes. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin 2t$$

también es una ecuación diferencial de segundo orden.

► es un ejemplo de ecuación diferencial de **segundo orden**, mientras que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2)$$

es una ecuación diferencial de **primer orden**. Al usar la notación “primada”, las ecuaciones diferenciales en (1) y (2) pueden escribirse como $y'' + 4y' + 8y = 0$ y $y' = -x/y$, respectivamente. Aunque esta notación es más fácil de escribir e imprimir, la notación de Leibniz usada en (1) y (2) suele preferirse a menudo porque muestra con claridad la variable independiente.

La exploración del tema de las ecuaciones diferenciales suele comenzar con el estudio de cómo *resolverlas*. Una **solución** de una ecuación diferencial es una función $y(x)$ suficientemente diferenciable, definida de manera explícita o implícita que, cuando se sustituye en la ecuación, se reduce a una identidad sobre algún intervalo. La forma natural de denominar la gráfica $y(x)$ es **curva solución**.

Como se mencionó al inicio del capítulo, aquí estudiaremos métodos de solución y algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de *primer orden*. A partir de este momento establecemos la hipótesis de que una ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad (3)$$

Las funciones de dos variables se analizarán en detalle en el capítulo 13.

► donde F es una función de dos variables x y y . La función F se denomina **función pendiente** y (3) se denomina **forma normal** de la ecuación diferencial. En un punto (x, y) sobre la curva solución de la ecuación diferencial, el valor $F(x, y)$ proporciona la pendiente de una recta tangente.

■ **Una definición** En la sección 5.1 ya se ha resuelto un tipo simple de ecuación diferencial de primer orden. Recuerde que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (4)$$

puede resolverse al encontrar la antiderivada más general de g ; es decir,

$$y = \int g(x) dx.$$

Por ejemplo, una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 2x + e^{-3x}$$

está dada por

$$y = \int (2x + e^{-3x}) dx = x^2 - \frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Ecuaciones de la forma en (4) son justo un caso especial de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$, donde la función F se puede factorizar en un producto de una función x por una función de y .

Definición 8.1.1 Ecuación diferencial separable

Se dice que una **ecuación diferencial separable de primer orden** es cualquier ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \quad (5)$$

EJEMPLO 1 Una ecuación diferencial separable

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (6)$$

es separable, puesto que el miembro derecho de la igualdad puede reescribirse de nuevo como el producto de una función de x por una función de y :

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-x}^{g(x)} \cdot \overbrace{\frac{1}{y}}^{f(y)}.$$

Observe que cuando $f(y) = 1$ en (5) se obtiene (4). De manera análoga a las ecuaciones diferenciales de la forma (4), una ecuación diferencial separable también puede resolverse por integración.

Antes de resolver una ecuación separable, la reescribimos en términos de diferenciales; por ejemplo, la ecuación (6) puede escribirse en la forma diferencial

$$y \, dy = -x \, dx.$$

Asimismo, al dividir entre $f(y)$, (5) puede volver a escribirse como

$$p(y) \, dy = g(x) \, dx,$$

donde por razones de conveniencia en la notación hemos escrito $p(y) = 1/f(y)$. Luego, si $y = \phi(x)$ denota una solución de (5), debemos tener

$$p(\phi(x)) \phi'(x) = g(x)$$

y entonces, por integración,

$$\int p(\phi(x)) \phi'(x) \, dx = \int g(x) \, dx. \quad (7)$$

Pero $dy = \phi'(x) \, dx$, de modo que (7) es lo mismo que

$$\int p(y) \, dy = \int g(x) \, dx \quad \text{o bien,} \quad H(y) = G(x) + C,$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = 1/f(y)$ y $g(x)$, respectivamente, y C es una constante. Puesto que C es arbitraria, $H(y) = G(x) + C$ representa una **familia de soluciones de un parámetro**. El parámetro es la constante arbitraria C .

Nota: En la integración de una ecuación separable no es necesario usar dos constantes, porque si se escribe $H(y) + C_1 = G(x) + C_2$, entonces la diferencia $C_2 - C_1$ puede sustituirse por una sola constante C .

A continuación resumimos el análisis.

Directrices para resolver una ecuación diferencial separable

- i) Primero, determine si una ecuación diferencial de primer orden es en realidad separable. Es decir, ¿la ecuación diferencial puede escribirse en la forma dada en (5)?

ii) Si la ecuación diferencial es separable, entonces vuelva a escribirla en forma diferencial:

$$p(y) dy = g(x) dx.$$

iii) Integre ambos miembros de la forma diferencial. Integre el miembro izquierdo con respecto a y y el miembro derecho con respecto a x .

Antes de ilustrar el método de solución presentado, debe saber que muchas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables. Por ejemplo, ninguna de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad y \quad \frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$$

es separable.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Solución La ecuación diferencial dada se vuelve a escribir en la forma

$$y dy = -x dx$$

y al integrar ambos miembros se obtiene

$$\int y dy = -\int x dx \quad \text{o bien,} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Así, una familia de soluciones de un parámetro está definida por $x^2 + y^2 = C^2$. Aquí se ha escogido sustituir la constante arbitraria $2C_1$ por C^2 porque la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$ representa una familia de círculos centrados en el origen con radio $C > 0$. Vea la FIGURA 8.1.1.

Las soluciones de la ecuación diferencial son las funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$, $C > 0$. ■

■ **Problema con valor inicial** A menudo tenemos interés por resolver una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$ sujeta a una condición lateral prescrita $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son números reales arbitrarios especificados de manera arbitraria. El problema

$$\text{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial (PVI)**. La condición lateral $y(x_0) = y_0$ se denomina **condición inicial**. En términos geométricos, se está buscando por lo menos una solución de la ecuación diferencial sobre un intervalo I que contiene a x_0 tal que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0) . Desde un punto de vista práctico, a menudo esto conlleva al problema de determinar un valor específico de la constante C en una familia de soluciones.

EJEMPLO 3 Un problema con valor inicial

Resuelva el problema con valor inicial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(4) = -3$.

Solución Por el ejemplo 2, una familia de soluciones para la ecuación diferencial dada es $x^2 + y^2 = C^2$. Cuando $x = 4$, entonces, $y = -3$, de modo que con $16 + 9 = C^2$ se obtiene $C = 5$. Por tanto, el PVI determina $x^2 + y^2 = 25$. Es a causa de su sencillez que podemos resolver la última ecuación para una función o solución explícita que satisface la condición inicial. Al despejar y se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Ya que la gráfica debe ser la de una función y la gráfica de esta función debe contener al punto $(4, -3)$, debemos tomar la raíz cuadrada negativa. En otras palabras, la solución es $y = -\sqrt{25 - x^2}$ definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. En la figura 8.1.1, la curva solución es el semicírculo inferior del círculo que se muestra en azul. ■

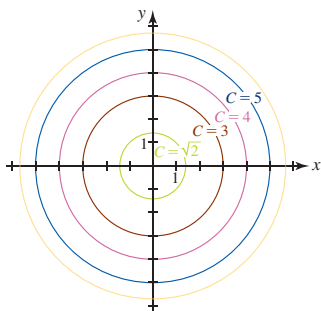


FIGURA 8.1.1 Familia de círculos en el ejemplo 2

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad (8)$$

donde k es una constante, tiene muchas aplicaciones. La ecuación puede resolverse por separación de variables.

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $\frac{dy}{dx} = ky$, donde $k \neq 0$ es una constante.

Solución La ecuación diferencial se escribe como $\frac{1}{y} dy = k dx$. Al integrar

$$\int \frac{1}{y} dy = k \int dx \quad \text{se obtiene} \quad \ln|y| = kx + C_1.$$

Luego, al despejar y se obtiene

$$|y| = e^{kx+C_1} = e^{C_1}e^{kx} \quad \text{o bien,} \quad y = \pm e^{kx+C_1} = \pm e^{C_1}e^{kx}.$$

Al identificar de nuevo las constantes $\pm e^{C_1}$ como C , una familia de soluciones de un parámetro está dada por $y = Ce^{kx}$. ■

Para resolver ecuaciones diferenciales separables resulta evidente que es imperativo tener conocimientos sobre fórmulas y técnicas de integración. Se recomienda una revisión de las secciones 7.1-7.3 y 7.6.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $(e^{2y} - y) \frac{dy}{dx} = e^y \sin x$.

Solución Al volver a escribir la ecuación como

$$\frac{e^{2y} - y}{e^y} \frac{dy}{dx} = \sin x \quad \text{o bien,} \quad (e^y - ye^{-y}) dy = \sin x dx$$

observamos que la ecuación es separable. A partir de la forma diferencial de la ecuación,

$$\int (e^y - ye^{-y}) dy = \int \sin x dx,$$

vemos que para evaluar $\int ye^{-y} dy$ es necesario usar integración por partes. El resultado es

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = \cos x + C.$$

La última ecuación define de manera implícita una solución de la ecuación diferencial. En efecto, es imposible resolver la última ecuación para y en términos de x . ■

EJEMPLO 6 Un problema con valor inicial

Resuelva $\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

Solución La ecuación diferencial vuelve a escribirse como

$$\frac{1}{y(1-y)} dy = dx \quad \text{y se integra} \quad \int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int dx.$$

Al usar fracciones parciales en el miembro izquierdo de la igualdad se obtiene

$$\int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right] dy = \int dx$$

$$\ln|y| - \ln|1-y| = x + C_1$$

$$\begin{aligned}\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| &= x + C_1 \\ \left| \frac{y}{1-y} \right| &= e^{x+C_1} = e^{C_1} e^x \\ \frac{y}{1-y} &= C_2 e^x. \quad \leftarrow C_2 = \pm e^{C_1}\end{aligned}$$

Al resolver para y se obtiene

$$y = \frac{C_2 e^x}{1 + C_2 e^x} \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{1}{1 + C e^{-x}}, \quad (9)$$

donde hemos sustituido $1/C_2$ por C . Luego, al sustituir $x = 0$ y $y = \frac{1}{3}$ en la última ecuación se llega a $C = 2$. La solución del problema con valor inicial es

$$y = \frac{1}{1 + 2e^{-x}}. \quad (10)$$

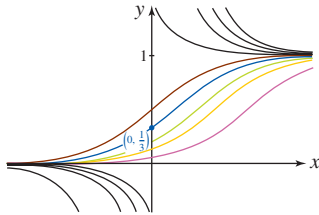


FIGURA 8.1.2 Familia de curvas solución en el ejemplo 6

En la FIGURA 8.1.2 se ilustran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones dadas en (9) para valores positivos y negativos de C . Las gráficas a color representan soluciones de esa ecuación diferencial que están definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. La gráfica de la solución dada en (10) es la curva azul en la figura. ■

Ejercicios 8.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-20, resuelva por separación de variables la ecuación diferencial dada.

1. $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$
2. $\frac{dy}{dt} = (t+1)^2$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4}$
5. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+x}{1+y} \right)^2$
6. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+5x^2}{x^2 \sin y}$
8. $\frac{dy}{dx} = y^3 \cos x$
9. $x \frac{dy}{dx} = 4y$
10. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
12. $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
13. $\left(\frac{y+1}{x} \right)^2 \frac{dy}{dx} = y \ln x$
14. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5} \right)^2$
15. $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$
16. $\frac{dQ}{dt} = k(Q-70)$
17. $\frac{dP}{dt} = 5P - P^2$
18. $\frac{dX}{dt} = (10-X)(50-X)$
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$
20. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

En los problemas 21-26, resuelva el problema con valor inicial dado.

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(xy)^2}, \quad y(1) = 3$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \sec^2 x}{2y}, \quad y(0) = -2$

$$23. \frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$$

$$24. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$$

$$25. x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$$

$$26. \frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

En los problemas 27 y 28, resuelva el problema con valor inicial dado. Escriba la solución como una función *algebraica* explícita $y = f(x)$ (vea las *Notas desde el aula* en la sección 1.3). Quizá sea necesario usar una identidad trigonométrica.

$$27. \sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$28. (1+x^4) \frac{dy}{dx} + x + 4xy^2 = 0, \quad y(1) = 0$$

En los problemas 29-32, use el hecho de que $y = k$ sobre $(-\infty, \infty)$ es una función constante si y sólo si $dy/dx = 0$ para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial dada. Suponga que k es cualquier número real.

$$29. x \frac{dy}{dx} + 6y = 18 \quad 30. 2 \frac{dy}{dx} = 5y + 40$$

$$31. \frac{dy}{dx} = y^2 - y - 20 \quad 32. x \frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 4$$

En los problemas 33 y 34, proceda como en los problemas 29-32 para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial y luego encuentre una solución cuya gráfica pase por el punto indicado.

33. $x \frac{dy}{dx} = y^2 - y,$

a) (0, 1) b) (0, 0) c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

34. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9,$

a) (0, 0) b) (0, 3) c) $(\frac{1}{3}, 1)$

≡ Piense en ello

35. Sin resolver, explique por qué el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

no tiene solución para $y_0 < 0$.36. Una solución de una ecuación diferencial que no es miembro de la familia de soluciones de la ecuación se denomina **solución singular**. Vuelva a analizar los problemas 29, 31, 33 y 34 y encuentre cualquier solución singular. En el ejemplo 6, ¿cuál sería la solución del PVI si la condición inicial cambia a $y(0) = 1$?37. En el ejemplo 3 se afirmó que la solución $y = -\sqrt{25 - x^2}$ está definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. ¿Por qué sería incorrecto decir que la solución está definida sobre el intervalo cerrado $[-5, 5]$?

8.2 Ecuaciones lineales

■ Introducción Continuamos la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden al examinar ecuaciones lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales constituyen una familia especialmente “amigable” de ecuaciones diferenciales en el sentido de que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de orden superior, siempre hay una posibilidad aceptable de encontrar alguna clase de solución de la ecuación que se busque. Las ecuaciones diferenciales no lineales, especialmente las ecuaciones de orden mayor que o igual a dos, a menudo son imposibles de resolver en términos de funciones elementales.

La técnica para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden, como una ecuación separable, consiste en la integración; pero se integra sólo después que la ecuación original se ha multiplicado por una función especial denominada *factor de integración*.

■ Una definición Empezamos con la definición de ecuación lineal de primer orden. Cuando lea la siguiente definición tenga en cuenta las siguientes propiedades esenciales:

- En una ecuación diferencial lineal la variable dependiente y su derivada son de primer grado; es decir, la potencia de cada término que implica a la variable dependiente es 1, y cada coeficiente depende cuando mucho de una sola variable independiente.

Definición 8.3.1 Ecuación lineal

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede plantearse en la forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1)$$

Por supuesto, las funciones $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ en (1) pueden ser constantes.

Si una ecuación diferencial de primer orden no es lineal, se dice que es **no lineal**.

EJEMPLO 1 Lineal/no lineal

a) Por comparación directa con (1), vemos que las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6 \quad \text{y} \quad x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$$

son ecuaciones diferenciales de primer orden.

b) Las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son no lineales:

$$\begin{array}{cc}
 \text{la potencia no es 1} & \text{el coeficiente depende de } y \\
 \downarrow & \downarrow \\
 x \frac{dy}{dx} = y^2 & \text{y} \quad y \frac{dy}{dx} = 2y + \cos x.
 \end{array}$$

Es importante observar que no toda ecuación diferencial de primer orden puede resolverse por el método de separación de variables. La ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

no es separable. Por tanto, se requiere un nuevo procedimiento para resolver ecuaciones lineales.

■ **Forma normal o estándar** Al dividir (1) entre el coeficiente principal $a_1(x)$ se obtiene la siguiente forma más útil de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (2)$$

La ecuación (2) se denomina **forma normal o estándar** de una ecuación diferencial lineal (1). Buscamos soluciones de (2) sobre un intervalo I para el cual P y f sean continuas. La ecuación (2) tiene la propiedad de que cuando se multiplica por la función $e^{\int P(x) dx}$, el miembro izquierdo de (2) se convierte en la derivada del producto $e^{\int P(x) dx}y$. Para ver esto, observemos que la regla del producto y la regla de la cadena proporcionan

Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\int P(x) dx} &= e^{\int P(x) dx} \frac{d}{dx} \int P(x) dx \\ &= e^{\int P(x) dx} P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^{\int P(x) dx} y] &= e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} e^{\int P(x) dx} \\ &= e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y. \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto, si ambos miembros de (2) se multiplican por $e^{\int P(x) dx}$, obtenemos

$$\overbrace{e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y}^{\text{Esto es } \frac{d}{dx} [e^{\int P(x) dx} y]} = e^{\int P(x) dx} f(x).$$

Al comparar el miembro izquierdo de la última ecuación con el resultado en (3), se concluye que la última ecuación es lo mismo que

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x) dx} y] = e^{\int P(x) dx} f(x). \quad (4)$$

La forma de la ecuación (4) constituye la clave para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos simplemente integrar ambos miembros de (4) con respecto a x . La función $e^{\int P(x) dx}$ que hace posible esto se denomina **factor de integración** para la ecuación diferencial. A continuación se presenta el procedimiento.

Directrices para resolver ecuaciones diferenciales lineales

- i) Escriba la ecuación dada en la forma normal (2); es decir, por división haga que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.
- ii) Identifique $P(x)$ (el coeficiente de y) y encuentre el factor de integración

$$e^{\int P(x) dx}.$$

- iii) Multiplique la ecuación obtenida en el paso i) por el factor de integración.
- iv) El miembro izquierdo de la ecuación en el paso iii) es la derivada del factor de integración y la variable dependiente:

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x) dx} y] = e^{\int P(x) dx} f(x).$$

- v) Integre ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso iv).

En la sección 8.1 resolvimos la ecuación $dy/dx - ky = 0$ por separación de variables, pero puesto que la ecuación diferencial es lineal, también es posible resolverla con el procedimiento anterior.

EJEMPLO 2 Uso de un factor de integración

La ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

k una constante, ya está en forma normal (2). Al identificar $P(x) = -k$, el factor de integración es $e^{\int (-k) dx} = e^{-kx}$ y, después de multiplicar la ecuación por este factor, vemos que

$$e^{-kx} \frac{dy}{dx} - ke^{-kx}y = 0 \cdot e^{-kx} \quad \text{es lo mismo que} \quad \frac{d}{dx}[e^{-kx}y] = 0.$$

◀ Es necesario usar una constante de integración para calcular $e^{\int P(x) dx}$.

Al integrar ambos miembros de la última ecuación con respecto a x , con

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-kx}y] dx = \int 0 dx$$

obtenemos $e^{-kx}y = C$. A partir de esta última expresión obtenemos la misma familia de soluciones $y = Ce^{kx}$ que en el ejemplo 4 de la sección 8.1. ■

Recuerde que en el análisis de (2) se afirmó que se buscaba una solución de una ecuación lineal sobre un intervalo I para el cual P y f fueran continuas. A medida que usted trabaje el siguiente ejemplo, observe que P y f son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$.

Solución Al dividir entre x obtenemos la forma normal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x. \quad (5)$$

A partir de esta forma es posible identificar $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5 e^x$ y observar que P y f son continuas para $x > 0$, es decir, sobre $(0, \infty)$. Por tanto, el factor de integración es

puede usarse $\ln x$ en lugar de $\ln |x|$ porque $x > 0$

$$e^{-4 \int dx/x} = e^{-4 \ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

◀ La identidad $e^{\ln N} = N$ es útil para calcular el factor de integración.

Luego, (5) se multiplica por x^{-4} ,

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \quad \text{y obtenemos} \quad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

Al usar integración por partes en el miembro derecho de

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y] dx = \int xe^x dx$$

obtenemos la solución definida sobre $(0, \infty)$:

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C \quad \text{o bien,} \quad y = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $(x^2 - 9) \frac{dy}{dx} + xy = 0$.

Solución La ecuación se escribe en forma normal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \quad (6)$$

y se identifica $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua sobre $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y sobre $(3, \infty)$, esta ecuación se resolverá sobre los intervalos primero y tercero. Sobre estos intervalos, el factor de integración es

$$e^{\int x dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2} \int 2x dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2} \ln(x^2-9)} = e^{\ln \sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9}.$$

Luego de multiplicar la forma normal (6) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2-9} y] = 0 \quad \text{y al integrar se obtiene} \quad \sqrt{x^2-9} y = C.$$

Para $(-\infty, -3)$ o para $(3, \infty)$, la solución de la ecuación es $y = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$. ■

EJEMPLO 5 Problema con valor inicial

Resuelva el problema con valor inicial $\frac{dy}{dx} + y = x$, $y(0) = 4$.

Solución La ecuación ya está en forma normal, y $P(x) = 1$ y $f(x) = 1$ son continuas sobre $(-\infty, \infty)$. El factor de integración es $e^{\int dx} = e^x$, de modo que al integrar

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = x e^x$$

obtenemos $e^x y = x e^x - e^x + C$. Al resolver esta última ecuación para y obtenemos la familia de soluciones

$$y = x - 1 + C e^{-x}. \quad (7)$$

Pero por la condición inicial se sabe que $y = 4$ cuando $x = 0$. La sustitución de estos valores en (7) implica $C = 5$. Por tanto, la solución del problema sobre $(-\infty, \infty)$ es $y = x - 1 + 5e^{-x}$ y es la curva azul que se muestra en la FIGURA 8.2.1. ■

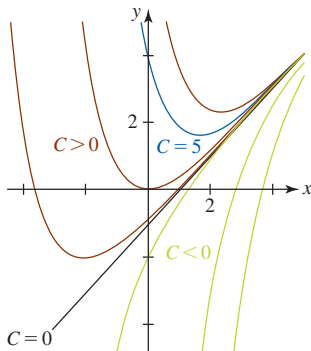


FIGURA 8.2.1 Familia de curvas solución en el ejemplo 5. La solución del PVI se muestra en azul.

Resulta interesante observar que cuando x se vuelve sin límite en la dirección positiva, la gráfica de *todos* los miembros de la familia de soluciones (7) para $C > 0$ o $C < 0$ están próximos a la gráfica de $y = x - 1$, que se muestra en negro en la figura 8.2.1. En efecto, $y = x - 1$ es la solución de la ecuación diferencial en el ejemplo 5 que corresponde a $C = 0$ en (7). Este comportamiento asintótico puede atribuirse al hecho de que el término $C e^{-x}$ en (7) se vuelve despreciable para valores crecientes de x ; es decir, $e^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Se dice que $C e^{-x}$ es un **término transitorio**. Aunque este comportamiento no es característico de todas las familias de soluciones de ecuaciones lineales (vea el ejemplo 3), el concepto de transitoriedad a menudo es importante en problemas de aplicación.

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ NOTAS DESDE EL AULA

Si resolvemos (5) sobre un intervalo en el que P y f son continuas, es posible demostrar que una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación produce todas las soluciones de la ecuación diferencial definidas sobre el intervalo. En el ejemplo 3, las funciones $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5 e^x$ son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$. En este caso, *toda* solución de $dy/dx - (4/x)y = x^5 e^x$ sobre $(0, \infty)$ puede obtenerse a partir de $y = x^5 e^x - x^4 e^x + C x^4$ para elecciones adecuadas de la constante C . Por ello, la familia de soluciones $y = x^5 e^x - x^4 e^x + C x^4$ se denomina **solución general** de la ecuación diferencial.

Ejercicios 8.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-22, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $\frac{dy}{dx} = 4y$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $2 \frac{dy}{dx} + 10y = 1$

4. $x \frac{dy}{dx} + 2y = 3$

5. $\frac{dy}{dt} + y = e^{3t}$

6. $\frac{dy}{dt} = y + e^t$

7. $y' + 3x^2y = x^2$ 8. $y' + 2xy = x^3$
 9. $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$ 10. $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 2x$
 11. $(1 + e^x) \frac{dy}{dx} + e^xy = 0$ 12. $(1 - x^3) \frac{dy}{dx} = 3x^2y$
 13. $x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$ 14. $\frac{dy}{dx} + y = \cos(e^x)$
 15. $\cos x \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$
 16. $\sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sec^2 x$
 17. $\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2 \cos x$ 18. $\frac{dr}{d\theta} + (\sec \theta)r = \cos \theta$
 19. $(x + 2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$
 20. $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$ 21. $x^2 \frac{dy}{dx} + x(x + 2)y = e^x$
 22. $x \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = e^{-x} \sin 2x$

En los problemas 23-32, resuelva el problema con valor inicial dado.

23. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = -4$ 24. $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$, $y(0) = \frac{1}{3}$
 25. $x \frac{dy}{dx} + y = e^x$, $y(1) = 2$
 26. $x \frac{dy}{dx} + y = 4x + 1$, $y(1) = 8$
 27. $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2$, $y(5) = 1$
 28. $x(x + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 1$, $y(1) = 10$
 29. $(t + 1) \frac{dx}{dt} + x = \ln t$, $x(1) = 10$
 30. $y' + (\tan t)y = \cos^2 t$, $y(0) = -1$
 31. $L \frac{di}{dt} + Ri = E$, $i(0) = i_0$, L , R y E son constantes
 32. $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$, k , T_m y T_0 son constantes

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 33 y 34, antes de intentar resolver el problema con valor inicial dado, revise los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

33. a) Expresé la solución del problema con valor inicial dado $y' - 2xy = 2$, $y(0) = 1$, en términos de la **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

34. La **función integral seno** está definida por

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

- a) Demuestre que la solución del problema con valor inicial $x^3y' + 2x^2y = 10 \sin x$, $y(1) = 0$ es

$$y = 10x^{-2} [\operatorname{Si}(t) - \operatorname{Si}(1)].$$

- b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(0, \infty)$.

≡ Piense en ello

35. Encuentre una solución continua del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

Grafique f y la solución del PVI. [Sugerencia: Resuelva el problema en dos partes y use continuidad para hacer corresponder las partes de su solución.]

36. Explique por qué no necesitamos usar una constante de integración al calcular un factor de integración $e^{\int P(x) dx}$ para una ecuación diferencial lineal.

37. En el ejemplo 4 resolvimos la ecuación diferencial dada sobre los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$. Encuentre una solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo $(-3, 3)$.

38. Suponga que $P(t)$ representa la población de una especie animal en un entorno en el instante t . Si el símbolo $\propto$ significa “proporcional a”, en lenguaje coloquial proporcione una explicación física de la declaración matemática

$$\frac{dP}{dt} \propto P.$$

39. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en el estudio de un tipo especial de una serie de elementos radiactivos:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes. Resuelva el sistema sujeto a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

40. La ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

forma parte de una clase de ecuaciones diferenciales no lineales denominada **ecuaciones de Bernoulli**.

- a) Use la sustitución $y = u^{-1}$ para demostrar que la ecuación de Bernoulli dada se vuelve

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

- b) Encuentre una solución de la ecuación de Bernoulli dada al resolver la ecuación diferencial en el inciso a).

41. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+y}$$

no es separable ni lineal en la variable y . Tome el recíproco de ambos miembros de la ecuación. ¿Es posible resolver esta nueva ecuación diferencial?

42. Aunque la ecuación diferencial $y'' + y' = x$ es de segundo orden, es posible resolverla aplicando el método que se analizó en esta sección. Resuelva la ecuación haciendo $Y = y'$.

43. a) Encuentre una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación lineal

$$x \frac{dy}{dx} + 3y = 6x^2.$$

- b) Encuentre el miembro de la familia de soluciones en el inciso a) que satisface la condición inicial $y(-1) = 2$. Proporcione el intervalo sobre el cual esta solución es válida.
- c) Encuentre el miembro de la familia de soluciones en el inciso a) que satisface la condición inicial $y(1) = 2$. Proporcione el intervalo sobre el cual esta solución es válida.
- d) Encuentre una condición inicial de modo que el miembro correspondiente de la familia de soluciones en el inciso a) pase por el origen y sea válido sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

8.3 Modelos matemáticos

■ Introducción Hasta el momento la experiencia que tenemos sobre ecuaciones diferenciales ha estado limitada a resolverlas o comprobar que una función dada es una solución. Pero las matemáticas constituyen un lenguaje, así como una herramienta. Como usted seguramente recordará por el álgebra de la sección 1.7, cuando se resuelve un problema de la “vida real”, el lenguaje coloquial se traduce a un lenguaje matemático. De la misma manera, es posible interpretar palabras, leyes empíricas, observaciones, o simplemente suposiciones, en términos matemáticos. Cuando intentamos describir algo, denominado *sistema*, en términos matemáticos se construye un *modelo* de ese sistema. Si algunas veces el sistema cambia con el tiempo, por ejemplo creciendo o decreciendo a cierta *razón* —y la razón de cambio es una derivada—, entonces un **modelo matemático** del sistema puede ser una ecuación diferencial.

En esta sección se consideran unos cuantos modelos matemáticos simples y sus soluciones.

■ Crecimiento de una población Uno de los primeros intentos por modelar el crecimiento de una población humana por medio de las matemáticas fue hecho por el economista inglés **Thomas Malthus** (1776-1834) en 1798. Básicamente la idea del modelo de Malthus es la suposición de que la razón a la que *aumenta* o crece la población de un país es proporcional a la población total $P(t)$ del país en el instante t . En otras palabras, mientras más personas haya en el instante t , más habrá en el futuro. En términos matemáticos esta suposición puede expresarse como

símbolo de proporcionalidad

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = kP, \quad (1)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, que fracasa en tomar en cuenta muchos factores (inmigración y migración, por ejemplo) que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento de poblaciones humanas, no obstante resultó bastante preciso en la predicción de Estados Unidos durante los años de 1790 a 1860. La ecuación diferencial dada en (1) a menudo se usa para modelar, durante breves periodos, las poblaciones de bacterias o animales pequeños.

La constante de proporcionalidad k en (1) puede determinarse a partir de la solución del problema con valor inicial $dP/dt = kP$, $P(t_0) = P_0$ usando una medición subsecuente de P en un instante $t_1 > t_0$.

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

Inicialmente en un cultivo hay P_0 número de bacterias. En $t = 1$ h, se mide que el número de bacterias presentes es $\frac{3}{2}P_0$. Si la tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ que hay en el instante t , determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Solución Primero resolvemos la ecuación diferencial en (1) sujeta a la condición inicial $P(0) = P_0$. Luego usamos la observación empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar la constante de

proporcionalidad k . Ahora ya ha visto que la ecuación $dP/dt = kP$ es separable y lineal. Por el ejemplo 2 de la sección 8.2, donde los símbolos P y t , a la vez, desempeñan las partes de y y x , una familia de soluciones de la ecuación diferencial es

$$P(t) = Ce^{kt}.$$

En $t = 0$, se concluye que $P_0 = Ce^0 = C$, de modo que $P(t) = P_0e^{kt}$. En $t = 1$, tenemos $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$ o $e^k = \frac{3}{2}$. Por la última ecuación, $k = \ln \frac{3}{2} = 0.4055$. Así,

$$P(t) = P_0e^{0.4055t}.$$

Para encontrar el momento en que el número de bacterias se triplica, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ para t . Se concluye que $0.4055t = \ln 3$, de modo que

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ h.}$$

Vea la FIGURA 8.3.1.

Nota: La función $P(t)$ obtenida en el ejemplo precedente puede escribirse en forma alterna. Por la ley de los exponentes,

$$P(t) = P_0e^{kt} = P_0(e^k)^t = P_0\left(\frac{2}{3}\right)^t,$$

puesto que $e^k = \frac{3}{2}$. Esta última solución es una forma idónea para calcular $P(t)$ para valores enteros positivos pequeños de t ; también muestra con claridad la influencia de observaciones experimentales subsecuentes en $t = 1$ en la solución durante todo el tiempo. Asimismo, observamos que el número verdadero de bacterias presentes inicialmente, en el instante $t = 0$, es bastante irrelevante para encontrar el tiempo requerido para triplicar el número de bacterias en el cultivo. El tiempo necesario para triplicar, por ejemplo, 100 e incluso 100 000 bacterias sigue siendo aproximadamente de 2.7 h.

Decaimiento radiactivo El núcleo de un átomo consta de una combinación de protones y neutrones. Muchas de estas combinaciones de protones y neutrones son inestables; es decir, los átomos decaen o transmutan en átomos de otra sustancia. Se dice que tales núcleos son *radiactivos*. Por ejemplo, con el paso del tiempo el radio altamente radiactivo, Ra-226, transmuta en el gas radón radiactivo, Rn-222. Para modelar el fenómeno del decaimiento radiactivo se supone que la razón dA/dt a que decaen los núcleos de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia (más precisamente, al número de núcleos) $A(t)$ que quedan en el instante t :

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} = kA. \quad (2)$$

El modelo de decaimiento (2) también ocurre en un experimento biológico, como determinar el tiempo necesario para que 50% de un medicamento sea eliminado del cuerpo por excreción o por el metabolismo. La cuestión de (1) y (2) simplemente es:

- Una sola ecuación diferencial puede servir como un modelo matemático para muchos fenómenos diferentes.

Por supuesto, las ecuaciones (1) y (2) son exactamente las mismas; sus soluciones son exactamente las mismas (a saber, Ce^{kt}); la diferencia radica sólo en los símbolos y su interpretación. Como se muestra en la FIGURA 8.3.2, la función exponencial e^{kt} crece cuando t crece para $k > 0$ y decrece cuando t decrece para $k < 0$. Por tanto, los problemas para describir el crecimiento (ya sea de una población animal, de bacterias e incluso de capital) son caracterizados por un valor positivo k , mientras que los problemas para describir el decaimiento producen un valor k negativo. En consecuencia, se dice que k es una **constante de crecimiento** ($k > 0$) o una **constante de decaimiento** ($k < 0$).

Vida media En física, la **vida media** es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo necesario para que la mitad de átomos en una cantidad inicial A_0 se desintegre, o transmute, en los átomos de otro elemento. En términos de la solución $A(t) = Ce^{kt}$ de (2), la vida media de un elemento que decae es el tiempo t para el cual

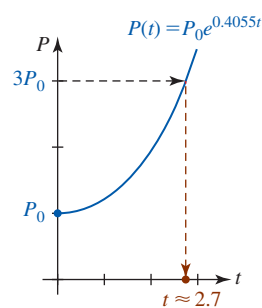


FIGURA 8.3.1 Gráfica de la solución en el ejemplo 1

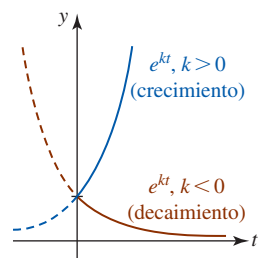


FIGURA 8.3.2 Crecimiento y decaimiento exponencial

$A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Mientras más larga sea la vida media de una sustancia, más estable es. Por ejemplo, la vida media del radio altamente radiactivo, Ra-226, es alrededor de 1 700 años. En 1 700 años la mitad de una cantidad dada de Ra-226 se transmuta en radón, Rn-222. El isótopo más común del uranio, U-238, tiene una vida media aproximada de 4 500 millones de años. Aproximadamente en ese tiempo, la mitad de una cantidad de U-238 se transmuta en plomo, Pb-206.

■ **Datación con carbono** En la década de 1940 el químico Willard Libby concibió un método para usar carbono radiactivo como un medio para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría de **datación con carbono** se basa en el hecho de que el isótopo radiactivo de carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La proporción de la cantidad de C-14 al carbono normal en la atmósfera parece ser constante y, como consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14, por respiración o alimentación, se detiene. Así, al comparar la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo, en un fósil con la razón constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en el conocimiento de que la vida media del C-14 es aproximadamente 5 730 años. Por su obra, Libby fue galardonado con el premio Nobel de Química en 1960. El método de Libby se ha usado para datar el mobiliario de madera en tumbas egipcias, la cubierta de lino tejido de los rollos del Mar Muerto y el controvertido manto de Turín.

EJEMPLO 2 Edad de un fósil

Se encontró que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C-14. Determine la edad del fósil.

Solución El punto de partida es la ecuación diferencial $dA/dt = kA$, donde $A(t)$ es la cantidad de C-14 restante en el instante t . Si A_0 es la cantidad inicial de C-14 en el hueso, como en el ejemplo 1 se concluye que

$$A(t) = A_0 e^{kt}.$$

Podemos usar el hecho de que $A(5\,730) = \frac{1}{2}A_0$ para determinar la constante de decaimiento k . Hacer $t = 5\,730$ en $A(t)$ implica $\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{5\,730k}$ y entonces de $5\,730k = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ se encuentra que

$$k = -\frac{1}{5\,730} \ln 2 = -0.00012097.$$

En consecuencia, $A(t) = A_0 e^{-0.00012097t}$. Entonces, la edad del fósil se determina a partir de la ecuación $A(t) = \frac{1}{1000}A_0$. Es decir, $\frac{1}{1000}A_0 = A_0 e^{-0.00012097t}$ y así $-0.00012097t = \ln \frac{1}{1000} = -\ln 1\,000$ produce

$$t = \frac{\ln 1\,000}{0.00012097} \approx 57\,103 \text{ años.} \quad \blacksquare$$

La fecha encontrada en el ejemplo 2 está en realidad en la frontera de la precisión para este método. La técnica de costumbre del carbono 14 está limitada a alrededor de 9 vidas medias o aproximadamente 50 000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medición precisa del C-14 restante se vuelve formidable alrededor del punto de $\frac{1}{1000}A_0$. Además, este análisis demanda la destrucción de una muestra más bien grande del espécimen. Si esta medición se logra indirectamente, con base en la radiactividad verdadera del espécimen, entonces resulta muy difícil distinguir entre la radiación del fósil y la radiación normal del entorno.

En desarrollos recientes, geólogos han demostrado que en algunos casos fechas determinadas por datación de carbono pueden ser hasta de 3 500 años. Una conjetura para este error posible es el hecho de que se sabe que los niveles de C-14 en el aire varían con el tiempo. Los mismos científicos han inventado otra técnica de datación basada en el hecho de que los organismos vivos ingieren trazas de uranio. Al medir las cantidades relativas de uranio y torio (el isótopo en el que decae el uranio), y al conocer las vidas medias de estos elementos, los científicos pueden determinar la edad de un fósil. La ventaja de este método es que con él es posible fechar fósiles de hasta 500 000 años; la desventaja es que su efectividad se reduce en su mayor parte a fósiles marinos. Otra técni-

ca isotópica, en la que se usan potasio 40 y argón 40, cuando es aplicable, puede proporcionar fechas de varios millones de años. Vea el problema 37 en los ejercicios 8.3. Algunas veces también son posibles métodos no isotópicos basados en el uso de aminoácidos.

■ Enfriamiento La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón a que la temperatura $T(t)$ cambia en un cuerpo que se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura en el cuerpo y la temperatura constante T_m del medio circundante; es decir,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad (3)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 3 Enfriamiento de un pastel

Cuando un pastel se retira del horno, su temperatura es de 300 °F. Tres minutos después su temperatura es de 200 °F. Determine la temperatura del pastel en cualquier instante después que se ha sacado del horno si la temperatura ambiente es de 70 °F.

Solución La temperatura ambiente (70 °F) se identifica como T_m . Para encontrar la temperatura del pastel en el instante t , es necesario resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 300$$

y determinar el valor de k de modo que $T(3) = 200$. La ecuación diferencial es separable y lineal. En el supuesto de que $T > 70$, por separación de variables se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T - 70} dT &= k dt \\ \int \frac{1}{T - 70} dT &= \int k dt \\ \ln(T - 70) &= kt + C_1 \\ T - 70 &= Ce^{kt} \leftarrow C = e^{C_1} \\ T &= 70 + Ce^{kt}. \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, $T = 300$, de modo que $300 = 70 + C$ proporciona $C = 230$ y en consecuencia $T(t) = 70 + 230e^{kt}$. A partir de $T(3) = 200$ se encuentra $e^{3k} = \frac{13}{23}$ y así, hasta cuatro cifras decimales, con una calculadora da

$$k = \frac{1}{3} \ln \frac{13}{23} = -0.1902.$$

Entonces, $T(t) = 70 + 230e^{-0.1902t}$. En la FIGURA 8.3.3 se muestra la gráfica de T junto con algunos valores calculados.

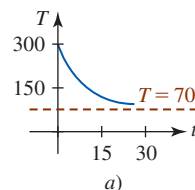
■ Mezclas La mezcla de dos líquidos a menudo origina una ecuación diferencial de primer orden. En el ejemplo siguiente se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes.

EJEMPLO 4 Mezcla de una solución salina

Inicialmente, 50 lb de sal se disuelven en un gran tanque que contiene 300 gal de agua. Una solución de salmuera se bombea hacia el tanque a razón de 3 gal/min, y luego la solución bien mezclada se extrae al mismo ritmo. Vea la FIGURA 8.3.4. Si la concentración de la solución que entra es 2 gal/lb, determine la cantidad de sal en el tanque en el instante t . ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Y después de un gran tiempo?

Solución Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en libras) en el tanque en el instante t . Para problemas de esta clase, la razón neta a la que $A(t)$ cambia está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \left(\begin{array}{c} \text{razón de la sustancia} \\ \text{que entra} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{razón de la sustancia} \\ \text{que sale} \end{array} \right) = R_1 - R_2. \quad (4)$$



t (minutos)	$T(t)$
20.1	75°
21.3	74°
22.8	73°
24.9	72°
28.6	71°
32.3	70.5°

b)

FIGURA 8.3.3 Gráfica de la solución en el ejemplo 3

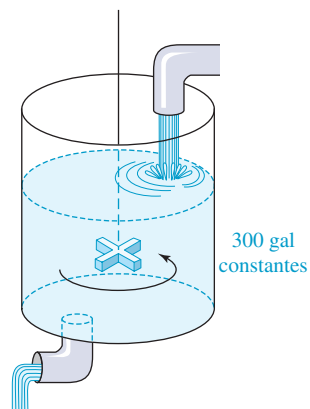
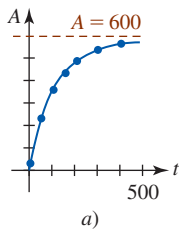


FIGURA 8.3.4 Tanque de mezclado en el ejemplo 4



t (minutos)	$A(t)$
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

FIGURA 8.3.5 Gráfica de la solución en el ejemplo 4

Luego, la razón a la que la sal entra al tanque, en libras por minuto, es

$$R_1 = (3 \text{ gal/min}) \cdot (2 \text{ lb/gal}) = 6 \text{ lb/min},$$

mientras que la razón a la que la sal sale es

$$R_2 = (3 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{A}{300} \text{ lb/gal} \right) = \frac{A}{100} \text{ lb/min}.$$

Por tanto, la ecuación (4) se vuelve

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \quad (5)$$

Resolvemos la última ecuación sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$.

Puesto que el factor de integración es $e^{t/100}$, podemos escribir (5) como

$$\frac{d}{dt}[e^{t/100}A] = 6e^{t/100}$$

y por tanto $e^{t/100}A = 600e^{t/100} + C$ o $A = 600 + Ce^{-t/100}$. Cuando $t = 0$, $A = 50$, de modo que $C = -550$. Por último, obtenemos

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}. \quad (6)$$

En $t = 50$ se encuentra $A(50) = 266.41$ lb. También, cuando $t \rightarrow \infty$ por (6) y la FIGURA 8.3.5 vemos que $A \rightarrow 600$. Por supuesto, esto es lo que esperábamos; durante un largo periodo el número de libras de sal en la solución debe ser $(300 \text{ gal})(2 \text{ lb/gal}) = 600$ lb. ■

En el ejemplo 4 se asumió que la razón a que se bombeaba la solución era la misma que la razón a que se extraía la solución. Sin embargo, esto no necesariamente es así; la solución de salmuera mezclada puede bombearse a una razón más rápida o más lenta que la razón a que se bombea a otra solución. Por ejemplo, si la solución bien mezclada se extrae a la razón más lenta de 2 gal/min, entonces la solución se acumula a razón de $(3 - 2)$ gal/min = 1 gal/min. Al cabo de t minutos hay $300 + t$ gal de salmuera en el tanque. Entonces, la razón a la que emerge la sal es

$$R_2 = (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{A}{300 + t} \text{ lb/gal} \right) = \frac{2A}{300 + t} \text{ lb/min}.$$

En este caso, la ecuación (4) se vuelve

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2}{300 + t}A = 6. \quad (7)$$

Al analizar la última ecuación se observa que es lineal. Dejamos su solución como ejercicio. Vea los problemas 18-20 en los ejercicios 8.3.

■ **Segunda ley de movimiento de Newton** Para construir un modelo matemático del movimiento de un cuerpo en un campo de fuerza, el punto de partida de costumbre es la segunda ley de movimiento de Newton. Recuerde que la **primera ley de movimiento de Newton** establece que un cuerpo permanece en reposo o continúa moviéndose a velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa. En cualquiera de estos dos casos, lo anterior es equivalente a afirmar que cuando la suma de las fuerzas $F = \Sigma F_k$ (es decir, la fuerza neta o resultante), que actúan sobre el cuerpo es cero, entonces la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley de movimiento de Newton** indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo *no* es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a , o más precisamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

■ **Cuerpos que caen y resistencia del aire** Se ha establecido experimentalmente que cuando un cuerpo se mueve a través de un medio resistivo como el aire (o agua), la fuerza retardadora debida al medio, denominada **fuerza de arrastre**, actúa en dirección opuesta a la del movimiento y es proporcional a la potencia de la velocidad del cuerpo, es decir, kv^α . Aquí k es una constante de proporcionalidad y α es constante en el intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$. En términos generales, para velocidades más lentas se toma $\alpha = 1$. Ahora, suponga que en un cuerpo de masa m que cae la resistencia del aire es proporcional a su velocidad instantánea v . Si en estas circunstancias tomamos la dirección positiva orientada hacia abajo, entonces la fuerza neta que actúa sobre la

masa está dada por $mg - kv$, donde el peso mg del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire es una fuerza que actúa en la dirección opuesta o hacia arriba. Vea la FIGURA 8.3.6. Luego, puesto que v está relacionada con la aceleración a por $dv/dt = a$, la segunda ley de Newton se vuelve $F = ma = m dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley de Newton obtenemos una ecuación diferencial lineal para la velocidad v del cuerpo en el instante t ,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad (8)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Para movimiento a gran velocidad, como un paracaidista que cae libremente antes de abrir su paracaídas, suele suponerse que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea; en otras palabras, $\alpha = 2$. Si de nuevo la dirección positiva se toma hacia abajo, entonces un modelo para la velocidad v de un cuerpo que cae está dado por la ecuación diferencial no lineal

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad (9)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Vea el problema 22 en los ejercicios 8.3.

EJEMPLO 5 Velocidad de un cuerpo que cae

Resuelva (8) sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

Solución La ecuación (8) es lineal y tiene la forma normal

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \quad (10)$$

Al multiplicar (10) por el factor de integración $e^{kt/m}$ es posible escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}[e^{kt/m}v] = ge^{kt/m}.$$

Luego, al integrar y despejar v obtenemos $v(t) = mg/k + Ce^{-kt/m}$. La condición inicial $v(0) = v_0$ implica $C = v_0 - mg/k$ y así la función velocidad para el cuerpo que cae es

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}. \quad (11) \blacksquare$$

Dos observaciones son pertinentes con respecto a la solución en el ejemplo 5. Si deseamos encontrar la función posición $s(t)$ del cuerpo que cae, entonces se trata simplemente de integrar la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = v(t),$$

donde $v(t)$ está dada en (11). Vea el problema 21 en los ejercicios 8.3. También, debido a la resistencia del aire, la solución (11) muestra claramente que la velocidad de un cuerpo que cae a una gran distancia no aumenta de manera indefinida. Debido a que el término $(v_0 - mg/k)e^{-kt/m}$ en (11) es *transitorio* (vea la página 448), vemos que $v(t) \rightarrow mg/k$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este valor límite de la velocidad $v_{\text{ter}} = mg/k$ se denomina **velocidad terminal** del cuerpo. Se deja como ejercicio encontrar $v(t)$ y v_{ter} cuando el modelo matemático para la velocidad está dado por (9). Vea el problema 22 en los ejercicios 8.3.

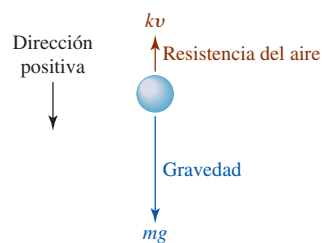


FIGURA 8.3.6 Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae de masa m

Ejercicios 8.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

- Se sabe que la población de cierta comunidad crece en razón proporcional al número de personas que hay en el instante t . Si la población se duplica en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplica? ¿Y en cuánto cuádrupla?
- Suponga que sabe que la población de la comunidad en el problema 1 es 10 000 después de 3 años. ¿Cuál era la población original? ¿Cuál será la población en 10 años?
- La población de una ciudad crece a razón proporcional a la población en el instante t . La población inicial de 500

aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años?

4. La población de bacterias en un cultivo crece en razón proporcional al número de bacterias presentes en el instante t . Después de 3 h se observa que hay 400 bacterias presentes. Al cabo de 10 h hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era el número inicial de bacterias?
5. El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, decae en razón proporcional a la cantidad presente en el instante t y tiene una vida media de 3.3 h. Si inicialmente hay 1 g de plomo, ¿en cuánto tiempo decae 90% del plomo?
6. Inicialmente había 100 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 h la masa disminuyó 3%. Si la razón de decaimiento es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el instante t , encuentre lo que queda después de 24 h.
7. Determine la vida media de la sustancia radiactiva descrita en el problema 6.
8. Determine la vida media de una sustancia radiactiva si, en general,

$$t = \frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(A_1/A_2)},$$

donde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, $t_1 < t_2$.

9. Cuando un haz vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, la razón a que decrece su intensidad I es proporcional a $I(e)$, donde e representa el espesor del medio (en pies). En agua de mar clara, la intensidad 3 pies por abajo de la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál es la intensidad de haz 15 pies por abajo de la superficie?
10. Cuando el interés es compuesto continuo, la cantidad de dinero aumenta en razón proporcional a la cantidad S que hay en el instante t : $dS/dt = rS$, donde r es la tasa de interés anual.
 - a) Encuentre la cantidad de dinero acumulada al cabo de 5 años cuando se depositan \$5 000 en una cuenta de ahorro que paga $5\frac{3}{4}\%$ de interés compuesto continuo.
 - b) ¿En cuántos años se duplicará la suma inicial depositada?
 - c) Use una calculadora para comparar el número obtenido en el inciso a) con el valor

$$S = 5\,000 \left(1 + \frac{0.0575}{4} \right)^{5(4)}.$$

Este valor representa la cantidad acumulada cuando el interés se compone trimestralmente.

11. En un trozo de madera quemada, o carbón, se encontró que 85.5% del C-14 había decaído. Use la información en el ejemplo 2 para determinar la edad aproximada de la madera. (Se trata precisamente de los datos que usaron los arqueólogos para fechar pinturas prehistóricas en una cueva en Lascaux, Francia.)
12. Un termómetro se saca de una habitación interior a una exterior donde la temperatura del aire es 5 °F. Después de 1 min la lectura del termómetro es de 55 °F, y después de 5 min, es de 30 °F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

13. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 70 °F a una habitación exterior donde la temperatura es de 10 °F. Después de $\frac{1}{2}$ min la lectura del termómetro es de 50 °F. ¿Cuál es la lectura en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo es necesario para que el termómetro llegue a 15 °F?
14. La ecuación (3) también se cumple cuando un objeto absorbe calor del medio circundante. Si una pequeña barra metálica cuya temperatura inicial es de 20 °C se deja caer en un contenedor de agua hirviendo, ¿en cuánto tiempo la barra alcanza 90 °C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 s? ¿En cuánto tiempo la barra alcanza 98 °C?
15. Un tanque contiene 200 L de fluido en el que se disolvieron 30 g de sal. Luego, salmuera que contiene 1 g de sal por litro se bombea hacia el tanque a razón de 4 L/min; la solución bien mezclada se extrae a la misma razón. Encuentre el número de gramos de sal $A(t)$ que hay en el tanque en el instante t .
16. Resuelva el problema 15 en el supuesto de que hacia el tanque se bombea agua pura.
17. Un gran tanque está lleno de 500 gal de agua pura. La salmuera que contiene 2 lb de sal por galón se bombea hacia el tanque a razón de 5 gal/min. Encuentre el número de libras de sal $A(t)$ que hay en el tanque en el instante t .
18. Resuelva la ecuación diferencial (7) sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$ lb.
19. Vuelva a leer el análisis a continuación del ejemplo 4. Luego resuelva el problema 17 en el supuesto de que la solución se extrae a la razón más rápida de 10 gal/min. Determine cuándo está vacío el tanque.
20. Un gran tanque contiene 100 gal de un fluido en el cual se han disuelto 10 lb de sal. Salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón se bombea hacia el tanque a razón de 6 gal/min. Luego, la solución bien mezclada se bombea hacia fuera a una razón más lenta de 4 gal/min. Encuentre el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min.
21. Vuelva a leer el análisis a continuación del ejemplo 5. Luego encuentre la función posición $s(t)$ para el cuerpo que cae en el ejemplo 5. Puesto que se asumió que la dirección positiva es hacia abajo, suponga que $s(0) = 0$.
22. Resuelva la ecuación diferencial (9) sujeta a $v(0) = v_0$. Exprese la función velocidad $v(t)$ en términos de la función tangente hiperbólica. Con ayuda de la figura 3.10.2a) determine la velocidad terminal v_{ter} de un cuerpo que cae.

Modelos matemáticos adicionales

23. La razón en que un medicamento se disemina en el torrente sanguíneo está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = A - BX,$$

donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo en el instante t . Encuentre $X(t)$. ¿Cuál es el valor limitante de $X(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$? ¿En qué instante la concentración es la mitad de su valor limitante? Suponga que $X(0) = 0$.

24. Suponga que una célula está suspendida en una solución que contiene un soluto de concentración constante C_s . Además, suponga que el volumen V de la célula es constante y que el área de su membrana permeable es la constante A . Por la **ley de Fick**, la razón de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y a la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula en el instante t . Encuentre $C(t)$ si $m = VC(t)$ y $C(0) = C_0$. Vea la FIGURA 8.3.7.

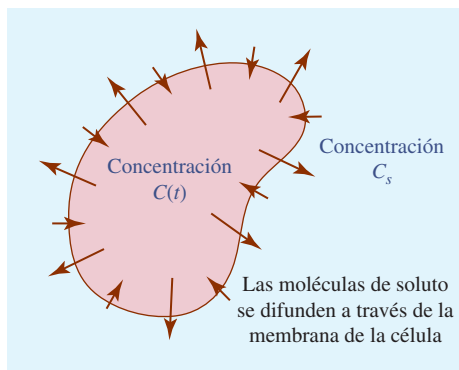


FIGURA 8.3.7 Célula en el problema 24

25. Un marcapasos, mostrado en la FIGURA 8.3.8, consta de una batería, un capacitor y el corazón como resistor. Cuando el interruptor S está en P , el capacitor se carga; cuando S está en Q , el capacitor se descarga, enviando un estímulo eléctrico al corazón. Durante este tiempo, la tensión E aplicada al corazón está dada por la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E, \quad t_1 < t < t_2,$$

donde R y C son constantes. Determine $E(t)$ si $E(t_1) = E_0$. (Por supuesto, la apertura y el cierre del interruptor son periódicos a fin de simular el latido cardíaco natural.)

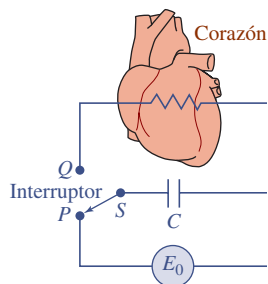


FIGURA 8.3.8 Marcapasos en el problema 25

26. En un circuito en serie que contiene un solo resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor ($L(di/dt)$) y la caída de voltaje a través del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado (E) al circuito. Vea la FIGURA 8.3.9. Así, obtenemos la ecuación diferencial para la corriente $i(t)$:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E,$$

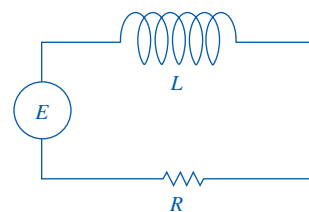


FIGURA 8.3.9 Circuito en serie en el problema 26

donde L y R son constantes como la inductancia y la resistencia, respectivamente. Determine la corriente $i(t)$ si E es 12 volts, la inductancia es $\frac{1}{2}$ henry, la resistencia es 10 ohms e $i(0) = 0$.

27. Una batería de 30 volts está conectada a un circuito en serie donde la inductancia es 0.1 henrys y la resistencia es 50 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine el comportamiento de la corriente para grandes valores de tiempo. (Vea el problema 26.)
28. Suponga que un tanque de agua tiene la forma de un cilindro circular recto. Si se permite una fuga de agua bajo el efecto de la gravedad a través de un orificio en el fondo del tanque, entonces la altura h del agua en el instante t está dada por la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh},$$

donde A_w y A_h son las áreas de la sección transversal del agua y el orificio, respectivamente, y c es un factor de fricción/contracción en el orificio. Vea la FIGURA 8.3.10.

- a) Resuelva la ecuación si la altura inicial del agua es 20 pies y $A_w = 50 \text{ pies}^2$ y $A_h = \frac{1}{4} \text{ pie}^2$.
- b) Si $c = 1$, ¿en cuánto tiempo se vacía el tanque?
- c) ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque si el factor de fricción/contracción es $c = 0.6$?

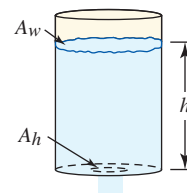


FIGURA 8.3.10 Tanque en el problema 28

29. Alrededor de 1840, el biólogo matemático belga P. F. Verhulst trabajaba en modelos matemáticos para pronosticar la población humana de los países. Una de las ecuaciones estudiadas era

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde $a > 0$, $b > 0$. Esta ecuación diferencial ahora se conoce como **ecuación logística**; la gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina **curva logística**. Demuestre que una solución de esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $P(0) = P_0$ es

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

30. La población $P(t)$ en el instante t en un suburbio de una gran ciudad se modela por el problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5\,000,$$

donde t se mide en meses. Encuentre $P(t)$ y determine el valor limitante de la población sobre un largo periodo. ¿En qué momento la población es igual a la mitad de este valor limitante?

31. Suponga que un estudiante portador de un virus de influenza regresa al campus aislado de una universidad de 1 000 estudiantes. Si se supone que la razón a la que el virus se propaga es proporcional no sólo al número x de estudiantes contagiados sino también el número $1\,000 - x$ de estudiantes no contagiados, entonces un modelo matemático del número de estudiantes contagiados es

$$\frac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y t se mide desde el día en que el estudiante contagiado regresa al campus. Si $x(0) = 1$ y se observa que $x(4) = 50$, entonces según este modelo, ¿cuántos estudiantes están contagiados después de 6 días? Trace una gráfica de la curva solución.

32. Cuando dos productos químicos A y B se combinan, se forma un compuesto C . La reacción de segundo orden resultante entre los dos productos químicos es modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X),$$

donde $X(t)$ denota el número de gramos del compuesto C presente en el instante t .

- Determine $X(t)$ si se sabe que $X(0) = 0$ g y $X(10) = 30$ g.
- ¿Qué cantidad del compuesto C hay a los 15 minutos?
- Las cantidades de productos químicos A y B restantes en el instante t son $50 - \frac{1}{5}X$ y $32 - \frac{4}{5}X$, respectivamente. ¿Cuántos gramos del compuesto C se forman cuando $t \rightarrow \infty$? ¿Cuántos gramos de los productos químicos A y B quedan cuando $t \rightarrow \infty$?

≡ Piense en ello

33. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial v_0 . Vea la FIGURA 8.3.11. Si la dirección positiva se toma hacia arriba, entonces cuando no hay resistencia del aire, la ecuación diferencial para la velocidad v después del momento de ignición es

$$v \frac{dv}{dy} = -\frac{k}{y^2},$$

donde k es una constante positiva.

- Resuelva la ecuación diferencial.
- Si $k = gR^2$ y $g = 32$ pies/s², $R = 4\,000$ mi, use una calculadora para demostrar que la “velocidad de escape” de un cohete es aproximadamente $v_0 = 25\,000$ mi/h.

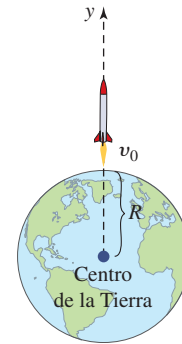


FIGURA 8.3.11 Cohete en el problema 33

34. Suponga que una esfera de hielo se funde a una razón proporcional a su área superficial. Determine el volumen V de la esfera en el instante t .
35. En un modelo para el crecimiento de tejido, sea $A(t)$ el área del cultivo de tejido en el instante t . Vea la FIGURA 8.3.12. Puesto que la mayoría de divisiones celulares se llevan a cabo en la porción periférica de tejido, el número de células en la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Si se supone que la razón de crecimiento del área es conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$, entonces un modelo matemático para A está dado por

$$\frac{dA}{dt} = k\sqrt{A}(M - A),$$

donde M es el área final de tejido cuando se ha completado el crecimiento.

- Resuelva la ecuación diferencial por separación de variables. [Sugerencia: Use una sustitución como en la sección 7.2 para efectuar la integración con respecto a A .]
- Encuentre $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$.

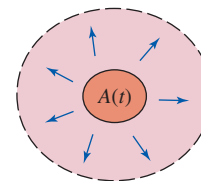


FIGURA 8.3.12 Crecimiento de tejido en el problema 35

≡ Proyectos

36. **Un clásico matemático: Instante de fallecimiento** El siguiente problema aparece en casi todos los textos sobre ecuaciones diferenciales.

En una habitación de una casa donde la temperatura era constante de 70 °F se encontró un cuerpo sin vida. Al medir la temperatura del cuerpo al momento de su descubrimiento, la lectura fue de 85 °F. Una segunda medición, una hora después, mostró que la temperatura del cuerpo era de 80 °F. Use el hecho de que si $t = 0$ corresponde al instante de fallecimiento, entonces la temperatura del cuerpo en ese instante era de 98.6 °F. Determine cuántas horas transcurrieron entre el fallecimiento y el descubri-

miento del cuerpo. [Sugerencia: Sea $t_1 > 0$ el instante en que se descubrió el cuerpo.]

- 37. Fechamiento con potasio/argón** El mineral potasio, cuyo símbolo químico es K, es el octavo elemento más abundante en la corteza terrestre, constituye alrededor de 2% del peso de ésta, y uno de sus isótopos naturales, el K-40 es radiactivo. El decaimiento radiactivo del K-40 es más complicado que el del carbono 14 porque cada uno de sus átomos decae a través de una o dos reacciones de decaimiento en una de dos sustancias: el mineral calcio 40 (Ca-40) o el gas argón 40 (Ar-40). Se han desarrollado métodos de fechamiento con estos dos productos de decaimiento. En cada caso, la edad de una muestra se calcula usando la razón entre dos números: la cantidad del isótopo padre K-40 en la muestra y la cantidad del isótopo hijo (Ca-40 o Ar-40) en la muestra que es **radiogénico**, en otras palabras, la sustancia que se origina a partir del decaimiento del isótopo padre después de la formación de la roca.

La cantidad de K-40 en la muestra es fácil de calcular. El K-40 incluye 1.17% de potasio natural existente, y este pequeño porcentaje está distribuido de manera bastante uniforme, de modo que la masa de K-40 en la muestra es justo 1.17% de la masa total de potasio en la muestra, que puede medirse. Pero por varias razones resulta complicado, y algunas veces problemático, determinar cuánto de Ca-40 en una muestra es radiogénico. En contraste, cuando una roca ígnea se forma debido a actividad volcánica, todo el gas argón (y otros gases) previamente atrapado en la roca es dispersado por el calor intenso. Cuando la roca se enfría y solidifica, el gas atrapado dentro de la roca tiene la misma composición que la atmósfera. Hay tres isótopos estables del argón, y en la atmósfera aparecen en las abundancias relativas siguientes: 0.063% Ar-38, 0.337% Ar-36 y 99.60% Ar-40. De éstos, justo uno, el Ar-36, no es creado radiogénicamente por el decaimiento de cualquier elemento, de modo que cualquier Ar-40 que exceda $99.60/(0.337) = 295.5$ veces la cantidad de Ar-36 debe ser radiogénico. Así, la cantidad de Ar-40 radiogénico en la

muestra puede determinarse a partir de las cantidades de Ar-38 y Ar-36 en la muestra, que es posible medir.

En el supuesto de que tenemos una muestra de roca para la cual se han determinado la cantidad de K-40 y la cantidad de Ar-40 radiogénico, ¿cómo puede calcularse la edad de la roca? Sean $P(t)$ la cantidad de K-40, $A(t)$ la cantidad de Ar-40 radiogénico y $C(t)$ la cantidad de Ca-40 radiogénico en la muestra como funciones del tiempo t en años desde la formación de la roca. Entonces un modelo matemático para el decaimiento de K-40 es el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{dA}{dt} = k_A P$$

$$\frac{dC}{dt} = k_C P$$

$$\frac{dP}{dt} = -(k_A + k_C)P,$$

donde $k_A = 0.581 \times 10^{-10}$ y $k_C = 4.962 \times 10^{-10}$.

- a) Encuentre una fórmula para $P(t)$. ¿Cuál es la vida media del K-40?
b) Demuestre que

$$A(t) = \frac{k_A}{k_A + k_C} P(t)(e^{(k_A + k_C)t} - 1).$$

- c) Después de mucho tiempo (es decir, sea $t \rightarrow \infty$), ¿qué porcentaje del K-40 originalmente presente en la muestra decae en Ar-40? ¿Qué porcentaje decae en Ca-40?
d) Demuestre que la edad t de la roca como una función de las cantidades presentes $P(t)$ de K-40 y $A(t)$ de Ar-40 radiogénico en la muestra es

$$t = \frac{1}{k_A + k_C} \ln \left[\frac{A(t)}{P(t)} \left(\frac{k_A + k_C}{k_A} \right) + 1 \right].$$

- e) Suponga que se descubre que cada gramo de una muestra de roca contiene 8.6×10^{-7} gramos de Ar-40 radiogénico y 5.3×10^{-6} gramos de K-40. ¿Cuál es la edad de la roca?

8.4 Curvas solución sin solución

■ Introducción La mayor parte de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse. Quizá la última oración deba equilibrarse al mencionar que *muchas* ecuaciones diferenciales tienen solución, pero el problema consiste en encontrarlas. Cuando se afirma que una solución de una ecuación diferencial existe no quiere decirse que también existe un método para encontrarla en el sentido de poder mostrar la solución exacta; a saber, una solución dada por una función explícita o como una función definida implícitamente. Tal vez lo mejor que puede hacerse es analizar una ecuación diferencial *cualitativamente* o *numéricamente*.

En esta sección abordaremos dos formas de analizar cualitativamente una ecuación diferencial de primer orden. Empezamos con un concepto fundamental: la derivada dy/dx proporciona la pendiente.

■ Una ecuación diferencial de primer orden define la pendiente Debido a que la solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$ es una función diferenciable sobre algún intervalo I , también debe ser continua sobre I . Así, la curva solución correspondiente sobre I no tiene interrupciones y debe poseer una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ sobre una curva solución es el valor de la primera derivada dy/dx en

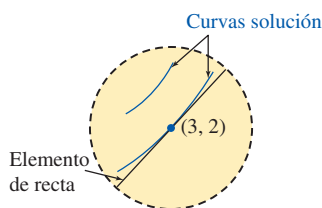


FIGURA 8.4.1 Vecindad del punto $(3, 2)$

este punto, y esto se conoce a partir de la **función pendiente** F de la ecuación diferencial: $F(x, y(x))$. Luego, suponga que (x, y) representa cualquier punto en el plano xy en que está definida la función F . La función pendiente F asigna un valor $F(x, y)$ al punto; el valor es la pendiente de una recta. Un segmento de recta corto, denominado **elemento de recta**, se traza a través de (x, y) con pendiente $F(x, y)$. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = x - y$, donde $F(x, y) = x - y$. En el punto $(3, 2)$, por ejemplo, la pendiente de un elemento de recta es $F(3, 2) = 1$. Como se muestra en la FIGURA 8.4.1, una curva solución que pase cerca de $(3, 2)$ tiene una forma semejante al elemento de recta; una curva solución diferente que pase cerca de $(3, 2)$ tiene una forma semejante en una *pequeña* vecindad del punto.

■ **Campos de dirección** Ahora suponga que $F(x, y)$ se evalúa de manera sistemática sobre una retícula rectangular de puntos en el plano xy y que se traza un elemento de recta en cada punto donde se evalúa F . La colección de todos estos elementos de recta se denomina **campo de dirección** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$. Visualmente, el campo de dirección sugiere la apariencia de una forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial y en consecuencia es posible observar ciertos aspectos cualitativos (por ejemplo, crecimiento, decrecimiento y concavidad) de una curva solución. Una sola curva solución que lentamente recorre el campo de dirección debe seguir el patrón del campo; es tangente a un elemento de recta cuando corta un punto en la retícula.

■ **Curvas solución sin solución** Trazar un campo de dirección manualmente es algo que se hace en forma directa, pero consume tiempo; tal vez sea una de las tareas sobre las que puede argumentarse que es algo que sólo debe hacerse una vez en la vida, pero en general se realiza de manera más eficiente por medio de software de computadora. La FIGURA 8.4.2 se obtuvo usando una aplicación de software de campo de dirección con $dy/dx = x - y$ y una región rectangular de 5×5 , donde los puntos en esa región tienen una separación horizontal y vertical de $\frac{1}{2}$ unidad; es decir, en los puntos (mh, nh) , $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros tales que $-10 \leq m \leq 10$, $-10 \leq n \leq 10$.

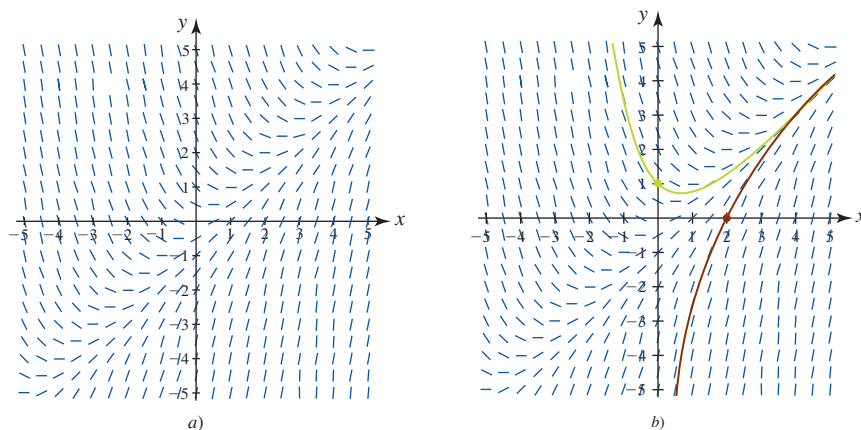


FIGURA 8.4.2 Campo de dirección en a); curvas solución de la ecuación diferencial sobrepuesta en el campo de dirección en b)

En la figura 8.4.2a) observe que en cualquier punto a lo largo de la recta $y = x$, las pendientes son $F(x, x) = 0$, de modo que los elementos de recta son horizontales. Además, la recta $y = x$ divide el plano en dos regiones, por arriba de la recta ($y > x$) los elementos de recta tienen pendiente negativa, mientras que por abajo de la recta ($y < x$) los elementos de recta tienen pendiente positiva. Al leer de izquierda a derecha, imagine una curva solución que empieza en un punto en el segundo cuadrante que al ir hacia abajo se aplana cuando pasa por la recta $y = x$ y después se dirige para arriba hacia el primer cuadrante; en otras palabras, su forma se vuelve cóncava hacia arriba. La familia de soluciones de esta ecuación diferencial se ha visto en el ejemplo 5 de la sección 8.2. Usted debe comparar las gráficas muestra en la figura 8.2.1 con el campo de dirección en la figura 8.4.2a). En la figura 8.4.2b) se proporcionan las dos curvas solución correspondientes a la solución de $dy/dx = x - y$ que pasan por $(0, 1)$ (en verde) y $(2, 0)$ (en rojo).

EJEMPLO 1 Campo de dirección

Trace el campo de dirección para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Solución Ésta es la ecuación diferencial del ejemplo 2 en la sección 8.1.

- a) Si usamos una retícula de puntos (x, y) con coordenadas enteras para $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ entonces es directo calcular a mano las pendientes de los elementos de recta en los cuatro cuadrantes. Para $x > 0$, $y > 0$ (primer cuadrante) las pendientes $F(x, y) = -x/y$ se proporcionan en la tabla siguiente.

$F(x, y)$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$	$y = 5$
$x = 1$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
$x = 2$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$
$x = 3$	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{5}$
$x = 4$	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{4}{5}$
$x = 5$	-5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	-1

Por ejemplo, $F(3, 4) = -\frac{3}{4}$ es la pendiente del elemento de recta en $(3, 4)$ y se muestra en rojo en la tabla en la intersección del renglón identificado por $x = 3$ y la columna identificada por $y = 4$.

Puesto que el signo algebraico del cociente x/y en (x, y) , $x > 0$, $y > 0$ es el mismo que en (x, y) , $x < 0$, $y < 0$, las pendientes en los puntos correspondientes en el tercer cuadrante son las mismas que las pendientes en el primer cuadrante. En forma semejante, resulta fácil ver que las pendientes de los segmentos de recta en los cuadrantes segundo y cuarto son los negativos de las pendientes en la tabla. Al trazar elementos de recta por los puntos con las pendientes determinadas a partir de la tabla obtenemos el campo de dirección en la FIGURA 8.4.3a).

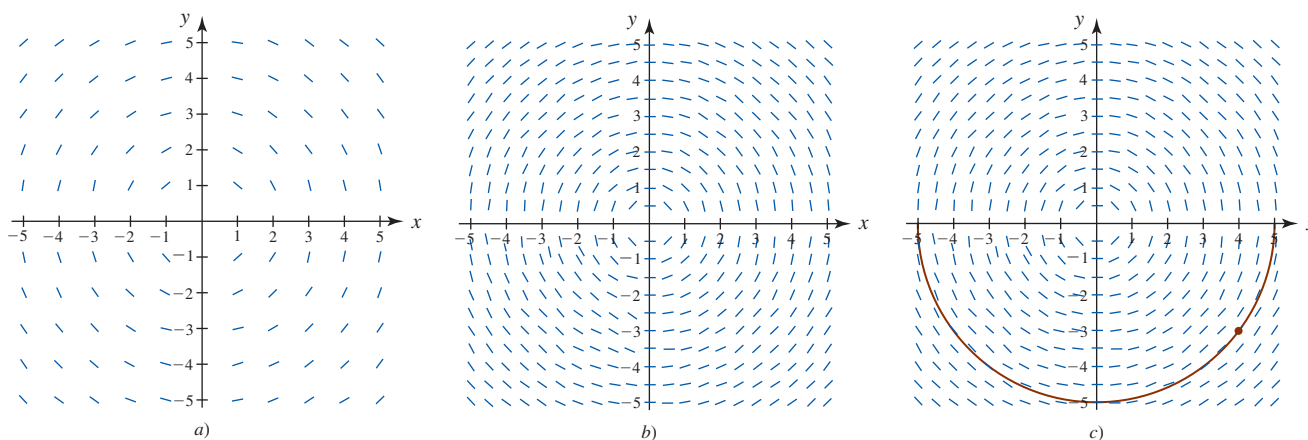


FIGURA 8.4.3 Campos de dirección en el ejemplo 1

- b) Con ayuda de un SAC y la retícula de puntos definidos nuevamente por (mh, nh) , $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros, $-10 \leq m \leq 10$, $-10 \leq n \leq 10$, obtenemos el campo de dirección en la figura 8.4.3b). Visualmente, el flujo del campo es circular. En la figura 8.4.3c) hemos sobrepuesto la curva solución (en rojo) del PVI,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = -3$$

que se obtuvo en el ejemplo 3 de la sección 8.1 sobre el campo de dirección generado por computadora. ■

Por supuesto, el objetivo principal de construir un campo de dirección es obtener un bosquejo aproximado de una curva solución cuando resolver exactamente una ecuación diferencial resulta imposible.

Al usar más puntos reticulares se obtiene una mejor idea de las formas de las curvas solución.

EJEMPLO 2 Campo de dirección

Use un campo de dirección para describir una curva solución aproximada para el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos y, \quad y(-4) = 4.$$

Solución Señalamos el punto inicial $(-4, 4)$ en el campo de dirección generado por computadora en la FIGURA 8.4.4a); al moverse hacia la izquierda y a la derecha intentamos trazar una curva lo más larga posible que contenga el punto inicial. Cuando hacemos un movimiento hacia la derecha del punto inicial, los segmentos de recta casi inmediatamente hacen que la gráfica se dirija hacia abajo (aproximadamente para $-3 < x < -0.5$), y luego hacia arriba cuando la gráfica cruza el eje y (aproximadamente para $-0.5 < x < 2.5$), lo cual es seguido de inmediato por otro movimiento hacia abajo (aproximadamente para $x > 2.5$). La curva solución que acabamos de describir tiene la forma aproximada que se muestra en la figura 8.4.4b).

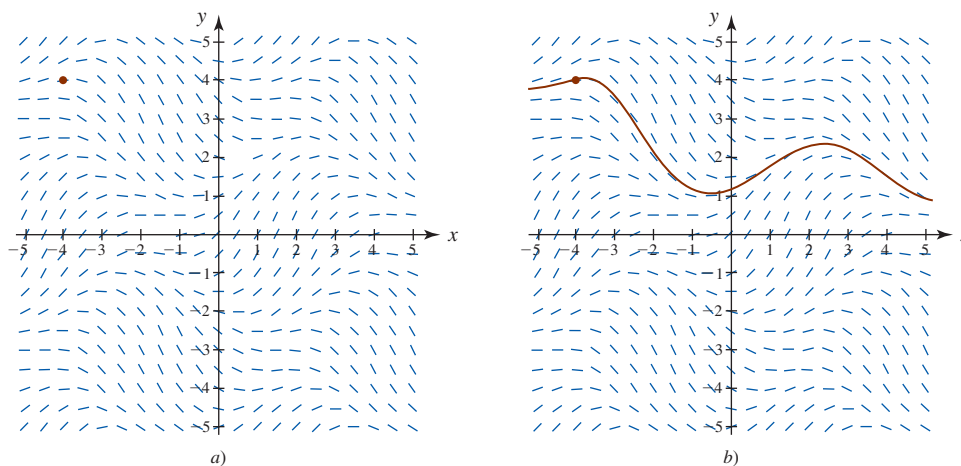


FIGURA 8.4.4 Campo de dirección y curva solución aproximada en el ejemplo 2

■ **Retratos y estabilidad de fase** La interpretación de la derivada dy/dx como una función que proporciona la pendiente desempeñó un papel crucial en la construcción de los campos de dirección. En el siguiente análisis usamos otra propiedad de la primera derivada; a saber, si $y(x)$ es una función diferenciable, y si $dy/dx > 0$ (o $dy/dx < 0$) para toda x en un intervalo I , entonces $y(x)$ es creciente (o decreciente) sobre I .

■ **Ecuaciones diferenciales autónomas** Se dice que una ecuación diferencial de primer orden donde la variable independiente x no aparece en forma explícita es una **ecuación diferencial autónoma**. Por tanto, una ecuación diferencial autónoma de primer orden es una cuya forma normal es

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \quad (1)$$

En todo momento se supondrá que f y su derivada f' son funciones continuas de x sobre algún intervalo I . Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = \overset{f(y)}{\downarrow} 1 + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \overset{F(x, y)}{\downarrow} 2xy$$

son autónoma y no autónoma, respectivamente. Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden encontradas en aplicaciones son autónomas y de la forma (1). En la sección 8.3, todos los modelos matemáticos, excepto uno, son autónomos; la ecuación (7) de esa sección es no autónoma. Por supuesto, los diferentes símbolos en la sección 8.3 forman parte de x y y en este análisis.

■ **Puntos críticos** Los ceros de la función f en (1) son de interés especial. Se dice que un número real c es un **punto crítico** de la ecuación diferencial autónoma (1) si es un cero de f , es decir, si

$f(c) = 0$. Los puntos críticos también se denominan **puntos de equilibrio** y **puntos estacionarios**. Además, al sustituir $y = c$ en (1) ambos miembros de la ecuación se vuelven cero, de modo que:

- Si c es un punto crítico de (1), entonces $y(x) = c$ es una solución constante de la ecuación autónoma.

Una solución constante $y(x) = c$ de (1) se denomina **solución de equilibrio** y:

- Las soluciones de equilibrio son las únicas soluciones de (1).

Puede afirmarse cuándo una solución no constante $y(x)$ de (1) es creciente o decreciente al determinar el signo algebraico de la derivada dy/dx , lo cual se hace al identificar los intervalos sobre los cuales $f(y)$ es positiva o negativa.

EJEMPLO 3 Ecuación diferencial autónoma de primer orden

Al analizar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by) \quad (2)$$

$a > 0, b > 0$, se observa que es autónoma. A partir de $f(y) = y(a - by) = 0$ también vemos que 0 y a/b son puntos críticos de la ecuación. Al escribir estos dos números en una columna, la dividimos en tres intervalos determinados por las desigualdades:

$$-\infty < x < 0, \quad 0 < x < a/b, \quad a/b < x < \infty.$$

Las flechas en la línea mostrada en la FIGURA 8.4.5 indican el signo algebraico de $f(y) = y(a - by)$ sobre estos intervalos, y si una solución $y(x)$ es creciente o decreciente. La tabla siguiente explica la figura.

Intervalo	Signo de $f(y)$	$y(x)$	Flecha
$(-\infty, 0)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo
$(0, a/b)$	más	creciente	apunta hacia arriba
$(a/b, \infty)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo

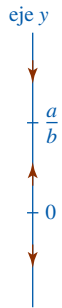
Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial son $y = 0$ y $y = a/b$.

La figura 8.4.5 se denomina **retrato de fase unidimensional**, o simplemente **retrato de fase**, de la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$. La recta vertical o eje y se denomina **recta de fase**. Un retrato de fase como éste también puede interpretarse en términos del movimiento de una partícula que se desplaza. Si imagina que $y(x)$ denota la posición de una partícula en el instante x sobre una recta vertical cuya dirección positiva y es hacia arriba, entonces la razón de cambio dy/dx representa la velocidad de la partícula. Una velocidad positiva indica movimiento hacia arriba y una velocidad negativa indica que la partícula se está moviendo hacia abajo. Si una partícula se coloca en un punto crítico, entonces debe permanecer ahí todo el tiempo. De ahí el nombre alternativo de *punto estacionario*.

■ **Curvas solución sin solución** Sin resolver una ecuación diferencial autónoma, por lo general es posible decir bastantes cosas sobre sus curvas solución. Al relacionar esto con el primer tema de esta sección, observe que un campo de dirección de una ecuación diferencial autónoma (1) es independiente de x , de modo que en cualquier punto sobre una recta paralela al eje x todas las pendientes son iguales. Por tanto, si $y(x)$ es una solución de (1), entonces cualquier traslación horizontal $y(x - k)$, k una constante, también es una solución. Puesto que la función f en (1) es independiente de la variable x , podemos considerar que está definida para $-\infty < x < \infty$ o $0 \leq x < \infty$. También, puesto que f y su derivada f' son funciones continuas de x sobre algún intervalo I , es posible demostrar que en alguna región o banda horizontal R en el plano xy correspondiente a I , por cualquier punto (x_0, y_0) en R pasa sólo una curva solución de (1). Vea la FIGURA 8.4.6a). Para abreviar el análisis se supondrá que (1) posee exactamente dos puntos críticos c_1 y c_2 y que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones en equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ son rectas horizontales, y estas rectas parten la región R en las tres subregiones R_1, R_2 y R_3 como se ilustra en la figura 8.4.6b). Sin demostrar, a continuación se presentan algunas conclusiones que pueden extraerse sobre una solución no constante $y(x)$ de (1):

- Si (x_0, y_0) está en una subregión R_i , $i = 1, 2, 3$ y $y(x)$ es una solución cuya gráfica pasa por este punto, entonces $y(x)$ permanece en la subregión para toda x . Como se ilustra en

◀ Ésta es la ecuación diferencial en el problema 29, ejercicios 8.3. Aquí el símbolo y desempeña la parte de P , y x la de la parte de t .



■ FIGURA 8.4.5 Dos puntos críticos determinan tres intervalos en el ejemplo 3

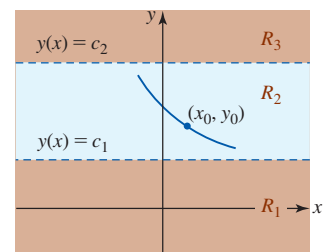
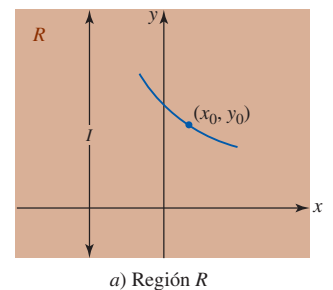


FIGURA 8.4.6 Dos soluciones de equilibrio determinan tres subregiones en el plano

la figura 8.4.6b), la solución $y(x)$ en R_2 está acotada por c_1 por arriba y por c_2 por abajo; es decir, $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x . La curva solución permanece en R_2 para toda x porque la gráfica de una solución no constante de (1) no puede cruzar la gráfica de una solución de equilibrio.

- Por continuidad de f , entonces debe tenerse $f(y) > 0$ o $f(y) < 0$ para toda y en una subregión R_i , $i = 1, 2, 3$. En otras palabras, $f(y)$ no puede cambiar de signo en una subregión.
- Puesto que $dy/dx = f(y(x))$ es positiva o negativa en una subregión, una solución $y(x)$ es creciente o decreciente en una subregión R_i , $i = 1, 2, 3$. En consecuencia, $y(x)$ no puede ser oscilatoria, y tampoco puede tener un extremo relativo (máximo o mínimo).
- Si $y(x)$ está *acotada por arriba* por un punto crítico c_1 (como en la subregión R_1 , donde $y(x) < c_1$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_1$ cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$. Si $y(x)$ está *acotada*, es decir, acotada por arriba y por abajo por dos puntos críticos consecutivos (como en la subregión R_2 , donde $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$, a una cuando $x \rightarrow \infty$ y a la otra cuando $x \rightarrow -\infty$. Si $y(x)$ está *acotada por abajo* por un punto crítico (como en la subregión R_3 , donde $c_2 < y(x)$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_2$ cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$.

Con estos hechos en mente se volverá a analizar la ecuación diferencial en el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Otro repaso al ejemplo 3

Los tres intervalos determinados sobre el eje y o recta de fase por los puntos críticos 0 y a/b ahora corresponden en el plano xy a tres subregiones definidas por:

$$R_1: -\infty < y < 0, \quad R_2: 0 < y < a/b, \quad R_3: a/b < y < \infty,$$

donde $-\infty < x < \infty$. El retrato de fase en la figura 8.4.5 indica que $y(x)$ es decreciente en R_1 , creciente en R_2 y decreciente en R_3 . Si $y(0) = y_0$ es un valor inicial, entonces en R_1 , R_2 y R_3 tenemos, respectivamente:

- Para $y_0 < 0$, $y(x)$ está acotada por arriba. Puesto que $y(x)$ es decreciente, $y(x)$ decrece sin límite para x creciente y así $y(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Esto significa que el eje x negativo, $y = 0$, es una asíntota horizontal para una curva solución.
- Para $0 < y_0 < a/b$, $y(x)$ está acotada. Puesto que $y(x)$ es creciente, $y(x) \rightarrow a/b$ cuando $x \rightarrow \infty$, y $y(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Las dos rectas $y = 0$ y $y = a/b$ son asíntotas horizontales para cualquier curva solución que empiece en esta subregión.
- Para $y_0 > a/b$, $y(x)$ está acotada por abajo. Puesto que $y(x)$ es decreciente, $y(x) \rightarrow a/b$ cuando $x \rightarrow \infty$. Esto significa que $y = a/b$ es una asíntota horizontal para una curva solución.

En la FIGURA 8.4.7 se reproduce el retrato de fase original a la izquierda del plano xy donde se han sombreado las subregiones R_1 , R_2 y R_3 . Las gráficas de las soluciones de equilibrio $y = a/b$ y $y = 0$ se muestran en la figura 8.4.7 como líneas discontinuas; las gráficas sólidas representan gráficas típicas de $y(x)$ que ilustran los tres casos que acaban de analizarse. ■

En una subregión como R_1 en el ejemplo 4, donde $y(x)$ es decreciente y no está acotada por abajo, necesariamente debe tenerse $y(x) \rightarrow -\infty$. No interprete esta última declaración como $y(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$; podría tenerse $y(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, donde $a > 0$ es un número finito que depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Al pensar en términos dinámicos, $y(x)$ podría “explotar” en un tiempo finito; o pensando gráficamente, $y(x)$ podría tener una asíntota vertical en $x = a > 0$. Una observación semejante sigue siendo válida para la subregión R_3 . Esos conceptos se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Curvas solución

La ecuación autónoma $dy/dx = (y - 1)^2$ posee el único punto crítico 1 y por tanto sólo tiene una solución constante $y(x) = 1$. A partir del retrato de fase en la FIGURA 8.4.8a), concluimos que una solución no constante $y(x)$ es una función creciente en las dos subregiones definidas por $-\infty < y < 1$ y $1 < y < \infty$, donde $-\infty < x < \infty$. Para una condición inicial $y(0) = y_0 < 1$, una solución $y(x)$ es creciente y acotada por arriba por 1, y así $y(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$; para $y(0) = y_0 > 1$, una solución $y(x)$ es creciente y no acotada.

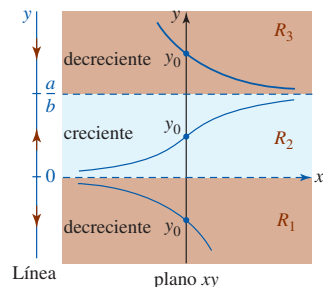


FIGURA 8.4.7 Retrato de fase y curvas solución en cada una de las tres subregiones en el ejemplo 4

Usted debe comprobar por separación de variables que una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación diferencial es $y(x) = 1 - 1/(x + C)$. Para una condición inicial dada, por ejemplo, $y(0) = -1 < 1$, encontramos que $C = \frac{1}{2}$ y $y(x) = 1 - 1/(x + \frac{1}{2})$. Observe que $x = -\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\frac{1}{2}^+$. Vea la figura 8.4.8b). Para una condición inicial diferente $y(0) = 2 > 1$, hallamos que $C = -1$ y $y(x) = 1 - 1/(x - 1)$. La última función tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y en la figura 8.4.8c) vemos que $y(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$. Las curvas solución son las porciones de las gráficas en las figuras 8.4.8b) y 8.4.8c) que se muestran en azul. Como se pronosticó con el retrato de fase en la figura 8.4.8a), para la curva solución en la figura 8.4.8b), $y(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, mientras que para la curva solución en la figura 8.4.8c), $y(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$.

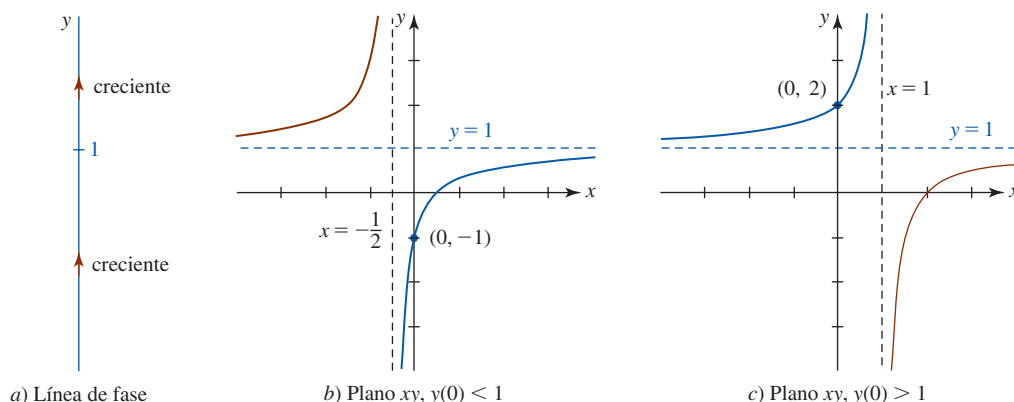


FIGURA 8.4.8 Comportamiento de las soluciones cerca de $y = 1$ en el ejemplo 5

Atractores y repelentes Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma (1) y que c es un punto crítico de la ecuación diferencial. Hay básicamente tres tipos de comportamiento que $y(x)$ puede mostrar cerca de c . En la FIGURA 8.4.9 se ha colocado c en cuatro rectas de fase verticales. Cuando las dos puntas de flecha a ambos lados del punto azul identificado por c apuntan hacia c , como en la figura 8.4.9a), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c presentan el comportamiento asintótico $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = c$. Por esta razón se dice que el punto crítico c es **asintóticamente estable**. Al usar una analogía física, una solución que empieza cerca de c es como una partícula cargada que, con el tiempo, es atraída por otra partícula de carga opuesta, de modo que c a menudo se menciona como **atractor**. Cuando las dos puntas de flecha a ambos lados del punto azul identificado por c apuntan alejándose de c , como en la figura 8.4.9b), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) se alejan de c cuando x crece. En este caso se dice que el punto crítico c es **inestable**. Un punto crítico inestable se denomina **repelente**, por razones obvias. El punto crítico que se ilustra en las figuras 8.4.9c) y 8.4.9d) no es atractor ni repelente. Pero puesto que c presenta características tanto de un atractor como de un repelente, una solución que empieza desde un punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c es atraída hacia c y repelida desde el otro lado, se dice que el punto crítico c es **semiestable**. En el ejemplo 3, el punto crítico a/b es asintóticamente estable (un atractor) y el punto crítico 0 es inestable (un repelente). El punto crítico en el ejemplo 5 es semiestable.

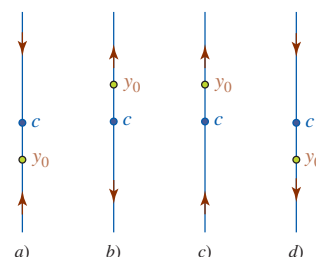


FIGURA 8.4.9 El punto crítico es: un atractor en a), un repelente en b), y semiestable en c) y d)

Ejercicios 8.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-8, use el campo de dirección generado por computadora para trazar una curva solución aproximada para la ecuación diferencial indicada que pase por cada uno de los puntos dados.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
 - a) $y(0) = 3$
 - b) $y(3) = 3$
 - c) $y(-\frac{3}{2}) = 2$
 - d) $y(-2) = -3$

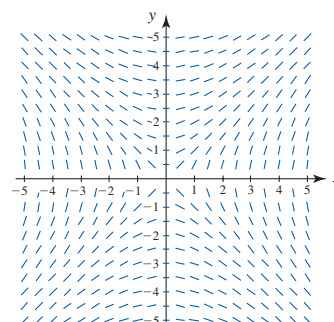


FIGURA 8.4.10 Campo de dirección para el problema 1

2. $\frac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^3}$

a) $y(-4) = 0$
c) $y(0) = -2$

b) $y(3) = -2$
d) $y(0) = 1$

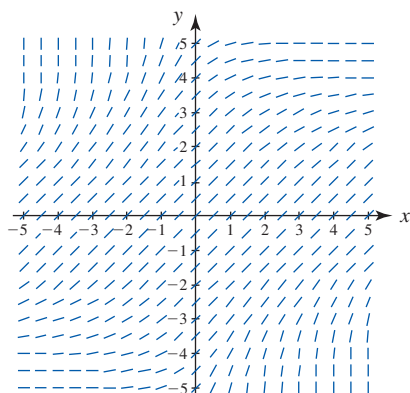


FIGURA 8.4.11 Campo de dirección para el problema 2

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y^2$

a) $y(0) = -2$
c) $y(-1) = 0$

b) $y(0) = 2$
d) $y(-4) = 0$

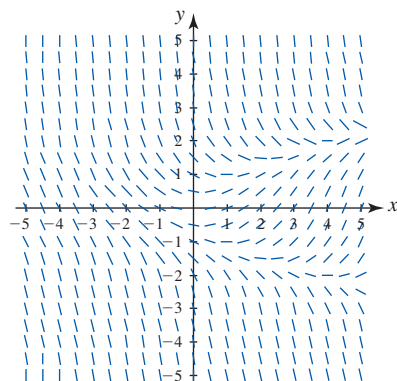


FIGURA 8.4.14 Campo de dirección para el problema 5

3. $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$

a) $y(0) = 0$
c) $y(2) = 0$

b) $y(-1) = 0$
d) $y(0) = -4$

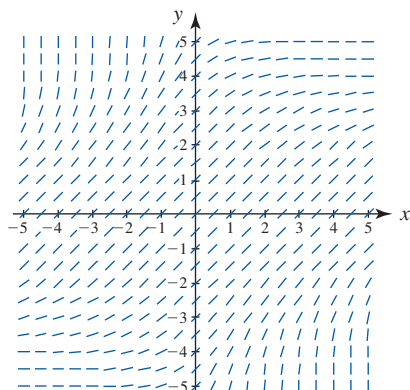


FIGURA 8.4.12 Campo de dirección para el problema 3

6. $\frac{dy}{dx} = e^{-\sin y}$

a) $y(0) = 0$
c) $y(-2) = 0$

b) $y(0) = 2$
d) $y(4) = 0$

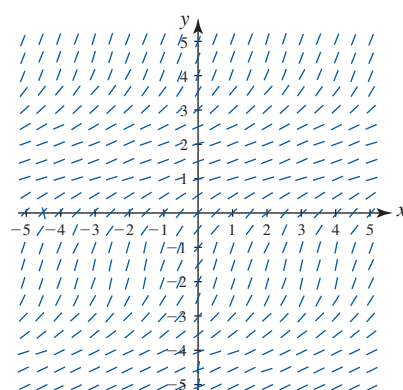


FIGURA 8.4.15 Campo de dirección para el problema 6

4. $\frac{dy}{dx} = (\sin x) \cos y$

a) $y(0) = 0$
c) $y(-3) = 0$

b) $y(0) = 2$
d) $y(4) = 0$

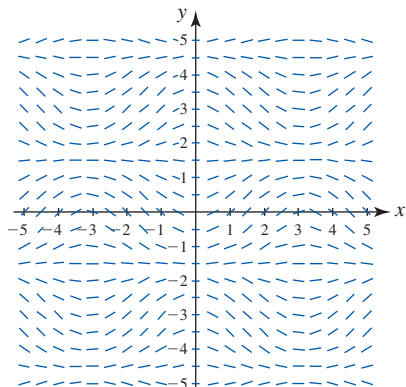


FIGURA 8.4.13 Campo de dirección para el problema 4

7. $\frac{dy}{dx} = y \sin x$

a) $y(0) = 1$
c) $y(4) = 1$

b) $y(-3) = -2$
d) $y(2) = 2$

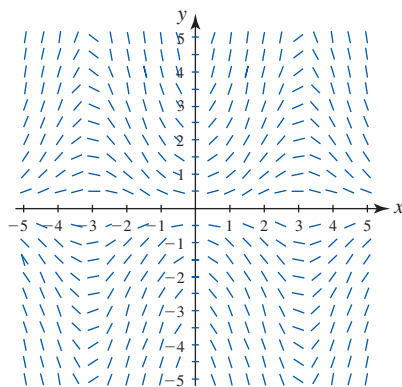


FIGURA 8.4.16 Campo de dirección para el problema 7

8. $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

a) $y(-2) = 0$

c) $y(0) = 0$

b) $y(0) = -2$

d) $y(3) = 0$

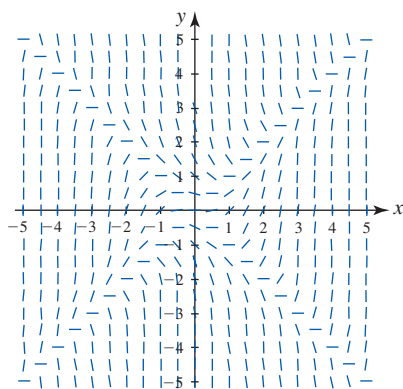


FIGURA 8.4.17 Campo de dirección para el problema 8

En los problemas 9-12, use un software de computadora para obtener un campo de dirección para la ecuación diferencial dada. A mano, trace una curva solución aproximada que pase por cada uno de los puntos dados.

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

a) $y(0) = 3$

b) $y(2) = -2$

10. $\frac{dy}{dx} = x + y$

a) $y(0) = -1$

b) $y(3) = 0$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^2 + y$

a) $y(0) = 1$

b) $y(4) = 0$

12. $\frac{dy}{dx} = y - 2 \cos \pi x$

a) $y(0) = 0$

b) $y(2) = -4$

En los problemas 13-20, encuentre los puntos críticos y el retrato de fase de la ecuación diferencial de primer orden autónoma dada. Clasifique cada punto crítico como asintóticamente estable (atractor), inestable (repelente) o semiestable.

13. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$

14. $\frac{dy}{dx} = y^2 - y^3$

15. $\frac{dy}{dx} = (y - 2)^2$

16. $\frac{dy}{dx} = 10 + 3y - y^2$

17. $\frac{dy}{dx} = y^2(4 - y^2)$

18. $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$

19. $\frac{dy}{dx} = y \ln(y + 2)$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^y - 9y}{e^y}$

En los problemas 21 y 22, considere la ecuación diferencial de primer orden autónoma dada y la condición inicial $y(0) = y_0$. A mano, trace una gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores:

a) $y_0 > 1$

c) $-1 < y_0 < 0$

b) $0 < y_0 < 1$

d) $y_0 < -1$

21. $\frac{dy}{dx} = y - y^3$

22. $\frac{dy}{dx} = y^2 - y^4$

En los problemas 23 y 24, considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde se proporciona la gráfica de f . Use la gráfica para localizar los puntos críticos de cada ecuación diferencial. Trace un retrato de fase de cada ecuación. A mano, trace curvas solución en las subregiones del plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

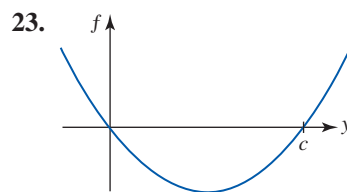


FIGURA 8.4.18 Gráfica para el problema 23

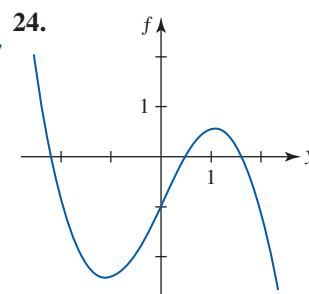


FIGURA 8.4.19 Gráfica para el problema 24

Aplicaciones

25. En la sección 8.3 vimos que la ecuación diferencial *lineal* autónoma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

es un modelo matemático para la velocidad de un cuerpo que cae cuando se toma en cuenta la resistencia del aire. Use sólo un retrato de fase para determinar la velocidad del cuerpo que cae.

26. En la sección 8.3 también vimos que la ecuación diferencial *no lineal* autónoma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

es un modelo matemático para la velocidad de un cuerpo que cae cuando se toma en cuenta la resistencia del aire. Use sólo un retrato de fase para determinar la velocidad terminal del cuerpo que cae.

27. En el problema 26 de los ejercicios 8.3 vimos que la corriente $i(t)$ en un circuito en serie está descrita por

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Si la inductancia L , la resistencia R y el voltaje aplicado E son constantes positivas, demuestre que cuando $t \rightarrow \infty$ la corriente obedece la ley de Ohm de que $E = iR$.

28. Cuando se combinan dos productos químicos, la razón a la que se forma un nuevo compuesto está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Aquí $X(t)$ denota el número de gramos del nuevo compuesto formado en el tiempo t .

- a) Describa el comportamiento de X cuando $t \rightarrow \infty$.
- b) Considere el caso en que $\alpha = \beta$. ¿Cuál es el comportamiento de X cuando $t \rightarrow \infty$ si $X(0) < \alpha$? A partir del retrato de fase de la ecuación diferencial, ¿puede pronosticar el comportamiento de X cuando $t \rightarrow \infty$ si $X(0) > \alpha$?
- c) Compruebe que una solución explícita de la ecuación diferencial en el caso en que $k = 1$ y $\alpha = \beta$ es $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Encuentre una solución que cumpla $X(0) = \alpha/2$. Encuentre una solución que cumpla $X(0) = 2\alpha$. Grafique las dos soluciones. ¿El comportamiento de las soluciones $t \rightarrow \infty$ coincide con sus respuestas en el inciso b)?

■ Piense en ello

29. Para una ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$, cualquier miembro de la familia de curvas $F(x, y) = c$, donde c es una constante, se denomina una **isoclina** de la ecuación.

En un campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, ¿qué es cierto sobre los segmentos de recta en puntos sobre la isoclina $dy/dx = x^2 + y^2 = 1$? Identifique las isoclinas de la ecuación diferencial $dy/dx = x + y$.

30. Para una ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$, una curva en el plano definida por $F(x, y) = 0$ se denomina una **nulclina** de la ecuación. En un campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 + y^2 - 1$, ¿qué es cierto sobre los segmentos de recta en puntos sobre una nulclina? Identifique las nulclinas de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 - y^2$ e indíquelas en el campo de dirección proporcionado en la figura 8.4.17.
31. El número 0 es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = y^n$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n es 0 asintóticamente estable? ¿Inestable? Repita lo anterior para la ecuación $dy/dx = -y^n$.

8.5 Método de Euler

■ **Introducción** Ahora pasemos de los métodos de visualización analizados en la sección precedente a un método numérico. Al usar la ecuación diferencial es posible construir un procedimiento simple para obtener aproximaciones a los valores numéricos de las coordenadas y de puntos sobre una curva solución.

■ **Método de Euler** Una de las técnicas más simples para aproximar una solución de un problema con valor inicial de primer orden

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

se denomina **método de Euler**, o **método de las rectas tangentes**. En esta técnica usamos el hecho de que la derivada de una función $y(x)$ en un número x_0 determina una linealización de $y(x)$ en $x = x_0$:

$$L(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

Recuerde de la sección 4.9 que la linealización de $y(x)$ en x_0 es simplemente una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0) . Ahora dejamos que h represente un incremento positivo sobre el eje x , como se muestra en la FIGURA 8.5.1. Luego, para $x_1 = x_0 + h$ tenemos

$$L(x_1) = y_0 + y'(x_0)(x_0 + h - x_0) = y_0 + hy'_0,$$

donde $y'_0 = y'(x_0) = F(x_0, y_0)$. Al hacer $y_1 = L(x_1)$ obtenemos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

El punto (x_1, y_1) , que se muestra en la figura 8.5.1 como un punto sobre la recta tangente, es una aproximación al punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la verdadera curva solución; es decir, $L(x_1) \approx y(x_1)$ o $y_1 \approx y(x_1)$ es una aproximación de $y(x)$ en x_1 . Por supuesto, la precisión de la aproximación depende bastante del tamaño del incremento h . Por lo general, este **tamaño de paso** debe escogerse *razonablemente pequeño*. Si repetimos el proceso, usando (x_1, y_1) y la nueva pendiente $F(x_1, y_1)$ como el nuevo punto inicial, entonces obtenemos la aproximación

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1).$$

En general, se concluye que

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n), \quad (2)$$

donde $x_n = x_0 + nh$.

En el siguiente ejemplo se aplica el método de Euler (2) a una ecuación diferencial para la que se conoce una solución explícita; de esta forma es posible comparar los valores estimados y_n con los valores verdaderos $y(x_n)$.

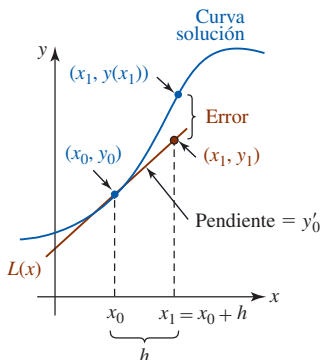


FIGURA 8.5.1 Aproximación a un punto sobre una curva solución por un punto sobre la recta tangente

EJEMPLO 1 Método de Euler

Considere el problema con valor inicial $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Use el método de Euler para aproximar $y(1.5)$ usando primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

Solución Con la identificación de que $F(x, y) = 0.2xy$, (2) se vuelve

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_n y_n).$$

Luego, para $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $h = 0.1$ encontramos

$$y_1 = y_0 + (0.1)(0.2x_0 y_0) = 1 + (0.1)[0.2(1)(1)] = 1.02,$$

que es un estimado al valor de $y(1.1)$. No obstante, si usamos $h = 0.05$, se requieren *dos* pasos para llegar a $x = 1.1$. A partir de

$$y_1 = 1 + (0.05)[0.2(1)(1)] = 1.01$$

$$y_2 = 1.01 + (0.05)[0.2(1.05)(1.01)] = 1.020605$$

tenemos $y_1 \approx y(1.05)$ y $y_2 \approx y(1.1)$. El resto de los cálculos se llevó a cabo usando software de computadora. Los resultados se resumen en las **TABLAS 8.5.1** y **8.5.2**. Cada entrada se ha redondeado hasta cuatro cifras decimales. Observe que para llegar a $x = 1.5$ se requieren cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$.

TABLA 8.5.1 Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.0200	1.0212	0.0012	0.12
1.20	1.0424	1.0450	0.0025	0.24
1.30	1.0675	1.0714	0.0040	0.37
1.40	1.0952	1.1008	0.0055	0.50
1.50	1.1259	1.1331	0.0073	0.64

TABLA 8.5.2 Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.0100	1.0103	0.0003	0.03
1.10	1.0206	1.0212	0.0006	0.06
1.15	1.0318	1.0328	0.0009	0.09
1.20	1.0437	1.0450	0.0013	0.12
1.25	1.0562	1.0579	0.0016	0.16
1.30	1.0694	1.0714	0.0020	0.19
1.35	1.0833	1.0857	0.0024	0.22
1.40	1.0980	1.1008	0.0028	0.25
1.45	1.1133	1.1166	0.0032	0.29
1.50	1.1295	1.1331	0.0037	0.32

En el ejemplo 1, los valores verdaderos en las tablas se calcularon a partir de la solución conocida $y = e^{0.1(x^2-1)}$. También, el **error absoluto** se define como

$$|\text{valor verdadero} - \text{aproximación}|.$$

El **error relativo** y el **error porcentual** son, a su vez,

$$\frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor verdadero}|} \quad \text{y} \quad \frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor verdadero}|} \times 100.$$

Al comparar las tablas 8.5.1 y 8.5.2 resulta evidente que la precisión de las aproximaciones mejora a medida que disminuye el tamaño h del paso. También vemos que incluso cuando el error porcentual relativo crece, no parece ser tan malo. Sin embargo, no debe decepcionarse por un ejemplo. Observe lo que ocurre en el siguiente ejemplo, cuando simplemente se cambia de 0.2 a 2 el coeficiente del miembro derecho de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 2 Comparación de valores exactos/aproximados

Use el método de Euler para aproximar $y(1.5)$ para la solución del problema con valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

Solución Usted debe comprobar que la solución exacta del PVI es ahora $y = e^{x^2-1}$. Al proceder como en el ejemplo 1, obtenemos los resultados que se muestran en las tablas 8.5.3 y 8.5.4.

◀ Compruebe esta solución al resolver la ecuación diferencial por separación de variables.

En este caso, con un tamaño de paso $h = 0.1$, un error relativo de 16% en el cálculo de la aproximación a $y(1.5)$ es totalmente inaceptable. A costa de duplicar el número de cálculos, se obtiene una ligera mejora en la precisión al reducir a la mitad el tamaño del paso a $h = 0.05$.

TABLA 8.5.3 Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4904	0.5625	16.12

TABLA 8.5.4 Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1000	1.1079	0.0079	0.72
1.10	1.2155	1.2337	0.0182	1.47
1.15	1.3492	1.3806	0.0314	2.27
1.20	1.5044	1.5527	0.0483	3.11
1.25	1.6849	1.7551	0.0702	4.00
1.30	1.8955	1.9937	0.0982	4.93
1.35	2.1419	2.2762	0.1343	5.90
1.40	2.4311	2.6117	0.1806	6.92
1.45	2.7714	3.0117	0.2403	7.98
1.50	3.1733	3.4904	0.3171	9.08

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad \text{NOTAS DESDE EL AULA}$$

El método de Euler constituye sólo una de muchas formas en que es posible aproximar una solución de una ecuación diferencial. Aunque es atractivo por su sencillez, este método se usa raramente en cálculos serios. Este tema se ha presentado tan sólo para proporcionarle una introducción a los métodos numéricos. Debe hurgar con más detalle en un curso formal de ecuaciones diferenciales y examinar métodos que proporcionan una precisión significativamente mayor.

Ejercicios 8.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de Euler (2) para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Haga manualmente la recursión de (2), usando primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

1. $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1, y(1) = 5; \quad y(1.2)$

2. $\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0; \quad y(0.2)$

En los problemas 3 y 4, use el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Use primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$. Encuentre una solución explícita para cada problema con valor inicial y luego elabore tablas semejantes a las tablas 8.5.1 y 8.5.2.

3. $y' = y, y(0) = 1; \quad y(1.0)$

4. $y' = 4x - 2y, y(0) = 2; \quad y(0.5)$

En los problemas 5-10, use el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Use primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

5. $y' = e^{-y}, y(0) = 0; \quad y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

7. $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

9. $y' = xy^2 - \frac{y}{x}, y(1) = 1; \quad y(1.5)$

10. $y' = y - y^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

Revisión del capítulo 8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

A. Falso/verdadero _____

En los problemas 1-4, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. La ecuación diferencial $dy/dx = x + xy$ es separable y lineal. _____
2. La ecuación diferencial $dy/dx = \sin y$ es no lineal. _____
3. $y = 0$ es una solución del problema con valor inicial $dy/dx = x^2y$, $y(0) = 0$. _____
4. Una solución de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2y^2 + 4$ es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-8, llene los espacios en blanco.

1. Una familia de soluciones de un parámetro de $dy/dx = 1 - 6x + 12e^{3x}$ es _____.
2. El orden de la ecuación diferencial $(y'')^3 + y^4 = 1$ es _____.
3. Un factor de integración para la ecuación lineal $dy/dx - y = e^{3x}$ es _____.
4. En el campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 - y^2$, la pendiente de un elemento de recta en $(2, 4)$ es _____.
5. El tiempo necesario para que una sustancia que decae por radiactividad pase de su cantidad inicial A_0 a $\frac{1}{2}A_0$ se denomina su _____.
6. Si una población inicial de P_0 bacterias se duplica en 2 h, entonces el número de bacterias presentes después de 32 h es _____.
7. Si $P(t) = P_0 e^{0.16t}$ proporciona la población en un entorno en el instante t , entonces $P(t)$ satisface el problema con valor inicial _____.
8. Proporcione un ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden que sea tanto separable como lineal. _____

C. Ejercicios _____

En los problemas 1-10, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $\sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$	2. $\frac{dx}{dt} + x = e^{-t} \cos 2t$
3. $t \frac{dy}{dt} - 5y = t$	4. $\frac{y}{x^2} \frac{dy}{dx} + e^{2x^3+y^2} = 0$
5. $(x^2 + 4) \frac{dy}{dx} = 2x - 8xy$	6. $y \sec^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 + 1$
7. $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1 - y^2}$	8. $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = y^2$
9. $y' - 2y = x(e^{3x} - e^{2x})$	10. $\frac{dy}{dx} + y = \sqrt{1 + e^x}$

En los problemas 11-20, resuelva los problemas con valor inicial dados.

11. $\frac{dP}{dt} = 0.05P$, $P(0) = 1\,000$	12. $\frac{dA}{dt} = -0.015A$, $A(0) = 5$
13. $t \frac{dy}{dt} + y = t^4 \ln t$, $y(1) = 0$	14. $x \frac{dy}{dx} = 10y$, $y(1) = -3$
15. $\frac{dy}{dx} = 2y + y^2$, $y(0) = 3$	16. $\frac{dy}{dx} = y(10 - 2y)$, $y(0) = 7$
17. $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, $y(\pi/3) = -1$	18. $x \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, $y(2) = 2$
19. $\frac{dy}{dx} = -8x^3y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$	20. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$, $y(0) = 1$

En los problemas 21 y 22, encuentre una función cuya gráfica pase por el punto dado y tenga la pendiente indicada en un punto (x, y) sobre su gráfica.

21. $(0, 2); \quad 2x/3y^3$

22. $(0, 1); \quad x + y$

23. Si P_0 es la población inicial de una comunidad, muestre que si la población P se modela por $dP/dt = kP$, entonces

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{t_1},$$

donde $P_1 = P(t_1)$ y $P_2 = P(t_2)$, $t_1 < t_2$.

24. Una barra metálica se saca de un horno cuya temperatura es 150°C y se coloca en un tanque de agua cuya temperatura se mantiene a 30°C constantes. Después de $\frac{1}{4}$ h en el tanque, la temperatura de la barra es 90°C . ¿Cuál es la temperatura de la barra en $\frac{1}{2}$ h? ¿En 1 h?
25. Cuando la mala memoria se toma en cuenta, la razón a la que una persona puede memorizar un tema está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2A,$$

donde k_1 y k_2 son constantes positivas, $A(t)$ es la cantidad de material memorizado en el tiempo t , M es la cantidad total a memorizar y $M - A$ es la cantidad que queda por memorizar.

a) Despeje $A(t)$ si $A(0) = 0$.

b) Encuentre el valor limitante de A cuando $t \rightarrow \infty$ e interprete el resultado.

c) Grafique la solución.

26. Suponga que un circuito en serie contiene un capacitor y un resistor variable. Si la resistencia en el instante t está dada por $R = k_1 + k_2t$, donde k_1 y k_2 son constantes positivas conocidas, entonces la carga q sobre el capacitor es descrita por la ecuación diferencial de primer orden

$$(k_1 + k_2t) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

donde C es una constante denominada **capacitancia** y $E(t)$ es el **voltaje aplicado**. Muestre que si $E(t) = E_0$ y $q(0) = q_0$ son constantes, entonces

$$q(t) = E_0C + (q_0 - E_0C) \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2t} \right)^{1/Ck_2}.$$

27. La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, a menudo se usa como modelo de una población que experimenta variaciones estacionales anuales.

a) Despeje $P(t)$ si $P(0) = P_0$.

b) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función encontrada en el inciso a).

28. Un proyectil se dispara verticalmente en el aire con una velocidad inicial de v_0 pies/s. En el supuesto de que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, el movimiento es descrito por el par de ecuaciones diferenciales:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \quad k > 0$$

el eje y positivo hacia arriba y el origen a nivel del suelo, de modo que $v = v_0$ y $y = 0$, y

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

el eje y positivo hacia abajo y el origen a la máxima altura, de modo que $v = 0$ en $y = h$. Vea la **FIGURA 8.R.1**. Las ecuaciones primera y segunda describen el movimiento del proyectil cuando sube y baja, respectivamente. Demuestre que la velocidad de impacto v_1 es menor que la velocidad inicial v_0 . [Sugerencia: Por la regla de la cadena, $dv/dt = v dv/dy$.]

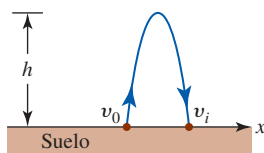


FIGURA 8.R.1 Velocidades inicial y de impacto en el problema 28

29. *a)* Use un SAC para obtener el campo de dirección para la ecuación diferencial $dy/dx = e^{-x} - 3y$ usando una retícula rectangular de 3×3 con puntos (mh, nh) , $h = 0.25$, $-12 \leq m \leq 12$, $-12 \leq n \leq 12$.
- b)* En el campo de dirección, trace a mano una curva solución que corresponda a cada una de las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y(-2) = 0$, $y(-1) = -2$.
- c)* Con base en el campo de dirección y las curvas solución, establezca una conjetura sobre el comportamiento de todas las soluciones $y(x)$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.
30. Construya una ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$ cuyo retrato de fase sea consistente con el inciso *a)* de la FIGURA 8.R.2. Con el inciso *b)* de la figura 8.R.2.

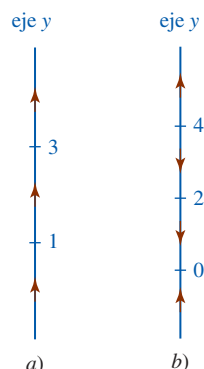


FIGURA 8.R.2 Retratos de fase para el problema 30

31. Considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde

$$f(y) = -0.5y^3 - 1.7y + 3.4.$$

En la FIGURA 8.R.3 vemos que la función $f(y)$ tiene un cero. Sin intentar despejar $y(x)$ en la ecuación diferencial, estime el valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$.

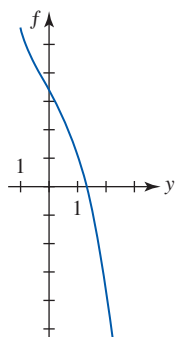


FIGURA 8.R.3 Retrato de fase para el problema 31

32. Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial $dy/dx = 1 + x\sqrt{y}$, $y(1) = 9$.

33. Se dice que dos curvas son **ortogonales** en un punto si y sólo si sus rectas tangentes L_1 y L_2 son perpendiculares en el punto de intersección. Muestre que las curvas definidas por $y = x^3$ y $x^2 + 3y^2 = 4$ son ortogonales en $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.
34. Cuando todas las curvas en una familia de curvas $F(x, y, C_1) = 0$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $G(x, y, C_2) = 0$, entonces se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí.
- a) Encuentre las ecuaciones diferenciales de las familias $xy = C_1$ y $y^2 - x^2 = C_2$. Muestre que las dos familias de curvas son trayectorias ortogonales entre sí.
- b) Trace las gráficas de algunos miembros de cada familia en el inciso a) en el mismo eje de coordenadas.

Sucesiones y series



En este capítulo La experiencia cotidiana brinda un sentimiento intuitivo de la noción de una sucesión. Las palabras *sucesión de eventos* o *sucesión de números* sugiere un arreglo en el que los eventos E o los números n se establecen en algún orden: $E_1, E_2, E_3, \dots$ o $n_1, n_2, n_3, \dots$

Cualquier estudiante de matemáticas también está familiarizado con el hecho de que cualquier número real puede escribirse como un decimal. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, donde los misteriosos tres puntos (una elipsis) significan que los tres dígitos se repiten eternamente. Esto quiere decir que el decimal $0.333\dots$ es una suma infinita o la *serie infinita*

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \dots$$

En este capítulo observaremos que los conceptos de sucesión y serie infinita están relacionados.

- 9.1 Sucesiones
- 9.2 Sucesiones monótonas
- 9.3 Series
- 9.4 Prueba de la integral
- 9.5 Pruebas de comparación
- 9.6 Pruebas de las proporciones y de la raíz
- 9.7 Series alternantes
- 9.8 Series de potencias
- 9.9 Representación de funciones mediante series de potencias
- 9.10 Serie de Taylor
- 9.11 Serie del binomio
- Revisión del capítulo 9

9.1 Sucesiones

■ **Introducción** Si el dominio de una función f es el conjunto de enteros positivos, entonces los elementos $f(n)$ en el rango pueden arreglarse en un orden correspondiente a los valores crecientes de n :

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

En la discusión que sigue sólo se considerarán funciones cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyos elementos del rango son números reales.

EJEMPLO 1 Función con los enteros positivos como dominio

Si n es un entero positivo, entonces los primeros elementos en el rango de la función $f(n) = (1 + 1/n)^n$ son

$$f(1) = 2, \quad f(2) = \frac{9}{4}, \quad f(3) = \frac{64}{27}, \dots$$

Una función cuyo dominio es el conjunto completo de enteros positivos recibe un nombre especial.

Definición 9.1.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Algunos textos utilizan las palabras *sucesión infinita*. Cuando el dominio de la función es un subconjunto finito del conjunto de los enteros positivos, obtenemos una *sucesión finita*. Todas las sucesiones en este capítulo serán infinitas.

■ **Notación y términos** En lugar de la notación de función usual $f(n)$, una sucesión suele denotarse mediante $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. El entero n algunas veces recibe el nombre de **índice** de a_n . Los **términos** de la sucesión se forman dejando que el índice n tome los valores $1, 2, 3, \dots$; el número a_1 es el *primer término*, a_2 es el *segundo término*, y así en lo sucesivo. El número a_n se denomina el *término n-ésimo* o el **término general** de la sucesión. De tal modo, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots & \leftarrow \text{números en el rango} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & n & & \leftarrow \text{números en el dominio} \end{array}$$

Por ejemplo, la sucesión definida en el ejemplo 1 sería escrita $\{(1 + 1/n)^n\}$.

En algunas circunstancias es conveniente tomar el primer término de una sucesión como a_0 y la sucesión es entonces

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

EJEMPLO 2 Términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones

$$a) \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} \quad b) \{n^2 + n\} \quad c) \{(-1)^n\}.$$

Solución Al sustituir $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general respectivo de cada sucesión, obtenemos

$$a) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad b) 2, 6, 12, 20, \dots \quad c) -1, 1, -1, 1, \dots$$

■ **Sucesión convergente** Para la sucesión del inciso a) del ejemplo 2, se ve que a medida que el índice n se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = \frac{1}{2^n}$ no se incrementan sin límite. En realidad, observamos que cuando $n \rightarrow \infty$, los términos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

se aproximan al valor límite 0. Se afirma que la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$ **converge** a 0. En contraste, los términos de las sucesiones en los incisos b) y c) no se aproximan a un valor límite cuando $n \rightarrow \infty$. En general se tiene la siguiente definición.

Definición 9.1.2 Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** a un número real L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N. \quad (1)$$

El número L se llama el **límite** de la sucesión.

◀ Compare esta definición con la redacción en la definición 2.6.5.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, entonces su límite L es único.

■ **Sucesión convergente** Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (1) significa que los términos a_n pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L para n suficientemente grande. Se indica que una sucesión converge a un número L escribiendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Cuando $\{a_n\}$ no converge, esto es, cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe, la sucesión **diverge**.

La FIGURA 9.1.1 ilustra varias maneras en las cuales una sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número L . Las partes a), b), c) y d) de la figura 9.1.1 muestran que para cuatro sucesiones convergentes diferentes $\{a_n\}$, *al menos un número finito* de términos de a_n están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ que están en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $n > N$ se representan por medio de puntos rojos en la figura.

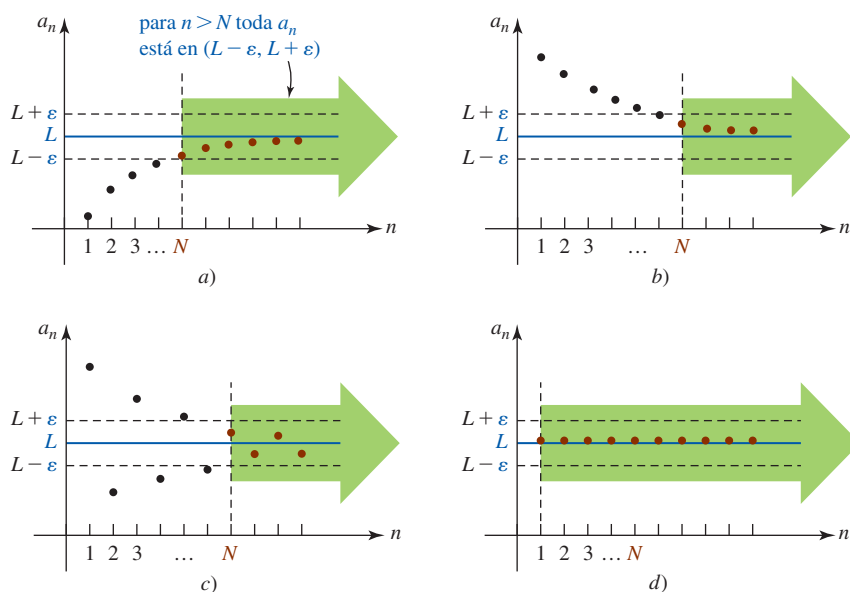


FIGURA 9.1.1 Cuatro maneras en las que una sucesión puede converger a L

EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Use la definición 9.1.2 para demostrar que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0.

Solución Intuitivamente, es posible ver a partir de los términos

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$$

que cuando el índice n aumenta sin límite los términos tienden al valor límite 0. Para probar la convergencia, suponemos primero que $\varepsilon > 0$ está dado. Puesto que los términos de la sucesión son positivos, la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$ es la misma que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$ o $n > 1/\varepsilon^2$. En consecuencia, sólo se necesita elegir N como el primer entero positivo mayor o igual que $1/\varepsilon^2$. Por ejemplo, si se elige $\varepsilon = 0.01$, entonces $|1/\sqrt{n} - 0| = 1/\sqrt{n} < 0.01$ siempre que $n > 10\,000$. Esto es, se elige $N = 10\,000$. ■

En la práctica, para determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge, debemos trabajar directamente con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y proceder igual que al examinar el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Si a_n aumenta o disminuye sin límite cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty. \quad (2)$$

En el primer caso en (2) afirmamos que $\{a_n\}$ **diverge a infinito** y en el segundo que $\{a_n\}$ **diverge a infinito negativo**. Una sucesión tal vez diverja de manera distinta a la que se indica en (2). El siguiente ejemplo ilustra dos sucesiones; cada una diverge de un modo diferente.

EJEMPLO 4 Sucesiones divergentes

- a) La sucesión $\{n^2 + n\}$ diverge a infinito, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) = \infty$.
- b) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ no existe. El término general de la sucesión no se aproxima a una constante cuando $n \rightarrow \infty$; como puede verse en el inciso c) del ejemplo 2, el término $(-1)^n$ se alterna entre 1 y -1 cuando $n \rightarrow \infty$. ■

EJEMPLO 5 Determinación de la convergencia

Determine si la sucesión $\left\{ \frac{3n(-1)^n}{n+1} \right\}$ converge o diverge.

Solución Al dividir el numerador y el denominador del término general entre n se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(-1)^n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-1)^n}{1 + 1/n}.$$

Aunque $3/(1 + 1/n) \rightarrow 3$ cuando $n \rightarrow \infty$, el límite anterior sigue sin existir. Debido al factor $(-1)^n$, se observa que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$a_n \rightarrow 3, \quad n \text{ par}, \quad \text{y} \quad a_n \rightarrow -3, \quad n \text{ impar}.$$

La sucesión diverge. ■

Una sucesión, como aquella del inciso b) del ejemplo 4 y la del ejemplo 5, para la cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -L,$$

$L \neq 0$, se dice que **diverge por oscilación**.

■ **Sucesión de constantes** Una sucesión de constantes

$$c, c, c, \dots$$

se escribe $\{c\}$. El sentido común indica que esta sucesión converge y que su límite es c . Vea la figura 9.1.1d). Por ejemplo, la sucesión $\{\pi\}$ converge a π .

Al determinar el límite de una sucesión resulta muchas veces útil sustituir la variable discreta n por una variable continua x . Si una función es f tal que $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow \infty$ y el valor de f en los enteros positivos, $f(1), f(2), f(3), \dots$, concuerda con los términos $a_1, a_2, a_3, \dots$ de $\{a_n\}$, esto es,

$$f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2, \quad f(3) = a_3, \dots,$$

entonces necesariamente la sucesión $\{a_n\}$ converge al número L . La validez de este resultado se ilustra en la FIGURA 9.1.2.

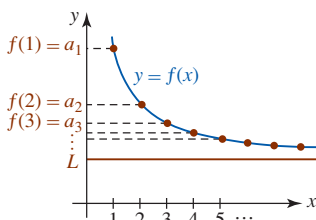


FIGURA 9.1.2 Si $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $f(n) = a_n \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$

Teorema 9.1.1 Límite de una sucesión

Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión y f es una función tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \quad (3)$$

EJEMPLO 6 Empleo de la regla de L'Hôpital

Muestre que la sucesión $\{(n+1)^{1/n}\}$ converge.

Solución Si definimos $f(x) = (x+1)^{1/x}$, entonces reconocemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞^0 cuando $x \rightarrow \infty$. Por tanto, y utilizando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Esto demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln f(x) = \ln[\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)] = 0$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = e^0 = 1$. Por tanto, por (3) tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/n} = e^0 = 1$. La sucesión converge a 1. ■

◀ Vea la sección 4.5 para un repaso de cómo manejar la forma ∞^0 .

EJEMPLO 7 Sucesión convergente

Demuestre que la sucesión $\left\{ \frac{n(4n+1)(5n+3)}{6n^3+2} \right\}$ converge.

Solución Si $f(x) = \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} = \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞/∞ . Por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2+34x+3}{18x^2} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x+34}{36x} \\ &\stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{36} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

De (3) del teorema 9.1.1, la sucesión dada converge a $\frac{10}{3}$. ■

EJEMPLO 8 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{ \sqrt{\frac{n}{9n+1}} \right\}$ converge.

Solución Se continúa con la aplicación de la regla de L'Hôpital, se divide el numerador y el denominador entre x y resulta que $x/(9x+1) \rightarrow \frac{1}{9}$ cuando $x \rightarrow \infty$. De tal modo, podemos escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

■ **Propiedades** Las siguientes **propiedades** de sucesiones son análogas a las que se indicaron en los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Teorema 9.1.2 Límite de una sucesión

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$, entonces

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, c un número real
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kL_1$, k un número real
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 + L_2$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 \cdot L_2$
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 9 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{ \frac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}} \right\}$ converge.

Solución Observe que $2 - 3e^{-n} \rightarrow 2$ y $6 + 4e^{-n} \rightarrow 6 \neq 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. De acuerdo con el teorema 9.1.2v), tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 3e^{-n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (6 + 4e^{-n})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

Revise la sección 1.6, específicamente la figura 1.6.2.

El primero de los siguientes dos teoremas debe ser verosímil de acuerdo con su conocimiento del comportamiento de la función exponencial. Recuerde que, para $0 < b < 1$, $b^x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, en tanto que para $b > 1$, $b^x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Teorema 9.1.3 Sucesiones de la forma $\{r^n\}$

Suponga que r es una constante distinta de cero. La sucesión $\{r^n\}$ converge a 0 si $|r| < 1$ y diverge si $|r| > 1$.

Teorema 9.1.4 Sucesiones de la forma $\{1/n^r\}$

La sucesión $\left\{ \frac{1}{n^r} \right\}$ converge a 0 para r cualquier número racional positivo.

EJEMPLO 10 Aplicaciones de los teoremas 9.1.3 y 9.1.4

- a) La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.3, ya que $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ y $r = 1/e < 1$.
- b) La sucesión $\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\}$ diverge por el teorema 9.1.3, ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.
- c) La sucesión $\left\{ \frac{4}{n^{5/2}} \right\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.2ii) y el teorema 9.1.4, ya que $r = \frac{5}{2}$ es un número racional positivo. ■

EJEMPLO 11 Determinación de convergencia

Del teorema 9.1.2iii) y el teorema 9.1.4 observamos que la sucesión $\left\{ 10 + \frac{4}{n^{3/2}} \right\}$ converge a 10. ■

■ **Sucesión definida recursivamente** Como el siguiente ejemplo indica, una sucesión puede definirse especificando el primer término a_1 junto con una regla para obtener los términos subsecuentes a partir de los términos precedentes. En este caso se dice que la sucesión está definida **recursivamente**. La regla de definición se denomina **fórmula de recursión**. Vea los problemas 59 y 60 en los ejercicios 9.1. El método de Newton, dado en (3) en la sección 4.10, constituye un ejemplo de una sucesión definida recursivamente.

EJEMPLO 12 Una sucesión definida recursivamente

Suponga que una sucesión se define recursivamente mediante $a_{n+1} = 3a_n + 4$, donde $a_1 = 2$. Sustituyendo entonces $n = 1, 2, 3, \dots$ se obtiene

el número está dado como 2



$$a_2 = 3a_1 + 4 = 3(2) + 4 = 10$$

$$a_3 = 3a_2 + 4 = 3(10) + 4 = 34$$

$$a_4 = 3a_3 + 4 = 3(34) + 4 = 106$$

y así sucesivamente. ■

■ **Teorema de compresión** El siguiente teorema es el equivalente de la sucesión del teorema 2.4.1.

Teorema 9.1.5 Teorema de compresión

Suponga que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

para todos los valores de n mayores que algún índice N (esto es, $n > N$). Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a un límite común L , entonces $\{c_n\}$ también converge a L .

■ **Factorial** Antes de presentar un ejemplo que ilustre el teorema 9.1.5 necesitamos revisar un símbolo que aparece con frecuencia en este capítulo. Si n es un entero positivo, el símbolo $n!$, que se lee “ n factorial”, es el producto de los primeros n enteros positivos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \quad (4)$$

Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Una propiedad importante del factorial está dada por

$$n! = (n-1)!n.$$

Para ver esto, considere el caso cuando $n = 6$:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \overbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}^{5!} 6 = 5!6.$$

Enunciada de una manera un poco diferente, la propiedad $n! = (n-1)!n$ es equivalente a

$$(n+1)! = n!(n+1). \quad (5)$$

Un último punto: por propósitos de conveniencia y para asegurar que la fórmula $n! = (n-1)!n$ es válida cuando $n = 1$, se define $0! = 1$.

EJEMPLO 13 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ converge.

Solución La convergencia o divergencia de la sucesión dada no es evidente ya que $2^n \rightarrow \infty$ y $n! \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Aun cuando la forma límite de $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n/n!)$ es ∞/∞ no es posible que utilicemos la regla de L'Hôpital puesto que no hemos estudiado ninguna función $f(x) = x!$. Sin embargo, podemos recurrir al teorema 9.1.5 manipulando algebraicamente el término general de la sucesión. En vista de (4), el término general puede escribirse

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{n \text{ factores de } 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{n \text{ fracciones}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}$$

De la línea anterior se obtiene la desigualdad

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \overbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}}^{n \text{ fracciones}} \leq 2 \cdot 1 \cdot \overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}}^{n-2 \text{ fracciones}} = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2} \quad (6)$$

Las $n - 2$ fracciones de $\frac{2}{3}$ en el lado derecho de (6) resultan del hecho de que después del segundo factor en el producto de n fracciones, 3 es el denominador más pequeño que hace $\frac{2}{3}$ más grande que $\frac{2}{4}$, más grande que $\frac{2}{5}$, y así sucesivamente hacia abajo hasta el último factor $\frac{2}{n}$. Por las leyes de los exponentes (6) es lo mismo que

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \text{o} \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

donde se han identificado las sucesiones $\{a_n\} = \{0\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ y $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$. La sucesión $\{a_n\}$ es una de ceros y por ello converge a 0. La sucesión $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ también converge a 0 al invocar el teorema 9.1.2ii) y el teorema 9.1.3 con $r = \frac{2}{3} < 1$. De tal manera que por el teorema 9.1.5, $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$ también debe converger a 0. ■

El resultado $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ muestra que $n!$ crece mucho más rápido que 2^n cuando $n \rightarrow \infty$. Por ejemplo, para $n = 10$, $2^{10} = 1\,024$, en tanto que $10! = 3\,628\,800$.

La sucesión en el ejemplo anterior también puede definirse recursivamente. Para $n = 1$, $a_1 = 2^1/1! = 2$. Entonces por (5) y las leyes de los exponentes,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} \cdot \overset{\text{esto es } a_n}{\frac{2^n}{n!}} \quad \downarrow$$

Así, $\{2^n/n!\}$ es lo mismo que

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n, \quad a_1 = 2. \quad (7)$$

Es posible usar la fórmula de recursión (7) como un medio alternativo de encontrar el límite L de la sucesión $\{2^n/n!\}$. Puesto que se mostró que la sucesión es convergente tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Este último enunciado es equivalente también a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$. Haciendo que $n \rightarrow \infty$ en (7) y usando las propiedades de límites podemos escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1} a_n \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right). \quad (8)$$

En la última línea se ve que $L = 0 \cdot L$, lo cual implica que el límite de la sucesión es $L = 0$.

El último teorema para esta sección es una consecuencia inmediata del teorema 9.1.5.

Teorema 9.1.6 Sucesión de valores absolutos

Si la sucesión $\{|a_n|\}$ converge a 0, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

DEMOSTRACIÓN Por la definición de valor absoluto, $|a_n| = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $|a_n| = -a_n$ si $a_n < 0$. Se sigue que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|. \quad (9)$$

Por suposición, $\{|a_n|\}$ converge a 0 y por ello $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. De la desigualdad (9) y el teorema 9.1.5 se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Por tanto, $\{a_n\}$ converge a 0. ■

EJEMPLO 14 Empleo del teorema 9.1.6

La sucesión $\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}$ converge a 0 puesto que ya se ha demostrado en el ejemplo 3 que la sucesión de valores absolutos $\{ |(-1)^n/\sqrt{n}| \} = \{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0. ■

Ejercicios 9.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

Fundamentos

En los problemas 1-10, liste los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es a_n .

1. $a_n = \frac{1}{2n+1}$
2. $a_n = \frac{3}{4n-2}$
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
4. $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$
5. $a_n = 10^n$
6. $a_n = 10^{-n}$
7. $a_n = 2n!$
8. $a_n = (2n)!$
9. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
10. $a_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$

En los problemas 11-14, emplee la definición 9.1.2 para demostrar que cada sucesión converge al número dado L .

11. $\left\{\frac{1}{n}\right\}; L = 0$
12. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}; L = 0$
13. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}; L = 1$
14. $\left\{\frac{e^n + 1}{e^n}\right\}; L = 1$

En los problemas 15-46, determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

15. $\left\{\frac{10}{\sqrt{n+1}}\right\}$
16. $\left\{\frac{1}{n^{3/2}}\right\}$
17. $\left\{\frac{1}{5n+6}\right\}$
18. $\left\{\frac{4}{2n+7}\right\}$
19. $\left\{\frac{3n-2}{6n+1}\right\}$
20. $\left\{\frac{n}{1-2n}\right\}$
21. $\{20(-1)^{n+1}\}$
22. $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$
23. $\left\{\frac{n^2-1}{2n}\right\}$
24. $\left\{\frac{7n}{n^2+1}\right\}$
25. $\{ne^{-n}\}$
26. $\{n^3e^{-n}\}$
27. $\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$
28. $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$
29. $\{\cos n\pi\}$
30. $\{\sin n\pi\}$
31. $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$
32. $\left\{\frac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$
33. $\left\{\frac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}\right\}$
34. $\left\{\frac{2^n}{3^n+1}\right\}$
35. $\left\{\frac{e^n+1}{e^n}\right\}$
36. $\left\{4+\frac{3^n}{2^n}\right\}$
37. $\left\{n \sin\left(\frac{6}{n}\right)\right\}$
38. $\left\{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n\right\}$
39. $\left\{\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right\}$
40. $\left\{\frac{\pi}{4} - \arctan(n)\right\}$
41. $\{n^{2/(n+1)}\}$
42. $\{10^{(n+1)/n}\}$

43. $\left\{\ln\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)\right\}$
44. $\left\{\frac{\ln n}{\ln 3n}\right\}$
45. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$
46. $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$

En los problemas 47-52, encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión. Determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

47. $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$
48. $1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \dots$
49. $3, -5, 7, -9, \dots$
50. $-2, 2, -2, 2, \dots$
51. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$
52. $\frac{1}{1 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 8}, \frac{1}{3 \cdot 16}, \frac{1}{4 \cdot 32}, \dots$

En los problemas 53-56, para la sucesión dada definida recursivamente, escriba los siguientes cuatro términos después del (de los) término(s) inicial(es) indicado(s).

53. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, a_1 = -1$
54. $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_1 = 2$
55. $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, a_1 = 1, a_2 = 3$
56. $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}, a_1 = 2, a_2 = 4$

En los problemas 57 y 58, se sabe que la sucesión definida recursivamente converge para un valor inicial dado $a_1 > 0$. Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, y proceda como en (8) de esta sección para encontrar el límite L de la sucesión.

57. $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$
58. $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$

En los problemas 59 y 60, encuentre una fórmula de recursión que defina la sucesión dada.

59. $\left\{\frac{5^n}{n!}\right\}$
60. $\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots$

En los problemas 61-64, utilice el teorema de compresión para establecer la convergencia de la sucesión dada.

61. $\left\{\frac{\sin^2 n}{4^n}\right\}$
62. $\left\{\sqrt{16 + \frac{1}{n^2}}\right\}$
63. $\left\{\frac{\ln n}{n(n+2)}\right\}$
64. $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ [Sugerencia: $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)$]

65. Demuestre que para cualquier número real x , la sucesión $\{(1 + x/n)^n\}$ converge a e^x .

66. Se sabe que la sucesión

$$\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}$$

converge a un número γ llamado **constante de Euler**. Calcule los primeros 10 términos de la sucesión.

≡ Aplicaciones

67. Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. ¿A qué altura llegará en su tercer rebote? ¿En su n -ésimo rebote? Vea la FIGURA 9.1.3.

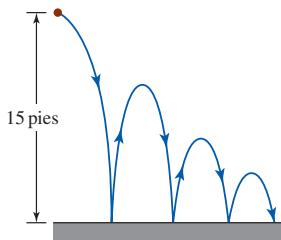


FIGURA 9.1.3 Rebote de la pelota del problema 67

68. Una pelota, que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así en lo sucesivo. ¿Cuál es la distancia recorrida por la pelota durante el sexto segundo?
69. Un paciente toma 15 mg de un fármaco cada día. Suponga que 80% del fármaco acumulado es excretado cada día por las funciones corporales. Escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$, donde A_n es la cantidad de fármaco presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la dosis n -ésima.
70. Se deposita un dólar en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual r . Si no se extrae dinero, ¿cuál es la cantidad de dinero acumulado en la cuenta después del primero, segundo y tercer años?
71. Cada persona tiene dos padres. Determine cuántos tatatarabuelos tiene cada persona.
72. La sucesión definida recursivamente

$$p_{n+1} = 3p_n - \frac{p_n^2}{400}, \quad p_0 = 450$$

se denomina **ecuación logística discreta**. Una sucesión de este tipo se utiliza a menudo para modelar una población p_n en un ambiente; aquí p_0 es la población inicial en el ambiente. Determine la **capacidad de transporte** $K = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ del ambiente. Calcule los siguientes nueve términos de la sucesión y demuestre que estos términos oscilan alrededor de K .

≡ Piense en ello

73. Considere la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros cuatro términos son

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

- a) Con $a_1 = 1$, encuentre una fórmula de recursión que defina a la sucesión.
- b) ¿Cuáles son el quinto y el sexto términos de la sucesión?
- c) Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge. Encuentre el límite de la sucesión.

74. Conjeture respecto al límite de la sucesión convergente $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \dots$

75. Si converge la sucesión $\{a_n\}$, ¿diverge la sucesión $\{a_n^2\}$? Apoye su respuesta con argumentos matemáticos sólidos.

76. En la FIGURA 9.1.4 el cuadrado que se muestra en rojo es de 1 unidad por lado. Un segundo cuadrado azul se construye dentro del primer cuadrado conectando los puntos medios del primero. Un tercer cuadrado verde se construye conectando los puntos medios de los lados del segundo cuadrado, y así en lo sucesivo.

- a) Encuentre una fórmula para el área A_n del n -ésimo cuadrado inscrito.
- b) Considere la sucesión $\{S_n\}$, donde $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros diez términos de esta sucesión.
- c) Conjeture acerca de la convergencia de $\{S_n\}$.

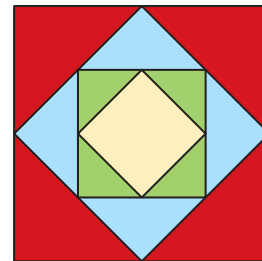


FIGURA 9.1.4 Cuadrados incrustados del problema 76

≡ Proyectos

77. **Un clásico matemático** Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 1 como se muestra en la FIGURA 9.1.5a). Como se muestra en la figura 9.1.5b), sobre cada uno de los tres lados del triángulo se construye otro triángulo equilátero con lados de longitud $\frac{1}{3}$. Como se señala en las figuras 9.1.5c) y 9.1.5d), se continúa esta construcción: se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cada nuevo triángulo previo de modo tal que la longitud de los lados del nuevo triángulo es $\frac{1}{3}$ la longitud de los lados del triángulo anterior. Considere que el perímetro de la primera figura es P_1 , el perímetro de la segunda figura P_2 , y así en lo sucesivo.

- a) Encuentre los valores de P_1, P_2, P_3 y P_4 .
- b) Encuentre la fórmula para el perímetro P_n de la n -ésima figura.
- c) ¿Cuál es el $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$? El perímetro de la región similar a un copo de nieve que se obtuvo dejando $n \rightarrow \infty$ se llama **curva del copo de nieve de Koch** y fue inventada en 1904 por el matemático sueco **Helge von Koch** (1870-1924). La curva de Koch aparece en la teoría de **fractales**.

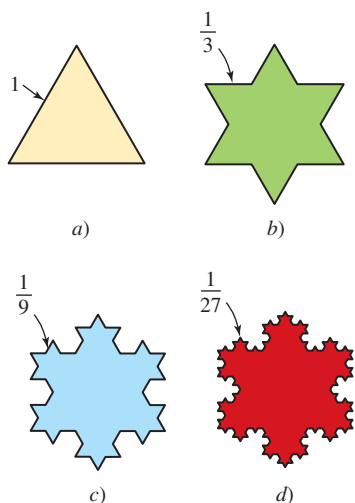


FIGURA 9.1.5 Regiones de copos de nieve del problema 77

78. Un poco de historia: ¿Cuántos conejos? Además de su famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, se conoce también como el lugar natal de **Leonardo Pisano**, alias **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema de lugares decimales hindú-árabe y el uso de los numerales arábigos. Su libro *Liber Abacci*, publicado en 1202, es básicamente un texto acerca de cómo hacer aritmética en este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 de *Liber Abacci*, Fibonacci plantea y resuelve el siguiente problema sobre la reproducción de conejos:



¿Cuántos pares de conejos se reproducirán en un año empezando con un solo par, si cada mes cada par tiene un nuevo par que se vuelve fértil a partir del segundo mes en adelante?

Distinga el patrón de la solución de este problema y complete la siguiente tabla.

	Inicios	Después de cada mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas adultas	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de bebés	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

79. Escriba cinco términos, después de los dos iniciales, de la sucesión definida recursivamente por medio de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Reexamine el problema 78.

80. Razón áurea Si la fórmula de recursión del problema 79 se divide entre F_n , entonces

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Si se define $a_n = F_{n+1}/F_n$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente por medio de

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, n \geq 2.$$

Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge en la **razón áurea** $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- a) Encuentre ϕ .
- b) Escriba un pequeño informe acerca del significado del número ϕ que incluya la relación entre este número y la forma del caparazón de cámaras múltiples del nautilo. Vea la foto en el inicio del capítulo 9 en la página 475.

9.2 Sucesiones monótonas

Introducción En la sección anterior se demostró que una sucesión $\{a_n\}$ convergía al determinar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sin embargo, no siempre es fácil o incluso posible determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge buscando el valor exacto de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Por ejemplo, ¿la sucesión

$$\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}$$

converge? Resulta que es posible demostrar que esta sucesión converge, pero no utilizando las ideas básicas de la última sección. En esta sección se considera un tipo especial de sucesión cuya convergencia puede establecerse sin determinar el valor de $\{a_n\}$.

Empezamos con una definición.

Definición 9.2.1 Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que será

- i) **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$,
- ii) **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para toda $n \geq 1$,
- iii) **decreciente** si $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$,
- iv) **no creciente** si $a_{n+1} \leq a_n$ para toda $n \geq 1$,

Si una sucesión $\{a_n\}$ es de alguno de los tipos anteriores, se dice entonces que es **monótona**.

En otras palabras, sucesiones del tipo

$$\begin{aligned} a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \\ a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots, \end{aligned}$$

son crecientes y decrecientes, respectivamente. Mientras,

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots, \end{aligned}$$

son sucesiones no decrecientes y no crecientes, respectivamente. Las nociones de *no decreciente* y *no creciente* permiten que algunos términos adyacentes en una sucesión resulten iguales.

EJEMPLO 1 Monótona/no monótona

a) Las tres sucesiones

$$4, 6, 8, 10, \dots \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad \text{y} \quad 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \dots$$

son monótonas. Éstas son, respectivamente, creciente, decreciente y no creciente.

b) La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ es no monótona. ■

No siempre resulta evidente si una sucesión es creciente, decreciente, y así en lo sucesivo. Las siguientes guías ilustran algunas de las maneras en que puede demostrarse la monotonía.

Guías para demostrar la monotonía

- i) Formar una **función** $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Si $f'(x) > 0$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $f'(x) < 0$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.
- ii) Formar el **cociente** a_{n+1}/a_n donde $a_n > 0$ para toda n . Si $a_{n+1}/a_n > 1$ para toda n , entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1}/a_n < 1$ para toda n , entonces $\{a_n\}$ es decreciente.
- iii) Formar la **diferencia** $a_{n+1} - a_n$. Si $a_{n+1} - a_n > 0$ para toda n , entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1} - a_n < 0$ para toda n , entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

EJEMPLO 2 Una sucesión monótona

Demuestre que $\left\{\frac{n}{e^n}\right\}$ es una sucesión monótona.

Solución Si se define $f(x) = x/e^x$, entonces $f(n) = a_n$. En este caso,

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} < 0$$

para $x > 1$ implica que f es decreciente sobre $[1, \infty)$. De ese modo se concluye que

$$f(n+1) = a_{n+1} < f(n) = a_n.$$

Por la definición 9.2.1, la sucesión dada es decreciente.

Solución alterna Del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1$$

vemos que $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$. Esto demuestra que la sucesión es decreciente. ■

EJEMPLO 3 Una sucesión monótona

La sucesión $\left\{ \frac{2n+1}{n+1} \right\}$ o $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots$ parece ser creciente. De

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

se concluye que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$. Eso demuestra que la sucesión es creciente. ■

Definición 9.2.2 Sucesión acotada

- i) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por arriba** si hay un número positivo M tal que $a_n \leq M$ para toda n .
- ii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por abajo** si hay un número positivo m tal que $a_n \geq m$ para toda n .
- iii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada** si está acotada por arriba y acotada por abajo.

Desde luego, si una sucesión $\{a_n\}$ no está acotada, entonces se afirma que es **no acotada**. Una sucesión no acotada es divergente. La sucesión de Fibonacci (vea los problemas 78 y 79 en los ejercicios 9.1)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

es no decreciente y es un ejemplo de una sucesión no acotada.

La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ en el ejemplo 1 es acotada puesto que $0 \leq a_n \leq 1$ para toda n . Cualquier número más pequeño que una cota inferior m de una sucesión también es una cota inferior y cualquier número mayor que una cota superior M es una cota superior; en otras palabras, los números m y M en la definición 9.2.2 no son únicos. Para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ es igualmente cierto que $-2 \leq a_n \leq 2$ para toda $n \geq 1$.

EJEMPLO 4 Una sucesión acotada

La sucesión $\left\{ \frac{2n+1}{n+1} \right\}$ está acotada por arriba por 2, ya que la desigualdad

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

muestra que $a_n \leq 2$ para $n \geq 1$. Además,

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \geq 0$$

para $n \geq 1$ muestra que la sucesión está acotada por abajo por 0. De tal modo, $0 \leq a_n \leq 2$ para toda n implica que la sucesión está acotada. ■

El siguiente resultado será útil en las secciones subsecuentes de este capítulo.

◀ En realidad, del ejemplo 3 advertimos que los términos de la sucesión están acotados por abajo por el primer término de la sucesión.

Teorema 9.2.1 Condición suficiente para la convergencia

Una sucesión monótona acotada $\{a_n\}$ converge.

La existencia de una *cota superior mínima*, esto es, una cota superior que es más pequeña que todas las demás cotas superiores de la sucesión, es uno de los axiomas básicos en matemáticas. Recibe el nombre de **propiedad de completitud** del sistema de números reales.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el teorema en el caso de una sucesión no decreciente. Por suposición, $\{a_n\}$ está acotada y por ello $m \leq a_n \leq M$ para toda n . A su vez, esto significa que el conjunto infinito de términos $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ está acotado por arriba y por tanto tiene una cota superior mínima o más pequeña L . La sucesión en realidad converge a L . Para $\varepsilon > 0$ sabemos que $L - \varepsilon < L$, y consecuentemente $L - \varepsilon$ no es una cota superior de S (no hay cotas superiores más pequeñas que la cota superior mínima). En consecuencia, existe un entero positivo N tal que $a_N > L - \varepsilon$. Pero, puesto que $\{a_n\}$ es no decreciente,

$$L - \varepsilon \leq a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq a_{N+3} \leq \dots \leq L + \varepsilon.$$

Se concluye que para $n > N$, $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ o $|a_n - L| < \varepsilon$. De la definición 9.1.2 determinamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. ■

EJEMPLO 5 Acotada y monótona

Se demostró que la sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ es monótona (ejemplo 3) y acotada (ejemplo 4). Por consiguiente, por el teorema 9.2.1 la sucesión es convergente. ■

EJEMPLO 6 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right\}$ converge.

Solución Primero, el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

muestra que $a_{n+1} < a_n$ para toda n . La sucesión es monótona puesto que es decreciente. Luego, de la desigualdad

$$0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} < 1$$

se observa que la sucesión está acotada. Se concluye del teorema 9.2.1 que la sucesión es convergente. ■

El teorema 9.2.1 es útil para probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, pero el teorema no brinda el número específico L . Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra cómo determinar L cuando la sucesión se define recursivamente.

EJEMPLO 7 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula de recursión $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$, $a_1 = 1$, converge.

Solución Primero, la sucesión $\{a_n\}$ está acotada. Puede demostrarse que $a_n < 8$, para toda n . Este hecho se sugiere al calcular a_n para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4}a_1 + 6 = \frac{1}{4}(1) + 6 = \frac{25}{4} = 6.25 < 8 \\ a_3 &= \frac{1}{4}a_2 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{25}{4}\right) + 6 = \frac{121}{16} = 7.5625 < 8 \\ a_4 &= \frac{1}{4}a_3 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{121}{16}\right) + 6 = \frac{505}{64} = 7.890625 < 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $a_n > 0$ para toda n , se tiene que $0 < a_n < 8$ para toda n . De tal modo, $\{a_n\}$ está acotada.

Luego, demostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona. Debido a que $a_n < 8$ necesariamente $\frac{3}{4}a_n < \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Por tanto, de la fórmula de recursión,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6 > \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = a_n.$$

Esto demuestra que $a_{n+1} > a_n$ para toda n , y por ello la sucesión es creciente.

¿Por qué el producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n}$ es menor que 1?

Esto puede probarse utilizando un método llamado *inducción matemática*.

Como $\{a_n\}$ es acotada y monótona, se sigue del teorema 9.2.1 que la sucesión converge. Puesto que debemos tener $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$, el límite de la sucesión se determina a partir de la fórmula de recursión:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} a_n + 6 \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 6 \\ L &= \frac{1}{4} L + 6.\end{aligned}$$

Al resolver la última ecuación para L encontramos que $\frac{3}{4}L = 6$ o $L = 8$. ■



NOTAS DESDE EL AULA

- i) Toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está necesariamente acotada. Vea el problema 31 en los ejercicios 9.2. No obstante, no se concluye que toda sucesión acotada es convergente. Se le pedirá que dé un ejemplo que ilustre este último enunciado en el problema 30 de los ejercicios 9.2.
- ii) Algunas sucesiones $\{a_n\}$ no exhiben comportamiento monótono hasta algún punto en la sucesión, esto es, hasta que el índice satisface $n \geq N$, donde N es algún entero positivo. Por ejemplo, los términos de la sucesión $\{5^n/n!\}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ son:

$$5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \frac{625}{24}, \frac{3125}{144}, \dots \quad (1)$$

Para observar mejor lo que está ocurriendo en (1), se aproximarán los términos utilizando números redondeados hasta dos decimales:

$$5, 12.5, 20.83, 26.04, 26.04, 21.70, \dots \quad (2)$$

En (2) vemos que los primeros cuatro términos de $\{5^n/n!\}$ aumentan de manera evidente, pero empezando con el *cuarto término* los términos parecen empezar a no crecer. Esto se prueba a partir de la versión definida recursivamente de la sucesión. Procediendo como se hizo al obtener la fórmula de recurrencia en (7) en la sección 9.1, $\{5^n/n!\}$ es la misma que $a_{n+1} = \frac{5}{n+1} a_n$, $a_1 = 5$. Puesto que $\frac{5}{n+1} \leq 1$ para $n \geq 4$ observamos que $a_{n+1} \leq a_n$, esto es, $\{5^n/n!\}$ es no creciente sólo para $n \geq 4$. De la misma manera, es fácil demostrar que $\{100^n/n!\}$ se vuelve a la larga no creciente sólo cuando $n \geq 99$. Tomando el límite de la fórmula de recursión como $n \rightarrow \infty$, como en el ejemplo 7, es posible demostrar que tanto $\{5^n/n!\}$ como $\{100^n/n!\}$ convergen a 0.

Ejercicios 9.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

Fundamentos

En los problemas 1-12, determine si la sucesión dada es monótona. Si es así, indique si es creciente, decreciente o no decreciente o no creciente.

1. $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}$

3. $\{(-1)^n \sqrt{n}\}$

5. $\left\{ \frac{e^n}{n} \right\}$

7. $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$

2. $\left\{ \frac{10+n}{n} \right\}$

4. $\{(n-1)(n-2)\}$

6. $\left\{ \frac{e^n}{n^5} \right\}$

8. $\left\{ \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right\}$

9. $\left\{ n + \frac{1}{n} \right\}$

11. $\{(\sin 1)(\sin 2) \cdots (\sin n)\}$

En los problemas 13-24, utilice el teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión dada converge.

13. $\left\{ \frac{4n-1}{5n+2} \right\}$

15. $\left\{ \frac{3^n}{1+3^n} \right\}$

10. $\{n^2 + (-1)^n n\}$

12. $\left\{ \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right\}$

14. $\left\{ \frac{6-4n^2}{1+n^2} \right\}$

16. $\{n5^{-n}\}$

17. $\{e^{1/n}\}$ 18. $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$
 19. $\left\{\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right\}$ 20. $\left\{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}\right\}$
 21. $\{\tan^{-1}n\}$ 22. $\left\{\frac{\ln(n+3)}{n+3}\right\}$
 23. $(0.8), (0.8)^2, (0.8)^3, \dots$
 24. $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \dots$

En los problemas 25 y 26, use el teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente converge. Encuentre el límite de la sucesión.

25. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5, a_1 = 1$ 26. $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = 0$

27. Exprese

$$\sqrt{7}, \sqrt{7\sqrt{7}}, \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}, \dots$$

como una sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente. Utilice el hecho de que la sucesión está acotada, $0 < a_n < 7$ para toda n , para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente. Encuentre el límite de la sucesión.

28. Recurra al teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_n, \quad a_1 = 2, a_2 = 1, n \geq 2$$

es acotada y monótona y en consecuencia converge. Explique por qué la fórmula de recursión no es de ayuda para determinar el límite de la sucesión.

≡ Aplicaciones

29. Ciertos estudios en administración pesquera argumentan que el tamaño de una población de peces no perturbada cambia de un año al siguiente de acuerdo con la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}, \quad n \geq 0,$$

donde $p_n > 0$ es la población después de n años, y a y b son parámetros positivos que dependen de las especies y de su ambiente. Suponga que el tamaño de una población p_0 se introduce en el año 0.

- a) Emplee la fórmula de recursión para demostrar que los únicos valores límite posibles para la sucesión $\{p_n\}$ son 0 y $b - a$.
 b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
 c) Utilice el resultado del inciso b) para demostrar que si $a > b$, entonces la población muere; esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$.
 d) Suponga ahora $a < b$. Demuestre que si $0 < p_0 < b - a$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es creciente y está acotada por arriba por $b - a$. Demuestre que si $0 < b - a < p_0$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es decreciente y acotada por abajo por $b - a$. Concluya que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = b - a$ para cualquier $p_0 > 0$. [Sugerencia: Examine $|b - a - p_{n+1}|$, la cual es la distancia entre p_{n+1} y $|b - a|$.]

≡ Piense en ello

30. Proporcione un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.
 31. Demuestre que toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está acotada. [Sugerencia: Puesto que $\{a_n\}$ es convergente, se sigue de la definición 9.1.2 que existe una N tal que $|a_n - L| < 1$ siempre que $n > N$.]
 32. Demuestre que $\left\{\int_1^n e^{-t^2} dt\right\}$ converge. [Sugerencia: Para $x > 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.]
 33. **Un clásico matemático** Demuestre que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

es acotada y monótona, y, en consecuencia, convergente. El límite de la sucesión se denota por medio de γ y se llama **constante de Euler** en honor al notable matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783). Del problema 66 del ejercicio 9.1, $\gamma \approx 0.5772 \dots$ [Sugerencia: Primero demuestre la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

considerando el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ sobre el intervalo $[1, n]$.]

9.3 Series

■ **Introducción** El concepto de una *serie* se relaciona estrechamente con el concepto de *sucesión*. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, entonces la suma de los términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

se llama **serie infinita**, o simplemente una **serie**. Las $a_k, k = 1, 2, 3, \dots$, se denominan los **términos** de la serie y a_n se llama el **término general**. Escribimos (1) de manera compacta utilizando la notación de sumatoria como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{o por conveniencia} \quad \sum a_k.$$

La pregunta que deseamos responder en ésta y en varias de las secciones siguientes es:

- ¿Cuándo una serie infinita de constantes “suma” un número?

EJEMPLO 1 Una serie infinita

En los comentarios de inicio de este capítulo se advirtió que la representación decimal de un número racional $\frac{1}{3}$ es, de hecho, una serie infinita

$$0.333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

De manera intuitiva, esperamos que $\frac{1}{3}$ sea la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$. Sin embargo, de manera intuitiva, esperamos que una serie infinita tal como

$$100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + \dots$$

donde los términos se vuelven más y más grandes, no tenga suma. En otras palabras, no se espera que la serie última “sume” o *converja* a un número cualquiera. El concepto de convergencia de una serie infinita se define en términos de la convergencia de un tipo especial de sucesión.

■ **Sucesión de sumas parciales** Asociada con toda serie finita $\sum a_k$, existe una **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$ cuyos términos están definidos por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

El término general $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ de esta sucesión se denomina la **suma parcial n -ésima** de la serie.

EJEMPLO 2 Una serie infinita

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ es

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} = \overbrace{0.333 \dots 3}^{3\,n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, cuando n es muy grande, S_n dará una buena aproximación a $\frac{1}{3}$, de modo que parece razonable escribir

$$\frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 9.3.1 Serie convergente

La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **convergente** si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^n a_k\}$ converge; esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S.$$

El número S se dice que es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ no existe, entonces se dice que la serie es **divergente**.

EJEMPLO 3 Empleo de la sucesión de sumas parciales

Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ es convergente.

Solución Por fracciones parciales el término general a_n de la serie puede escribirse como

$$a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}.$$

De tal modo, la suma parcial n -ésima de la serie es

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right] + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right] \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}. \end{aligned}$$

De la última línea observamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+5) = 0$, y por ello

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \right] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, la serie converge y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}. \quad \blacksquare$$

■ **Serie telescópica** Debido a la manera en la cual el término general de la sucesión de sumas parciales “colapsa” hasta dos términos, la serie en el ejemplo 3 se dice que es una **serie telescópica**. Vea los problemas 11-14 en los ejercicios 9.3.

■ **Serie geométrica** Otro tipo de serie que puede probarse como convergente o divergente a partir directamente de su sucesión de sumas parciales tiene la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}, \quad (2)$$

donde $a \neq 0$ y r son números reales fijos. Una serie de la forma (2) se llama **serie geométrica**. Advierta en (2) que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término precedente por r . El número r se denomina la **razón común** y, como se ve en el siguiente teorema, su magnitud determina si una serie geométrica converge o diverge.

Teorema 9.3.1 Suma de una serie geométrica

i) Si $|r| < 1$, entonces una serie geométrica converge y su suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}, \quad a \neq 0.$$

ii) Si $|r| \geq 1$, entonces una serie geométrica diverge.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 9.3.1 se dará en dos partes. En cada parte se supone que $a \neq 0$.

Empezaremos con el caso en el que $|r| = 1$. Para $r = 1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + a + \cdots$$

y por ello la suma parcial n -ésima $S_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n \text{ } a}$ es simplemente $S_n = na$. En este caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. De tal modo, la serie diverge. Para $r = -1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(-1)^{k-1} = a + (-a) + a + (-a) + \cdots$$

y por ello la sucesión de sumas parciales es

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \dots \quad \text{o} \quad a, 0, a, 0, a, 0, \dots,$$

la cual es divergente,

Considere ahora el caso $|r| \neq 1$, el cual significa que $|r| < 1$ o $|r| > 1$. Considere el término general de la sucesión de sumas parciales de (2):

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \quad (3)$$

Multiplicando ambos lados de (3) por r , se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad (4)$$

Después se resta (4) de (3) y se resuelve para S_n :

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a - ar^n \\ (1-r)S_n &= a(1-r^n) \\ S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora, de acuerdo con el teorema 9.1.3 sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ no existe y por ello el límite de (5) tampoco existe. ■

EJEMPLO 4 Serie geométrica

a) En la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

se identifica $a = 1$ y la razón común $r = -\frac{1}{3}$. Puesto que $|r| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, la serie converge. Del teorema 9.3.1, la suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

b) La razón común en la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} = 5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \dots$$

es $r = \frac{3}{2}$. La serie diverge debido a $r = \frac{3}{2} > 1$. ■

Todo número racional p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros, se puede expresar como un decimal interrumpido o como un decimal repetido. De tal modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ en el ejemplo 1 converge puesto que es una serie geométrica con $r = \frac{1}{10} < 1$. Con $a = \frac{3}{10}$ encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

En general:

- Todo decimal repetido es una serie geométrica convergente.

EJEMPLO 5 Número racional

Expresa el decimal repetido $0.121212\dots$ como un cociente de enteros.

Solución Se escribe primero el número dado como una serie geométrica

$$\begin{aligned} 0.121212\dots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} + \dots \\ &= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \dots \end{aligned}$$

y se hacen las identificaciones $a = \frac{12}{100}$ y $r = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Por el teorema 9.3.1, la serie converge pues $r = \frac{1}{100} < 1$ y su suma es

$$0.121212\dots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

EJEMPLO 6 Observación de una pelota que rebota

Si una pelota se deja caer desde una altura de s pies sobre el suelo, entonces el tiempo t que tarda en llegar al suelo se relaciona con s por medio de $s = \frac{1}{2}gt^2$. En otras palabras, la pelota tarda $t = \sqrt{2s/g}$ s para llegar al suelo. Suponga que la pelota rebota siempre hasta cierta fracción fija β ($0 < \beta < 1$) de su altura previa. Encuentre una fórmula para el tiempo T que la pelota tarda en llegar al reposo. Vea la FIGURA 9.3.1.

Solución El tiempo para caer desde una altura de s pies hasta el suelo es: $\sqrt{2s/g}$; el tiempo para ascender βs pies y después caer βs pies hasta el suelo es: $2\sqrt{2\beta s/g}$; el tiempo para ascender $\beta(\beta s)$ pies y después caer $\beta(\beta s)$ pies hasta el suelo es $2\sqrt{2\beta^2 s/g}$; y así sucesivamente. De esta manera, el tiempo total T está dado por la serie infinita

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2s/g} + 2\sqrt{2\beta s/g} + 2\sqrt{2\beta^2 s/g} + \dots + 2\sqrt{2\beta^n s/g} + \dots \\ &= \sqrt{2s/g} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\beta})^k \right]. \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\beta})^k$ es una serie geométrica convergente con $a = \sqrt{\beta}$ y $r = \sqrt{\beta}$. En consecuencia, de acuerdo con el teorema 9.3.1,

$$T = \sqrt{2s/g} \left[1 + 2 \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \right] \quad \text{o} \quad T = \sqrt{2s/g} \left[\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \right].$$

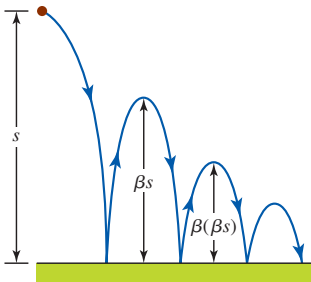


FIGURA 9.3.1 Pelota que rebota del ejemplo 6



Foto estroboscópica de una pelota de básquetbol rebotando

■ **Serie armónica** Una de las series más famosas es también un ejemplo de una serie divergente. La **serie armónica** es la suma de los recíprocos de los enteros positivos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \quad (6)$$

◀ Recuerde esta serie. Será importante en las secciones subsecuentes de este capítulo.

El término general de la sucesión de las sumas parciales para (6) está dado por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

De tal modo,
$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\begin{aligned} &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq S_n + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{términos de } n \cdot \frac{1}{2n}} = S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ implica que la sucesión de sumas parciales para la serie armónica no está acotada. Para ver lo anterior, observe que

$$S_2 \geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$S_8 \geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} \geq S_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

y así sucesivamente. En consecuencia, se concluye que la serie armónica es divergente.

■ **Una consecuencia de convergencia** Si a_n y S_n son los términos generales de una serie y la sucesión correspondiente de sumas parciales, respectivamente, entonces de la resta

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

vemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$. En este caso, si la serie $\sum a_k$ converge a un número S , se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Hemos establecido el siguiente teorema.

Teorema 9.3.2 Condición necesaria para convergencia

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

■ **Prueba para una serie divergente** El teorema 9.3.2 establece simplemente que si una serie infinita converge, es necesario que el término n -ésimo, o general, tienda a cero. De modo equivalente, se concluye:

- Si el n -ésimo término a_n de una serie infinita **no** tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la serie **no** converge.

Formalizamos este resultado como una prueba para la divergencia.

Teorema 9.3.3 Prueba del término n -ésimo para divergencia

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

El teorema 9.3.3 corrobora de inmediato la parte *ii*) de la prueba del teorema 9.3.1, a saber, una serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, $a \neq 0$, diverge cuando $r = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $r = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \neq 0$.

EJEMPLO 7 Serie divergente

a) Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{5k+3}$. De

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0$$

se concluye del teorema 9.3.3 que la serie diverge.

b) Considere la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$ no existe, es posible afirmar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

¿La serie diverge por el teorema 9.3.3? ■

En este momento se le recomienda leer (y recordar) *iii*) de las *Notas desde el aula*. Se enuncian los siguientes tres teoremas sin demostración.

Teorema 9.3.4 Múltiplo constante de una serie

Si c es cualquier constante distinta de cero, entonces las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ convergen ambas o divergen ambas.

Teorema 9.3.5 Suma de dos series convergentes

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen a S_1 y S_2 , respectivamente, entonces

- i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge a $S_1 + S_2$, y
- ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ converge a $S_1 - S_2$.

El teorema 9.3.5 indica que cuando $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Teorema 9.3.6 Suma de una serie convergente y una divergente

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ diverge.

EJEMPLO 8 Suma de dos series convergentes

Con la ayuda del teorema 9.3.1, se observa que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ convergen a 2 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. En consecuencia, del teorema 9.3.5, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Suma de dos series

Del ejemplo 3 se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ converge. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es la serie armónica divergente, se sigue del teorema 9.3.6 que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+4)(k+5)} + \frac{1}{k} \right]$$

diverge. \blacksquare

Σ NOTAS DESDE EL AULA

- i) El término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica a menudo se denota mediante $H_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$. Los términos de la sucesión $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$, ... se denominan **números armónicos**. Vea el problema 71 en los ejercicios 9.3.
- ii) Cuando se escribe en términos de notación de sumatoria, una serie geométrica quizá no se reconozca de inmediato, o si lo es, los valores de a y r tal vez no sean manifiestos. Por ejemplo, para ver si $\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ es una serie geométrica es buena idea escribir dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}^a + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^6}^{ar} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^7}^{ar^2} + \cdots$$

Del lado derecho de la última igualdad, es posible hacer las identificaciones $a = 4\left(\frac{1}{2}\right)^5$ y $r = \frac{1}{2} < 1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$. Si se desea, aunque no hay una necesidad real para hacer esto, puede expresarse $\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ en la forma más familiar $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ haciendo $k = n + 2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4} = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}^a \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

- iii) Observe con cuidado cómo se enuncian los teoremas 9.3.2 y 9.3.3. En específico, el teorema 9.3.3 no dice si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_k$ converge. En otras palabras, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ no es *suficiente* para garantizar que $\sum a_k$ converge. De hecho, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, en la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$, $a_n = 1/n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, pero la serie diverge.

iv) Cuando se determina la convergencia, es posible, y algunas veces conveniente, borrar o ignorar varios de los primeros términos de la serie. En otras palabras, las series infinitas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, $N > 1$ difieren a lo sumo por un número finito de términos y son ambas convergentes o ambas divergentes. Desde luego, eliminar los primeros $N - 1$ términos de una serie convergente suele no afectar la suma de la serie.

Ejercicios 9.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-10, escriba los primeros cuatro términos de cada serie.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2+1}$
7. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$
8. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{m!}$
9. $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\cos j\pi}{2j+1}$
10. $\sum_{i=5}^{\infty} i \sin \frac{i\pi}{2}$

En los problemas 11-14, proceda como en el ejemplo 3 para encontrar la suma de la serie telescópica dada.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

En los problemas 15-24, determine si la serie geométrica dada converge o diverge. Si es convergente, encuentre la suma de la serie.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
19. $\sum_{r=1}^{\infty} 5^r 4^{-r}$
20. $\sum_{s=1}^{\infty} (-3)^s 7^{-s}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} 1\,000(0.9)^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{1\,000}$
23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^k}$
24. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k$

En los problemas 25-30, escriba cada número decimal que se repite como un cociente de enteros.

25. 0.222...
26. 0.555...
27. 0.616161...
28. 0.393939...
29. 1.314314...
30. 0.5262626...

En los problemas 31 y 32, encuentre la suma de las series dadas.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right]$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k}$

En los problemas 33-42, muestre que la serie dada es divergente.

33. $\sum_{k=1}^{\infty} 10$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} (5k+1)$
35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+2k+3}$
37. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$
38. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{3k+1}\right)$
39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$
40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$
41. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k} \right]$
42. $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$

En los problemas 43-46, determine los valores de x para los cuales la serie dada converge.

43. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$
44. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}$
45. $\sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^k$
46. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$

Aplicaciones

47. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. Recurra a la serie geométrica para determinar la distancia que la pelota recorre antes de quedar en reposo.
48. En el problema 47 determine el tiempo que tarda la pelota en llegar al reposo.
49. Para erradicar plagas agrícolas (como la mosca de la fruta), se liberan moscas macho esterilizadas dentro de la población general en intervalos de tiempo regulares. Considere que N_0 es el número de moscas liberadas cada día y que s es la proporción de las que sobreviven en un día determinado. De los N_0 machos esterilizados originales, $N_0 s^n$ sobrevivirán en n semanas sucesivas. En consecuencia, el número total de tales machos que sobreviven n semanas después de que se ha iniciado el programa es $N_0 + N_0 s + N_0 s^2 + \cdots + N_0 s^n$. ¿A qué se aproxima esta suma cuando $n \rightarrow \infty$? Suponga $s = 0.9$ y que se necesitan 10 000 machos esterilizados para controlar la pobla-

ción en cierta área. Determine el número de moscas macho que debe ser liberado cada día.

50. En algunas circunstancias la cantidad de un fármaco que se acumularía en el cuerpo de un paciente después de un largo periodo es $A_0 + A_0 e^{-k} + A_0 e^{-2k} + \dots$, donde $k > 0$ es una constante y A_0 es la dosis diaria del fármaco. Encuentre la suma de la serie.
51. Un paciente toma 15 mg de un fármaco diariamente. Si 80% del fármaco acumulado se excreta cada día mediante las funciones corporales, ¿qué cantidad del fármaco se acumulará después de un largo periodo, esto es, cuando $n \rightarrow \infty$? (Suponga que la medición de la acumulación se hace inmediatamente después de cada dosis. Vea el problema 69 en los ejercicios 9.1.)
52. Se aplica una fuerza a una partícula, que se mueve en una línea recta, de tal manera que después de cada segundo la partícula sólo se mueve la mitad de la distancia que recorrió en el segundo anterior. Si la partícula se mueve 20 cm en el primer segundo, ¿cuánto se desplazará?

■ Piense en ello

53. Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L \neq 0$. Explique por qué la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.
54. Determine si la serie

$$\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.11} + \frac{1}{1.111} + \dots$$

converge o diverge.

55. Determine si la suma de dos series divergentes es necesariamente divergente.
56. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Puesto que $k^2 = k \cdot k$, la n -ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot n}.$$

Explique por qué las siguientes desigualdades son ciertas y por qué pueden usarse para demostrar que una serie dada converge:

$$0 < S_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

o

$$0 < S_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

57. Encuentre la suma de la serie

$$\frac{1+9}{25} + \frac{1+27}{125} + \frac{1+81}{625} + \dots$$

58. Encuentre la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} x e^{-x} dx \right).$$

59. Encuentre todos los valores de x en $(-\pi/2, \pi/2)$ para los cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \tan x} - \sum_{k=0}^n \tan^k x \right) = 0.$$

60. Muestre que si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = L$, donde L es un número, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] = L - f(1)$.

61. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ converge o diverge.

62. Muestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente demostrando que $S_n \geq \sqrt{n}$.

63. Vimos que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge puesto que el término general S_n de la sucesión de sumas parciales puede hacerse tan grande como se quiera tomando a n lo suficientemente grande ($S_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$). No obstante, la serie armónica diverge *muy lentamente*.

- a) Use la gráfica de $f(x) = 1/x$ para $x \geq 1$ a fin de establecer la desigualdad

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

- b) Emplee una calculadora y la desigualdad del inciso a) para estimar el valor de n para el cual $S_n \geq 10$. Estime el valor de n para el cual $S_n \geq 100$.

64. En el problema 77 en los ejercicios 9.1 se consideraron los perímetros de las regiones acotadas por las curvas de Koch que se muestran en la figura 9.1.5. En el inciso c) del problema usted debe haber demostrado que el perímetro de la región límite es infinito. En este problema se consideran las *áreas* de las figuras sucesivas. Considere que el área de la primera figura es A_1 , el área de la segunda figura A_2 , y así en lo sucesivo.

- a) Utilizando el hecho de que el área de un triángulo equilátero con lados de longitud s es $\frac{1}{4}\sqrt{3}s^2$, encuentre los valores de A_1, A_2, A_3 y A_4 .

- b) Demuestre que el área de la figura n -ésima es

$$A_n = \frac{1}{20}\sqrt{3} \left[8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right].$$

- c) ¿Cuál es $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$?

■ Proyectos

65. **Un poco de historia: Muerte por pan** En 1972, un brote de envenenamiento por metilmercurio en Irak produjo 459 muertes entre 6 530 casos de envenenados admitidos en hospitales. El brote epidémico fue provocado por el consumo de pan casero preparado a partir de trigo que había sido tratado con un fungicida de metilmercurio. Los primeros síntomas de *parestesia* (pérdida de sensaciones en la boca, manos y pies) empezaron a ocurrir cuando el nivel acumulado de mercurio alcanzó 25 mg. Los síntomas de *ataxia* (pérdida de coordinación al andar) iniciaron con 55 mg, la *dysarthria* (arrastrar las palabras) con 90 mg y la sordera con 170 mg. La muerte se volvió una posibilidad cuando el nivel de mercurio acumulado superó 200 mg. Se esti-



Pan casero

mó que una barra de pan típica elaborada a partir de trigo contaminado contenía 1.4 mg de mercurio, y también que el cuerpo elimina sólo alrededor de 0.9% del mercurio acumulado diariamente.

- a) Suponga que una persona recibió una dosis d de mercurio al día, y que el cuerpo eliminó una fracción p del mercurio acumulado diariamente. Encuentre una fórmula para L_n , el nivel acumulado después de comer en el n -ésimo día, y una fórmula para el nivel límite, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$.
- b) Empleando $d = 1.4$ y $p = 0.009$, encuentre el valor límite del mercurio y determine qué día empezaron a ocurrir los diversos síntomas.
- c) ¿Cuál sería la dosis diaria para que la muerte fuera posible en el día 100? (Utilice $p = 0.009$.)

66. Un poco de historia: La paradoja de Zenón El filósofo griego **Zenón de Elea** (c. 490 a.C.) fue discípulo del filósofo presocrático Parménides, que afirmaba que el cambio o el movimiento era una ilusión. De las paradojas de Zenón que apoyaban esta filosofía, la más famosa es su argumento acerca de que Aquiles, conocido por su habilidad de correr rápido, no podría superar a una tortuga en movimiento. La forma usual de la historia es como se narra a continuación:

Aquiles empieza desde el punto S, y exactamente en el mismo instante una tortuga empieza desde un punto A adelante de S. Después de cierta cantidad de tiempo, Aquiles alcanza el punto de inicio A de la tortuga, pero durante este tiempo la tortuga ha avanzado a un nuevo punto B. Durante el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar B, la tortuga se ha movido hacia delante otra vez hasta un nuevo punto C. Al continuar de esta manera, eternamente, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Vea la FIGURA 9.3.2. Utilice una serie infinita para resolver esta aparente paradoja. Suponga que cada uno se mueve con una velocidad constante. Ayudaría inventar valores razonables para ubicar en el inicio la cabeza de la tortuga y para las dos velocidades.

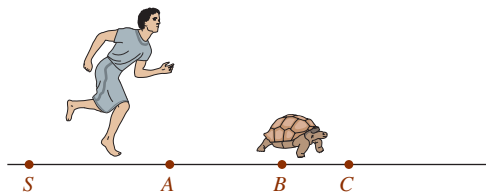


FIGURA 9.3.2 Aquiles y la tortuga en el problema 66

67. Números primos Escriba un breve informe en el cual defina un número primo. Incluya en el informe una demostración acerca de si la serie de los recíprocos de primos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

converge o diverge.

68. Longitud de una trayectoria en zigzag En la FIGURA 9.3.3a), el triángulo azul ABC es un triángulo recto isósceles. El segmento de línea AP_1 es perpendicular a BC , el segmento de línea P_1P_2 es perpendicular a AC , y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria en zigzag roja $AP_1P_2P_3 \dots$.

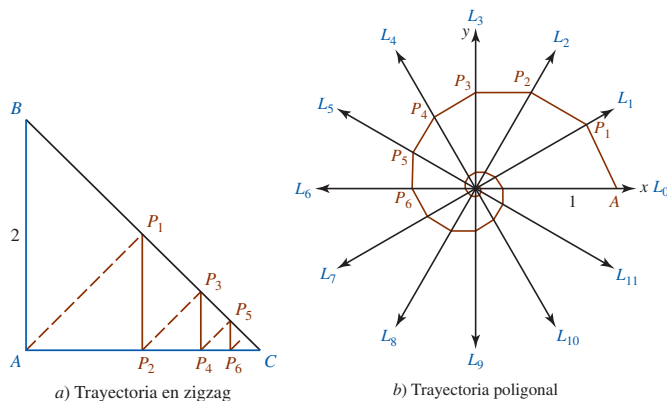


FIGURA 9.3.3 Trayectorias en zigzag y poligonal de los problemas 68 y 69

69. Longitud de una trayectoria poligonal En la figura 9.3.3b), hay doce rayos azules que emanan del origen y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es 30° . El segmento de recta AP_1 es perpendicular al rayo L_1 , el segmento de recta P_1P_2 es perpendicular al rayo L_2 , y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria poligonal roja $AP_1P_2P_3 \dots$.

70. Una integral impropia Al final de la sección 7.7 se dejó pendiente la pregunta de si $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ es un requisito necesario para la convergencia de una integral impropia $\int_a^\infty f(x) dx$. A continuación se presenta la respuesta. Observe que la función f cuya grafica está dada en la FIGURA 9.3.4 no se aproxima a 0 cuando $x \rightarrow \infty$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x) dx$ converge.

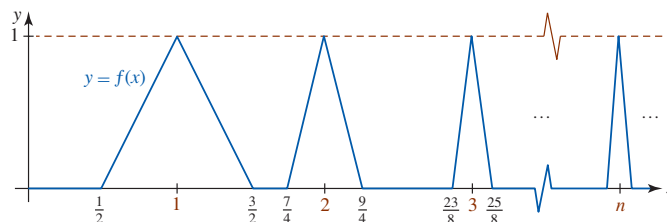


FIGURA 9.3.4 Gráfica del problema 70

71. Un problema de apilamiento Tómese su tiempo para hacer su tarea y efectúe un experimento. Necesitará un suministro de n objetos rectangulares idénticos, por ejemplo, libros, aunque también pueden ser tableros, cartas, fichas de dominó, etc. Suponga que la longitud de cada libro es L . A continuación encontrará un enunciado burdo del problema:

¿Qué tanto puede sobresalir una pila de n libros colocada sobre el borde de una mesa sin que se caiga?

Intuitivamente la pila no caerá siempre que su centro de masa permanezca por arriba de la cubierta de la mesa. Empleando la regla de apilamiento que se ilustra en la FIGURA 9.3.5, observe que lo que sobresale del libro mostrado en la figura 9.3.5a) alcanza su máximo $d_1 = L/2$ cuando su centro de masa está ubicado directamente en el borde de la mesa.

a) Calcule las distancias que sobresalen los libros d_2 , d_3 y d_4 del borde de la mesa para la pila de libros de la figura 9.3.5b), 9.3.5c) y 9.3.5d), respectivamente.

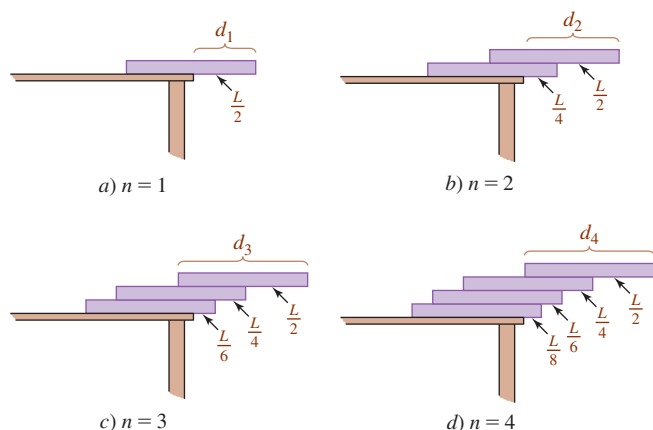


FIGURA 9.3.5 Método de apilamiento de libros del problema 71

Luego utilice (1) de la sección 6.10 para demostrar que el centro de masa de cada pila está en el borde de la mesa. [Sugerencia: Para n libros ponga el eje x a lo largo de la cubierta horizontal de la mesa con el origen O en el borde izquierdo del primer libro, o del fondo, en la pila.]

- ¿Qué indica el valor de d_4 en el inciso a) acerca del cuarto libro, o superior, en la pila?
- Siguiendo el patrón de apilamiento que se indica en la figura 9.3.5, para n libros la parte que sobresale del primer libro desde el borde de la mesa sería $L/2n$, lo que sobresale del segundo libro desde el borde del primer libro sería $L/2(n-1)$, lo que sobresale del tercer libro desde el borde del segundo correspondería a

$L/2(n-2)$, y así en lo sucesivo. Encuentre una fórmula para d_n , lo que sobresalen n libros desde el borde de la mesa. Demuestre que el centro de masa de la pila de n libros está en el borde de la mesa.

- Utilice la fórmula d_n para encontrar la distancia que sobresale un libro en el inciso c) y encuentre el valor más pequeño de n de manera que lo que sobresalen n libros apilados en la manera descrita en el inciso c) es mayor que el doble de la longitud de un libro.
- En teoría, utilizando la regla de apilamiento del inciso c), ¿hay alguna limitación acerca del número de libros en una pila?

72. Un clásico matemático: Los trenes y la mosca En un tiempo específico dos trenes T_1 y T_2 , separados por 20 millas sobre el mismo riel, inician un curso de choque a una velocidad de 10 mph. Suponga que en el preciso instante en que parten los trenes, una mosca sale del frente del tren T_1 , vuela a una velocidad de 20 mph en línea recta hacia el frente del motor del tren T_2 , después vuela de regreso hacia T_1 a 20 mph, después regresa a T_2 , y así en lo sucesivo. Recurra a una serie geométrica para encontrar la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y la mosca es aplastada). Después use el sentido común para determinar la distancia total que vuela la mosca. Vea la FIGURA 9.3.6.



FIGURA 9.3.6 Trenes y mosca en el problema 72

9.4 Prueba de la integral

■ Introducción A menos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea una serie telescópica o una serie geométrica, es una tarea difícil, si no inútil, demostrar la convergencia o divergencia directamente de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, suele ser posible determinar si una serie converge o diverge por medio de una *prueba* que utiliza sólo los términos de la serie. En ésta y en las dos secciones que siguen se examinarán cinco de tales pruebas que son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

■ Prueba de la integral La primera prueba que se considerará relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y divergencia de una serie infinita.

Teorema 9.4.1 Prueba de la integral

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos y f es una función continua que es no negativa y decreciente sobre $[1, \infty)$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$.

- Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
- Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

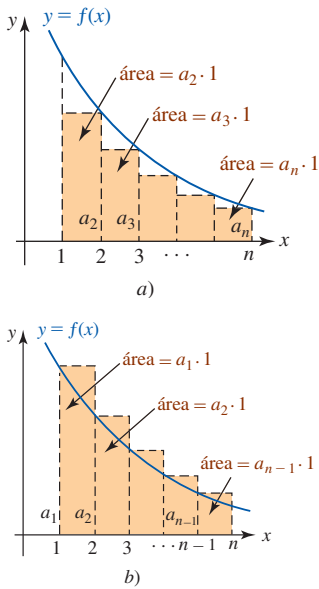


FIGURA 9.4.1 Rectángulos en la prueba del teorema 9.4.1

DEMOSTRACIÓN Si la gráfica de f está dada como en la FIGURA 9.4.1, entonces considerando las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura, observamos que

$$0 \leq a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

o

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}.$$

De la desigualdad $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx$, es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe siempre que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$. Por otro lado, de la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx$, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$ no existe siempre que $\int_1^\infty f(x) dx$ diverja. ■

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de la integral

Demuestre la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

Solución La función $f(x) = 1/(1+x^2)$ es continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. De

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} x \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1) \quad \leftarrow \tan^{-1} 1 = \pi/4 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1} b - \frac{\pi}{4} \right) \quad \leftarrow \text{vea la figura 1.5.15} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

es claro que la integral impropia es convergente. Del teorema 9.4.1i) se concluye que la serie dada también converge. ■

En la prueba de la integral, si la serie de términos positivos es de la forma $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, usamos entonces

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \quad \text{donde } f(k) = a_k.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de la integral

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

$f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[3, \infty)$.

► **Solución** La función $f(x) = (\ln x)/x$ satisface la hipótesis de la prueba de la integral sobre el intervalo $[3, \infty)$. En este caso,

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_3^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [(\ln b)^2 - (\ln 3)^2] = \infty \end{aligned}$$

muestra que la integral impropia diverge. Se concluye del teorema 9.4.1ii) que la serie dada también diverge. ■

Serie p La prueba de la integral es particularmente útil en cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \quad (1)$$

donde p es cualquier número real fijo. La serie infinita (1) se conoce como la **serie p o hiperarmonónica**. El siguiente teorema indica los valores de p para los cuales converge (diverge) la serie p .

Teorema 9.4.2 Convergencia de la serie p

La serie $p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN Se distinguen cuatro casos: $p > 1$, $p = 1$, $0 < p < 1$ y $p \leq 0$. En el primero y tercer casos usamos la prueba de la integral con $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$.

i) Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right] = \frac{1}{1-p} [0 - 1] = \frac{1}{p-1}.$$

La serie p es convergente por el teorema 9.4.1i).

ii) Si $p = 1$, entonces se reconoce a la serie p como la serie armónica divergente.

iii) Si $0 < p < 1$, entonces $-p + 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} [b^{-p+1} - 1] = \infty.$$

La serie p es divergente por el teorema 9.4.1ii).

iv) Por último, si $p \leq 0$, entonces $-p \geq 0$ y así $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^p) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} \neq 0$. La serie p es divergente por la prueba del término n -ésimo, teorema 9.3.3. ■

EJEMPLO 3 Serie p

a) Del teorema 9.4.2, la serie $p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, ya que $p = \frac{1}{2} < 1$.

b) Del teorema 9.4.2, la serie $p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ya que $p = 2 > 1$. ■



NOTAS DESDE EL AULA

- i) Cuando se aplica la prueba de la integral, es necesario tener la seguridad de que el valor de la integral impropia convergente $\int_1^{\infty} f(x) dx$ no se relaciona con la suma real de la serie infinita correspondiente. De tal modo, la serie en el ejemplo 1 *no* converge a $\pi/4$. Vea el problema 36 en los ejercicios 9.4.
- ii) Los resultados de la prueba de la integral para $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ se cumplen incluso si la función no negativa continua f no empieza a decrecer hasta que $x \geq N \geq n$. Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln k)/k$ la función $f(x) = (\ln x)/x$ disminuye sobre el intervalo $[3, \infty)$. De cualquier manera, en la prueba de la integral es posible utilizar $\int_1^{\infty} (\ln x dx)/x$.

Ejercicios 9.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-30, determine si la serie dada converge o diverge. Recurra a la prueba de la integral en los casos en que sea apropiado.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.1}}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

3. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots$

4. $\frac{1}{100} + \frac{1}{100\sqrt{2}} + \frac{1}{100\sqrt{3}} + \dots$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+5k^2}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$
13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$
15. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k(\ln k)^2}$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^3}$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^k + e^{-k}}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}$
8. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^2+5}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$
12. $\sum_{k=2}^{\infty} k^2 e^{-k}$
14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$
16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$
22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^{3/2}}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{3k}\right)$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)}$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2+1)}$
30. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{e^{3k}}}$

En los problemas 31-34, sin hacer ningún trabajo determine si la serie dada converge o diverge. Enuncie sus razones.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} + \frac{3}{k^2}\right)$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(5k^{-1.6} - 10k^{-1.1}\right)$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k}\right)$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+4\sqrt{k}}{k^2}$

En los problemas 35 y 36, determine los valores de p para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$
36. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k [\ln(\ln k)]^p}$

■ Piense en ello

37. Determine los valores de p para los cuales la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^p \ln k$$

es convergente.

38. Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. Demuestre que

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx.$$

39. Demuestre que

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

40. Se demostró que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ es divergente debido a que la sucesión de sumas parciales diverge. Recuerde de la página 495 que $S_n = \sum_{k=1}^n (1/k) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

a) Use el resultado del problema 38 para estimar la suma de los primeros 10 mil millones de términos de la serie armónica.

b) ¿Cuántos términos de la serie armónica son necesarios para garantizar que $S_n \geq 100$?

41. Deje que S denote la suma de la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y S_n el término general en su sucesión de sumas parciales. Defina el **residuo**, o el error, que se efectúa cuando S_n se aproxima a S , como

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$ y que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge. Demuestre que

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

42. La suma S de la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ se sabe que es igual a $\pi^2/6$. Recurra al problema 41 para determinar n de manera que S_n dará una aproximación a S que es exacta hasta tres lugares decimales.

9.5 Pruebas de comparación

■ **Introducción** A menudo es posible determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos $\sum a_k$ comparando sus términos con los términos de una *serie de prueba* $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente. En esta sección se considerarán dos pruebas de comparación para la convergencia y la divergencia.

■ **Prueba de comparación directa** La demostración de la siguiente prueba utilizará dos propiedades importantes de las sucesiones. Recuerde de la sección 9.2 que si una sucesión está acotada y es monótona debe converger. También que si los términos de una sucesión se vuelven no acotados entonces ésta diverge. Aplicamos estos resultados a la sucesión de sumas parciales de una serie.

Teorema 9.5.1 Prueba de comparación directa

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos.

- i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge y $a_k \leq b_k$ para todo entero positivo k , entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
 ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo k , entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Sea $a_k > 0$ y $b_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots$ y considere que

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{y} \quad T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

son los términos generales de las sucesiones de sumas parciales para $\sum a_k$ y $\sum b_k$, respectivamente.

- i) Si $\sum b_k$ es una serie convergente para la cual $a_k \leq b_k$, entonces $S_n \leq T_n$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ existe, $\{S_n\}$ es una sucesión creciente acotada y, en consecuencia, convergente por el teorema 9.2.1. Por tanto, $\sum a_k$ es convergente.
 ii) Si $\sum b_k$ diverge y $a_k > b_k$, entonces $S_n > T_n$. Puesto que T_n aumenta sin cota, así lo hace S_n . Por consiguiente, $\sum a_k$ es divergente. ■

En general, si $\sum c_k$ y $\sum d_k$ son dos series para las cuales $c_k \leq d_k$ para toda k , se afirma que la serie $\sum c_k$ está **dominada** por la serie $\sum d_k$. De tal modo que para series de términos positivos, los incisos i) y ii) del teorema 9.5.1 pueden reenunciarse de la siguiente manera:

- Una serie $\sum a_k$ es convergente si está dominada por una serie convergente $\sum b_k$.
- Una serie $\sum a_k$ diverge si domina a una serie divergente $\sum b_k$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método. Desde luego, no señalan que para recurrir a las series de prueba $\sum b_k$ es necesario estar familiarizado con algunas series que convergen y con algunas que divergen.

◀ Sería buena idea en este punto revisar la noción de serie p en la sección 9.4.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 4}$.

Solución Se observa que al reducirse el denominador en los términos generales se obtiene una fracción mayor:

$$\frac{k}{k^3 + 4} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Debido a que la serie dada es dominada por una serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$, se concluye del teorema 9.5.1i) que la serie dada también es convergente. ■

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{k}$.

Solución Puesto que $\ln(k+2) > 1$ para $k \geq 1$, se tiene

$$\frac{\ln(k+2)}{k} > \frac{1}{k}.$$

En este caso se ha demostrado que la serie dada domina a la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$. En consecuencia, por el teorema 9.5.1ii) la serie dada diverge. ■

■ **Prueba de comparación del límite** Otro tipo de prueba de comparación implica tomar el límite del cociente entre el término general de la serie $\sum a_k$ y el término general de la serie de prueba $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente.

Teorema 9.5.2 Prueba de comparación del límite

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

donde L es finita y $L > 0$, entonces las dos series son ya sea ambas convergentes o ambas divergentes.

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = L > 0$, es posible elegir n tan grande, como $n \geq N$ para algún entero positivo N , que

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}L.$$

Puesto que $a_n > 0$, la desigualdad implica que $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ para $n \geq N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, se concluye de la prueba de comparación directa que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y, en consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Además, puesto que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ para $n \geq N$, se observa que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen. ■

La prueba de comparación del límite es aplicable a menudo a series $\sum a_k$ para las cuales no es conveniente la prueba de comparación directa.

EJEMPLO 3 Uso de la prueba de comparación del límite

El propio lector debe convencerse de que es difícil aplicar la prueba de comparación directa a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k^2 + 1}$. Sin embargo, se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^3)$ es una serie p convergente ($p = 3 > 1$). En consecuencia, con

$$a_n = \frac{1}{n^3 - 5n^2 + 1} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n^3}$$

tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n^2 + 1} = 1.$$

Del teorema 9.5.2 se concluye que la serie dada converge. ■

Si el término general a_n de la serie $\sum a_k$ es un cociente ya sea de potencias racionales de n o de raíces de polinomios en n , es posible distinguir el término general b_n de la serie de prueba $\sum b_k$ examinando el “comportamiento de grado” de a_n para valores grandes de n . En otras palabras, para encontrar un candidato correspondiente a b_n sólo se necesita examinar el cociente de las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador de a_n .

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de comparación del límite

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5 + 7}}$.

Solución Para valores grandes de n , el término general de la serie $a_n = n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}$ “se comporta de manera similar” a un múltiplo constante de

$$\frac{n}{\sqrt[3]{8n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}.$$

De tal modo, se ensaya la serie p divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ como una serie de prueba:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{8n^5 + 7}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{8n^5 + 7} \right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8} \right)^{1/3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Así, de acuerdo con el teorema 9.5.2, la serie dada diverge. ■

Σ NOTAS DESDE EL AULA

- i) La hipótesis en la prueba de comparación directa también puede debilitarse, al considerar un teorema más fuerte. Para una serie con términos positivos, sólo se requiere que $a_k \leq b_k$ o $a_k \geq b_k$ para k suficientemente grande y no para todos los enteros positivos.
- ii) En la aplicación de la prueba de comparación directa, a menudo es fácil alcanzar un punto en que la serie dada está dominada por una serie divergente. Por ejemplo,

$$\frac{1}{5^k + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es realmente cierto y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. Este tipo de razonamiento no prueba nada a cerca

de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k + \sqrt{k}}$. Desde luego, la última serie converge. ¿Por qué? De manera similar, no puede llegarse a una conclusión al mostrar que una serie dada domina a una serie convergente.

La siguiente tabla resume la **prueba de comparación directa**. Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos y $\sum b_k$ una serie que se sabe que converge o diverge (una serie de pruebas).

Comparación de términos	Serie de prueba $\sum b_k$	Conclusión sobre $\sum a_k$
$a_k \leq b_k$	converge	converge
$a_k \leq b_k$	diverge	ninguna
$a_k \geq b_k$	diverge	diverge
$a_k \geq b_k$	converge	ninguna

Ejercicios 9.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de comparación directa para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 5}$

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - 1}$

4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^2 + 1}{k^3 - k}$

5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 3^k}{2^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \sin k}{\sqrt[3]{k^4 + 1}}$

6. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k^5}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 8^k}{3 + 10^k}$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k + 1}{k \ln k}$

$$11. \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j + e^{-j}}{5^j(j+9)} \quad 12. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ie^{-i}}{i+1}$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$$

$$14. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} + \dots$$

En los problemas 15-28, utilice la prueba de comparación del límite para determinar si la serie dada converge.

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7} \quad 16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10 + \sqrt{k}}$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^5 + n^2} \quad 20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(4n+1)^{3/2}}$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt[3]{64k^9+40}} \quad 22. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k^2 - k}{2k^3 + 2k^2 - 8}$$

$$23. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + \ln k}{k^3 + 2k - 1} \quad 24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{e^k - 2}$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \quad 26. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right)^k$$

$$28. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \dots$$

En los problemas 29-40, utilice cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100\sqrt{k^2+1}} \quad 30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(5 + \frac{k}{5}\right) \quad 32. \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$$

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2} \quad 34. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k-1}\sqrt[3]{k^2-2}}$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9 + \sin^2 k} \quad 36. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{3^{2k} - 1}$$

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^k} \quad 38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^{-k}}$$

$$39. \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad 40. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0.9)^k}{k}$$

■ Piense en ello

41. Vuelva a leer ii) de las *Notas desde el aula* en la página 507 y discuta las razones por las que el siguiente enunciado es cierto:

Si $a_k > 0$ para todo k y $\sum a_k$ converge, entonces $\sum a_k^2$ converge.

42. Suponga que p y q son funciones polinomiales sin factores comunes de grado n y m , respectivamente, y que $p(x)/q(x) > 0$ para $x > 0$. Discuta: ¿Bajo qué condiciones convergerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)/q(k)$?

43. Analice si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Si $a_k < b_k$ para todo k y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.

44. Demuestre que si la serie $\sum a_k$ de términos positivos converge, entonces $\sum \ln(1 + a_k)$ converge.

En los problemas 45 y 46, determine si la serie dada converge.

$$45. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}} \quad 46. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + k}$$

47. La representación decimal de un número real positivo es una serie infinita:

$$0.a_1a_2a_3a_4\dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \dots,$$

donde a_i representa uno de los 10 enteros no negativos 0, 1, 2, ..., 9. Demuestre que la serie de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

siempre es convergente.

■ Proyecto

48. ¿Cuán grande es infinito? La prueba de la integral puede usarse para verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.0001}}$ converge, en tanto que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge. Sin embargo, con la ayuda de un SAC se observa a partir de las gráficas de $y = 1/x^{1.0001}$ (en rojo) y $y = 1/(x \ln x)$ (en azul) en la FIGURA 9.5.1 que

$$\frac{1}{k \ln k} < \frac{1}{k^{1.0001}}$$

para $2 \leq k \leq 15\,000$. De hecho, la desigualdad anterior es cierta para $2 \leq k \leq 99\,999\,999 \times 10^{99}$. ¿Entonces por qué $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ no converge por la prueba de comparación directa?

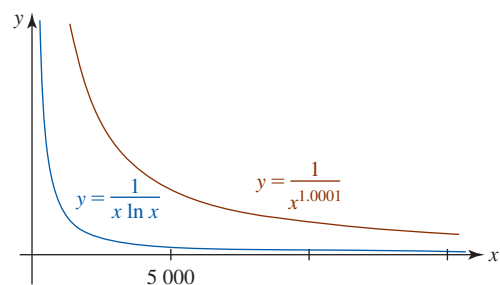


FIGURA 9.5.1 Gráfica para el problema 48

9.6 Pruebas de las proporciones y de la raíz

■ **Introducción** En esta sección, como en la anterior, las pruebas que se consideran son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

■ **Prueba de las proporciones** La primera de estas pruebas emplea el límite del cociente entre el primer término $(n + 1)$ y el término n -ésimo de la serie. Esta prueba es especialmente útil cuando a_k implica factoriales, potencias k -ésimas de una constante y, algunas veces, potencias k -ésimas de k .

Teorema 9.6.1 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

- i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
- ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
- iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

DEMOSTRACIÓN

- i) Sea r un número positivo tal que $0 \leq L \leq r \leq 1$. Para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N , $a_{n+1}/a_n < r$; esto es, $a_{n+1} < ra_n$, $n \geq N$. La última desigualdad implica

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < a_N r^2 \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < a_N r^3, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De tal modo la serie $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ difiere de $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ a lo sumo un número finito de términos, se concluye que la primera serie también converge.

- ii) Sea r un número finito tal que $1 < r < L$. Entonces para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N , $a_{n+1}/a_n > r$ o $a_{n+1} > ra_n$. Para $r > 1$ esta última desigualdad implica $a_{n+1} > a_n$, y por ello $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Del teorema 9.3.3 concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. ■

En el caso en el que $L = 1$, debemos aplicar otra prueba a la serie para determinar su convergencia o divergencia.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de las proporciones

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$.

Solución Se identifica que $a_n = 5^n/n!$ y por ello $a_{n+1} = 5^{n+1}/(n+1)!$. Luego se forma el cociente de a_{n+1} y a_n , se simplifica y se toma el límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \frac{n!}{n!(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 9.6.1i) que la serie es convergente. ■

◀ Repase las propiedades del factorial en la sección 9.1. Vea (4) y (5) en esa sección.

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las proporciones

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Solución En este caso se tiene que $a_n = n^n/n!$ y $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}/(n+1)!$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \quad \leftarrow \text{Este límite es (3) de la sección 1.6.}\end{aligned}$$

Puesto que $L = e > 1$, se concluye del teorema 9.6.1ii) que la serie es divergente. ■

■ **Prueba de la raíz** Si los términos de una serie $\sum a_k$ consisten sólo en potencias k -ésimas, entonces puede aplicarse la siguiente prueba, la cual implica tomar la raíz n -ésima del término n -ésimo.

Teorema 9.6.2 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = L.$$

- i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
- ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
- iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

La demostración de la prueba de la raíz es muy similar a la prueba de las proporciones y no se presentará.

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de la raíz

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{k} \right)^k$.

Solución Se identifica primero $a_n = (5/n)^n$, y después se calcula el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la raíz n -ésima de a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{5}{n} \right)^n \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 9.6.2i) que la serie converge. ■

**NOTAS DESDE EL AULA**

- i) La prueba de las proporciones siempre producirá un caso no conclusivo cuando se aplique a una serie p . Inténtelo con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ y vea lo que ocurre.
- ii) Las pruebas examinadas en ésta y en las dos secciones anteriores indican cuando una serie tiene una suma, pero ninguna de estas pruebas da alguna pista respecto a lo que es la suma real. Sin embargo, al saber que una serie converge, es posible sumar cinco, cien o mil términos en una computadora para obtener una aproximación de la suma.

Ejercicios 9.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-16, recurra a la prueba de las proporciones para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\,000^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$
5. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{10}}{(1.1)^j}$
6. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^5(0.99)^j}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n3^{n-2}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(2k)^k}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99^k(k^3 + 1)}{k^2 10^{2k}}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^k}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! 3^k}{k^k}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$

En los problemas 17-24, utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie dada converge.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$
19. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{\ln k}\right)^k$
20. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2}$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^{2k+1}}{k^k}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{e^{k+1}}$

En los problemas 25-32, use cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k}{k^3 + 2k + 1}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2k+1}\right)^k$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{e^n}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k k!}{(k+1)!}$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k + k}$
31. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k + 4^k}$
32. $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \cdots$

En los problemas 33 y 34, recurra a la prueba de las proporciones para determinar los valores no negativos de p para los cuales la serie dada converge.

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} kp^k \qquad 34. \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{2}{p}\right)^k$$

En los problemas 35 y 36, determine todos los valores reales de p para los cuales la serie dada converge.

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k!} \qquad 36. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$$

37. En los problemas 78 y 79 de los ejercicios 9.1 se vio que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots,$$

está definida por la fórmula de recursión $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donde $F_1 = 1, F_2 = 1$.

a) Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

mostrando que este resultado satisface la fórmula de recursión.

b) Utilice el término general en el inciso a) para calcular F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 .

38. Sea F_n el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el problema 37. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

39. Explique cómo el resultado del problema 38 demuestra que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

converge.

40. **Un poco de historia** En 1985, William Gosper utilizó la siguiente identidad para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} (1\,103 + 26\,390n) \frac{(4n)!}{(n!)^4 (4 \cdot 99)^{4n}}.$$

Esta identidad fue descubierta en 1920 por el matemático indio **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920). Ramanujan fue notable por su excepcional conocimiento en el manejo de manipulaciones y cálculos algebraicos extremadamente complejos.

a) Verifique que la serie infinita converge.

b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π produce el primer término de la serie?

c) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π producen los dos primeros términos de la serie?

9.7 Series alternantes

■ **Introducción** En las últimas tres secciones se consideraron pruebas para la convergencia que resultaron aplicables sólo para series con términos positivos. En la presente discusión se consideran series en las cuales los términos se alternan entre números positivos y negativos, esto es, las series tienen la forma

Una serie geométrica tal como $\sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{3})^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

es una serie alternante. Vea el ejemplo 4 en la sección 9.3.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}a_k \quad (1)$$

$$\text{o} \quad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^na_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^ka_k, \quad (2)$$

donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Las series (1) y (2) se dice que son **series alternantes**. Ya se encontró un tipo especial de serie alternante en la sección 9.3, pero en esta sección se examinarán las propiedades de series alternantes generales y las pruebas de su convergencia. Debido a que la serie (2) es sólo un múltiplo de (1), se confinará la discusión a la última serie.

EJEMPLO 1 Serie alternante

Las series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\text{y} \quad \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} - \frac{\ln 5}{32} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{2^k}$$

son ejemplos de series alternantes. ■

■ **Prueba de la serie alternante** La primera serie en el ejemplo 1, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, se denomina **serie armónica alternante**. Aunque la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

es divergente, la introducción de términos positivos y negativos en la sucesión de sumas parciales para la serie armónica alternante es suficiente para producir una serie convergente. Se demostrará que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge por medio de la siguiente prueba.

Teorema 9.7.1 Prueba de la serie alternante

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $0 < a_{k+1} \leq a_k$ para todo entero positivo k , entonces la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}a_k$ converge.

La condición $0 < a_{k+1} \leq a_k$ significa que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots$

DEMOSTRACIÓN Considere las sumas parciales que contienen $2n$ términos:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned} \quad (3)$$

Puesto que la suposición $0 < a_{k+1} \leq a_k$ implica $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$ tenemos

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots$$

De tal modo, la sucesión $\{S_{2n}\}$, cuyo término general S_{2n} contiene un número par de términos de la serie, es una sucesión monótona. Al reescribir (3) como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - a_{2n}$$

demuestre que $S_{2n} < a_1$ para todo entero positivo n . En consecuencia, $\{S_{2n}\}$ está acotada. Por el teorema 9.2.1 se concluye que $\{S_{2n}\}$ converge a un límite S . Ahora,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$. Esto muestra que la sucesión de sumas parciales $\{S_{2n+1}\}$, cuyo término general S_{2n+1} contiene un número impar de términos, también converge a S . Como $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$ convergen a S , se concluye que $\{S_n\}$ converge a S . ■

EJEMPLO 2 Serie armónica alternante

Demuestre que la serie armónica alternante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

Solución Con la identificación $a_n = 1/n$ tenemos de inmediato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Además, puesto que

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

para $k \geq 1$ se tiene $0 < a_{k+1} \leq a_k$. Se concluye del teorema 9.7.1 que la serie armónica alternante converge. ■

EJEMPLO 3 Serie alternante divergente

La serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k-1}$ diverge, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Este último resultado indica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n-1}$$

no existe. Recuerde del teorema 9.3.2 que es necesario que el último límite sea 0 para la convergencia de la serie. ■

Aunque demostrar que $a_{k+1} \leq a_k$ quizá sea una tarea directa, éste muchas veces no es el caso.

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de la serie alternante

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

Solución Para demostrar que los términos de la serie satisfacen las condiciones $a_{k+1} \leq a_k$, se considerará la función $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ para la cual $f(k) = a_k$. De la derivada, se observa que

$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \text{para } x > 1,$$

y, en consecuencia, la función f decrece para $x > 1$. De tal modo, $a_{k+1} \leq a_k$ es cierta para $k \geq 1$. Además, la regla de L'Hôpital muestra que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{y por ello} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Por consiguiente, la serie dada converge por el método de la serie alternante. ■

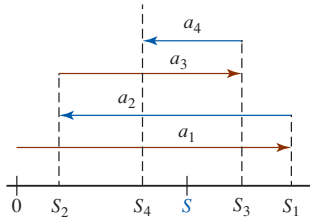


FIGURA 9.7.1 Sumas parciales sobre la recta numérica

■ Aproximación de la suma de una serie alternante Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ converge al número S . Las sumas parciales

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \dots$$

pueden representarse sobre una línea numérica como se muestra en la FIGURA 9.7.1. La sucesión $\{S_n\}$ converge de la manera ilustrada en la figura 9.1.1c); esto es, los términos S_n se acercan a S cuando $n \rightarrow \infty$ aunque oscilan a ambos lados de S . Como se indica en la figura 9.7.1, las sumas parciales con número par son menores que S y las sumas parciales con número impar son mayores que S . De manera aproximada, las sumas parciales numeradas par se incrementan hacia el número S y, a su vez, las sumas parciales numeradas impar disminuyen hacia S . Debido a ello, la suma S de la serie debe ubicarse entre sumas parciales consecutivas S_n y S_{n+1} :

$$S_n \leq S \leq S_{n+1}, \quad \text{para } n \text{ par}, \quad (4)$$

y

$$S_{n+1} \leq S \leq S_n, \quad \text{para } n \text{ impar}. \quad (5)$$

En este caso (4) produce $0 \leq S - S_n \leq S_{n+1} - S_n$ para n par, y (5) implica que $0 \leq S_n - S \leq S_n - S_{n+1}$ para n impar. De este modo, en cualquier caso $|S_n - S| \leq |S_{n+1} - S_n|$.

Pero $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ para n par y $S_{n+1} - S_n = -a_{n+1}$ para n impar. Así, $|S_n - S| \leq a_{n+1}$ para toda n . Se enuncia este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 9.7.2 Cota de error para una serie alternante

Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, $a_k > 0$, converge hacia un número S . Si S_n es la suma parcial n -ésima de la serie y $a_{k+1} \leq a_n$ para todo k , entonces

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

para toda n .

El teorema 9.7.2 es útil para aproximar la suma de una serie alternante convergente. Señala que el **error** $|S_n - S|$ entre la n -ésima suma parcial y la serie es menor que el valor absoluto del primer término $(n+1)$ de la serie.

EJEMPLO 5 Aproximación de la suma de una serie

Aproxime la suma de la serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Primero, observamos que $a_n = 1/(2n)!$. El teorema 9.7.2 indica que debe tenerse

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005$$

para aproximar la suma de la serie hasta cuatro lugares decimales. Ahora a partir de

$$n = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4!} \approx 0.041667$$

$$n = 2, \quad a_3 = \frac{1}{6!} \approx 0.001389$$

$$n = 3, \quad a_4 = \frac{1}{8!} \approx 0.000025 < 0.00005$$

se ve que $|S_3 - S| \leq a_4 < 0.00005$. Por tanto,

$$S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 0.4597$$

tiene la exactitud deseada. ■

■ **Convergencia absoluta y condicional** Una serie que contiene signos mezclados tal como

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 - - + + \dots \quad (6)$$

no es estrictamente de la forma dada en (1) y por ello no se clasifica como una serie alternante. El teorema 9.7.1 no es aplicable a este tipo de serie. No obstante, veremos que la serie (6) es convergente *debido a que* la serie de valores absolutos

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots \quad (7)$$

es convergente (una serie geométrica con $r = \frac{2}{3} < 1$). La serie (6) es un ejemplo de una serie que es **absolutamente convergente**.

En la siguiente definición se está dejando que el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ represente *cualquier* serie (los términos a_k podrían alternar como en (1) o contener signos mezclados); los signos pueden seguir cualquier regla (como en (6)) o no.

◀ Dé un vistazo adelante y lea las dos oraciones que siguen inmediatamente al ejemplo 7.

Definición 9.7.1 Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

EJEMPLO 6 Convergencia absoluta

La serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$ es absolutamente convergente, puesto que se mostró que la serie de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

era convergente por la prueba de la integral en el ejemplo 1 de la sección 9.4. ■

Definición 9.7.2 Convergencia condicionada

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente de manera condicional** si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.

EJEMPLO 7 Convergencia condicional

En el ejemplo 2 vimos que la serie armónica alternante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente. Pero al tomar el valor absoluto de cada término se obtiene la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Por ello, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente de manera condicional. ■

El siguiente resultado muestra que toda serie absolutamente convergente es también convergente. Por esta razón es que la serie en (6) converge.

Teorema 9.7.3 La convergencia absoluta implica convergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

DEMOSTRACIÓN Si se define $c_k = a_k + |a_k|$, entonces $c_k \leq 2|a_k|$. Puesto que $\sum |a_k|$ converge, se sigue de la prueba de comparación que $\sum c_k$ converge. Además, $\sum (c_k - |a_k|)$ converge, ya que tanto $\sum c_k$ como $\sum |a_k|$ convergen. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - |a_k|).$$

Por tanto, $\sum a_k$ converge. ■

Advierta que $\sum |a_k|$ es una serie de términos positivos, y por ello las pruebas de la sección anterior pueden utilizarse para determinar si una serie converge absolutamente.

EJEMPLO 8 La convergencia absoluta implica convergencia

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \frac{\sin 4}{16} + \dots$$

contiene términos positivos y negativos puesto que

$$\sin 1 > 0, \quad \sin 2 > 0, \quad \sin 3 > 0, \quad \sin 4 < 0, \quad \sin 5 < 0, \quad \sin 6 < 0,$$

y así sucesivamente. De la trigonometría se sabe que $|\sin k| \leq 1$ para todo k . Por tanto,

$$\left| \frac{\sin k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

para todo k . Por la prueba de comparación directa, teorema 9.5.1, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ converge puesto que es dominada por la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ es absolutamente convergente, y en virtud de ello por el teorema 9.7.3 converge. ■

■ **Pruebas de las proporciones y de la raíz** Las siguientes formas modificadas de la prueba de las proporciones y de la prueba de la raíz se aplican directamente a una serie alternante.

Teorema 9.7.4 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos distintos de cero tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

- i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
- ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
- iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

EJEMPLO 9 Empleo de la prueba de las proporciones

Examine la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{k 3^k}$.

Solución Con $a_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1} / (n 3^n)$, observamos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} 2^{2n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Puesto que $L = \frac{4}{3} > 1$, veremos por el teorema 9.7.4ii) que la serie alternante diverge. ■

Teorema 9.7.5 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L.$$

- i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
- ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
- iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

■ **Rearreglo de términos** Cuando trabajamos con una serie *finita* de términos tales como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6, \quad (8)$$

cualquier rearreglo del orden de los términos, tal como

$$-a_2 + a_1 - a_4 + a_3 - a_6 + a_5$$

o

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

tiene la misma suma que la original (8). Este tipo de manipulación despreocupada de términos no lleva a una serie *infinita*:

- Si los términos de una serie convergente de manera condicional se escriben en un orden diferente, la nueva serie puede diverger o converger hacia un número por completo diferente.

De hecho, es posible demostrar que mediante un rearreglo adecuado de sus términos, una serie convergente de manera condicional puede hacerse converger a un número real r predeterminado.

En contraste, un rearreglo de los términos de una serie absolutamente convergente no afecta su suma:

- Si una serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden rearrreglarse en cualquier manera y la serie resultante convergerá al mismo número que la serie original.

Por ejemplo, la serie geométrica $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es absolutamente convergente y su suma es $\frac{3}{4}$. El rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ de la serie geométrica *no* es una serie geométrica, aunque la serie rearreglada converge y su suma es $\frac{3}{4}$. Vea los problemas 53-56 en los ejercicios 9.7.

**NOTAS DESDE EL AULA**

- i) La conclusión del teorema 9.7.1 sigue siendo válida cuando la hipótesis " $a_{k+1} \leq a_k$ para todo k positivo" se sustituye con el enunciado " $a_{k+1} \leq a_k$ para k suficientemente grande". Para la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\ln k)/k^{1/3}$, se muestra de inmediato por medio del procedimiento utilizado en el ejemplo 4 que $a_{k+1} \leq a_k$ para $k \geq 21$. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. En consecuencia, la serie converge por la prueba de la serie alternante.
- ii) Si la serie de valores absolutos $\sum |a_k|$ resulta divergente, entonces no es posible establecer ninguna conclusión relativa a la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_k$.

Ejercicios 9.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de la serie alternante para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2+2}{k^3}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3k-1}{k+5}$

$$\begin{array}{ll}
7. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{3^k} \right) & 8. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{4^k} \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4\sqrt{n}}{2n+1} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} \\
11. \sum_{n=2}^{\infty} (\cos n\pi) \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} & 12. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3} \\
13. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\ln k} & 14. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}
\end{array}$$

En los problemas 15-34, determine si la serie dada es absolutamente convergente, convergente de manera condicional o divergente.

$$\begin{array}{ll}
15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} & 16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+5}} \\
17. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{2}{3} \right)^k & 18. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}}{3^k} \\
19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5^k} & 20. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k2^{-k})^2 \\
21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} & 22. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} \\
23. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k!}{100^k} & 24. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{5^{2k-3}}{10^{k+2}} \\
25. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{1+k^2} & 26. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{1+k^4} \\
27. \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi & 28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}{\sqrt{k+1}} \\
29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{1}{k}\right) & 30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \\
31. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right] & 32. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}] \\
33. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k}{k+50} \right)^k & 34. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{6^{3k}}{k^k}
\end{array}$$

En los problemas 35 y 36, aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}; \text{ cinco} \quad 36. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}; \text{ tres}$$

En los problemas 37 y 38, encuentre el entero positivo n más pequeño de modo que S_n aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}; \text{ dos} \quad 38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}; \text{ tres}$$

En los problemas 39 y 40, aproxime la suma de la serie convergente de manera que el error sea menor que la cantidad indicada.

$$39. 1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots; \quad 10^{-3}$$

$$40. 1 - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \cdots; \quad 10^{-4}$$

En los problemas 41 y 42, estime el error de usar la suma parcial indicada como una aproximación a la suma de la serie convergente.

$$41. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}; \quad S_{100} \quad 42. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}; \quad S_6$$

En los problemas 43-48, indique por qué la prueba de la serie alternante no es aplicable a la serie dada. Determine si la serie converge.

$$43. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/6)}{\sqrt{k^4+1}} \quad 44. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100 + (-1)^k 2^k}{3^k}$$

$$45. 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots + + \cdots$$

$$46. \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \cdots + + \cdots$$

$$47. \frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

[Sugerencia: Considere las sumas parciales S_{2n} para $n = 1, 2, 3, \dots$]

$$48. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots$$

En los problemas 49-52, determine si la serie dada converge.

$$49. 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$50. (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

$$51. 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

$$52. 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1 - 1) + \cdots$$

≡ Piense en ello

53. Vuelva a leer la discusión previa a *Notas desde el aula* de esta sección. Explique después por qué el siguiente enunciado es cierto:

Si una serie de términos positivos $\sum a_k$ es convergente, entonces los términos de la serie pueden rearrreglarse de cualquier manera y la serie que resulta converge al mismo número que la serie original.

54. Suponga que S es la suma de la serie armónica alternante convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$.

Demuestre que el rearrreglo de la serie

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} \cdots \\
& = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{12} \\
& \quad + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} \right) - \cdots,
\end{aligned}$$

$$\text{produce } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

55. Utilice $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ y el resultado del problema 54 en la forma

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

para demostrar que la suma de otro rearrreglo de términos de la serie armónica alternante es

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

56. La serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie geométrica absolutamente convergente. Demuestre que su rearrreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ es convergente. Intente con la prueba de las proporciones y con la prueba de la raíz. [Sugerencia: Examine $3^{k+(-1)^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$]
57. Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, pruebe que $\sum a_k^2$ converge. [Sugerencia: Para n suficientemente grande, $|a_n| < 1$. ¿Por qué?]

58. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ diverge.
59. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.
60. Dé un ejemplo de una serie divergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.
61. Explique por qué la serie
$$e^{-x} \sin x + e^{-2x} \sin 2x + e^{-3x} \sin 3x + \cdots$$
 converge para todo valor positivo de x .

9.8 Series de potencias

■ **Introducción** En matemáticas aplicadas es común trabajar con la serie infinita de funciones,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots \quad (1)$$

Los coeficientes c_k son constantes que dependen de k y las funciones $u_k(x)$ podrían ser diversos tipos de polinomios o incluso funciones seno y coseno. Cuando se especifica la variable x , por ejemplo $x = 1$, entonces la serie se reduce a una serie de constantes. La convergencia de una serie tal como (1) dependerá, desde luego, de la variable x , con la serie convergiendo usualmente para algunos valores de x mientras que divergirá para otros valores. En ésta y en la siguiente sección se considerarán series infinitas (1) donde las funciones $u_k(x)$ son polinomios $(x - a)^k$. Estudiaremos las propiedades de este tipo de series y se demostrará cómo determinar los valores de x para los cuales la serie converge.

■ **Series de potencias** Una serie que contiene potencias enteras no negativas de $(x - a)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots, \quad (2)$$

recibe el nombre de **serie de potencias en $x - a$** . Se dice que la serie de potencias (2) está **centrada en a** o tiene **centro a** . Un importante caso especial de (2), cuando $a = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \quad (3)$$

se denomina serie de **potencias en x** . La serie de potencias en (3) está centrada en 0. Un problema que enfrentaremos en esta sección es:

- Encontrar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge.

Observe que (2) y (3) convergen a c_0 cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

◀ Es conveniente definir $(x - a)^0 = 1$ y $x^0 = 1$ incluso cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Serie de potencias centrada en 0

La serie de potencias en x donde los coeficientes $c_k = 1$ para todo k ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

se reconoce como una serie geométrica con el mismo cociente común $r = x$. Por el teorema 9.3.1, la serie converge para aquellos valores de x que satisfacen $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$. La serie diverge para $|x| \geq 1$, esto es, para $x \leq -1$ o $x \geq 1$. ■

En general, la prueba de las proporciones, como se establece en el teorema 9.7.4, es especialmente útil al determinar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge. La prueba de la raíz, en la forma del teorema 9.7.5, también es útil pero en menor grado.

EJEMPLO 2 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k+1)^2}$.

Solución Con la identificación de que $a_n = x^n/(2^n(n+1)^2)$ se usa la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2} \cdot \frac{2^n(n+1)^2}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \frac{|x|}{2} \quad \leftarrow \text{divida entre } n \text{ el numerador y el denominador del primer término} \\ &= \frac{|x|}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 1/n}{1 + 2/n} \right)^2 = \frac{|x|}{2}. \end{aligned}$$

Del inciso i) del teorema 9.7.4, se tiene convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que 1. De tal modo, la serie es absolutamente convergente para aquellos valores de x que satisfacen $|x|/2 < 1$ o $|x| < 2$. Puesto que la desigualdad de valor absoluto $|x| < 2$ es equivalente a $-2 < x < 2$, advertimos que la serie dada convergerá para cualquier número x en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Sin embargo, si $|x|/2 = 1$, o $|x| = 2$, o cuando $x = 2$ o $x = -2$, entonces la prueba de las proporciones no brinda información. Es necesario efectuar verificaciones independientes de la serie dada para la convergencia en estos puntos extremos. Al sustituir 2 por x la serie se convierte en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2},$$

que es convergente por comparación directa con la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$. De manera similar, al sustituir -2 por x se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2},$$

que es convergente por la prueba de la serie alternante, teorema 9.7.1. Concluimos que la serie dada converge para toda x en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La serie diverge para $x < -2$ y $x > 2$, o equivalentemente, para $|x| > 2$. ■

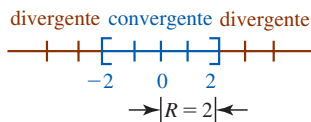


FIGURA 9.8.1 El conjunto de números x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge se muestra en azul

■ **Intervalo de convergencia** En la FIGURA 9.8.1 se ha ilustrado en azul el conjunto $[-2, 2]$ de todos los números reales x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge y en rojo el conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ de números x para los cuales la serie diverge. El conjunto de números para los cuales la serie converge es un intervalo centrado en 0 (el centro de la serie). Como se muestra en la figura, el radio de este intervalo es $R = 2$. En general, el conjunto de *todos* los números reales x para los cuales converge una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ se dice que es su **intervalo de convergencia**. El centro del intervalo de convergencia es el centro a de la serie. El radio R del intervalo de convergencia se denomina **radio de convergencia**.

El siguiente teorema, que se presenta sin demostración, resume todas las maneras posibles en las que puede converger una serie de potencias.

Teorema 9.8.1 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ exactamente uno de los siguientes puntos es cierto:

- i) La serie converge sólo en el número $x = a$.
- ii) La serie converge absolutamente para *todos* los números reales x .
- iii) La serie converge absolutamente para los números x en un intervalo finito $(a-R, a+R)$, $R > 0$, y diverge para los números en el conjunto $(-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$. En un punto extremo del intervalo finito, $x = a-R$ o $x = a+R$, la serie puede converger absolutamente, converger de manera condicional o divergir.

Desde luego en ii) y en iii), cuando la serie de potencias converge absolutamente a un número x , sabemos, por el teorema 9.7.3, que converge. En i) del teorema 9.8.1 el intervalo de convergencia consiste de un elemento $\{a\}$ y afirmamos que la serie tiene **radio de convergencia** $R = 0$. En ii) del teorema 9.8.1, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y la serie tiene **radio**

de convergencia $R = \infty$. Por último, en *iii*) del teorema 9.8.1, hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia con **radio de convergencia $R > 0$** :

$$(a - R, a + R), \quad [a - R, a + R], \quad (a - R, a + R], \quad \text{o} \quad [a - R, a + R).$$

Vea la FIGURA 9.8.2.

Como en el ejemplo 1, si $R > 0$, debe manejarse la cuestión de convergencia en un punto extremo $x = a \pm R$ al sustituir estos números en la serie dada y *reconociendo* después la serie resultante como convergente o divergente o *probando* la serie que resulta respecto a la convergencia mediante una prueba apropiada diferente a la prueba de las proporciones. Recuerde que:

- La prueba de las proporciones siempre es no conclusiva en un punto extremo $x = a \pm R$.

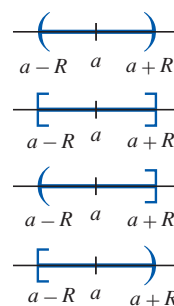


FIGURA 9.8.2 Posibles intervalos finitos de convergencia con $R > 0$

EJEMPLO 3 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1}.$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|/(n+1) = 0$ para cualquier elección de x , la serie converge absolutamente para todo número real. De tal modo, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

EJEMPLO 4 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(x-5)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \frac{|x-5|}{3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right) \frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}. \end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x-5|/3 < 1$ o $|x-5| < 3$. Esta desigualdad de valores absolutos produce el intervalo abierto $(2, 8)$. En $x = 2$ y $x = 8$, los puntos extremos del intervalo, obtenemos, a su vez,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

La primera serie es un múltiplo de la serie armónica alternante y por ello es convergente, la segunda serie es la serie armónica divergente. Consecuentemente, el intervalo de convergencia es $[2, 8)$. El radio de convergencia es $R = 3$. La serie diverge si $x < 2$ o $x \geq 8$. Vea la FIGURA 9.8.3. ■

EJEMPLO 5 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x+10)^k$.

Solución De la prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!(x+10)^{n+1}}{n!(x+10)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x+10| \end{aligned}$$

se observa que el límite cuando $n \rightarrow \infty$ sólo puede existir si $|x+10| = 0$, a saber, cuando $x = -10$. De tal manera,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} \infty, & x \neq -10 \\ 0, & x = -10. \end{cases}$$

La primera serie es

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

$$\text{o} \quad (-1)\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right]$$

La serie entre corchetes es la serie armónica alternante convergente.

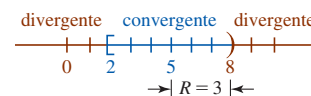


FIGURA 9.8.3 Intervalo de convergencia (azul) del ejemplo 4

La serie diverge para todo número real x , *excepto* $x = -10$. En $x = -10$, obtenemos una serie convergente que consta sólo de ceros. El intervalo de convergencia es el conjunto $\{10\}$ y el radio de convergencia es $R = 0$. ■

Ejercicios 9.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-24, recurra a la prueba de las proporciones para encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^3}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+7)^k}{\sqrt{k}}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} k! 2^k x^k$
10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{k^2 + k}$
12. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x-5)^k}{3^k}$
13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$
14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \ln k}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{2k}} (x+7)^k$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{4k} (x-1)^k$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{5k}}{5^{2k}} \left(\frac{x}{3}\right)^k$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\,000^k}{k^k} x^k$
19. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k+1)(k+2)} (x-1)^k$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(-2)^k k(k+1)} (x+5)^k$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{x-2}{3}\right)^k$
22. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6-x)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$
23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^k} x^{2k+1}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(2k)!} x^{2k}$

En los problemas 25-28, emplee la prueba de la raíz para determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^k (x+1)^k$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k (x+3)^k$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} (x-e)^k$

En los problemas 29 y 30, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^k$
30. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{3^k k!} (x-1)^k$

En los problemas 31-38, la serie dada no es una serie de potencias. No obstante, encuentre todos los valores de x para los cuales la serie dada converge.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{x^{2k}}$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{x}{x+2}\right)^k$
35. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+2}{6}\right)^{k^2}$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(kx)^k}$
37. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$
38. $\sum_{k=0}^{\infty} k! e^{-kx^2}$
39. Encuentre todos los valores de x en $[0, 2\pi]$ para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k \sin^k x$ converge.
40. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de x .

Problemas con calculadora/SAC

41. En los problemas 71 y 72 del ejercicio 5.5 se señaló que algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen en términos de integrales no elementales. Algunas de estas funciones especiales de matemáticas aplicadas también se definen mediante series infinitas. La serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

recibe el nombre de **función de Bessel de orden 0**.

- a) El dominio de la función $J_0(x)$ es su intervalo de convergencia. Determine el dominio.
- b) El valor de $J_0(x)$ se define como la suma de la serie para x en su dominio:

$$J_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

donde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

es el término general de la sucesión de sumas parciales. Emplee una calculadora o SAC y grafique las sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_4(x)$.

- c) Hay varios tipos de funciones de Bessel de diferentes órdenes. $J_0(x)$ es un caso especial de una función más general $J_\nu(x)$ llamada **función de Bessel de primer tipo de orden ν** . Las funciones de Bessel son funciones incorporadas en sistemas algebraicos computarizados tales como *Mathematica* y *Maple*. Emplee un SAC para obtener la gráfica de $J_0(x)$ y compárela con las gráficas de las sumas parciales en el inciso b). [Sugerencia: En *Mathematica*, $J_0(x)$ se denota por medio de `BesselJ[0, x]`.]

9.9 Representación de funciones mediante series de potencias

■ **Introducción** Para cada x en su intervalo de convergencia, una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ converge a un número. Por esta razón, una serie de potencias es en sí misma una función, la cual se denota como f , cuyo *dominio* es su intervalo de convergencia. Entonces para cada x en el intervalo de convergencia se define el elemento correspondiente en el *rango* de la función, el valor $f(x)$, como la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k.$$

Los dos siguientes teoremas, que se anuncian sin demostración, responden algunas de las preguntas fundamentales acerca de la diferenciabilidad, integrabilidad y continuidad de una función f definida por una serie de potencias.

■ **Diferenciación de una serie de potencias** La función f definida por una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ es diferenciable.

Teorema 9.9.1 Diferenciación de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞ , entonces f es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$, y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-a)^{k-1}. \quad (1)$$

El radio de convergencia R de (1) es el mismo que el de la serie original.

El resultado de (1) establece simplemente que una serie de potencias puede diferenciarse *término por término* como se haría para una función polinomial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} c_0 + \frac{d}{dx} c_1(x-a) + \frac{d}{dx} c_2(x-a)^2 + \cdots + \frac{d}{dx} c_n(x-a)^n + \cdots \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-a)^{k-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Puesto que (1) es una serie de potencias con un radio de convergencia R , es posible aplicar el teorema 9.9.1 a f' definida en (2). Esto es, puede afirmarse que f' es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$ y f'' está dada por

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-a)^{k-2}.$$

Continuando de esta manera, se concluye que:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo.

El radio de convergencia R de cada serie derivada es el mismo que el de la serie original. Además, puesto que la diferenciabilidad implica continuidad, también tenemos el resultado:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, es continua en cada x en el intervalo.

■ **Integración de una serie de potencias** Como en (1), el proceso de integración de una serie de potencias puede llevarse a cabo término por término:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int c_0(x-a)^0 dx + \int c_1(x-a) dx + \int c_2(x-a)^2 dx + \cdots + \int c_n(x-a)^n dx + \cdots \\ &= c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \cdots + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 9.9.2 Integración de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞ , entonces

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + C. \quad (3)$$

El radio de convergencia R de (3) es el mismo que el de la serie original.

Puesto que la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ es continua, su integral definida existe y está definida por

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^k dx \right)$$

para cualesquiera números α y β en $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o en $(-\infty, \infty)$ si $R = \infty$.

Es recomendable que lea este párrafo varias veces.

En los teoremas 9.9.1 y 9.9.2 se estableció que si la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$ o $R = \infty$, entonces la serie obtenida que forma $f'(x)$ e $\int f(x) dx$ tiene el mismo radio de convergencia R . Esto *no* significa que la serie de potencias que definen a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x) dx$ tengan los mismos intervalos de convergencia. Esto no es tan malo como parece. Si el radio de convergencia de la serie que define a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x) dx$ es $R > 0$, entonces los intervalos de convergencia pueden diferir sólo en los puntos extremos del intervalo. Como regla, al diferenciar una función definida por serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *es posible perder* convergencia en un punto final del intervalo. Al integrar una función definida por una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *puede ganarse* convergencia en un punto extremo del intervalo.

EJEMPLO 1 Intervalo de convergencia

Para la función f definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, encuentre los intervalos de convergencia de

a) $f'(x)$ b) $\int f(x) dx$.

Solución Se muestra fácilmente de la prueba de las proporciones que el intervalo de convergencia de la serie de potencia que define a f es $[-1, 1)$.

a) La derivada

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (4)$$

se reconoce como una serie geométrica cuyo intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. La serie diferenciada (4) ha perdido convergencia en el punto extremo izquierdo en el intervalo de convergencia de f .

b) La integral de f es

$$\int f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{x^k}{k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} + C. \quad (5)$$

En $x = -1$ y $x = 1$, las series en (5) se convierten, respectivamente, en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Como ambas series convergen, el intervalo de convergencia de (5) es $[-1, 1]$. En este caso, la serie integrada (5) ha ganado convergencia en el punto extremo derecho del intervalo de convergencia de f . ■

La primera serie converge por la prueba de la serie alternante; la segunda converge por la prueba de comparación directa (la serie es dominada por la serie p convergente $\sum 1/k^2$).

■ **Representación de series de potencias de una función** Con frecuencia es posible expresar una función f conocida o dada (tal como e^x o $\tan^{-1} x$) como la suma de una serie de potencias en algún intervalo. En este caso puede afirmarse que la serie es una **representación de f en serie de potencias** sobre el intervalo.

El siguiente ejemplo es importante debido a que conduce a muchos otros resultados.

EJEMPLO 2 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación en serie de potencias de $\frac{1}{1-x}$ centrada en 0.

Solución Recuerde que una serie geométrica converge a $a/(1-r)$ si $|r| < 1$:

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

identificando $a = 1$ y $r = x$, observamos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \quad (6)$$

La serie converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. En la FIGURA 9.9.1 se ha desplegado la gráfica de $y = 1/(1-x)$ en azul junto con las gráficas de las sumas parciales $S_2(x)$, $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_9(x)$ de la serie de potencias (6). Al inspeccionar esta figura, ponga atención sólo en el intervalo $(-1, 1)$. La serie no representa la función fuera de este intervalo. ■

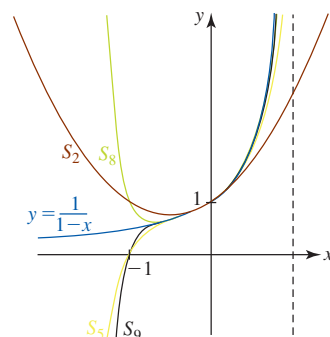


FIGURA 9.9.1 Gráficas de las sumas parciales del ejemplo 2

Al sustituir x por $-x$ en (6), obtenemos una representación de serie de potencias para la función $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k. \quad (7)$$

La serie (7) converge para $|-x| < 1$ o $x < 1$. El intervalo de convergencia es otra vez $(-1, 1)$.

Muchas funciones conocidas pueden representarse mediante una serie infinita a través de cierto tipo de manipulación de las series en (6) y en (7). Por ejemplo, podría multiplicarse la serie por una potencia de x , reemplazar x con otra variable o quizá combinar la sustitución de x con otra variable con el proceso de integración (o diferenciación), etcétera.

EJEMPLO 3 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\frac{1}{1+3x}$ centrada en 0.

Solución Al sustituir simplemente el símbolo x por $3x$ en (7) obtenemos

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + (3x)^2 - (3x)^3 + \cdots + (-1)^n (3x)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

Esta serie converge cuando $|-3x| < 1$ o $|x| < \frac{1}{3}$. El intervalo de convergencia es $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. ■

EJEMPLO 4 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de series de potencias de $\frac{1}{5-x}$ centrada en 0.

Solución Factorizando 5 del denominador,

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5\left(1-\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}},$$

estamos en posibilidad de utilizar (6). Al reemplazar el símbolo x en (6) con $x/5$ obtenemos

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} \left[1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^3 + \cdots \right]$$

o

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{k+1}} x^k.$$

La serie converge para $|x/5| < 1$ o $|x| < 5$. El intervalo de convergencia es $(-5, 5)$. ■

Con un poco de habilidad, las representaciones en serie de potencias en (6) y (7) muy a menudo se utilizan para encontrar una representación de serie de potencias de una función centrada en un número a diferente de 0.

EJEMPLO 5 Serie de potencias centrada en 3

Determine una representación de serie de potencia de $\frac{1}{1+x}$ centrada en 3.

Solución Puesto que el centro de la potencia va a ser 3, deseamos que la serie de potencias contenga sólo potencias de $x - 3$. Con ese fin, sustraemos y sumamos 3 en el denominador:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x-3+3} = \frac{1}{4+(x-3)}.$$

A partir de este punto, procedemos como en el ejemplo 4, a saber: factorizamos 4 del denominador y usamos (7) con x sustituida por $(x-3)/4$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{4+(x-3)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{x-3}{4} + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + \cdots \right] \\ \text{o} \quad \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-3}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (x-3)^k. \end{aligned}$$

Esta serie converge para $|(x-3)/4| < 1$ o $|x-3| < 4$. La solución de la última desigualdad muestra que el intervalo de convergencia es $(-1, 7)$. ■

EJEMPLO 6 Diferenciación de una serie de potencias

La diferenciación término por término de (7) produce una representación en serie de potencias de $1/(1+x)^2$ sobre el intervalo $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x} &= \frac{d}{dx} 1 - \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} x^2 - \frac{d}{dx} x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{d}{dx} x^n + \cdots \\ \text{produce} \quad \frac{-1}{(1+x)^2} &= -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots \quad \leftarrow \text{se multiplican ambos lados por } -1 \\ \text{o} \quad \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Integración de una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\ln(1+x)$ sobre $(-1, 1)$.

Solución Primero introducimos un cambio de variable de integración al sustituir $x = t$ en (7):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

Entonces, para cualquier x dentro del intervalo $(-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt &= \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \cdots \\ &= \left[t \right]_0^x - \frac{1}{2} \left[t^2 \right]_0^x + \frac{1}{3} \left[t^3 \right]_0^x - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \left[t^{n+1} \right]_0^x + \cdots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots. \end{aligned}$$

Pero $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$

y así

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \quad (8) \blacksquare$$

Advierta que el intervalo de convergencia de la serie en (8) es ahora $(-1, 1]$, esto es, hemos agregado la convergencia en $x = 1$. Dejando $x = 1$ en (8), la serie en el lado derecho de la igualdad es la serie armónica alternante convergente; sobre el lado izquierdo se obtiene $\ln 2$. De tal manera, hemos obtenido la suma S de la serie armónica alternante:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \quad (9)$$

EJEMPLO 8 Aproximar un valor de $\ln x$

Aproxime $\ln(1.2)$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Al sustituir $x = 0.2$ en (8) se obtiene

$$\ln(1.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots \quad (10)$$

$$= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots \\ \approx 0.1823. \quad (11) \blacksquare$$

Si la suma de la serie (10) en el ejemplo 8 se denota mediante S , entonces sabemos del teorema 9.7.2 que $|S_n - S| \leq a_{n+1}$. El número dado en (11) es exacto hasta cuatro decimales, ya que, para la quinta suma parcial de (10),

$$|S_5 - S| \leq 0.00001067 < 0.00005.$$

■ **Aritmética de series de potencias** Las dos series de potencias $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ pueden combinarse mediante las operaciones aritméticas de adición, multiplicación y división. Es factible que calculemos $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ como en la adición y multiplicación de dos polinomios: agrupamos términos a partir de potencias similares de $x-a$. En cada punto en el cual las series de potencias que definen a f y g convergen absolutamente, las series

$$f(x) + g(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)(x-a) + (b_2 + c_2)(x-a)^2 + \cdots \quad (12)$$

$$y \quad f(x)g(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x-a) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)(x-a)^2 + \cdots \quad (13)$$

convergen absolutamente. De manera similar, para $c_0 \neq 0$ podemos calcular $f(x)/g(x)$ mediante división larga:

$$\begin{array}{r} \frac{b_0}{c_0} + \frac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2}(x-a) + \cdots \quad \leftarrow \text{cociente} \\ c_0 + c_1(x-a) + \cdots \overline{) b_0 + \frac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2}(x-a) + \cdots} \\ \underline{b_0 + \frac{b_0c_1}{c_0}(x-a) + \cdots} \\ 0 + \frac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0}(x-a) + \cdots \\ \vdots \end{array} \quad (14)$$

◀ Desde luego, no memorice (12), (13) y (14); sólo aplique el álgebra como lo haría para dos polinomios.

La división es válida en *alguna* vecindad del centro a de las dos series.

En ocasiones es posible que utilicemos las operaciones aritméticas tal como se ilustró junto con los resultados conocidos previamente para obtener una representación de serie de potencias de una función.

EJEMPLO 9 Suma de serie de potencias

Determine una representación de serie de potencias de $\frac{4x}{x^2 + 2x - 3}$ centrada en 0.

Solución Para comenzar, descomponemos la función en fracciones parciales

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x}.$$

Después factorizamos 3 del denominador de la primera fracción parcial y usamos (7) con x sustituida por $x/3$:

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k. \quad (15)$$

Esta serie converge para $|x/3| < 1$ o $|x| < 3$. El intervalo de convergencia para (15) es $(-3, 3)$. Ahora sabemos de (6) que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (16)$$

converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia para (16) es $(-1, 1)$. Por último, la suma de (15) y (16) produce la siguiente representación de serie de potencias para la función dada:

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3^k} - 1 \right) x^k. \quad (17)$$

La serie (17) converge para todas las x comunes a (esto es, la intersección de) los intervalos $(-3, 3)$ y $(-1, 1)$, es decir, para toda x en $(-1, 1)$. ■

El resultado (17) también puede obtenerse al multiplicar dos series de potencias.

EJEMPLO 10 Repaso del ejemplo 9

Si reescribimos la función en el ejemplo 9 como un producto

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{1-x}$$

y después usamos (15) y (16), se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^2 + 2x - 3} &= -\frac{4}{3}x \cdot \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots \right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= -\frac{4}{3}x \cdot \left[1 + 1\left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)x^2 + \cdots \right] \\ &= -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots \end{aligned}$$

Ejercicios 9.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-8, utilice (6) y (7) para determinar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

1. $\frac{1}{3-x}$

2. $\frac{1}{4+x}$

3. $\frac{1}{1+2x}$

4. $\frac{1}{5+2x}$

5. $\frac{1}{1+x^2}$

6. $\frac{x}{1+x^2}$

7. $\frac{1}{4+x^2}$

8. $\frac{4}{4-x^2}$

tación de serie de potencias, centrada en 0, de la función que se indica. Señale el intervalo de convergencia.

9. $\frac{1}{(3-x)^2}$

10. $\frac{1}{(1+2x)^2}$

11. $\frac{1}{(5+2x)^3}$

12. $\frac{1}{(4+x)^3}$

13. $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

14. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

En los problemas 15-20, utilice la integración de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

15. $\tan^{-1} x$

16. $\tan^{-1}(x/2)$

17. $\ln(1+x^2)$

18. $\ln(5+2x)$

19. $\ln(4+x)$

20. $\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

En los problemas 9-14, utilice la diferenciación de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una represen-

En los problemas 21-28, utilice (6), (7) o resultados previos para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

21. $\frac{1-x}{1+2x}$

22. $\frac{3-x}{1-x}$

23. $\frac{x^2}{(1+x)^3}$

24. $\frac{x^3}{8+2x}$

25. $x \ln(1+x^2)$

26. $x^2 \tan^{-1} x$

27. $\int_0^x \tan^{-1} t \, dt$

28. $\int_0^x \ln(1+t^2) \, dt$

En los problemas 29-32, proceda como en el ejemplo 5 y encuentre una representación de serie de potencias, centrada en el número dado a , de la función indicada. Señale el intervalo de convergencia.

29. $\frac{1}{1-x}; \quad a = 6$

30. $\frac{1}{x}; \quad a = -2$

31. $\frac{x}{2+x}; \quad a = -1$

32. $\frac{x-2}{x-1}; \quad a = 2$

En los problemas 33 y 34, proceda como en el ejemplo 9 y utilice fracciones parciales para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

33. $\frac{7x}{x^2+x-12}$

34. $\frac{3}{x^2-x-2}$

En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 y utilice multiplicación de series de potencia para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de una representación de serie de potencias, centrada en 0, para la función dada.

35. $\frac{1}{(2-x)(1-x)}$

36. $\frac{x}{(1+2x)(1+x^2)}$

En los problemas 37 y 38, encuentre el dominio de la función dada.

37. $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$

38. $f(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{1 \cdot 2} + \frac{8x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

En los problemas 39-44, use la serie de potencias para aproximar la cantidad dada hasta cuatro lugares decimales.

39. $\ln(1.1)$

40. $\tan^{-1}(0.2)$

41. $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} \, dx$

42. $\int_0^{1/3} \frac{x}{1+x^4} \, dx$

43. $\int_0^{0.3} x \tan^{-1} x \, dx$

44. $\int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2 \, dx$

45. Utilice el problema 15 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

46. Se sabe que la serie en el problema 45 converge muy lentamente. Demuestre lo anterior encontrando el entero positivo n más pequeño de manera que S_n aproxime $\pi/4$ hasta cuatro lugares decimales.

En los problemas 47 y 48, demuestre que la función definida por la serie de potencias satisface la ecuación diferencial dada.

47. $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k; \quad (x+1)y'' + y' = 0$

48. $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}; \quad xy'' + y' + xy = 0$

■ Piense en ello

49. a) Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, entonces demuestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x en $(-\infty, \infty)$.

b) ¿Qué función tiene la propiedad de que su primera derivada es igual a la función? Conjeture sobre cuál función se representa mediante la serie de potencias del inciso a).

50. a) Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, entonces demuestre que $f''(x) = -f(x)$ para toda x en $(-\infty, \infty)$.

b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su segunda derivada es igual al negativo de la función? Conjeture respecto a cuál función se representa mediante la serie de potencia del inciso a). Advierta que las potencias de x en la serie de potencias son enteros positivos impares.

9.10 Serie de Taylor

■ **Introducción** Suponga que $\sum c_k(x-a)^k$ es una serie de potencias centrada en a y que tiene un intervalo de convergencia con un radio de convergencia R distinto de cero. Luego, como se vio en la sección anterior, dentro del intervalo de convergencia una serie de potencias es una función continua que posee derivadas de todos los órdenes. También se abordó la idea de usar una serie de potencias para *representar* una función determinada (tal como $1/(1+x)$) sobre un intervalo. En esta sección se va a extender de manera adicional la noción de representar una función mediante una serie de potencias. El problema básico es:

- Suponga que se cuenta con una función f que posee derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I . ¿Es posible encontrar una serie de potencias que **represente** a f sobre I ?

En palabras un poco diferentes: ¿podemos **expandir** una función diferenciable infinitamente (tal como $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ o $f(x) = e^x$) en una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ que converga al valor correcto de la función $f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto $(a-R, a+R)$, donde R es $R > 0$ o $R = \infty$?

■ **Serie de Taylor para una función f** Antes de responder la pregunta del último párrafo, se va a hacer simplemente la *suposición* de que una función f infinitamente diferenciable sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ puede representarse mediante una serie de potencias $\sum c_k(x - a)^k$ sobre ese intervalo. En ese caso es relativamente fácil determinar cuáles deben ser los coeficientes c_k . La diferenciación repetida de

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots \quad (1)$$

produce

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots \quad (2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \cdots \quad (3)$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + \cdots, \quad (4)$$

y así sucesivamente. Al evaluar (1), (2), (3) y (4) en $x = a$, encontramos que

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = 1!c_1, \quad f''(a) = 2!c_2 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 3!c_3,$$

respectivamente. En general, se ve que $f^{(n)}(a) = n!c_n$ o

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Cuando $n = 0$, interpretamos la derivada 0-ésima como $f(a)$ y $0! = 1$. Al Sustituir (5) en (1) se producen los resultados resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 9.10.1 Forma de una serie de potencias

Si una función f posee una representación en serie de potencias $f(x) = \sum c_k(x - a)^k$ sobre un intervalo $(a - R, a + R)$, entonces los coeficientes deben ser $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

En otras palabras, si una función f tiene una representación en serie de potencias centrada en a , entonces debe verse como lo siguiente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \quad (6)$$

La serie en (6) se denomina **serie de Taylor de f en a** , o **centrada en a** . La serie de Taylor centrada en $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad (7)$$

se denomina **serie de Maclaurin de f** .

La pregunta planteada en la introducción ahora puede reformularse como:

- ¿Es posible expandir una función f infinitamente diferenciable en una serie de Taylor (6)?

Parecería que la respuesta es afirmativa (calculando simplemente los coeficientes como lo indica la fórmula (5)). Por desgracia, no es tan simple el concepto de expandir una función f dada infinitamente diferenciable en una serie de Taylor. Es necesario tener en mente que (5) y (6) se obtuvieron bajo la suposición de que f era representada por una serie de potencias centrada en a . Si no se conoce *a priori* que una función f infinitamente diferenciable tiene una representación en serie de potencias, entonces debe considerarse una serie de potencias obtenidas de (6) o (7) como un resultado *formal*, en otras palabras, una serie de potencias que es simplemente **generada** por la función f . No se sabe si la serie generada de esta manera converge o, incluso si lo hace, si converge a $f(x)$.

EJEMPLO 1 Serie de Taylor de $\ln x$

Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 1$. Determine su intervalo de convergencia.

Solución La función f , sus derivadas y sus valores en 1 son:

$$\begin{array}{l|l}
 f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\
 f'(x) = \frac{1}{x} & f'(1) = 1 \\
 f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f''(1) = -1 \\
 f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3} & f'''(1) = 2! \\
 \vdots & \vdots \\
 f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!
 \end{array}$$

Puesto que $(n-1)!/n! = 1/n$, $n \geq 1$, (6) produce

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k. \quad (8)$$

La prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1} (x-1)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x-1| = |x-1|,
 \end{aligned}$$

muestra que la serie (8) converge para $|x-1| < 1$ o sobre el intervalo $(0, 2)$. En los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2$, las series

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

son divergente y convergente, respectivamente. El intervalo de convergencia de estas series es $(0, 2]$. El radio de convergencia es $R = 1$. ■

Advierta en el ejemplo 1 que no se escribió la igualdad

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

En este punto no se ha establecido que la serie dada en (8) representa a $\ln x$ sobre el intervalo $(0, 2]$.

■ **Teorema de Taylor** De acuerdo con (5), es claro que para tener una serie de Taylor centrada en a es necesario que una función f posea derivadas de todos los órdenes que estén definidas en a . Así, por ejemplo, $f(x) = \ln x$ no posee una serie de Maclaurin, debido a que $f(x) = \ln x$ y todas sus derivadas no están definidas en 0. Además, es importante notar que incluso si una función f posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente sobre algún intervalo, es posible que la serie no represente a f sobre el intervalo, esto es, la serie no converge a $f(x)$ en toda x en el intervalo. Vea el problema 63 de los ejercicios 9.10. La pregunta fundamental de si una serie de Taylor representa la función que la generó puede resolverse por medio del **teorema de Taylor**.

Teorema 9.10.2 Teorema de Taylor

Sea f una función tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x en un intervalo que contiene al número a . Entonces para toda x en el intervalo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (9)$$

(continúa)

Existen varias formas del residuo. Esta forma se debe al matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813).

recibe el nombre de **polinomio de Taylor de f en a** , de grado n -ésimo, y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (10)$$

se llama **forma de Lagrange del residuo**. El número c yace entre a y x .

Puesto que la demostración de este teorema desviaría la principal finalidad de esta discusión, se reserva para el apéndice. La importancia del teorema 9.10.2 radica en el hecho de que los polinomios de Taylor $P_n(x)$ son las sumas parciales de la serie de Taylor (6). El residuo se define como

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{y así} \quad P_n(x) = f(x) - R_n(x). \quad (11)$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$, entonces la función f es la suma de la serie de Taylor que la genera. Sin embargo, de (11) observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$$

por lo que sí es posible mostrar de algún modo que $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. Resumimos el resultado.

Teorema 9.10.3 Convergencia de una serie de Taylor

Suponga que f es una función que posee derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo centrado en el número a . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo, entonces la serie de Taylor generada por f converge a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

En la práctica, la prueba de que el residuo $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ depende muchas veces del hecho de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \quad (12)$$

Este último resultado sigue de aplicar el teorema 9.3.2 a la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x^k/k!$, la cual se sabe que es absolutamente convergente para todos los números reales. (Vea el ejemplo 3 en la sección 9.8.)

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Demuestre que la serie (8) representa a $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $(0, 2]$.

Solución En la solución para el ejemplo 1 vimos que la derivada n -ésima de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

De $f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$, obtenemos de (10)

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-1|^{n+1} = \left| \frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{c} \right|^{n+1},$$

donde c es algún número en el intervalo $(0, 2]$ entre 1 y x .

Si $1 \leq x \leq 2$, entonces $0 < x-1 \leq 1$. Puesto que $1 < c < x$, debemos tener $0 < x-1 \leq 1 < c$ y, en consecuencia, $(x-1)/c < 1$. Por consiguiente,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

En el caso en el que $0 < x < 1$, también puede mostrarse que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Se omite la demostración. En consecuencia,

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x - 1)^k$$

para todos los valores de x en el intervalo $(0, 2]$. ■

EJEMPLO 3 Representación de la serie de Maclaurin de $\cos x$

Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$. Demuestre que la serie de Maclaurin representa a $\cos x$ para toda x .

Solución Determinamos primero la serie de Maclaurin generada por $f(x) = \cos x$:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\operatorname{sen} x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \operatorname{sen} x & f'''(0) = 0 \end{array}$$

y así sucesivamente. De (7) obtenemos la serie de potencias

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \quad (13)$$

La prueba de las proporciones indica que (13) converge absolutamente para todos los valores reales de x , en otras palabras, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. En este caso, con el fin de demostrar que $\cos x$ es representada por la serie (13), debemos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Para este fin, advertimos que la derivada de f satisface

$$|f^{(n+1)}(x)| = \begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & n \text{ par} \\ |\cos x|, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En cualquier caso, $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ para todo número real c , y consecuentemente por (10),

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En vista de (12), tenemos para cualquier elección fija aunque arbitraria de x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Por tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

es una representación válida de $\cos x$ para todo número real x . ■

EJEMPLO 4 Representación de la serie de Taylor de $\operatorname{sen} x$

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $a = \pi/3$. Compruebe que la serie de Taylor representa a $\operatorname{sen} x$ para toda x .

Solución Tenemos

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) = \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) = -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}$$

y así sucesivamente. Por consiguiente, la serie de Taylor centrada en $\pi/3$ generada por $\sin x$ es

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \quad (14)$$

También en este caso, de la prueba de las proporciones se sigue que (14) converge absolutamente para todos los valores reales de x , esto es, su intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. Para demostrar que

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

para todo valor real x , advertimos que, como en el ejemplo anterior, $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$. Esto implica que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - \pi/3|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a partir de lo cual vemos, con la ayuda de (12), que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. ■

Se resumen algunas representaciones importantes de series de Maclaurin y sus intervalos de convergencia:

Series de Maclaurin	Intervalos de convergencia
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty, \infty)$ (15)
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$(-\infty, \infty)$ (16)
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$(-\infty, \infty)$ (17)
$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$[-1, 1]$ (18)
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, \infty)$ (19)
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, \infty)$ (20)
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$	$[-1, 1]$ (21)

Se pide al lector demostrar la validez de las representaciones (15), (17), (19) y (20) como ejercicio. Vea los problemas 51-54 en los ejercicios 9.10.

Además, se le recomienda observar con cuidado las series dadas en (16)-(20) y responder después la pregunta del problema 61 de los ejercicios 9.10.

■ **Algunas gráficas de polinomios de Taylor** En el ejemplo 3 vimos que la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = 0$ representa la función para toda x , ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Siempre es de interés ver gráficamente cómo las sumas parciales de la serie de Taylor, las cuales son los polinomios de Taylor definidos en (9), convergen a la función. En la FIGURA 9.10.1a) las gráficas de los polinomios de Taylor

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2, \quad P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,$$

$$\text{y} \quad P_{10}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$$

se comparan con la gráfica de $f(x) = \cos x$ que se muestra en azul.

Una comparación de los valores numéricos se presenta en la figura 9.10.1b).

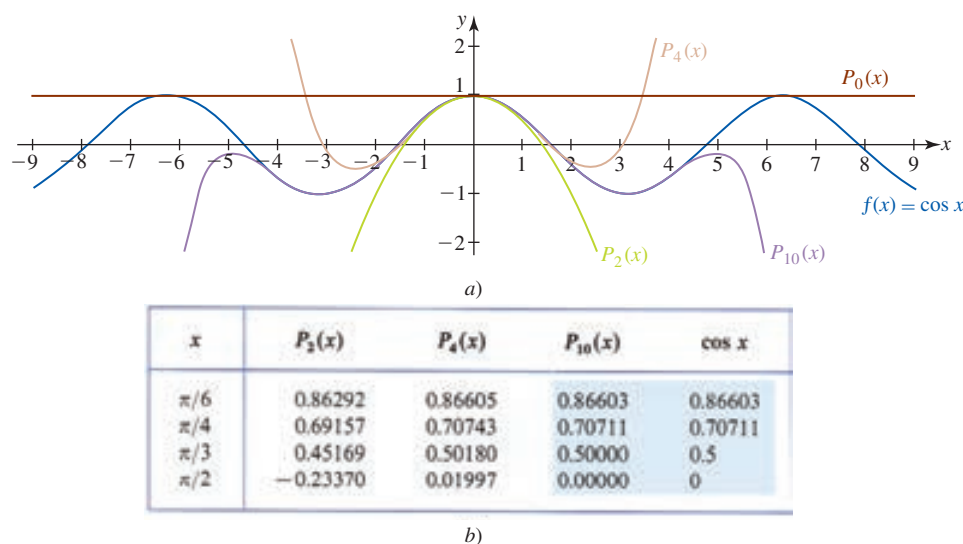


FIGURA 9.10.1 Polinomios de Taylor P_0 , P_2 , P_4 y P_{10} para $\cos x$

Aproximaciones Cuando el valor de x es cercano al centro a ($x \approx a$) de una serie de Taylor, puede usarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función f en a para aproximar el valor de la función $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

EJEMPLO 5 Aproximación utilizando un polinomio de Taylor

Aproxime $e^{-0.2}$ mediante un polinomio de Taylor $P_3(x)$. Determine la exactitud de la aproximación.

Solución Como el valor $x = -0.2$ es cercano a 0, recurrimos al polinomio de Taylor de $f(x) = e^x$ en $a = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Se sigue de

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \\ f(0) &= f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1 \end{aligned}$$

que

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Este polinomio es la cuarta suma parcial de la serie dada en (15). Ahora,

$$P_3(-0.2) = 1 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 \approx 0.8187$$

y por ello,

$$e^{-0.2} \approx 0.8187. \quad (22)$$

Después de esto, de acuerdo con (10) es posible escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0.2 < c < 0$ y $e^c < 1$. La desigualdad

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|-0.2|^4}{24} < 0.0001$$

implica que el resultado en (22) es exacto hasta tres lugares decimales.

En la FIGURA 9.10.2 hemos comparado las gráficas de los polinomios de Taylor $f(x) = e^x$ centrados en $a = 0$:

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Advierta en las figura 9.10.2b) y 9.10.2c) que las gráficas de los polinomios de Taylor $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son indistinguibles de la gráfica de $y = e^x$ en una pequeña vecindad de $x = 0.2$.

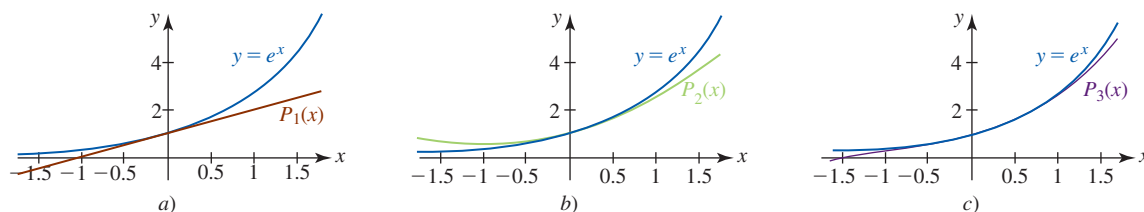


FIGURA 9.10.2 Gráficas de los polinomios de Taylor del ejemplo 5

En las *Notas desde el aula* de la sección 5.5 se introdujo la noción de **integrales no elementales**, a saber: una integral tal como $\int \sin x^2 dx$, donde $\sin x^2$ no posee una antiderivada en la forma de una función elemental. La serie de Taylor puede ser una ayuda cuando se trabaja con integrales no elementales. Por ejemplo, la serie de Maclaurin que se obtiene al sustituir x por x^2 en (17) converge para $-\infty < x < \infty$, y por ello, de acuerdo con el teorema 9.9.2,

$$\begin{aligned} \int \sin x^2 dx &= \int \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots + C. \end{aligned} \quad (23)$$

EJEMPLO 6 Aproximación utilizando una serie de Taylor

Aproxime $\int_0^1 \sin x^2 dx$ hasta tres lugares decimales.

Solución De (23) advertimos de inmediato que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \cdots. \end{aligned} \quad (24)$$

Por el teorema de la cota del error para la serie alternante, teorema 9.7.2, el cuarto término en la serie (24) satisface

$$a_4 = \frac{1}{15 \cdot 7!} \approx 0.000013 < 0.0005.$$

Por tanto, la aproximación

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} \approx 0.3103$$

es exacta hasta tres lugares decimales.

■ **Límites** Una representación de serie de potencias de una función algunas veces es útil en el cálculo de límites. Por ejemplo, en la sección 2.4 se recurrió a un sutil argumento geométrico para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pero si usamos (17) y la división entre x observamos de inmediato que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots \right) = 1.$$

el límite de cada uno de estos términos es 0

EJEMPLO 7 Cálculo de un límite

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$.

Solución Observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Si revisa el problema 25 en el ejercicio 4.5, tal vez recuerde evaluar este límite mediante la regla de L'Hôpital. Pero en vista de (18), podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)}{x^3} && \leftarrow \text{también vea el problema 15 en los} \\ &&& \text{ejercicios 9.9 para la representación} \\ &&& \text{de } \tan^{-1} x \text{ en serie de potencias} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots}{x^3} && \leftarrow \text{se factoriza } x^3 \text{ del numerador} \\ &&& \text{y se cancela} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \dots \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■ **Empleo de la aritmética de una serie de potencias** En la sección 9.9 se discutió la aritmética de la serie de potencias, esto es, las series de potencias pueden básicamente manipularse de manera aritmética igual que los polinomios. En el caso en que las representaciones de las series de potencia $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ convergen en el mismo intervalo abierto $(a-R, a+R)$ para $R > 0$ o $(-\infty, \infty)$ para $R = \infty$, pueden obtenerse las representaciones de la serie de potencias para $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ a su vez, sumando las series y multiplicándolas. La suma y el producto convergen en el mismo intervalo. Si dividimos la serie de potencias de f entre la serie de potencias de g , entonces el cociente representa a $f(x)/g(x)$ en alguna vecindad de a .

EJEMPLO 8 Serie de Maclaurin de $\tan x$

Encuentre los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $f(x) = \tan x$.

Solución De (16) y (17) podemos escribir

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}$$

Entonces mediante división larga

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \overline{) x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots} \\ x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \dots \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \dots \\ \hline \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ \hline \vdots \end{array}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Desde luego, el último resultado pudo también obtenerse utilizando (7). Vea el problema 11 en los ejercicios 9.10. Después de trabajar en el ejemplo 8 se le recomienda leer *ii*) en las *Notas desde el aula*.

■ **Polinomios de Taylor (Redux)** En la sección 4.9 se introdujo la noción de una **aproximación lineal local** de f en a dada por $f(x) \approx L(x)$, donde

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (25)$$

Esta ecuación representa la línea tangente a la gráfica de f en $x = a$. Como es un polinomio lineal, otro símbolo apropiado para (25) es

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (26)$$

La ecuación se reconoce ahora como el polinomio de Taylor de primer grado de f en a . La idea detrás de (25) es que la línea tangente puede usarse para aproximar el valor de $f(x)$ cuando x está en una pequeña vecindad de a . Pero, puesto que la mayoría de las gráficas tienen concavidad y una línea tangente, no es posible esperar que un polinomio de grado superior proporcionaría una mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de que su gráfica estaría cerca de la gráfica de f sobre un intervalo más grande que contenga a a . Advierta que (26) tiene las propiedades de P_1 y su primera derivada concuerda con f y su primera derivada en $x = a$:

$$P_1(a) = f(a) \quad \text{y} \quad P'_1(a) = f'(a).$$

Si deseamos que una función polinomial cuadrática

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

tenga las propiedades análogas, a saber:

$$P_2(a) = f(a), \quad P'_2(a) = f'(a) \quad \text{y} \quad P''_2(a) = f''(a),$$

entonces, siguiendo un procedimiento similar a (1)-(5), se advierte que P_2 debe ser

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2. \quad (27)$$

$P_n(x)$ es el polinomio de grado n definido en (9).

Gráficamente, esto significa que la gráfica de f y la gráfica de P_2 tienen la misma línea tangente y la misma concavidad en $x = a$. Desde luego, se reconoce (27) como el polinomio de Taylor de segundo grado. Se afirma que $f(x) \approx P_2(x)$ es una **aproximación cuadrática local de f en a** . Al continuar de esta manera se construye $f(x) \approx P_n(x)$, que es una **aproximación local de grado n -ésimo de f en a** . Con esta discusión en mente, el lector necesita prestar mayor atención a las gráficas de $f(x) = \cos x$, P_0 , P_2 , P_4 y P_{10} cerca de $x = 0$ en la figura 9.10.1a) y las aproximaciones en la figura 9.10.1b). También debe reexaminar la figura 9.10.2.

■ **Posdata. Un poco de historia** El teorema 9.10.2 recibe su nombre en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731), quien publicó este resultado en 1715. Sin embargo, la fórmula en (6) fue descubierta por Johann Bernoulli casi 20 años antes. La serie en (7) recibe su nombre en honor al matemático escocés y estudiante de Isaac Newton, **Colin Maclaurin** (1698-1746). No es claro por qué el nombre de Maclaurin se asocia con esta serie.



NOTAS DESDE EL AULA

- i) El método de la serie de Taylor para encontrar la serie de potencias de una función y la prueba posterior de que la serie representa a la función tiene una gran y obvia desventaja. La obtención de una expresión general para la derivada n -ésima de la mayoría de las funciones es casi imposible. De tal modo, se presenta con frecuencia la limitación de determinar sólo algunos de los primeros coeficientes c_n .
- ii) Es fácil pasar por alto la importancia de los resultados en (6) y (7). Suponga que se desea encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = 1/(2 - x)$. Es posible, desde luego, utilizar (7), lo cual se le pide al lector en el problema 1 de los ejercicios 9.10. Por otro lado, el lector debe reconocer, de los ejemplos 3-5 de la sección 9.9, que la representación en serie de potencias de f puede obtenerse utilizando series geométricas. El punto es:

- La representación es única. De tal modo que sobre su intervalo de convergencia, una serie de potencias que representa a una función, independientemente de cómo se obtuvo, es la serie de Taylor o de Maclaurin de esa función.

Ejercicios 9.10 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.**Fundamentos**

En los problemas 1-10, emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

1. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
2. $f(x) = \frac{1}{1+5x}$
3. $f(x) = \ln(1+x)$
4. $f(x) = \ln(1+2x)$
5. $f(x) = \sin x$
6. $f(x) = \cos 2x$
7. $f(x) = e^x$
8. $f(x) = e^{-x}$
9. $f(x) = \sinh x$
10. $f(x) = \cosh x$

En los problemas 11 y 12, emplee (7) para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

11. $f(x) = \tan x$
12. $f(x) = \sin^{-1} x$

En los problemas 13-24, emplee (6) para determinar la serie de Taylor de la función dada centrada en el valor indicado de a .

13. $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad a = 4$
14. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1$
15. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1$
16. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -5$
17. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$
18. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/2$
19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/3$
20. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/6$
21. $f(x) = e^x, \quad a = 1$
22. $f(x) = e^{-2x}, \quad a = \frac{1}{2}$
23. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$
24. $f(x) = \ln(x+1), \quad a = 2$

En los problemas 25-32, utilice resultados, métodos o problemas previos para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

25. $f(x) = e^{-x^2}$
26. $f(x) = x^2 e^{-3x}$
27. $f(x) = x \cos x$
28. $f(x) = \sin x^3$
29. $f(x) = \ln(1-x)$
30. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
31. $f(x) = \sec^2 x$
32. $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas 33 y 34, emplee la serie de Maclaurin como una ayuda en la evaluación de límite indicado.

33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{1-\cos x}$

En los problemas 35 y 36, use adición de series de Maclaurin para e^x y e^{-x} para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

35. $f(x) = \cosh x$
36. $f(x) = \sinh x$

En los problemas 37 y 38, use multiplicación para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

37. $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$
38. $f(x) = e^x \sin x$

En los problemas 39 y 40, utilice división para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de la función dada.

39. $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$
40. $f(x) = \sec x$

En los problemas 41 y 42, establezca el valor indicado de la integral definida dada.

41. $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots$
42. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$

En los problemas 43-46, encuentre la suma de la serie dada.

43. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
44. $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$
45. $1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \dots$
46. $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots$

En los problemas 47-50, aproxime la cantidad indicada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores señalados de n y a . Determine la exactitud de la aproximación.

47. $\sin 46^\circ, \quad n = 2, a = \pi/4$ [Sugerencia: Convierta 46° a radianes.]
48. $\cos 29^\circ, \quad n = 2, a = \pi/6$
49. $e^{0.3}, \quad n = 4, a = 0$
50. $\sinh(0.1), \quad n = 3, a = 0$
51. Demuestre que la serie obtenida en el problema 5 representa a $\sin x$ para todo valor real de x .
52. Demuestre que la serie obtenida en el problema 7 representa a e^x para todo valor real de x .
53. Demuestre que la serie obtenida en el problema 9 representa a $\sinh x$ para todo valor real de x .
54. Demuestre que la serie obtenida en el problema 10 representa $\cosh x$ para todo valor real de x .

Aplicaciones

55. Al nivelar una larga autopista de longitud L , debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra.
 - a) Demuestre que la corrección de nivelación y indicada en la FIGURA 9.10.3 es $y = R \sec(L/R) - R$, donde R es el radio de la Tierra medido en millas.
 - b) Si $P_2(x)$ es el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = \sec x$ en $a = 0$, utilice $\sec x \approx P_2(x)$ para x cercano a cero con el fin de demostrar que la corrección aproximada del nivelado es $y \approx L^2/(2R)$.
 - c) Encuentre el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplee $R = 4\,000$ mi.
 - d) Si se usa $\sec x \approx P_4(x)$, entonces demuestre que la corrección de nivelación es

$$y \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}.$$

Repita el cálculo en el inciso c) utilizando la última fórmula.

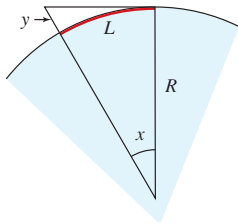


FIGURA 9.10.3 La Tierra en el problema 55

56. Una onda de longitud L viaja de izquierda a derecha a través de agua a una profundidad d (en pies), como se ilustra en la FIGURA 9.10.4. Un modelo matemático que relaciona la velocidad v de la onda con L y d es

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}.$$

- a) Para agua profunda demuestre que $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.
 b) Utilice (7) para determinar los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando d/L es pequeña, $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua poco profunda la velocidad de una onda es independiente de la longitud de la onda.

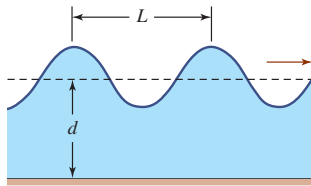


FIGURA 9.10.4 Onda del problema 56

≡ Piense en ello

En los problemas 57 y 58, encuentre dos maneras, aparte de utilizar (7), de determinar la representación de la serie de Maclaurin de la función dada.

57. $f(x) = \sin^2 x$

58. $f(x) = \sin x \cos x$

59. Sin utilizar (6), encuentre la serie de Taylor para la función $f(x) = (x+1)^2 e^x$ centrada en $a = 1$. [Sugerencia: $e^x = e^{x+1-1}$.]
 60. Discuta: ¿ $f(x) = \cot x$ posee una representación en serie de Maclaurin?
 61. Explique por qué resulta lógico que las series de Maclaurin (16) y (17) para $\cos x$ y $\sin x$ contengan sólo potencias pares de x y sólo potencias impares de x , respectivamente. Después reinspeccione la serie de Maclaurin en (18), (19) y (20) y comente.
 62. Suponga que se desea calcular $f^{(10)}(0)$ para $f(x) = x^4 \sin x^2$. Desde luego, podría utilizarse el enfoque de fuerza bruta: recurrir a la regla del producto y cuando se obtenga (a la larga) la décima derivada igualar x a 0. Piense en una manera más hábil de determinar el valor de esta derivada.

≡ Proyectos

63. **Un clásico matemático** La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

aparece en casi todo texto de cálculo. La función f es continua y posee derivadas de todos los órdenes en todo valor de x .

- a) Emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f .
 b) Emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin correspondiente a f . Tendrá que recurrir a la definición de la derivada para calcular $f'(0)$, $f''(0)$, ... Por ejemplo,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Podría ser de utilidad utilizar $t = \Delta x$ y recordar la regla de L'Hôpital. Demuestre que la serie de Maclaurin de f converge para toda x . ¿La serie representa a la función f que la generó?

9.11 Serie del binomio

■ **Introducción** La mayoría de los estudiantes de matemáticas están familiarizados con la expansión binomial en los dos casos:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

En general, si m es un entero positivo, entonces

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots + mx^{m-1} + x^m. \quad (1)$$

La expansión de $(1+x)^m$ en (1) se denomina **teorema del binomio**. Utilizando la notación de sumatoria, (1) se escribe

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k, \quad (2)$$

donde el símbolo $\binom{m}{k}$ se define como

$$\binom{m}{0} = 1, \quad k = 0 \quad \text{y} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

por conveniencia este término se define como 1 ($m-k+1 = (m-(k-1))$)

Estos números se llaman **coeficientes binomiales**. Por ejemplo, cuando $m = 3$, los cuatro coeficientes binomiales son

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = \frac{3(3-1)(3-2)}{6} = 1.$$

Si bien (2) tiene la apariencia de una serie, es una suma finita consistente en $m + 1$ términos que finalizan con x^m . En esta sección se verá que cuando (1) se extiende a potencias m que no son enteros positivos, el resultado es una serie infinita.

◀ Isaac Newton fue el primero que dio en 1665 la extensión del **teorema del binomio** (m un entero positivo) a la **serie del binomio** (m fraccionario y números reales negativos).

■ **Serie del binomio** Suponga ahora que $f(x) = (1+x)^r$, donde r representa cualquier número real. De

$f(x) = (1+x)^r$	$f(0) = 1$
$f'(x) = r(1+x)^{r-1}$	$f'(0) = r$
$f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$	$f''(0) = r(r-1)$
$f'''(x) = r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3}$	$f'''(0) = r(r-1)(r-2)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = r(r-1) \cdots (r-n+1)(1+x)^{r-n}$	$f^{(n)}(0) = r(r-1) \cdots (r-n+1)$

advertimos que la serie de Maclaurin generada por f es

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!} x^n + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k. \end{aligned} \quad (3)$$

La serie de potencias dada en (3) se denomina **serie del binomio**. Advierta que (3) termina sólo cuando r es un entero positivo; en este caso, (3) se reduce a (1). De acuerdo con la prueba de las proporciones, la versión dada en el teorema 9.7.4,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)(r-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r(r-1) \cdots (r-n+1)x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|r-n|}{n+1} |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{r}{n} - 1 \right|}{1 + \frac{1}{n}} |x| = |x| \end{aligned}$$

concluimos que la serie del binomio (3) converge para $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$, esto es, para $x > 1$ o $x < -1$. La convergencia en los puntos extremos $x = \pm 1$ depende del valor de r .

Desde luego no es una gran sorpresa aprender que la serie (3) representa la función f que la generó. Se enuncia esto como un teorema formal.

Teorema 9.11.1 Serie del binomio

Si $|x| < 1$, entonces para cualquier número real r ,

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad (4)$$

donde

$$\binom{r}{0} = 1, k=0 \quad \text{y} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

EJEMPLO 1 Representación de una función mediante una serie del binomio

Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Solución Reescribiendo f como $f(x) = (1+x)^{1/2}$ identificamos $r = \frac{1}{2}$. Después se deduce de (4) que para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots. \end{aligned}$$

La última línea se escribe utilizando la notación de sumatoria como

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!} x^k. \quad \blacksquare$$

Suponga que la función en el ejemplo 1 ha sido $f(x) = \sqrt{4+x}$. Para obtener la representación en serie del binomio de f tendríamos que reescribir la función en la forma $(1+x)^r$ factorizando el 4 fuera del radical, esto es,

$$f(x) = \sqrt{4+x} = \sqrt{4} \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2}.$$

Ahora es posible emplear (4) en la cual el símbolo x es sustituido por $x/4$. La serie resultante convergería entonces para $|x/4| < 1$ o $|x| < 4$.

EJEMPLO 2 Una fórmula de la física

En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve a una velocidad v relativa a un observador está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (5)$$

donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz.

Muchos de los resultados de la física clásica no se cumplen para partículas, tales como electrones, los cuales se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0v^2$ sino

$$K = mc^2 - m_0c^2. \quad (6)$$

Si identificamos $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$ en (5), tenemos $|x| < 1$, ya que ninguna partícula puede superar la velocidad de la luz. En consecuencia, (6) puede escribirse:

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1+x}} - m_0c^2 \\ &= m_0c^2[(1+x)^{-1/2} - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right) - 1 \right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye el valor por } x \\
&= m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{v^4}{c^4} \right) + \frac{5}{16} \left(\frac{v^6}{c^6} \right) + \dots \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

En el mundo cotidiano donde v es mucho más pequeña que c , son ignorables los términos más allá del primero en (7). Esto conduce al resultado clásico bien conocido

$$K \approx m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad \blacksquare$$



NOTAS DESDE EL AULA

Al llegar al final de la discusión de series infinitas es probable que el lector tenga la fuerte impresión de que las series divergentes son inútiles. Nada de eso. Los matemáticos odian que algo se desperdicie. Las series divergentes se usan en una teoría conocida como *representaciones asintóticas de funciones*. Ocurre algo como lo siguiente; una serie divergente de la forma

$$a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots$$

es una **representación asintótica de la función** f si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n [f(x) - S_n(x)] = 0,$$

donde $S_n(x)$ es la suma parcial ($n + 1$) de la serie divergente. Algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen de esta manera.

Ejercicios 9.11 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.

Fundamentos

En los problemas 1-10, recurra a (4) para determinar los primeros cuatro términos de una representación en serie de potencias de la función dada. Indique el radio de convergencia.

1. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$
3. $f(x) = \sqrt{9-x}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+5x}}$
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $f(x) = (4+x)^{3/2}$
8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x)^5}}$
9. $f(x) = \frac{x}{(2+x)^2}$
10. $f(x) = x^2(1-x^2)^{-3}$

En los problemas 11 y 12, explique por qué el error en la aproximación dada es menor que la cantidad indicada. [Sugerencia: Revise el teorema 9.7.2.]

11. $(1+x)^{1/3} \approx 1 + \frac{x}{3}; \frac{1}{9}x^2, x > 0$
12. $(1+x^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4; \frac{5}{16}x^6$
13. Encuentre una representación en serie de potencias para $\sin^{-1} x$ utilizando

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

14. a) Demuestre que la longitud de un cuarto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ está dada por $L = aE(k)$, donde $E(k)$ es

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

y $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral recibe el nombre de **integral elíptica completa del segundo tipo**.

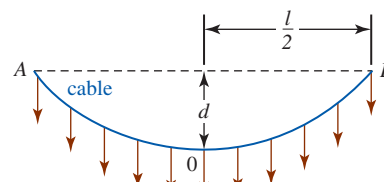
- b) Demuestre que

$$L = a \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \frac{\pi}{4} k^2 - \frac{a}{8} \frac{3\pi}{16} k^4 - \dots$$

15. En la FIGURA 9.11.1 un cable colgante está sostenido en los puntos A y B y soporta una carga distribuida uniformemente (tal como el piso de un puente). Si $y = (4d/l^2)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \dots$$

Vea el problema 22 en los ejercicios 4.10.



carga uniforme distribuida horizontalmente

FIGURA 9.11.1 Cable colgante del problema 15

16. Aproxime las siguientes integrales hasta tres lugares decimales.

a) $\int_0^{0.2} \sqrt{1+x^3} dx$

b) $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^4} dx$

17. Por la ley de los cosenos, el potencial en el punto A en la FIGURA 9.11.2 debido a una carga unitaria en el punto B es $1/R = (1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$, donde $x = \cos \theta$. La expresión $(1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$ se dice que es la **función generadora** de los **polinomios de Legendre** $P_k(x)$, puesto que

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)r^k.$$

Recurra a (4) para determinar $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

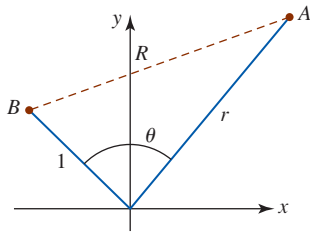


FIGURA 9.11.2 Carga unitaria en el punto B del problema 17

18. a) Suponga que

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. Determine $f'(x)$ y $xf'(x)$.

- b) Muestre que

$$(n+1) \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

- c) Demuestre que $f'(x) + xf'(x) = rf(x)$.

- d) Resuelva la ecuación diferencial de primer orden

$$(1+x)f'(x) = rf(x)$$

sujeta a $f(0) = 1$.

En los problemas 19 y 20, emplee (4) para determinar la representación en serie de potencias en $x-1$ de la función dada. [Sugerencia: $1+x = 2+(x-1)$.]

19. $f(x) = \sqrt{1+x}$

20. $f(x) = (1+x)^{-2}$

Revisión del capítulo 9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-30, indique si el enunciado es verdadero (V) o falso (F).

- La sucesión $\left\{ \frac{(-1)^n n}{2n+1} \right\}$ converge. _____
- Toda sucesión acotada converge. _____
- Si una sucesión es no monótona, es no convergente. _____
- La sucesión $\left\{ \frac{10^n}{2^{n^2}} \right\}$ es no monótona. _____
- Si $a_n \leq B$ para todo n y $a_{n+1}/a_n \geq 1$ para todo n , entonces $\{a_n\}$ converge. _____
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ para todo valor de x . _____
- Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\sum a_k$ siempre converge. _____
- $0.999999\ldots = 1$ _____
- Si $\sum a_k = \frac{3}{2}$, entonces $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. _____
- Si $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\sum a_k$ converge. _____
- Si $\sum a_k^2$ converge, entonces $\sum a_k$ converge. _____
- Si $\sum a_k$ converge y $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum (a_k + b_k)$ diverge. _____
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge para $p = 1.0001$. _____
- La serie $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots$ diverge. _____
- Si $\sum |a_k|$ diverge, entonces $\sum a_k$ diverge. _____
- Si $\sum a_k$, $a_k > 0$, converge, entonces $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge. _____
- Si $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum (-1)^{k+1} \frac{a_k}{k}$ converge. _____

18. Si $\sum b_k$ converge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo k , entonces $\sum a_k$ converge. _____
19. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ entonces $\sum a_k$ converge absolutamente. _____
20. Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia diferente de cero. _____
21. Una serie de potencias converge absolutamente en todo número x en su intervalo de convergencia. _____
22. Una serie de potencias $\sum c_k x^k$ con un intervalo de convergencia $[-R, R]$, $R > 0$, es una función infinitamente diferenciable dentro de $(-R, R)$. _____
23. Si una serie de potencias $\sum c_k x^k$ converge para $-1 < x < 1$ y es convergente en $x = 1$, entonces la serie también debe converger en $x = -1$. _____
24. Si la serie de potencias $\sum a_k x^k$, $a_k > 0$, tiene el intervalo de convergencia $[-R, R]$, $R > 0$, entonces la serie converge condicionalmente, pero no absolutamente, en $x = -R$. _____
25. Puesto que $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, la serie $\sum_{k=0}^\infty e^{-k}$ también converge a 1. _____
26. La serie $1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \dots$ converge. _____
27. $f(x) = \ln x$ no puede representarse mediante una serie de Maclaurin. _____
28. Si la serie de potencias $\sum c_k (x - 4)^k$ diverge en $x = 7$, la serie diverge necesariamente en $x = 9$. _____
29. Si la sucesión $\{\sum_{k=1}^n a_k\}$ converge a 10, entonces $\sum_{k=1}^\infty a_k = 10$. _____
30. Si $f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_{2k-1} x^{2k-1}$ es la serie de Maclaurin de una función f , entonces $f^{(4)}(0) = 0$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. Si $\{a_n\}$ converge a 4 y $\{b_n\}$ converge a 5, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a _____, $\{a_n + b_n\}$ converge a _____, $\{a_n/b_n\}$ converge a _____ y $\{a_n^2\}$ converge a _____.
2. La sucesión $\{\tan^{-1} n\}$ converge a _____.
3. Para aproximar la suma de la serie alternante $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{10^k}$ a cuatro lugares decimales, sólo se necesita utilizar la suma parcial _____-ésima.
4. La suma de la serie $\sum_{k=0}^\infty 4\left(\frac{2}{3}\right)^k$ es _____.
5. Si n es un entero, $1 \leq n \leq 9$, entonces $0.nnn \dots =$ _____ y por ello como un cociente de enteros, $2.444444\dots =$ _____.
6. La serie $\sum_{k=1}^\infty [\tan^{-1} k - \tan^{-1}(k+1)]$ converge a _____.
7. La serie de potencias $\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ representa a la función $f(x)$ _____ para toda x .
8. La representación de la serie del binomio de $f(x) = (4+x)^{1/2}$ tiene el radio de convergencia _____.
9. La serie geométrica $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{5}{x}\right)^{k-1}$ converge para los siguientes valores de x : _____.
10. Si $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ para todos los números reales x , entonces una serie de potencias para $e^{-x^3} =$ _____.
11. El intervalo de convergencia de la serie de potencias $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ es _____.
12. Si $\sum_{k=1}^n a_k = 8 - 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, entonces $\sum_{k=1}^\infty a_k =$ _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-12, determine si la serie dada converge o diverge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + 1)^2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-k}}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-k}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2.5)^k}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \ln k}{k^4 + 4}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^{3/2}}$
7. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{k^6 - 4k}}$
8. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{\ln k}}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{k}}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)!}{(k!)^2}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 4k + 6}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3k}{k+1}\right)$

En los problemas 13 y 14, encuentre la suma de la serie convergente dada.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} + 3}{(1.01)^{k-1}}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 11k + 30}$

En los problemas 15-18, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3} x^k$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} (2x - 1)^k$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} k! (x + 5)^k$
18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{\ln k}$

19. Encuentre el radio de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k - 1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k - 1)} x^k.$$

20. Encuentre el valor de x para el cual $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos x)^k$ converge.

21. Para $|\alpha| > 1$, encuentre la suma de la serie

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \cdots.$$

22. Determine si el siguiente argumento es válido. Si

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots, \quad \text{entonces} \quad 2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1.$$

Al resolver $2S = S - 1$ produce $S = -1$.

En los problemas 23-26, determine por cualquier método los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función indicada.

23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}$
24. $f(x) = \frac{x}{2-x}$
25. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
26. $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

27. Encuentre la serie de Taylor para $f(x) = \cos x$ con centro en $a = \pi/2$.

28. Demuestre que la serie del problema 25 representa a la función demostrando que $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

29. Una gran convención de matemáticos con gastos pagados aporta 3 millones a la economía de la ciudad de San Francisco. Se estima que cada residente de la ciudad gasta $\frac{2}{3}$ de su ingreso en la ciudad. De modo tal que la cantidad recaudada en la convención, $3(\frac{2}{3}) = \$2$ millones, los gastan las personas de San Francisco en la ciudad. De esta última cantidad, $\frac{2}{3}$ se gasta en la ciudad, y así en lo sucesivo. A largo plazo, ¿cuánto gastan los residentes de San Francisco en su ciudad como resultado de la convención?

30. Si se invierten P dólares a una tasa anual r de interés compuesto anualmente, el rendimiento S después de m años es $S = (1 + r)^m$. La **regla del 70**, que usan a menudo los agentes de préstamos y los analistas de acciones, dice que el tiempo que se requiere para duplicar una inversión ganando una tasa de interés r es aproximadamente $70/(100r)$ años. Por ejemplo, el dinero invertido a una tasa anual de 5% requiere aproximadamente $70/100(0.05) = 14$ años para duplicarse.

a) Muestre que el verdadero tiempo de duplicación es $\ln 2 / \ln(1 + r)$.

b) Utilice la serie de Maclaurin para $\ln(1 + r)$ con el fin de deducir la regla del 70.

c) Use los primeros tres términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + r)$ con el fin de aproximar esa tasa de interés para la cual la regla del 70 produce el verdadero tiempo de duplicación.

Demostraciones de teoremas seleccionados

■ Sección 2.2

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$|c - c| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $|c - c| = 0$, lo anterior equivale a

$$\varepsilon > 0 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

La última afirmación siempre es verdadera para cualquier elección de $\delta > 0$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ para que

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, sabemos que existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ para los cuales

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad (1)$$

$$\text{y} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2. \quad (2)$$

Ahora, si se elige δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces *tanto* (1) *como* (2) se mantienen, por lo que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

cuando $0 < |x - a| < \delta$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*ii*): Por medio de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)L_2| + |f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &= |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \\ &\leq |f(x)||g(x) - L_2| + (1 + |L_2|)|f(x) - L_1|. \end{aligned} \quad (3)$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, se sabe que existen números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tales que $|f(x) - L_1| < 1$ o

$$|f(x)| < 1 + |L_1| \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad (4)$$

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad (5)$$

$$\text{y} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_3. \quad (6)$$

En consecuencia, si se selecciona δ como el número más pequeño en el conjunto de números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces de (3), (4), (5) y (6) se tiene,

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < (1 + |L_1|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} + (1 + |L_2|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3iii): Primero demostraremos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

Considere
$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|L_2||g(x)|}. \quad (7)$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para estos valores de x , la desigualdad

$$|L_2| = |g(x) - (g(x) - L_2)| \leq |g(x)| + |g(x) - L_2| < |g(x)| + \frac{|L_2|}{2}$$

resulta en
$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Por tanto, de (7),

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \frac{2}{|L_2|^2} |g(x) - L_2|. \quad (8)$$

Ahora para $\varepsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2} \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Al elegir δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, se sigue de (8) que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Se concluye la demostración aplicando el teorema 2.2.3ii):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{L_1}{L_2}. \quad \blacksquare$$

■ Sección 2.3

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.3.3: Para demostrar el teorema primero tiene que encontrarse una $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Para tal propósito, primero consideramos que f es continua en L , en otras palabras, $\lim_{u \rightarrow L} f(u) = f(L)$. Lo anterior significa que para una $\varepsilon > 0$ dada, existen una $\delta_1 > 0$ de tal modo que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |u - L| < \delta_1.$$

Ahora si $u = g(x)$, entonces lo anterior es

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |g(x) - L| < \delta_1.$$

También de la suposición de que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, sabemos que existe una $\delta > 0$ de manera que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Ahora combinamos los últimos dos resultados. Esto es, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \delta_1$; pero cuando $|g(x) - L| < \delta_1$, entonces necesariamente $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$. ■

■ Sección 2.4

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.4.1: Se asume que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene al número a (con la posible excepción de a mismo) y donde $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $|h(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta_2$. Esto es,

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon & \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon & \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

También es necesario que exista $\delta_3 > 0$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_3.$$

Si se considera δ el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

o de manera equivalente $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo cual significa que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. ■

■ Sección 9.10

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.10.2 Sea x un número fijo en el intervalo $(a - r, a + r)$ y considere que la diferencia entre $f(x)$ y el grado n -ésimo del polinomio de Taylor de f en a se denota por medio de

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Para cualquier t en el intervalo $[a, x]$ definimos

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^{n+1}. \quad (9)$$

Manteniendo x constante se diferencia F con respecto a t utilizando las reglas de producto y potencia:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + \left[f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right] + \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 \right] + \cdots \\ &\quad + \left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n - 1)!}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \right] + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n, \end{aligned}$$

para toda t en el intervalo abierto (a, x) . Puesto que la última suma es telescópica, obtenemos

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n. \quad (10)$$

Ahora es evidente de (9) que F es continua en $[a, x]$ y que

$$F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = 0.$$

Adicionalmente,

$$F(a) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0.$$

Por tanto, $F(t)$ satisface la hipótesis del teorema de Rolle (teorema 4.4.1) en $[a, x]$ y por ello existe un número c entre a y x para el cual $F'(c) = 0$. De (10) se obtiene

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Repaso de álgebra

Enteros

$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n > 0$$

Radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad n > 0 \text{ un entero}$$

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.

Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

Fórmulas de geometría

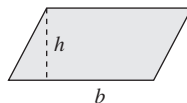
Área A , circunferencia C , volumen V , área superficial S

RECTÁNGULO



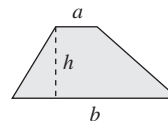
$$A = lw, \quad C = 2l + 2w$$

PARALELOGRAMO



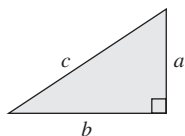
$$A = bh$$

TRAPEZOIDE



$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

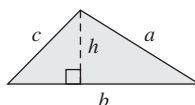
TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Teorema de Pitágoras:

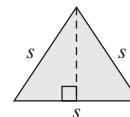
$$c^2 = a^2 + b^2$$

TRIÁNGULO



$$A = \frac{1}{2}bh, \quad C = a + b + c$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



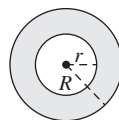
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

CÍRCULO



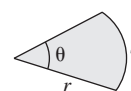
$$A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r$$

ANILLO CIRCULAR



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

SECTOR CIRCULAR



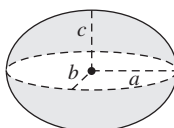
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta, \quad s = r\theta$$

ELIPSE



$$A = \pi ab$$

ELIPSOIDE



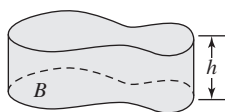
$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

ESFERA



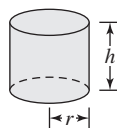
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$$

CILINDRO RECTO

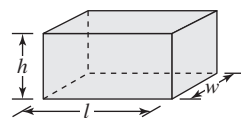


$$V = Bh, \quad B, \text{ área de la base}$$

CILINDRO CIRCULAR RECTO

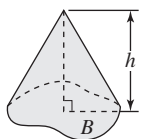


$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r h \text{ (lado lateral)}$$

PARALELEPÍPEDO
RECTANGULAR

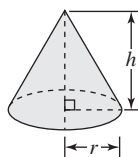
$$V = lwh, \quad S = 2(hl + lw + hw)$$

CONO



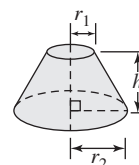
$$V = \frac{1}{3}Bh, \quad B, \text{ área de la base}$$

CONO CIRCULAR RECTO



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

FRUSTO DE UN CONO



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Gráficas y funciones

Para encontrar intersecciones

intersecciones y : Sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y

intersecciones x : Sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,

Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (h, k) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y

Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades

$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades

$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades

$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades

$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y

$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

Asíntota vertical:

$$x = a \text{ cuando } q(a) = 0,$$

Asíntota horizontal:

$$y = a_n/b_m \text{ cuando } n = m \text{ y } y = 0 \text{ cuando } n < m,$$

Asíntota oblicua:

$$y = ax + b \text{ cuando } n = m + 1.$$

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$.

Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

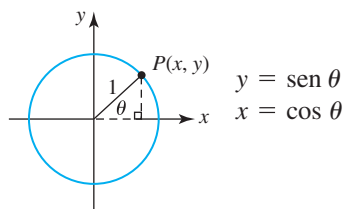
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



Otras funciones trigonométricas

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

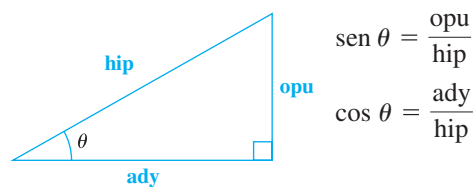
$$\sec \theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{cos } \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto

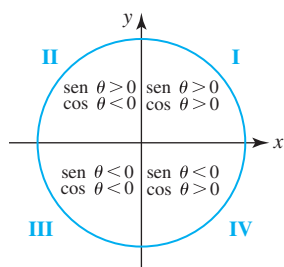


Otras funciones trigonométricas

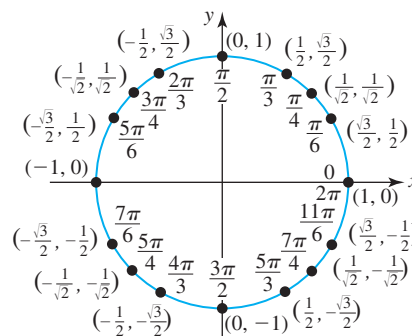
$$\tan \theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad y \quad -1 \leq \text{cos } x \leq 1$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \quad \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x$$

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Identidades de cofunción

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cos } x$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades par/impar

Par

$$\text{cos}(-x) = \text{cos } x$$

$$\sec(-x) = \sec x$$

Impar

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

$$\csc(-x) = -\csc x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

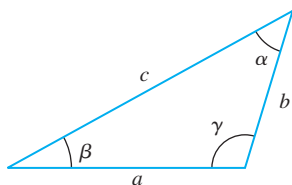
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



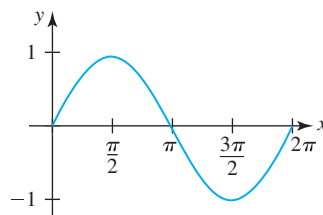
Funciones trigonométricas inversas

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \operatorname{sen} y, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

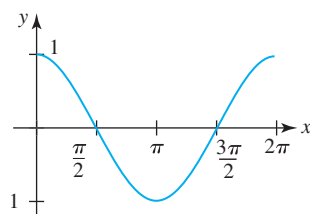
$$y = \operatorname{cos}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \operatorname{cos} y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \operatorname{tan}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \operatorname{tan} y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

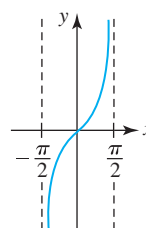
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

Funciones exponencial y logarítmica

El número e

$$e = 2.718281828459...$$

Definiciones del número e

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$$

Función exponencial

$$f(x) = b^x, \quad b > 0, b \neq 1$$

Función exponencial natural

$$f(x) = e^x$$

Función logarítmica

$$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^c = c \log_b M$$

Propiedades de logaritmos

$$\log_b b = 1, \quad \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b x} = x$$

Cambio de la base b a la base e

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

Identidades par/impar

Par

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

Impar

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

Identidades adicionales

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$$

Diferenciación

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$
2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$
3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$
18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$
19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$
22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$
30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$
31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$
36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

Fórmulas de integración

Formas básicas

1. $\int u \, dv = uv - \int v \, du$
2. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u \, du = e^u + C$
5. $\int a^u \, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$
6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$
8. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$
13. $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$
14. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
22. $\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
23. $\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} \, du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$
24. $\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} \, du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
26. $\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$
28. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$
29. $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$

30. $\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
31. $\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
32. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
33. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} \, du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
34. $\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$

$$36. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$37. \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$38. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Formas que implican $\sqrt{u^2 - a^2}$

$$39. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$40. \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$41. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$42. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$43. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$44. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$45. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

$$46. \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

Formas que implican $a + bu$

$$47. \int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln|a + bu|) + C$$

$$48. \int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3} [(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2 \ln|a + bu|] + C$$

$$49. \int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$50. \int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$51. \int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2} \ln|a + bu| + C$$

$$52. \int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$53. \int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right) + C$$

$$54. \int u \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$$

$$55. \int \frac{u du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu} + C$$

$$56. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2 + 3b^2 u^2 - 4abu) \sqrt{a + bu} + C$$

$$57. \int \frac{du}{u \sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ si } a > 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

$$58. \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u} du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u \sqrt{a + bu}}$$

$$59. \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{a + bu}}$$

$$60. \int u^2 \sqrt{a + bu} du = \frac{2u^n(a + bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2na}{b(2n + 3)} \int u^{n-1} \sqrt{a + bu} du$$

$$61. \int \frac{u^n du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a + bu}}$$

$$62. \int \frac{du}{u^n \sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n - 1)u^{n-1}} - \frac{b(2n - 3)}{2a(n - 1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a + bu}}$$

Formas trigonométricas

$$63. \int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$64. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$65. \int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$66. \int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$67. \int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$68. \int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$69. \int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$70. \int \cot^2 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$71. \int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\begin{aligned}
72. \int \csc^3 u \, du &= -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C \\
73. \int \sec^n u \, du &= -\frac{1}{n} \sec^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sec^{n-2} u \, du \\
74. \int \cos^n u \, du &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du \\
75. \int \tan^n u \, du &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du \\
76. \int \cot^n u \, du &= \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du \\
77. \int \sec^n u \, du &= \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du \\
78. \int \csc^n u \, du &= \frac{-1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du \\
79. \int \sin au \sin bu \, du &= \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C \\
80. \int \cos au \cos bu \, du &= \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C \\
81. \int \sin au \cos bu \, du &= -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C \\
82. \int u \sin u \, du &= \sin u - u \cos u + C \\
83. \int u \cos u \, du &= \cos u + u \sin u + C \\
84. \int u^n \sin u \, du &= -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du \\
85. \int u^n \cos u \, du &= u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du \\
86. \int \sin^n u \cos^m u \, du &= -\frac{\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} \\
&\quad + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-1} u \cos^m u \, du \\
&= \frac{\sin^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} \\
&\quad + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n u \cos^{m-2} u \, du \\
87. \int \frac{du}{1 - \sin au} &= \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C \\
88. \int \frac{du}{1 + \sin au} &= -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C \\
89. \int \frac{u \, du}{1 - \sin au} &= \frac{u}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) \right| + C
\end{aligned}$$

Formas trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}
90. \int \sin^{-1} u \, du &= u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C \\
91. \int \cos^{-1} u \, du &= u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C \\
92. \int \tan^{-1} u \, du &= u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C \\
93. \int u \sin^{-1} u \, du &= \frac{2u^2-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C \\
94. \int u \cos^{-1} u \, du &= \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C \\
95. \int u \tan^{-1} u \, du &= \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C \\
96. \int u^n \sin^{-1} u \, du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \sin^{-1} u \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1 \\
97. \int u^n \cos^{-1} u \, du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \cos^{-1} u \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1 \\
98. \int u^n \tan^{-1} u \, du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \tan^{-1} u \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right], \quad n \neq -1
\end{aligned}$$

Formas exponenciales y logarítmicas

$$\begin{aligned}
99. \int u e^{au} \, du &= \frac{1}{a^2} (au-1) e^{au} + C \\
100. \int u^n e^{au} \, du &= \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du \\
101. \int e^{au} \sin bu \, du &= \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C \\
102. \int e^{au} \cos bu \, du &= \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C \\
103. \int \ln u \, du &= u \ln u - u + C \\
104. \int \frac{1}{u \ln u} \, du &= \ln |\ln u| + C \\
105. \int u^n \ln u \, du &= \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C \\
106. \int u^m \ln^n u \, du &= \frac{u^{m+1} \ln^n u}{m+1} \\
&\quad - \frac{n}{m+1} \int u^m \ln^{n-1} u \, du, \quad m \neq -1
\end{aligned}$$

$$107. \int \ln(u^2 + a^2) du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad 121. \int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2}$$

$$108. \int \ln|u^2 - a^2| du = u \ln|u^2 - a^2| - 2u + a \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \quad + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$109. \int \frac{du}{a + be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a} \ln|a + be^u| + C$$

Formas hiperbólicas

$$110. \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$111. \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$112. \int \tanh u du = \ln(\cosh u) + C$$

$$113. \int \coth u du = \ln|\sinh u| + C$$

$$114. \int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$$

$$115. \int \operatorname{csch} u du = \ln|\tanh \frac{1}{2} u| + C$$

$$116. \int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$$

$$117. \int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$$

$$118. \int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$119. \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$$

Formas que implican $\sqrt{2au - u^2}$

$$120. \int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$122. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$123. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$124. \int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$125. \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$126. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$127. \int \frac{du}{u \sqrt{2ua - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

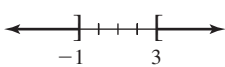
Algunas integrales definidas

$$128. \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$129. \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Respuestas de la autoevaluación

Autoevaluación, página xiii

1. falso
2. verdadero
3. falso
4. verdadero
5. 12
6. -243
7. $\frac{3x^3 + 8x}{\sqrt{x^2 + 4}}$
8. $2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$
9. a) 0, 7
c) 1
- b) $-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$
d) 1
10. a) $(5x + 1)(2x - 3)$
c) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
- b) $x^2(x + 3)(x - 5)$
d) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
11. falso
12. falso
13. verdadero
14. 6; -6
15. $-a + 5$
16. a), b), d), e), g), h), i), l)
17. i) d); ii) c); iii) a); iv) b)
18. a) $-2 < x < 2$; b) $|x| < 2$
19. 
20. $(-\infty, -2) \cup (\frac{8}{3}, \infty)$
21. $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$
22. $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$
23. cuarto
24. (5, -7)
25. -12; 9
26. a) (1, -5) b) (-1, 5) c) (-1, -5)
27. (-2, 0), (0, -4), (0, 4)
28. segundo y cuarto
29. $x = 6$ o $x = -4$
30. $x^2 + y^2 = 25$
31. $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$
32. c)
33. falso
34. -27
35. 8
36. $\frac{2}{3}; (-9, 0); (0, 6)$
37. $y = -5x + 3$
38. $y = 2x - 14$
39. $y = -\frac{1}{3}x + 3$
40. $y = -\frac{5}{8}x$
41. $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$
42. i) g); ii) e); iii) h); iv) a); v) b); vi) f);
vii) d); viii) c)
43. falso
44. falso
45. $4\pi/3$
46. 15
47. 0.23
48. $\cos t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
49. $\sin \theta = \frac{3}{5}$; $\cos \theta = \frac{4}{5}$; $\tan \theta = \frac{3}{4}$; $\cot \theta = \frac{4}{3}$; $\sec \theta = \frac{5}{4}$;
 $\csc \theta = \frac{5}{3}$
50. $b = 10 \tan \theta$, $c = 10 \sec \theta$
51. $k = 10 \ln 5$
52. $4 = 64^{1/3}$
53. $\log_b 125$
54. aproximadamente 2.3347
55. 1 000
56. verdadero

Respuestas de los problemas impares seleccionados

Ejercicios 1.1, página 8

1. 24; 2; 8; 35;
5. $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}$
7. $-2x^2 + 3x$; $-8a^2 + 6a$; $-2a^4 + 3a^2$; $-50x^2 - 15x$;
 $-8a^2 - 2a + 1$; $-2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$
9. -2, 2
13. $(-\infty, 1)$
17. $\{x|x \neq 5\}$
21. $[-5, 5]$
25. $(-2, 3]$
29. función
31. dominio: $[-4, 4]$; rango: $[0, 5]$
33. dominio: $[1, 9]$; rango: $[1, 6]$
35. $(8, 0)$, $(0, -4)$
39. $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 0)$
43. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$
45. 0; -3.4; 0.3; 2; 3.8; 2.9; $(0, 2)$
47. 3.6; 2; 3.3; 4.1; 2; -4.1; $(-3.2, 0)$, $(2.3, 0)$, $(3.8, 0)$
49. $f_1(x) = \sqrt{x+5}$, $f_2(x) = -\sqrt{x+5}$; $[-5, \infty)$
51. a) 2; 6; 120; 5 040 c) 5; 42
d) $(n+1)(n+2)(n+3)$

Ejercicios 1.2, página 18

1. $-2x + 13$; $6x - 3$; $-8x^2 - 4x + 40$; $\frac{2x+5}{-4x+8}$, $x \neq 2$
3. $\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$; $\frac{x^2-x-1}{x(x+1)}$; $\frac{1}{x+1}$; $\frac{x^2}{x+1}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$
5. $2x^2 + 5x - 7$; $-x + 1$; $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$;
 $\frac{x+3}{x+4}$, $x \neq 1$, $x \neq -4$
7. el intervalo $[1, 2]$
11. $3x + 16$; $3x + 4$
15. $\frac{3x+3}{x}$; $\frac{3}{3+x}$
19. $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
9. el intervalo $[1, 2]$
13. $x^6 + 2x^5 + x^4$; $x^6 + x^4$
17. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
21. $128x^9$; $\frac{1}{4x^9}$

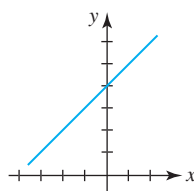
23. $36x^2 - 36x + 15$

27. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = x^2$

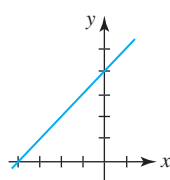
31. $(-8, 1)$, $(-3, -4)$

35. $(2, 1)$, $(-3, -4)$

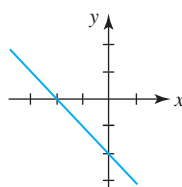
37. a)



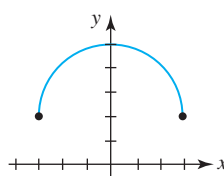
c)



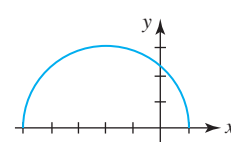
e)



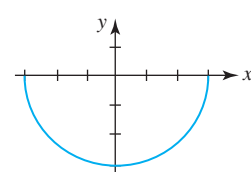
39. a)



c)



e)

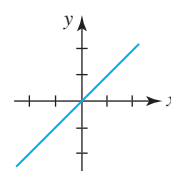


25. $-2x + 9$

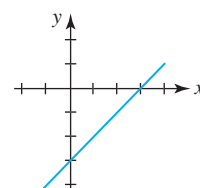
29. $(-2, 3)$, $(3, -2)$

33. $(-6, 2)$, $(-1, -3)$

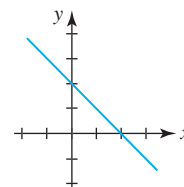
b)



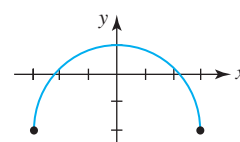
d)



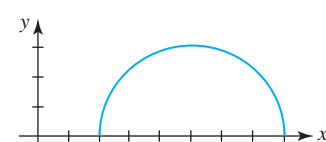
f)



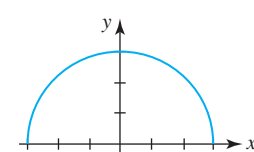
b)



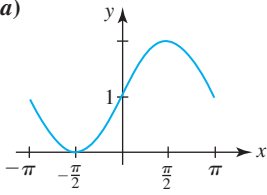
d)



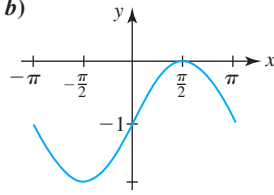
f)



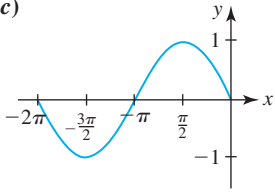
41. a)



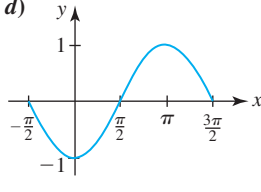
b)



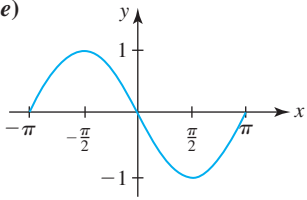
c)



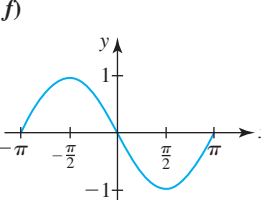
d)



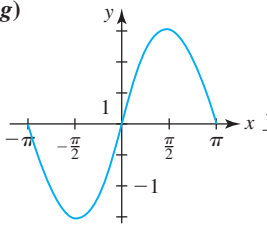
e)



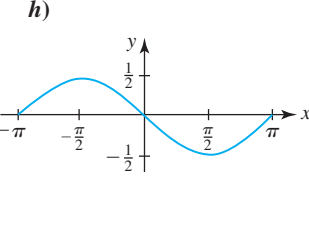
f)



g)



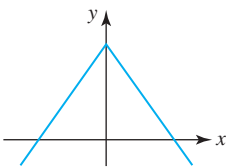
h)



43. $y = (x - 1)^3 + 5$

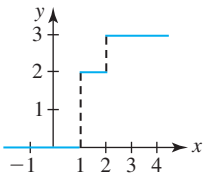
45. $y = -(x + 7)^4$

47.



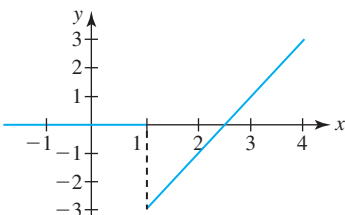
49. 10, 8, -1, 2, 0

51.



53. $y = 2 - 3U(x - 2) + U(x - 3)$

55.



Ejercicios 1.3, página 28

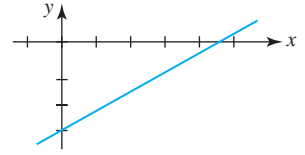
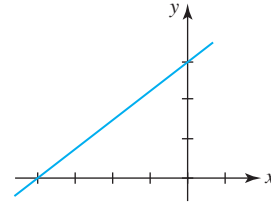
1. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

3. $y = 2$

5. $y = -x + 3$

7. $\frac{3}{4}; (-4, 0), (0, 3);$

9. $\frac{2}{3}; (\frac{9}{2}, 0), (0, -3);$



11. $y = -2x + 7$

13. $y = -3x - 2$

15. $y = -4x + 11$

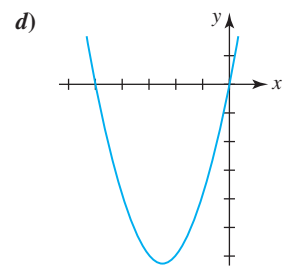
17. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

19. $y = x + 3$

21. a) $(0, 0), (-5, 0)$

b) $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

c) $(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}); x = -\frac{5}{2}$



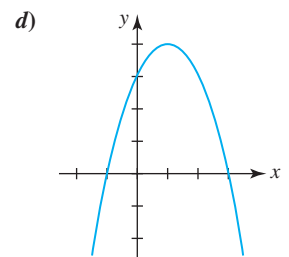
e) $[-\frac{25}{4}, \infty)$

f) $[-\frac{5}{2}, \infty); (-\infty, -\frac{5}{2}]$

23. a) $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$

b) $y = -(x - 1)^2 + 4$

c) $(1, 4); x = 1$



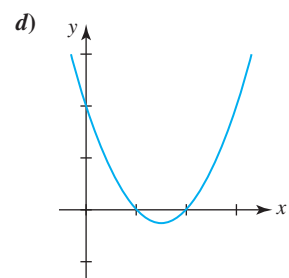
e) $(-\infty, 4]$

f) $(-\infty, 1]; [1, \infty)$

25. a) $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$

b) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$

c) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}); x = \frac{3}{2}$



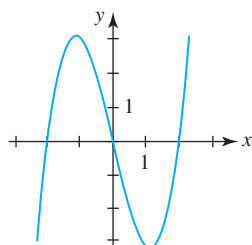
e) $[-\frac{1}{4}, \infty)$

f) $[\frac{3}{2}, \infty); (-\infty, \frac{3}{2}]$

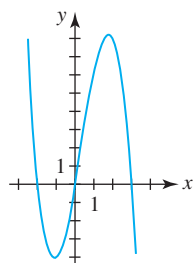
RES-4 Respuestas de los problemas impares seleccionados

27. la gráfica se desplazó de manera horizontal 10 unidades a la derecha
29. la gráfica se comprime de manera vertical, luego hay una reflexión sobre el eje x , después un desplazamiento horizontal de 4 unidades hacia la izquierda y finalmente un desplazamiento vertical de 9 unidades hacia arriba
31. la gráfica se desplazó de manera horizontal 6 unidades a la izquierda, después hay un desplazamiento vertical de 4 unidades hacia abajo

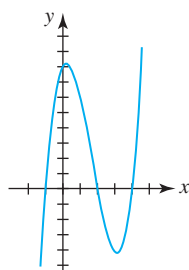
33.



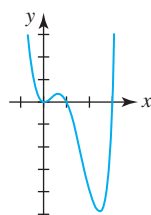
35.



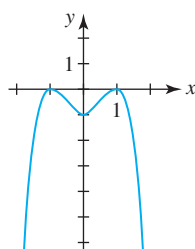
37.



39.



41.

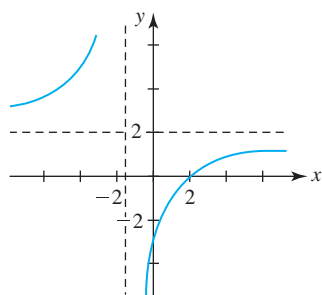


43. f)

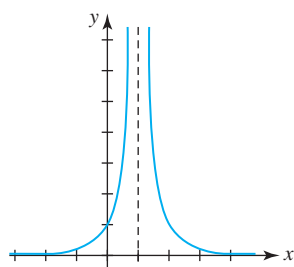
45. e)

47. b)

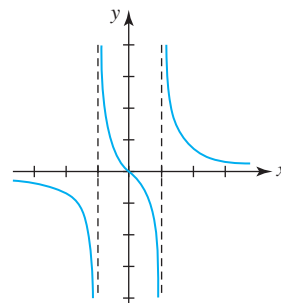
49. asíntotas: $x = -\frac{3}{2}$, $y = 2$; intersecciones: $(\frac{9}{4}, 0)$, $(0, -3)$;



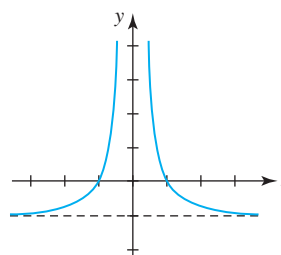
51. asíntotas: $x = 1$, $y = 0$; intersecciones: $(0, 1)$;



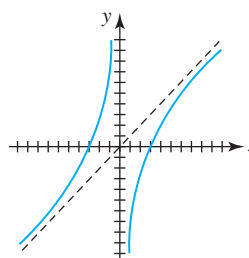
53. asíntotas: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; intersecciones: $(0, 0)$;



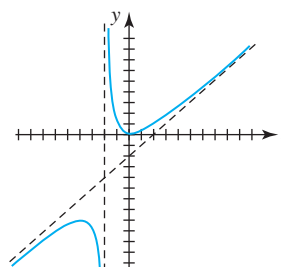
55. asíntotas: $x = 0$, $y = -1$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(1, 0)$;



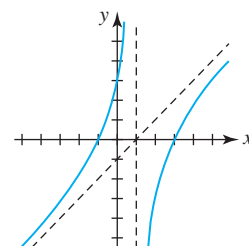
57. asíntotas: $x = 0$, $y = x$; intersecciones: $(-3, 0)$, $(3, 0)$;



59. asíntotas: $x = -2$, $y = x - 2$; intersecciones: $(0, 0)$;



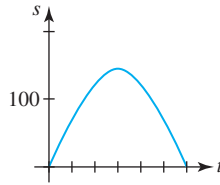
61. asíntotas: $x = 1$, $y = x - 1$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$;



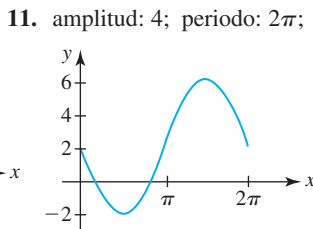
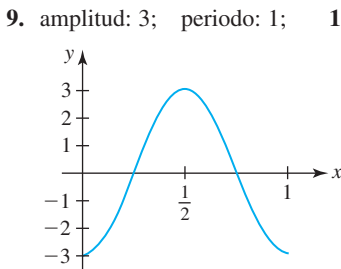
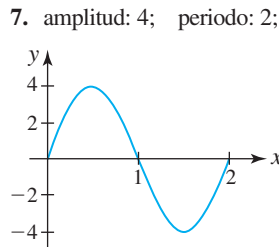
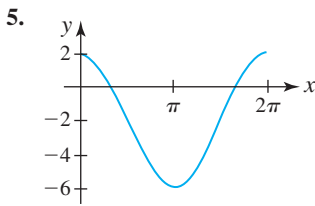
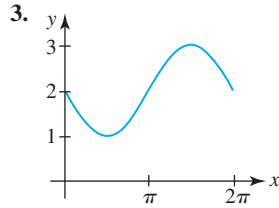
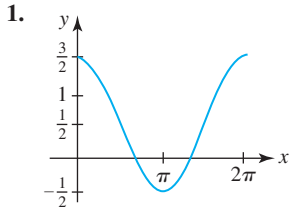
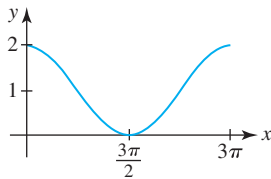
63. -1 está dentro del rango de f , pero 2 no está en el rango de f

65. $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

67. 1 680; 35.3 años aproximadamente

69. $t = 0$ y $t = 6$;


Ejercicios 1.4, página 35

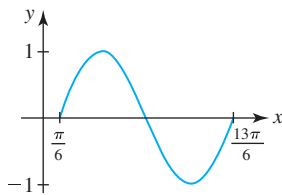
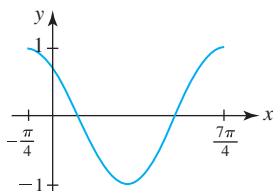
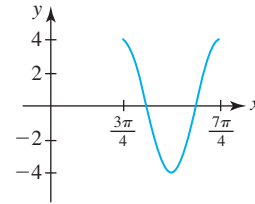
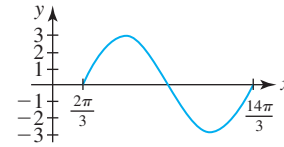

 13. amplitud: 1; periodo: 3π ;

 15. $y = -3 \sin x$

 17. $y = 1 - 3 \cos x$

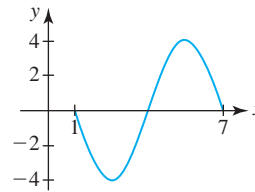
 19. $y = 3 \sin 2x$

 21. $y = \frac{1}{2} \cos \pi x$

 23. $y = -\sin \pi x$

 25. amplitud: 1; periodo: 2π ; corrimiento de fase: $\pi/6$;

 27. amplitud: 1; periodo: 2π ; corrimiento de fase: $\pi/4$;

 29. amplitud: 4; periodo: π ; corrimiento de fase: $3\pi/4$;

 31. amplitud: 3; periodo: 4π ; corrimiento de fase: $2\pi/3$;


33. amplitud: 4; periodo: 6; corrimiento de fase: 1;

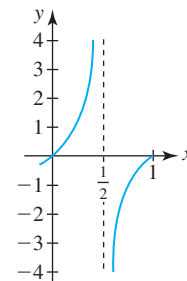
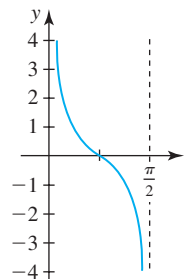

 35. $y = 5 \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

 37. $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un entero

 39. $(n, 0)$, donde n es un entero

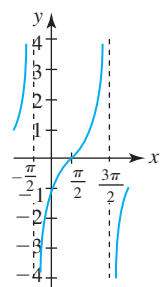
 41. $((2n + 1)\pi, 0)$, donde n es un entero

 43. $(\pi/4 + n\pi, 0)$, donde n es un entero

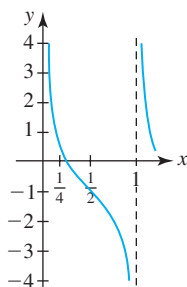
 45. periodo: 1; intersecciones x : $(n, 0)$, donde n es un entero; asintotas: $x = \frac{1}{2}(2n + 1)$, donde n es un entero;

 47. periodo: $\frac{\pi}{2}$; intersecciones x : $(\frac{1}{4}(2n + 1)\pi, 0)$, donde n es un entero; asintotas: $x = n\pi/2$, donde n es un entero;


RES-6 Respuestas de los problemas impares seleccionados

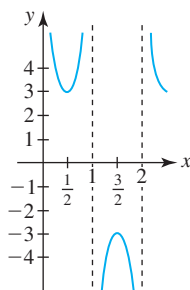
49. periodo: 2π ; intersecciones x : $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, donde n es un entero;



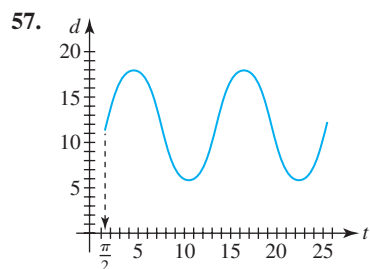
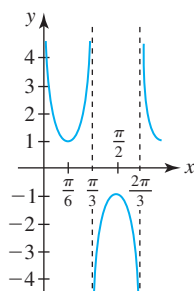
51. periodo: 1; intersecciones x : $(\frac{1}{4} + n, 0)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = n$, donde n es un entero;



53. periodo: 2; asíntotas: $x = n$, donde n es un entero;



55. periodo: $2\pi/3$; asíntotas: $x = n\pi/3$, donde n es un entero;

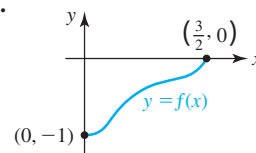
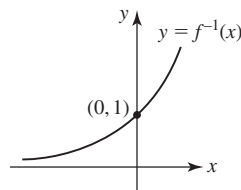


59. a) 978.0309 cm/s²
c) 980.61796 cm/s²

- b) 983.21642 cm/s²

Ejercicios 1.5, página 46

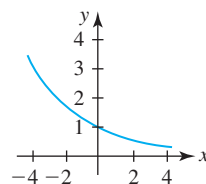
1. porque $f(0) = 1$ y $f(5) = 1$
5. uno a uno
9. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-7}{3}}$
15. dominio: $[0, \infty)$; rango: $[-2, \infty)$
17. dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
19. $(20, 2)$
- 23.
3. no es uno a uno
7. uno a uno
11. $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{1-x}$
- 25.



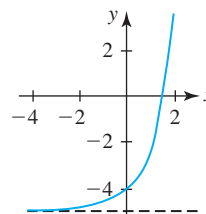
27. $f(x) = (5 - 2x)^2, x \geq \frac{5}{2}; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{x})$
29. $f(x) = x^2 + 2x + 4, x \geq -1; f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$
33. $3\pi/4$
37. $3\pi/4$
41. $\frac{4}{5}$
45. $4\sqrt{2}/9$
49. $\sqrt{1-x^2}$
57. $\cos t = \sqrt{5}/5, \tan t = -2, \cot t = -\frac{1}{2}, \sec t = \sqrt{5},$
 $\csc t = -\sqrt{5}/2$
63. a) $\pi/4$
35. $\pi/4$
39. $-\pi/3$
43. 2
47. $\sqrt{3}(2 + \sqrt{10})/9$
51. $\sqrt{1+x^2}$
- b) 0.942 radián $\approx 53.97^\circ$

Ejercicios 1.6, página 53

1. $(0, 1); y = 0;$

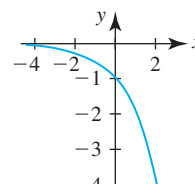


5. $(0, -4); y = -5;$



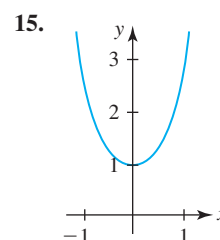
9. $f(x) = e^{-2x}$
13. $x < 2$

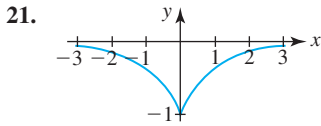
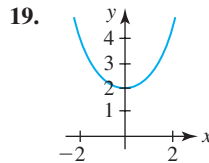
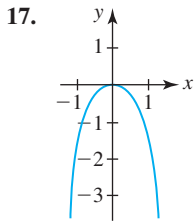
3. $(0, -1); y = 0;$



7. $f(x) = 6^x$

11. $x > 4$





23. $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$

25. $4 = \log_{10} 10\,000$

27. $2^7 = 128$

29. $(\sqrt{3})^8 = 81$

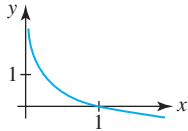
31. $f(x) = \log_7 x$

33. e

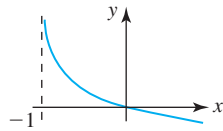
35. 36

37. $\frac{1}{7}$

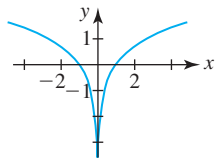
39. $(0, \infty); (1, 0); x = 0;$



41. $(-1, \infty); (0, 0); x = -1;$ 43. el intervalo $(-3, 3)$



45. $(-1, 0), (1, 0); x = 0;$ 47. $\ln(x^2 - 2)$



49. 0

51. $10 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3} \ln(8x^3 + 2)$

53. $5 \ln(x^3 - 3) + 8 \ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln x - 9 \ln(7x + 5)$

55. $\log_6 51 = \frac{\ln 51}{\ln 6} \approx 2.1944$ 57. $-5 + \frac{\ln 9}{\ln 2} \approx 1.8301$

59. $\frac{1 + \ln 2}{-1 + \ln 5} \approx 2.7782$

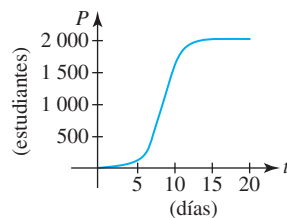
61. 3

63. a) $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$ b) 5.66 P_0 c) 8.64 h

65. a) 82 b) 8.53 días

c) 2 000

d)



Ejercicios 1.7, página 59

1. $S(x) = x + \frac{50}{x}; (0, \infty)$

3. $S(x) = 3x^2 - 4x + 2; [0, 1]$

5. $A(x) = 100x - x^2; [0, 100]$

7. $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2; [0, 4]$

9. $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}; (-\infty, \infty)$

11. $P(A) = 4\sqrt{A}; (0, \infty)$

13. $d(C) = C/\pi; (0, \infty)$

15. $A(h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2; (0, \infty)$

17. $A(x) = \frac{1}{4\pi}x^2; (0, \infty)$

19. $C(x) = 8x + \frac{3\,200}{x}; (0, \infty)$

21. $S(w) = 3w^2 + \frac{1\,200}{w}; (0, \infty)$

23. $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}; (0, \infty)$

25. $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \leq h < 5 \\ 1\,200h - 3\,000, & 5 \leq h \leq 8 \end{cases}; [0, 8]$

27. $h(\theta) = 300 \tan \theta; (0, \pi/2)$

29. $L(\theta) = 3 \csc \theta + 4 \sec \theta; (0, \pi/2)$

31. $\theta(x) = \tan^{-1}(1/x) - \tan^{-1}(1/2x); (0, \infty)$

Revisión del capítulo 1, página 61

A. 1. falso

3. verdadero

5. falso

7. verdadero

9. falso

11. verdadero

13. verdadero

15. verdadero

17. verdadero

19. verdadero

B. 1. $[-2, 0) \cup (0, \infty)$

3. $(-8, 6)$

5. $(1, 0); (0, 0), (5, 0)$

7. $(0, -\frac{4}{5})$

9. 6

11. 0

13. $(3, 5)$

15. $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

17. $\frac{1}{9}$

19. $y = \ln x$

C. 1. a) 3 b) 0 c) -2 d) 0 e) 2.5
f) 2 g) 1 h) 0 i) 3 j) 4

3. 1 y 8 están en el mismo rango; 5 no está en el rango

5. $-3x^2 + 4x - 3xh - h^2 + 2h - 1$

7. f)

9. d)

11. h)

13. c)

15. b)

17. $\frac{3^{1-h} - 3}{h}$

19. a) ab b) b/a c) $1/b$

21. $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6} \ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$

23. $f(x) = 5 + (\frac{1}{2})^x$

25. b)

27. d)

RES-8 Respuestas de los problemas impares seleccionados

29. c)

31. a) $V = 6l^3$ b) $V = \frac{2}{9}w^3$ c) $V = \frac{3}{4}h^3$

33. $V(\theta) = 360 + 75 \cot \theta$

35. $A(\phi) = 100 \cos \phi + 50 \sin 2\phi$ 37. $V(x) = 2\sqrt{3}(1 - x^2)$

Ejercicios 2.1, página 72

1. 8

3. no existe

5. 2

7. no existe

9. 0

11. 3

13. 0

15. a) 1 b) -1 c) 2 d) no existe

17. a) 2 b) -1 c) -1 d) -1

19. correcto

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$

23. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$

25. correcto

27. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$

29. a) -1 b) 0 c) -3 d) -2 e) 0 f) 1

35. no existe

37. $-\frac{1}{4}$

39. -2

41. -3

43. 0

45. $\frac{1}{3}$

47. $\frac{1}{4}$

49. 5

Ejercicios 2.2, página 80

1. 15

3. -12

5. 4

7. 4

9. $-\frac{8}{5}$

11. 14

13. $\frac{28}{9}$

15. -1

17. $\sqrt{7}$

19. no existe

21. -10

23. 3

25. 60

27. 14

29. $\frac{1}{5}$

31. $-\frac{1}{8}$

33. 3

35. no existe

37. 2

39. $\frac{128}{3}$

41. -2

43. $a^2 - 2ab + b^2$

45. 16

47. $-1/x^2$

49. $\frac{1}{2}$

51. $\frac{1}{5}$

53. 32

55. $\frac{1}{2}$

57. no existe

59. $8a$

Ejercicios 2.3, página 86

1. ninguno

3. 3 y 6

5. $n\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7. 2

9. ninguno

13. a) continua

11. e^{-2}

b) continua

15. a) continua

b) continua

17. a) no continua

b) no continua

19. a) continua

b) no continua

21. a) no continua

b) no continua

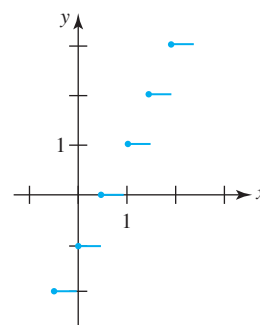
23. a) no continua

b) continua

25. $m = 4$

27. $m = 1; n = 3$

29. discontinua en $n/2$, donde n es un entero;



31. defina $f(9) = 6$

33. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

35. 0

37. 1

39. 1

41. $-\pi/6$

43. $(-3, \infty)$

45. $c = 4$

47. $c = 0, c = \pm\sqrt{2}$

55. -1.22, -0.64, 1.34

57. 2.21

59. 0.78

Ejercicios 2.4, página 93

1. $\frac{3}{2}$

3. 0

5. 1

7. 4

9. 0

11. 36

13. $\frac{1}{2}$

15. no existe

17. 3

19. $\frac{3}{7}$

21. 0

23. -4

25. 4

27. $\frac{1}{2}$

29. 5

31. $\frac{1}{6}$

33. 8

35. $\sqrt{2}$

37. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

43. 3

Ejercicios 2.5, página 102

1. $-\infty$

3. ∞

5. ∞

7. ∞

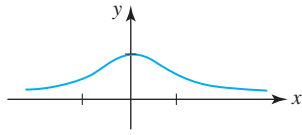
9. $\frac{1}{4}$

11. 5

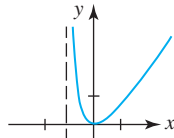
13. $-\frac{1}{4}$

15. $\frac{5}{2}$

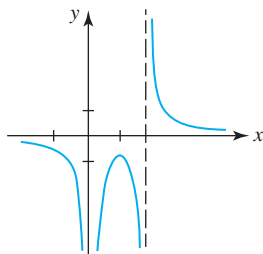
17. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 21. 1
 25. -4; 4
 29. -1; 1
 33. AV: ninguna; AH: $y = 0$;
 19. 0
 23. $-\pi/6$
 27. $-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
 31. -1; 1



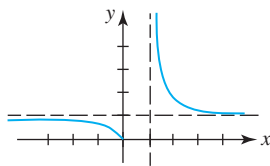
35. AV: $x = -1$; AH: ninguna;



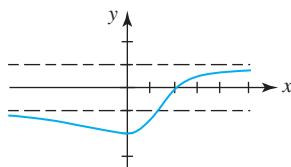
37. AV: $x = 0, x = 2$; AH: $y = 0$;



39. AV: $x = 1$; AH: $y = 1$;



41. AV: ninguna; AH: $y = -1, y = 1$;



43. a) 2 b) $-\infty$ c) 0 d) 2
 45. a) $-\infty$ b) -1 c) ∞ d) 0
 51. 3

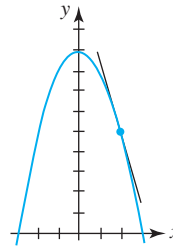
Ejercicios 2.6, página 110

1. elija $\delta = \varepsilon$
 5. elija $\delta = \varepsilon$
 9. elija $\delta = 2\varepsilon$
 13. elija $\delta = \varepsilon/8$
 3. elija $\delta = \varepsilon$
 7. elija $\delta = \varepsilon/3$
 11. elija $\delta = \varepsilon$
 15. elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

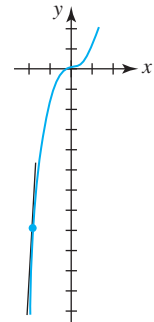
17. elija $\delta = \varepsilon^2/5$
 21. elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$
 25. elija $\delta = \sqrt{a\varepsilon}$
 33. elija $N = -30/\varepsilon$
 19. elija $\delta = \varepsilon/2$
 23. elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$
 31. elija $N = 7/(4\varepsilon)$

Ejercicios 2.7, página 116

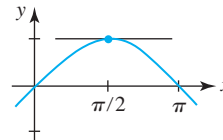
1. -4.5;



3. 7;



5. $\frac{3\sqrt{3}-6}{\pi}$;



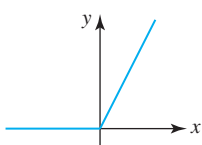
7. $m_{\tan} = 6$; $y = 6x - 15$

9. $m_{\tan} = -1$; $y = -x - 1$
 11. $m_{\tan} = -23$; $y = -23x + 32$
 13. $m_{\tan} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x - 1$
 15. $m_{\tan} = 2$; $y = 2x + 1$
 17. $m_{\tan} = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}x + 1$
 19. $m_{\tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}$
 21. no una recta tangente 23. $y = x - 2$; $(0, -2)$
 25. $m_{\tan} = -2x + 6$; $(3, 10)$
 27. $m_{\tan} = 3x^2 - 3$; $(-1, 2), (1, -2)$
 29. 58 mi/h 31. 3.8 h
 33. -14
 35. a) -4.9 m/s b) 5 s c) -49 m/s
 37. a) 448 pies; 960 pies; 1 008 pies; 960 pies
 b) 144 pies/s d) 16 s e) $-32t + 256$
 f) -256 pies/s g) 1 024 pies

Revisión del capítulo 2, página 118

- A. 1. verdadero 3. falso
 5. falso 7. verdadero
 9. falso 11. falso
 13. verdadero 15. verdadero
 17. falso 19. verdadero
 21. falso
 B. 1. 4 3. $-\frac{1}{5}$
 5. 0 7. ∞

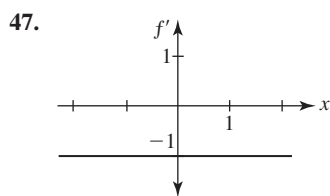
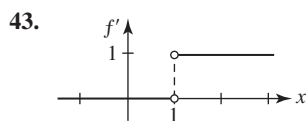
RES-10 Respuestas de los problemas impares seleccionados

9. 1
13. $-\infty$
17. 10
21. 9
- C. 5. a), e), f), h)
9. b), c), d), e), f)
11.  ; continua en todas partes

13. $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$
15. $(-\infty, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, \infty)$
17. $\frac{1}{6}$
21. $y = 8x - 6$
11. 3^-
15. -2
19. continua
7. c), h)
19. $y = 4x + 24$
23. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Ejercicios 3.1, página 128

1. 0
5. $6x$
9. $2x + 2$
13. $-3x^2 + 30x - 1$
17. $5/(x + 4)^2$
21. $y = -x - 4$
25. $(-4, -6)$
29. $x; (3, \frac{7}{2})$
33. $f'_+(2) = 2$ pero $f'_-(2) = -1$
37. $3a^2 - 8a$
3. -3
7. $-2x + 4$
11. $3x^2 + 1$
15. $-2/(x + 1)^2$
19. $-1/(2x^{3/2})$
23. $y = 2x - 2$
27. $(1, -2), (-1, 2)$
31. $-3x^2; (2, -4), (-2, 12)$
35. $20a$
39. $4/(3 - a)^2$
41. $y = \frac{1}{2}x + 3; f(-3) = \frac{3}{2}; f'(-3) = \frac{1}{2}$



51. b)

Ejercicios 3.2, página 136

1. 0
5. $14x - 4$
9. $x^4 - 12x^3 + 18x$
13. $6x^5 + 40x^3 + 50x$
17. $192u^2$
21. $y = 6x + 3$
25. $(4, -11)$
3. $9x^8$
7. $2x^{-1/2} + 4x^{-5/3}$
11. $20x^4 - 20x^3 - 18x^2$
15. $16 + 4/\sqrt{x}$
19. $-1/r^2 - 2/r^3 - 3/r^4 - 4/r^5$
23. $y = \frac{1}{4}x + 5$
27. $(3, -25), (-1, 7)$

29. $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$
33. -2
37. $60/x^4$
41. $(-4, \infty), (-\infty, -4)$
45. $(1, \infty), (-\infty, 1)$
51. $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{16})$
55. $S = 4\pi r^2$
31. $x = 4$
35. 32
39. $1440x^2 + 120x$
43. $(-4, 48)$
49. $(2, 8)$
53. $y = -7x$
57. $-15N$

Ejercicios 3.3, página 142

1. $5x^4 - 9x^2 + 4x - 28$
5. $-20x/(x^2 + 1)^2$
9. $72x - 12$
13. $(x^2 + 2x)/(2x^2 + x + 1)^2$
17. $(6x^2 + 8x - 3)/(3x + 2)^2$
19. $(2x^3 + 8x^2 - 6x - 8)/(x + 3)^2$
21. $y = -4x + 1$
25. $(0, 24), (\sqrt{5}, -1), (-\sqrt{5}, -1)$
27. $(0, 0), (-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})$
31. $(-4, 0), (-6, 2)$
35. -28
39. -30
43. $(x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x))/x^3$
45. $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (0, 1); f'(x) < 0$ en $(1, 2) \cup (2, \infty)$
47. $f'(x) > 0$ en $(-\infty, \frac{5}{8}); f'(x) < 0$ en $(\frac{5}{8}, \infty)$
49. $-16km_1m_2$
3. $8x^{-7/3} - 4x^{-5/6} + 12^{1/2}$
7. $-17/(5 - 2x)^2$
11. $(2x^5 + x^2 - 40x - 12)/x^4$
15. $18x^2 + 22x + 6$
19. $(2x^3 + 8x^2 - 6x - 8)/(x + 3)^2$
23. $y = 7x - 1$
29. $(3, \frac{3}{2}), (-5, \frac{1}{2})$
33. $k = -21$
37. $\frac{11}{3}$
41. $\frac{13}{2}$
51. $-\frac{RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3}$

Ejercicios 3.4, página 147

1. $2x + \sin x$
5. $x \cos x + \sin x$
9. $x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x + \sec^2 x$
11. 0
15. $\frac{-x \csc^2 x - \csc^2 x - \cot x}{(x + 1)^2}$
19. $\frac{1}{1 + \cos x}$
21. $x^4 \sec x \sec^2 x + x^4 \sec x + 4x^3 \sec x \tan x$
23. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$
27. $\pi/6, 5\pi/6$
31. $y = 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8\pi}{3}$
35. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$
39. $\frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x}{x^3}$
41. $\csc x \cot^2 x + \csc^3 x$
45. $-\frac{160}{3}$; cuando el ángulo de elevación aumenta, la longitud s de la sombra decrece
3. $7 \cos x - \sec^2 x$
7. $(x^3 - 2) \sec^2 x + 3x^2 \tan x$
13. $\cos x$
17. $\frac{-2x^2 \sec^2 x + 4x \tan x + 2x}{(1 + 2 \tan x)^2}$
29. $\pi/2$
33. $y = x - 2\pi$
37. $2 \cos x - x \sin x$

53. no diferenciable en $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
55. b) $-\frac{14(0.2 \cos \theta - \sin \theta)}{(0.2 \sin \theta + \cos \theta)^2}$ c) 0.1974 radián
 d) 13.7281 aproximadamente
 e) el esfuerzo mínimo requerido para jalar el trineo es alrededor de 13.73 lb cuando θ es aproximadamente 0.1974 radián u 11.31° .

Ejercicios 3.5, página 155

1. $-150(-3x)^{29}$ 3. $200(2x^2 + x)^{199}(4x + 1)$
 5. $-4(x^3 - 2x^2 + 7)^{-5}(3x^2 - 2x)$
 7. $-2(3x - 1)^3(-2x + 9)^4(27x - 59)$
 9. $\frac{\cos \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ 11. $\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + 1)^{3/2}}$
 13. $10(1 + 6x(x^2 - 4)^2)(x + (x^2 - 4)^3)^9$
 15. $\frac{5x^{14} + 9x^{13} + 13x^{12}}{(x^2 + x + 1)^5}$ 17. $\pi \cos(\pi x + 1)$
 19. $15 \sin^2 5x \cos 5x$ 21. $-3x^5 \sin x^3 + 3x^2 \cos x^3$
 23. $10(2 + x \sin 3x)^9(3x \cos 3x + \sin 3x)$
 25. $-x^{-2} \sec^2(1/x)$
 27. $-3 \sin 2x \sin 3x + 2 \cos 2x \cos 3x$
 29. $5(\sec 4x + \tan 2x)^4(4 \sec 4x \tan 4x + 2 \sec^2 2x)$
 31. $2 \cos 2x \cos(\sin 2x)$
 33. $-(2x + 5)^{-1/2} \cos \sqrt{2x + 5} \sin(\sin \sqrt{2x + 5})$
 35. $24x \sin^2(4x^2 - 1) \cos(4x^2 - 1)$
 37. $360x^2(1 + x^3)^3(1 + (1 + x^3)^4(1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^5$
 39. -54 41. -7
 43. $y = -8x - 3$ 45. $y = 6x - 1 - \frac{3\pi}{2}$
 47. $y = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{12}{\pi(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})} \left(x - \frac{1}{2}\right)$
 49. $-\pi^3 \cos \pi x$ 51. $-125x \cos 5x - 75 \sin 5x$
 53. $(\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/16), (-\sqrt{3}/3, -3\sqrt{3}/16);$ no
 55. $\frac{1}{18}$
 57. Si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\theta = \pi/4$ o $\theta = 3\pi/4$.
 59. $dr/dt = 5/(8\pi)$ pulg/min

Ejercicios 3.6, página 160

1. $4x^2y^3 \frac{dy}{dx} + 2xy^4$ 3. $-2y \sin y^2 \frac{dy}{dx}$
 5. $\frac{1}{2y - 2}$ 7. $\frac{2x - y^2}{2xy}$
 9. $\frac{2x}{3 - \sin y}$ 11. $\frac{4x - 3x^2y^2}{2x^3y - 2y}$
 13. $\frac{x^2 - 4x(x^2 + y^2)^5}{y^2 + 4y(x^2 + y^2)^5}$ 15. $\frac{2x^4y^4 + 3y^{10} - 6x^9y}{6xy^9 - 3x^{10}}$
 17. $\frac{1 - x}{y + 4}$ 19. $\frac{3}{2y(x + 2)^2}$
 21. $\frac{\cos(x + y) - y}{x - \cos(x + y)}$ 23. $\cos y \cot y$
 25. $\frac{\cos 2\theta}{r}$ 27. $-\frac{2}{5}$
 29. $-\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$ 31. $y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}$

33. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ 35. $(1, 2), (-1, -2)$
 37. $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$
 39. $(8, 4)$ 41. $\frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
 43. $\frac{-25}{y^3}$ 45. $\frac{-\sin y}{(1 - \cos y)^3}$
 47. $\frac{-2}{(y - x)^3}$ 49. $\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}, -\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$
 51. $\frac{-2x - 3}{x^4}$ 53. $y = 1 - \sqrt{x - 2}$
 55. $y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 \leq x < 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 57. $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$
 59. a) $y = -x + 3$ b) $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$
 65. b) $\frac{4(252 - x^2)}{(x^2 + 252)^2 + 16x^2}$ c) $x = 6\sqrt{7} \approx 15.87$ pies

Ejercicios 3.7, página 167

1. $f'(x) > 0$ para toda x muestra que f es creciente en $(-\infty, \infty)$.
 Se sigue del teorema 3.7.3 que f es uno a uno
 3. $f(0) = 0, f(1) = 0$ implica que f no es uno a uno
 5. $\frac{2}{3}$ 7. $(f^{-1})'(x) = -1/(x - 2)^2$
 9. $(5, 3); y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$ 11. $(8, 1); y = \frac{1}{60}x + \frac{13}{15}$
 13. $\frac{5}{\sqrt{1 - (5x - 1)^2}}$ 15. $\frac{-8}{4 + x^2}$
 17. $\frac{1}{1 + x} + \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ 19. $\frac{2(\cos^{-1} 2x + \sin^{-1} 2x)}{\sqrt{1 - 4x^2}(\cos^{-1} 2x)^2}$
 21. $\frac{-2x}{(1 + x^4)(\tan^{-1} x^2)^2}$ 23. $\frac{2 - x}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos^{-1} x$
 25. $3\left(x^2 - 9 \tan^{-1}\frac{x}{3}\right)^2 \left(2x - \frac{27}{9 + x^2}\right)$
 27. $\frac{1}{t^2 + 1}$ 29. $\frac{-4 \sin 4x}{|\sin 4x|}$
 31. $\frac{2x \sec^2(\sin^{-1} x^2)}{\sqrt{1 - x^4}}$ 33. $\frac{2x(1 + y^2)}{1 - 2y - 2y^3}$
 35. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \text{constante}$ 37. $\sqrt{3}/3$
 39. $y = \frac{2 + \pi}{4}x - \frac{1}{2}$ 41. $(5\pi/6, 4), (7\pi/6, 6)$

Ejercicios 3.8, página 171

1. $-e^{-x}$ 3. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
 5. $5^{2x}(2 \ln 5)$ 7. $x^2 e^{4x}(3 + 4x)$
 9. $\frac{-e^{-2x}(2x + 1)}{x^2}$ 11. $-\frac{5}{2}(1 + e^{-5x})^{-1/2} e^{-5x}$
 13. $-\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{(e^{x/2} + e^{-x/2})^2}$ 15. $8e^{8x}$
 17. $3e^{3x-3}$ 19. $\frac{1}{3}x^{-2/3}e^{x^{1/3}} + \frac{1}{3}e^{x^{1/3}}$

RES-12 Respuestas de los problemas impares seleccionados

21. $\sec^2 e^x - e^{-x} \tan e^x$

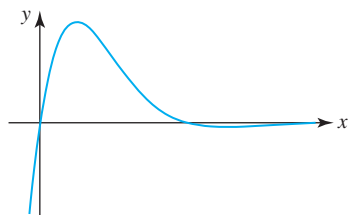
23. $\frac{e^{x\sqrt{x^2+1}}(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

25. $2xe^{x^2}e^{e^{x^2}}$

27. $y = 4x + 4$

29. $(\ln 3, 3)$

31. $x = \pi/4 + n\pi, n = 0, \pm 1, 2, \dots$



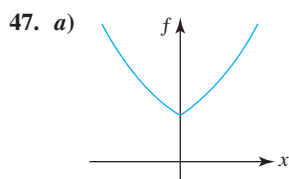
33. $4e^{x^2}(2x^3 + 3x)$

35. $4e^{2x} \cos e^{2x} - 4e^{4x} \sin e^{2x}$

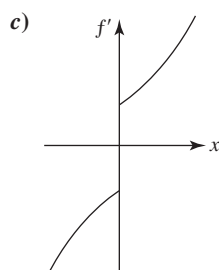
41. $\frac{e^{x+y}}{1 - e^{x+y}}$

43. $\frac{-ye^{xy} \sin e^{xy}}{1 + xe^{xy} \sin e^{xy}}$

45. $\frac{-y^2 + ye^{x/y}}{2y^3 + xe^{x/y}}$

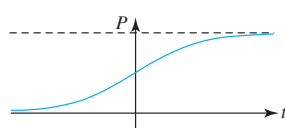


b) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$



d) no

49. b) $P = 0, P = 2$ c)



d) $t = 0$

61. $f'(0) = 0$

Ejercicios 3.9, página 177

1. $\frac{10}{x}$

3. $\frac{1}{2x}$

5. $\frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 1}$

7. $3x + 6x \ln x$

9. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$

11. $\frac{1}{x(x+1)}$

13. $\tan x$

15. $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$

17. $\frac{1 + \ln x}{x \ln x}$

19. $\frac{1}{4x\sqrt{\ln \sqrt{x}}}$

21. $\frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2 + 2}$

23. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

25. $y = x - 1$

27. 4

29. -8

31. (e, e^{-1})

33. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

35. $\sec x$

37. $\frac{2}{x^3}$

39. $\frac{2 - 2 \ln|x|}{x^2}$

43. $\frac{y}{2xy^2 - x}$

45. $\frac{y - xy}{2xy^2 + x}$

47. $\frac{2x - x^2y - y^3}{x^3 + xy^2 - 2y}$

49. $x^{\sin x} \left[\frac{\sin x}{x} + (\cos x) \ln x \right]$

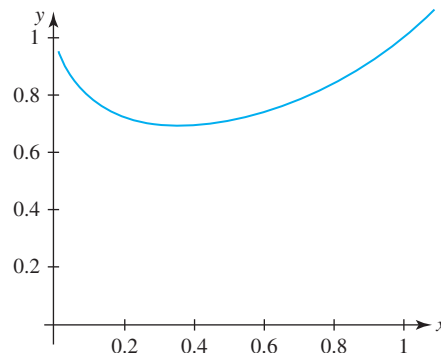
51. $x(x-1)^x \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} + \ln(x-1) \right]$

53. $\frac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3} \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{3/2}{3x+2} - \frac{4}{4x+3} \right]$

55. $\frac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9} \left[\frac{15x^2}{x^3-1} + \frac{16x^3+36x^2}{x^4+3x^3} - \frac{63}{7x+5} \right]$

57. $y = 3x - 2$

59. $(e^{-1}, e^{-e^{-1}})$



65. b) un intervalo es $(\pi, 2\pi)$

67. $4 - 4 \ln 4 \approx -1.55$

Ejercicios 3.10, página 185

1. $\cosh x = \sqrt{5}/2, \tanh x = -\sqrt{5}/5, \coth x = -\sqrt{5}, \operatorname{sech} x = 2\sqrt{5}/5, \operatorname{csch} x = -2$

3. $10 \sinh 10x$

5. $\frac{1}{2}x^{-1/2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{x}$

7. $-6(3x-1) \operatorname{sech}(3x-1) \tanh(3x-1)^2$

9. $-3 \sinh 3x \operatorname{csch}^2(\cosh 3x)$

11. $3 \sinh 2x \sinh 3x + 2 \cosh 2x \cosh 3x$

13. $2x^2 \sinh x^2 + \cosh x^2$

15. $3 \sinh^2 x \cosh x$

17. $\frac{2}{3}(x - \cosh x)^{-1/3}(1 - \sinh x)$

19. $4 \tanh 4x$

21. $\frac{e^x + 1}{(1 + \cosh x)^2}$

23. $e^{\sinh t} \cosh t$

25. $\frac{\cos t + \cos t \sinh 2t - 2 \sin t \cosh 2t}{(1 + \sinh 2t)^2}$

27. $y = 3x$

29. $(0, -2), (-2, 2 \cosh 2 - 4 \sinh 2), (2, 2 \cosh 2 - 4 \sinh 2)$

31. $-2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x$

35. $\frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

37. $\frac{-2x}{1 - (1 - x^2)^2}$

39. $\sec x$

41. $\frac{3x^3}{\sqrt{x^6 + 1}} + \sinh^{-1} x^3$

43. $-\frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} - \frac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x^2}$

45. $\frac{-1}{x \sqrt{1 - x^2} \operatorname{sech}^{-1} x}$

47. $\frac{3}{\sqrt{\cosh^{-1} 6x} \sqrt{36x^2 - 1}}$

49. (b) $v_{\text{ter}} = \sqrt{mg/k}$

c) 56 m/s

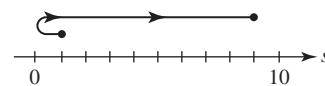
Revisión del capítulo 3, página 186

- A.** 1. falso 3. falso
 5. verdadero 7. verdadero
 9. verdadero 11. verdadero
 13. falso 15. verdadero
 17. falso 19. verdadero
- B.** 1. 0 3. $-\frac{1}{4}$
 5. $y = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$ 7. -3
 9. 23
 11. $-16F'(\sin 4x)\sin 4x + 16F''(\sin 4x)\cos^2 x$
 13. $a = 6$; $b = -9$ 15. (1, 5)
 17. $\frac{1}{x(\ln 10)}$ 19. catenaria
- C.** 1. $0.08x^{-0.9}$
 3. $10(t + \sqrt{t^2 + 1})^9(1 + t(t^2 + 1)^{-1/2})$
 5. $x^2(x^4 + 16)^{1/4}(x^3 + 8)^{-2/3} + x^3(x^4 + 16)^{-3/4}(x^3 + 8)^{1/3}$
 7. $-\frac{16x \sin 4x + 4 \sin 4x + 4 \cos 4x}{(4x + 1)^2}$
 9. $10x^3 \sin 5x \cos 5x + 3x^2 \sin^2 5x$
 11. $\frac{-3}{|x|\sqrt{x^2 - 9}}$ 13. $\frac{1}{(\cot^{-1} x)^2(1 + x^2)}$
 15. $\frac{-4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ 17. $-xe^{-x}$
 19. $7x^6 + 7^x(\ln 7) + 7e^{7x}$ 21. $\frac{1}{x} + \frac{2}{4x - 1}$
 23. $\frac{1}{\sqrt{(\sin^{-1} x)^2 + 1}\sqrt{1 - x^2}}$
 25. $e^{x \cosh^{-1} x} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + x \cosh^{-1} x + 1 \right]$
 27. $3x^2 e^{x^3} \cosh e^{x^3}$ 29. $\frac{405}{8\sqrt{1 + 3x}}$
 31. $\frac{120}{t^6}$ 33. $4e^{\sin 2x}(\cos^2 2x - \sin 2x)$
 35. $\frac{4}{x + 5} - \frac{3}{2 - x} - \frac{10}{x + 8} - \frac{2}{6x + 4}$
 37. $\frac{1}{4}$ 39. $\frac{e^x - y^2}{2xy + e^y}$
 41. $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{27}$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{27}$ 43. $y = 6x - 9$, $y = -6x - 9$
 45. (4, 2) 47. 0, $2\pi/3$, π , $4\pi/3$, 2π
 53. **a)** (2, 0), (2, -1), (2, 1) **b)** 4, -2, -2
 55. $y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

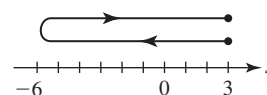
Ejercicios 4.1, página 195

1. -1, 19; -2, 18; 2, 18; 8, 8
 3. 18, 6; -23, 1; 23, 1; 18, -6
 5. $-\frac{15}{4}$, 0; 17, 2; 17, 2; -128, -2

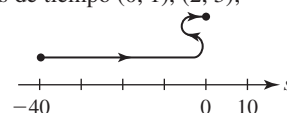
7. $1, \frac{1}{2}$; $1 - \pi, 1$; $\pi - 1, 1$; 0, π^2
 9. **a)** -6, 6 **b)** -8, 8
 11. **a)** $-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ **b)** 15 **c)** -4, 8
 13. reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-\infty, -3)$, $(0, 3)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(-3, 0)$, $(3, \infty)$
 15. $v(t) = 2t$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 0)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(0, 3)$;



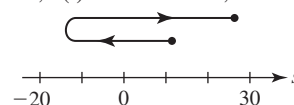
17. $v(t) = 2t - 4$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 2)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(2, 5)$;



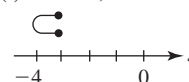
19. $v(t) = 6t^2 - 12t$, $a(t) = 12t - 12$; reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-2, 0)$, $(1, 2)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(0, 1)$, $(2, 3)$;



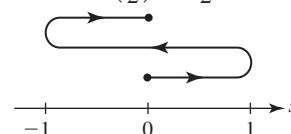
21. $v(t) = 12t^3 - 24t^2$, $a(t) = 36t^2 - 48t$;



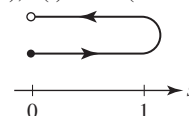
23. $v(t) = 1 - 2t^{-1/2}$, $a(t) = t^{-3/2}$;



25. $v(t) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$, $a(t) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} t$;



27. $v(t) = e^{-t}(-t^3 + 3t^2)$, $a(t) = e^{-t}(t^3 - 6t^2 + 6t)$;



29. frenándose en los intervalos de tiempo (a, b) , (d, e) , (f, g) ; aumentando la velocidad en los intervalos de tiempo (c, d) , (e, f)

positiva	negativa
cero	cero
positiva	positiva
positiva	negativa
negativa	negativa
negativa	positiva

31. **a)** $v > 0$ en $[0, \frac{3}{2}]$, $v < 0$ en $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}(6 + \sqrt{42})]$
b) 42 pies
 33. $64\sqrt{2}$ pies/s; 16 pies/s²
 35. $-8\sqrt{\pi}$ pies/s; la coordenada y es decreciente

Ejercicios 4.2, página 200

1. $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$
5. $\frac{4}{3}$ pulg/h
9. -6 o 6
13. a) 1 pie/s
15. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ pies/min
21. $-\frac{5}{4}$ pies/s
25. -360 mi/h
29. a) $500\sqrt{3}$ mi/h
31. $\frac{5}{32\pi}$ m/min
33. a) $-\frac{1}{4\pi}$ pie/min
c) aproximadamente -0.0124 pie/min
35. a) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ pie/min c) $\frac{165\sqrt{3}}{4} \approx 71.45$ min; 0.035 pie/min
39. $-\frac{1}{3}$ pulg²/min
43. $\frac{dR}{dt} = \frac{R^2}{R_1^2} \frac{dR_1}{dt} + \frac{R^2}{R_2^2} \frac{dR_2}{dt}$
45. a) aumenta b) aproximadamente 2.8% por día
47. a) 24 000 kg km/h² b) 2 023 100 kg km/h²
3. $8\sqrt{3}$ cm²/h
7. $\frac{dx}{dt} = s \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \frac{ds}{dt}$
11. $\frac{4}{9}$ cm²/h
- b) 4 pies/s
19. 17 nudos
23. 15 rad/h
27. $\frac{8\pi}{9}$ km/min
- b) 500 mi/h
41. 668.7 pies/min

Ejercicios 4.3, página 209

1. a) máx. abs. $f(2) = -2$, mín. abs. $f(-1) = -5$
b) máx. abs. $f(7) = 3$, mín. abs. $f(3) = -1$
c) no extrema
d) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(1) = -3$
3. a) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(2) = -4$
b) máx. abs. $f(1) = f(3) = -3$, mín. abs. $f(2) = -4$
c) mín. abs. $f(2) = -4$
d) máx. abs. $f(5) = 5$
5. a) no extrema
b) máx. abs. $f(\pi/4) = 1$, mín. abs. $f(-\pi/4) = -1$
c) máx. abs. $f(\pi/3) = \sqrt{3}$, mín. abs. $f(0) = 0$
d) no extrema
7. $\frac{3}{2}$
11. $\frac{4}{3}, 2$
15. $\frac{3}{4}$
19. $2n\pi$, n un entero
23. máx. abs. $f(3) = 9$, mín. abs. $f(1) = 5$
25. máx. abs. $f(8) = 4$, mín. abs. $f(0) = 0$
27. máx. abs. $f(0) = 2$, mín. abs. $f(-3) = -79$
29. máx. abs. $f(3) = 8$, mín. abs. $f(-4) = -125$
31. máx. abs. $f(2) = 16$, mín. abs. $f(0) = f(1) = 0$
9. $-1, 6$
13. 1
17. $-2, -\frac{11}{7}, 1$
21. 2

33. máx. abs. $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = f(7\pi/6) = f(11\pi/6) = \frac{3}{2}$,
mín. abs. $f(\pi/2) = f(3\pi/2) = -3$
35. máx. abs. $f(\pi/8) = f(3\pi/8) = f(5\pi/8) = f(7\pi/8) = 5$,
mín. abs. $f(0) = f(\pi/4) = f(\pi/2) = f(3\pi/4) = f(\pi) = 3$
37. punto extremo máx. abs. $f(3) = 3$, máx. rel. $f(0) = 0$,
mín. abs. $f(-1) = f(1) = -1$
39. a) c_1, c_3, c_4, c_{10}
b) $c_2, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$
c) mín. abs. $f(c_7)$, punto extremo máx. abs. $f(b)$
d) máx. rel. $f(c_3), f(c_5), f(c_9)$, mín. rel. $f(c_2), f(c_4), f(c_7), f(c_{10})$
41. a) $s(t) \geq 0$ sólo para $0 \leq t \leq 20$ b) $s(10) = 1600$
53. b) $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$
c) máx. abs. $f(\pi) = 3$, mín. abs. $f(\pi/3) = f(5\pi/3) = -\frac{3}{2}$

Ejercicios 4.4, página 215

1. $c = 0$
5. $c = -\frac{2}{3}$
9. f no es diferenciable sobre el intervalo
11. $f(a) \neq 0$ y $f(b) = 0$, así, $f(a) \neq f(b)$
13. $c = 3$
17. f no es continua sobre el intervalo
19. $c = \frac{9}{4}$
23. f no es continua sobre $[a, b]$
25. f creciente en $[0, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$
27. f creciente en $[-3, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, -3]$
29. f creciente en $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$; f decreciente en $[0, 2]$
31. f creciente en $[3, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$
33. f decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$
35. f creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$; f decreciente en $[-1, 0]$ y $[0, 1]$
37. f creciente en $[-2, 2]$; f decreciente en $[-2\sqrt{2}, -2]$ y $[2, 2\sqrt{2}]$
39. f creciente en $(-\infty, 0]$; f decreciente en $[0, \infty)$
41. f creciente en $(-\infty, 1]$ y $[3, \infty)$; f decreciente en $[1, 3]$
43. f creciente en $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$; f decreciente en $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi]$, donde n es un entero
45. f creciente en $[0, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$
47. f es creciente en $(-\infty, \infty)$
49. si el motociclista viaja a la velocidad límite, no habrá recorrido más de 65 mi
61. $c \approx 0.3451$ radián
3. $f(-3) = 0$ pero $f(-2) \neq f(-3)$
7. $c = -\pi/2, \pi/2$, o $3\pi/2$
21. $c = 1 - \sqrt{6}$

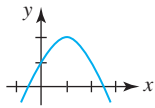
Ejercicios 4.5, página 222

1. 0
5. $\frac{2}{3}$
9. -6
13. $\frac{7}{5}$
17. no existe
3. 2
7. 10
11. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{1}{6}$
19. $\frac{1}{2}$

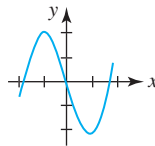
21. $2e^4$
 25. $\frac{1}{3}$
 29. -2
 33. -1
 37. $\frac{1}{9}$
 41. $\infty - \infty$; $-\frac{1}{2}$
 45. 0^0 ; 1
 49. $\infty - \infty$; $\frac{1}{24}$
 53. ∞^0 ; 1
 57. 0^0 ; 1
 61. $\infty - \infty$; $\frac{1}{5}$
 65. $0 \cdot \infty$; 1
 69. $\infty - \infty$; no existe
 73. 0^0 ; 1
 79. 0
 81. a) $A(\theta) = 25 \frac{\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta}{\theta^2}$
 83. b) $p_1 v_1 \ln(v_2/v_1)$
23. 0
 27. ∞
 31. $-\frac{1}{8}$
 35. no existe
 39. 3
 43. $0 \cdot \infty$; 1
 47. $\infty - \infty$; 0
 51. $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$
 55. 1^∞ ; e^3
 59. El denominador es $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$
 63. $0 \cdot \infty$; 0
 67. $0 \cdot \infty$; 5
 71. 1^∞ ; $e^{-1/3}$
 75. $\frac{1}{2}$

Ejercicios 4.6, página 228

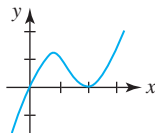
1. máx. rel.
- $f(1) = 2$
- ;



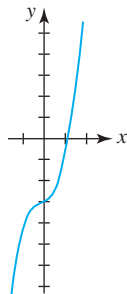
3. máx. rel.
- $f(-1) = 2$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(1) = -2$
- ;



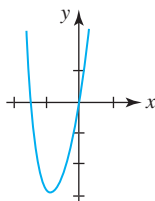
5. máx. rel.
- $f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(2) = 0$
- ;



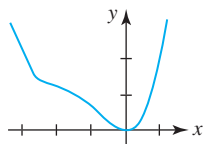
7. no extrema;



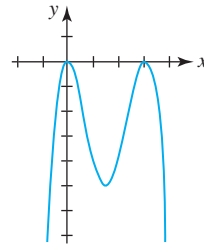
9. mín. rel.
- $f(-1) = -3$
- ;



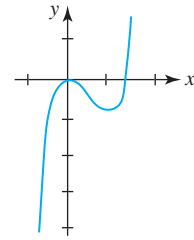
11. mín. rel.
- $f(0) = 0$
- ;



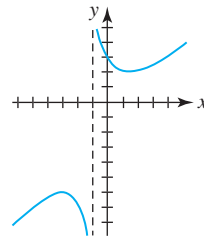
13. máx. rel.
- $f(0) = f(3) = 0$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(\frac{3}{2}) = -\frac{81}{16}$
- ;



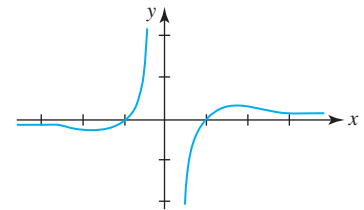
15. máx. rel.
- $f(0) = 0$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(1) = -1$
- ;



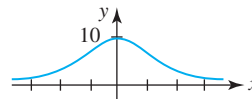
17. máx. rel.
- $f(-3) = -6$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(1) = 2$
- ;



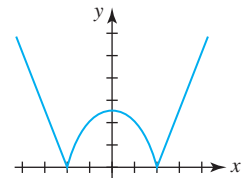
19. máx. rel.
- $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$
- ;



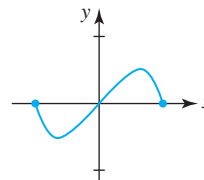
21. máx. rel.
- $f(0) = 10$
- ;



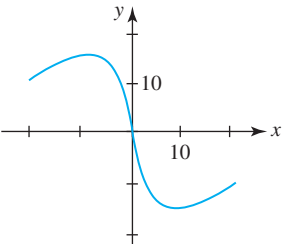
23. máx. rel.
- $f(0) = \sqrt[3]{16}$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(-2) = f(2) = 0$
- ;



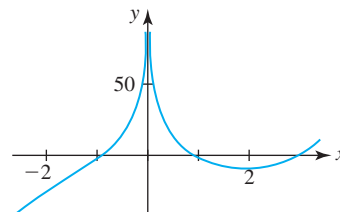
25. máx. rel.
- $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$
- ;



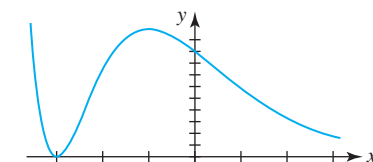
27. máx. rel.
- $f(-8) = 16$
- ,
-
- mín. rel.
- $f(8) = -16$
- ;



29. mín. rel.
- $f(2) \approx -8.64$
- ;

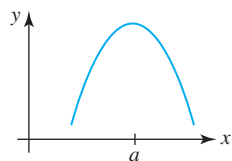


31. mín. rel.
- $f(-3) = 0$
- , máx. rel.
- $f(-1) = 4e$
- ;

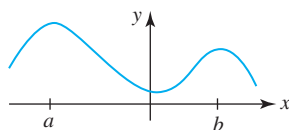


RES-16 Respuestas de los problemas impares seleccionados

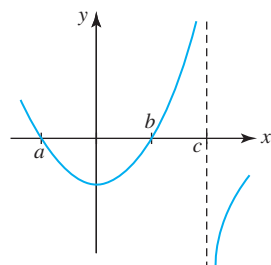
33.



35.

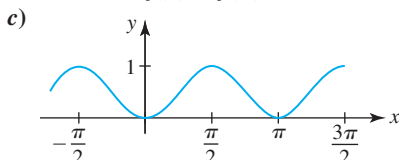


37.



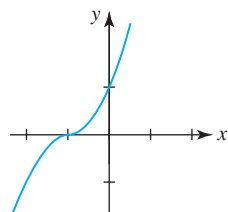
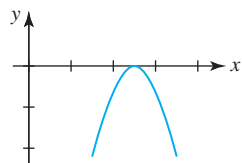
43. mín. rel. $f'(-2) = -13$

45. a) $(n\pi, \pi/2 + n\pi), (\pi/2 + n\pi, \pi + n\pi), n$ un entero
 b) $n\pi/2, n$ un entero; máx. rel. es $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \dots = 1$,
 mín. rel. es $f(0) = f(\pi) = \dots = 0$

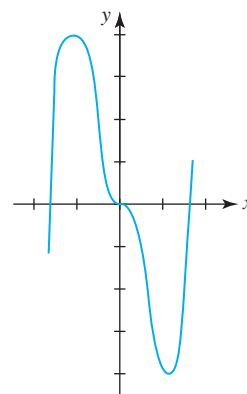


Ejercicios 4.7, página 233

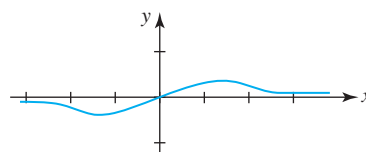
1. cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$
3. cóncava hacia arriba $(-\infty, 2)$; cóncava hacia abajo $(2, \infty)$
5. cóncava hacia arriba $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$; cóncava hacia abajo $(2, 4)$
7. cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$
9. cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$
11. cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$
13. respuestas aproximadas: f' creciente en $(-2, 2)$; f' decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$
15. respuestas aproximadas: f' creciente en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$; f' decreciente en $(-1, 3)$
19. $(-\sqrt{2}, -21 - \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -21 + \sqrt{2})$
21. $(n\pi, 0), n$ un entero
23. $(n\pi, n\pi), n$ un entero
25. $(2, 2 + 2e^{-2})$
27. máx. rel. $f(\frac{3}{2}) = 0$;
29. punto de inflexión: $(-1, 0)$;



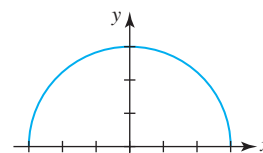
31. máx. rel. $f(-1) = 4$, mín. rel. $f(1) = -4$; puntos de inflexión:
 $(0, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{4}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{4})$;



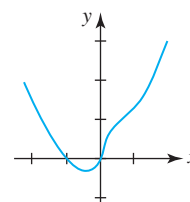
33. máx. rel. $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, mín. rel. $f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;
 puntos de inflexión: $(0, 0), (-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}), (\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8})$;



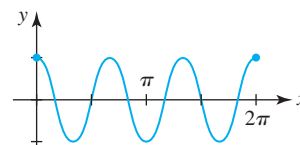
35. máx. rel. $f(0) = 3$;



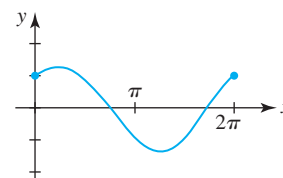
37. mín. rel. $f(-\frac{1}{4}) = -3/4^{4/3}$;
 puntos de inflexión: $(0, 0), (1/2, 3/2^{4/3})$;



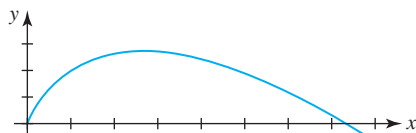
39. máx. rel. $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = 1$,
 mín. rel. $f(\pi/3) = f(\pi) = f(5\pi/3) = -1$;
 puntos de inflexión: $(\pi/6, 0), (\pi/2, 0), (5\pi/6, 0), (7\pi/6, 0), (9\pi/6, 0), (11\pi/6, 0)$;



41. máx. rel. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, máx. rel. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$;
 puntos de inflexión: $(3\pi/4, 0), (7\pi/4, 0)$;



43. máx. rel. $f(e) = e$;



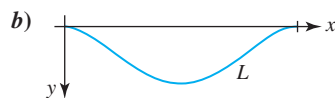
45. máx. rel. $f(\pi/4) = \frac{1}{2}$

47. mín. rel. $f(\pi) = 0$

Ejercicios 4.8, página 240

1. 30 y 30
5. $\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$
9. $(\frac{4}{3}, -\frac{128}{27})$
13. (4, 0) y (0, 8)
17. 2 000 m por 1 000 m
19. el jardín debe ser rectangular con 40 pies de largo y 20 pies de ancho
21. base 40 cm por 40 cm, altura 20 cm
23. base $\frac{80}{3}$ cm por $\frac{80}{3}$ cm, altura $\frac{20}{3}$ cm; máx. vol. $\frac{128\,000}{27}$ cm³
25. altura $\frac{15}{2}$ cm, ancho 15 cm
27. 10 pies del poste de la bandera al lado derecho en la figura 4.8.19
29. radio de la porción circular $10/(4 + \pi)$ m, ancho $20/(4 + \pi)$ m, altura de la porción rectangular $10/(4 + \pi)$ m
31. $L \approx 20.81$ pies
33. radios $16/3$, altura 4
35. radios $\sqrt[3]{16/\pi}$, altura $2\sqrt[3]{16/\pi}$
37. volar al punto 17.75 km desde el nido
39. costo mínimo cuando $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$
41. $r = \sqrt[3]{9}$, $h = 2\sqrt[3]{9}$
43. longitud mínima cuando $x = 6.375$ pulg
45. cuadrado con longitud de lado $(a + b)/\sqrt{2}$
47. longitud de la sección transversal $\sqrt{3}d/3$, ancho de la sección transversal $\sqrt{6}d/3$
49. $\frac{50}{11}$ m del foco con iluminancia I_1
53. $-\frac{1}{8}$

55. a) $w_0 L^4 / 384EI$



65. Debe nadar del punto A al punto B alrededor de 3.18 millas desde el punto en la playa más cercano a A, y después seguir directamente a C.
67. a) $L = x + 2\sqrt{4 + (4 - x)^2}$
 c) $x = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 d) $L = x + \sqrt{1 + (4 - x)^2} + \sqrt{4 + (4 - x)^2}$
 f) $x \approx 3.1955$

Ejercicios 4.9, página 252

1. $L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$
3. $L(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
5. $L(x) = x - 1$
7. $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3)$

17. 0.98

21. 0.7

25. 16

29. 0.4

33. $L(x) = 4 + 2(x - 1)$; 4.08

35. $\Delta y = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2x dx$

37. $\Delta y = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2(x + 1) dx$

39. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$; $dy = -\frac{1}{x^2} dx$

41. $\Delta y = \cos x \sin \Delta x + \sin x (\cos \Delta x - 1)$; $dy = \cos x dx$

43.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1	25	20	5
2	0.5	11.25	10	1.25
2	0.1	2.05	2	0.05
2	0.01	0.2005	0.2	0.0005

45. a) 1.11 b) -2.9 47. a) 9π cm² b) 8π cm²

49. el volumen exacto es $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3)$; el volumen aproximado es $dV = 4\pi r^2t$, donde $t = \Delta r$; $(0.1024)\pi$ pulg³

51. ± 6 cm²; ± 0.06 ; $\pm 6\%$ 55. 2 048 pies; 160 pies

57. a) mínimo en el ecuador ($\theta = 0^\circ$); máximo en el polo norte ($\theta = 90^\circ$ N)

b) 981.9169 cm/s² c) 0.07856 cm/s²

59. 0.0102 s

Ejercicios 4.10, página 257

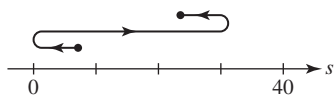
1. una raíz real
5. una raíz real
9. 1.5874
13. ± 1.1414
17. 2.4981
21. 0.7297
25. b) 0.33711, 44.494 c) 44.497
27. 1.8955 radianes
31. d) 1.4645
3. ninguna raíz real
7. 3.1623
11. 0.6823
15. 0, 0.8767
19. 1.6560 pies
23. b) 0.0915 pies
29. 1.0000, -1.2494, -2.6638

Revisión del capítulo 4, página 260

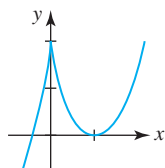
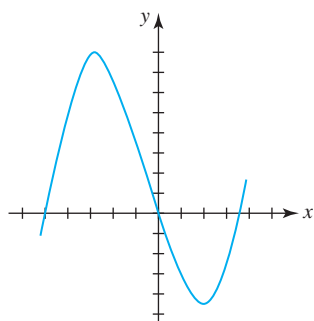
- A. 1. falso
5. verdadero
9. verdadero
13. verdadero
17. verdadero
- B. 1. la función velocidad
5. 0
9. $2x\Delta x - \Delta x + (\Delta x)^2$
- C. 1. máx. abs. $f(-3) = 348$, mín. abs. $f(4) = -86$
3. máx. abs. $f(3) = \frac{9}{7}$, mín. abs. $f(0) = 0$
3. falso
7. falso
11. verdadero
15. falso
19. falso
3. $y = \tan^{-1} x$
7. 2

RES-18 Respuestas de los problemas impares seleccionados

7. vel. máx. $v(2) = 12$, rapidez máx. $|v(-1)| = |v(5)| = 15$;



9. b) $a, b, (a+b)/2$
 11. máx. rel. $f(-3) = 81$, mín. rel. $f(2) = -44$;
 13. máx. rel. $f(0) = 2$, mín. rel. $f(1) = 0$;



15. mín. rel. $f(0) = 0$, puntos de inflexión: $(-3, 27)$, $(-1, 11)$
 17. punto de inflexión: $(3, 10)$
 21. c), d), e)
 25. $(a+b+c)/3$
 31. $y = \frac{1}{2}h$; la distancia máxima es h
 33. $x = 195$ pies, $y = 390$ pies; 57 037.5 pies²
 39. $8\sqrt{3}\pi/9$
 43. 1
 47. $-\infty$
 19. c), d)
 23. c)
 27. 32 pulg²/min
 41. -2
 45. e^{-1}
 49. 1.6751

Ejercicios 5.1, página 274

1. $3x + C$
 5. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$
 9. $x^3 + x^2 - x + C$
 13. $\frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C$
 15. $16w^4 - 16w^3 + 6w^2 - w + C$
 17. $\ln|r| + 10r^{-1} - 2r^{-2} + C$
 19. $-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$
 21. $-4 \cos x - x - 2x^{-4} + C$
 25. $-2 \cot x + 3x + C$
 29. $x^2 - x + 5 \tan^{-1} x + C$
 41. $x^2 - 4x + 5$
 45. $-x^{-1} + C$
 49. $y = x^2 - x + 1$
 51. $f'(x) = x^2 + C_1$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$
 53. $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$
 57. $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$
 3. $\frac{1}{6}x^6 + C$
 7. $t - \frac{25}{12}t^{0.48} + C$
 11. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$
 23. $-\cot x + \csc x + C$
 27. $4x^2 + x - 9e^x + C$
 31. $\tan x - x + C$
 43. $2x^3 + 9x + C$
 47. $x - x^2 - \cos x + C$

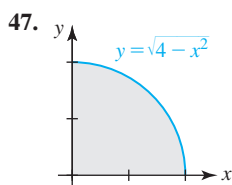
Ejercicios 5.2, página 285

1. $-\frac{1}{6}(1-4x)^{3/2} + C$
 5. $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} + C$
 9. $\frac{1}{6}\tan^3 2x + C$
 13. $\frac{1}{3}(2t)^{3/2} - \frac{1}{6}\sin 6t + C$
 17. $\frac{1}{3}\tan x^3 + C$
 21. $\frac{1}{7}\ln|7x+3| + C$
 25. $x - \ln|x+1| + C$
 29. $-\cos(\ln x) + C$
 33. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$
 37. $\ln(e^x + e^{-x}) + C$
 41. $\frac{1}{5}\tan^{-1} 5x + C$
 45. $-2\sqrt{1-x^2} - 3\sin^{-1} x + C$
 47. $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + C$
 51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
 55. $11x + 12 \cos x - \sin 2x + C$
 59. $y = x + 2 \cos 3x + 1 - \pi$
 63. b) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{L/g}$ c) $2\pi\sqrt{L/g}$
 3. $-\frac{1}{10}(5x+1)^{-2} + C$
 7. $\frac{1}{18}\sin^6 3x + C$
 11. $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$
 15. $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$
 19. $-2 \csc \sqrt{x} + C$
 23. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
 27. $\ln|\ln x| + C$
 31. $\frac{1}{10}e^{10x} + C$
 35. $-2e^{-\sqrt{x}} + C$
 39. $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$
 43. $\tan^{-1} e^x + C$
 49. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$
 53. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$
 57. $-\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} + C$

Ejercicios 5.3, página 293

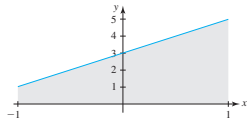
1. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$
 5. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25}$
 7. $(2^2 - 4) + (3^2 - 6) + (4^2 - 8) + (5^2 - 10)$
 9. $-1 + 1 - 1 + 1 - 1$
 13. $\sum_{k=0}^{12} (3k+1)$
 17. $\sum_{k=1}^8 6$
 21. 420
 25. 109
 29. 18
 33. $\frac{8}{3}$
 37. $\frac{16}{3}$
 41. $\frac{25}{2}$
 3. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4}$
 11. $\sum_{k=1}^7 (2k+1)$
 15. $\sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
 19. $\sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos \frac{k\pi}{p} x$
 23. 65
 27. 3 069
 31. 28
 35. $\frac{4}{3}$
 39. $\frac{1}{4}$
 43. $\frac{77}{60}, \frac{25}{12}$

45. 9



Ejercicios 5.4, página 303

1. $\frac{33}{2}$; 1
 5. $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{2})\pi$; π
 9. $\int_{-2}^4 \sqrt{9 + x^2} dx$
 13. -4
 17. $-\frac{3}{4}$
 23. 12
 27. 40
 31. -32
 35. 36
 39. 2.5
 43. a) -2.5 b) 3.9 c) -1.2
 45.

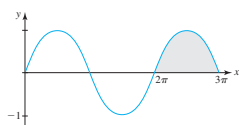


49. 18
 53.
 57. 15
 61. -2
 69. $\geq$

Ejercicios 5.5, página 313

1. 4
 5. 46
 9. $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$
 13. $e - e^{-1}$
 17. $-\frac{28}{3}$
 21. $\frac{\pi}{12}$
 3. 12
 7. 1
 11. $\frac{2}{3}$
 15. $-\frac{2}{3}$
 19. $\frac{8}{3}$
 23. $\frac{128}{3}$

3. $\frac{189}{256}$; $\frac{3}{4}$
 7. 5
 11. $\int_0^2 (1 + x) dx$
 15. $\frac{5}{6}$
 21. 4
 25. -3
 29. $-\frac{28}{3}$
 33. $\frac{28}{3}$
 37. 0
 41. 11
 47.



47.
 51. $\frac{9}{4}\pi$
 55.
 59. $-\frac{\pi}{2}$
 63. $\frac{5}{2}$

25. 1
 29. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$
 33. 1
 37. $\frac{4\pi + 6}{(\pi + 2)(\pi + 3)}$
 41. $\frac{1}{2} \ln \frac{11}{3}$
 45. $(3t^2 - 2t)^6$
 49. $\frac{2x}{x^6 + 1} - \frac{3}{27x^3 + 1}$
 53. a) 0 b) $\ln 3$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{4}{9}$
 55. $\frac{19}{6}$
 59. $\frac{38}{3}$
 63. 22
 67. $\frac{1}{6}(1 + \ln 2)^6$
 27. $\frac{65}{4}$
 31. $\frac{1}{2}$
 35. $\frac{2}{3}$
 39. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}$
 43. xe^x
 47. $6\sqrt{24x + 5}$
 57. 9
 61. 5
 65. 4
 69. $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-2}} \right)$

Revisión del capítulo 5, página 316

- A. 1. falso
 5. verdadero
 9. falso
 13. falso
 B. 1. $f(x)$
 5. $-f(g(x))g'(x)$
 9. $\int_5^{17}$
 13. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$; $\frac{16}{3}$
 C. 1. -6
 5. $\frac{1}{2}$
 9. $-\frac{1}{56} \cot^7 8x + C$
 13. $\frac{1}{2}(x^3 + 3x - 16)^{2/3} + C$
 17. $\frac{\pi}{6}$
 21. 5
 25. 0
 29. $\frac{1}{2}$
 31. 156 lb; aproximadamente 20 min
 3. verdadero
 7. verdadero
 11. verdadero
 15. verdadero
 3. $\frac{\ln x}{x}$
 7. $\sum_{k=1}^5 \frac{k}{2k + 1}$
 11. $\frac{5}{2}$
 15. $2 + e^{-1} - e$; $e - e^{-1}$
 3. $\frac{1}{505}(5t + 1)^{101} + C$
 7. 0
 11. $\frac{1}{40}(4x^2 - 16x + 7)^5 + C$
 15. $\frac{1}{2} \ln 2$
 19. $-\frac{1}{10} \ln |\cos 10x| + C$
 23. $\frac{11}{2}$
 27. $\frac{2}{3\sqrt{3}} \pi$
 33. $\frac{51}{4}$

RES-20 Respuestas de los problemas impares seleccionados

Ejercicios 6.1, página 323

1. $s(t) = 6t - 7$
3. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 15$
5. $s(t) = -\frac{5}{2}\sin(4t + \pi/6) + \frac{5}{2}$
7. $v(t) = -5t + 9$; $s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 9t - \frac{9}{2}$
9. $v(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 3$; $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 3t + 10$
11. $v(t) = \frac{21}{4}t^{4/3} - t - 26$; $s(t) = \frac{9}{4}t^{7/3} - \frac{1}{2}t^2 - 26t - 48$
13. 17 cm
15. 34 cm
17. 24 cm
19. $\frac{1}{30}$ mi = 176 pies
21. 256 pies
23. 30.625 m
25. 400 pies; 6 s
27. -80 pies/s

Ejercicios 6.2, página 331

1. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{81}{4}$
5. $\frac{9}{2}$
7. $\frac{11}{2}$
9. $\frac{11}{4}$
11. $\frac{11}{6}$
13. 2
15. $\frac{3}{4}(2^{4/3} + 3^{4/3})$
17. 4
19. 2π
21. $\frac{7}{3}$
23. $\frac{27}{2}$
25. $\frac{32}{3}$
27. $\frac{81}{4}$
29. 4
31. $\frac{10}{3}$
33. $\frac{64}{3}$
35. $\frac{128}{5}$
37. $\frac{118}{3}$
39. 22
41. $\frac{9}{2}$
43. $\frac{8}{3}$
45. 8
47. $2\sqrt{2} - 2$
49. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$
53. $7 + 3 \ln \frac{3}{4} \approx 6.1370$
55. $9\pi/4$
57. $4 + 2\pi$
59. πab
61. $\frac{52}{3}$
63. $A = \int_0^{\ln \frac{3}{2}} (e^x - 1) dx + \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} (2 - e^x) dx,$
 $A = \int_1^2 \left[\ln y - \ln \frac{1}{2}(y + 1) \right] dy; \quad \ln \frac{32}{27} \approx 0.1699$

Ejercicios 6.3, página 338

1. $\frac{256\sqrt{3}}{3}$
3. 128
5. $10\pi/3$
7. 9
9. $\pi/2$
11. $4\pi/5$
13. $\pi/6$
15. $1296\pi/5$
17. $\pi/2$
19. $32\pi/5$
21. 32π
23. $7\pi/3$
25. $256\pi/15$
27. $3\pi/5$
29. 36π
31. $500\pi/3$
33. $16\pi/105$
35. $\pi \left(2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} \right)$
37. π^2
39. $\frac{1}{4}(4\pi - \pi^2)$

Ejercicios 6.4, página 344

1. $4\pi/5$
3. $\pi/6$
5. $8\pi/15$
7. $250\pi/3$
9. $36\sqrt{3}\pi/5$
11. $3\pi/2$
13. 16π
15. $8\pi/5$
17. $21\pi/10$
19. $\pi/6$
21. $243\pi/10$
23. 4π
25. $625\pi/6$
27. $248\pi/15$
29. $\frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi)$
31. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
33. $\frac{4}{3}\pi r^3$
35. $\frac{4}{3}\pi ab^2$
37. $V = \pi r^2 h - \frac{\pi \omega^2 r^4}{4g}$

Ejercicios 6.5, página 347

1. $2\sqrt{2}$
3. $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8) \approx 1.4397$
5. 45
7. $\frac{10}{3}$
9. $\frac{4685}{288} \approx 16.2674$
11. 9
13. $\int_{-1}^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx$
15. $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$
17. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.0734$
19. b) 6
21. $\pi/2$

Ejercicios 6.6, página 350

1. $208\pi/3$
3. $\frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) \approx 3.5631$
5. $\frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1) \approx 117.3187$
7. $100\sqrt{5}\pi$
9. $253\pi/20$
11. a) $(\pi r/6h^2)[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3]$
b) aproximadamente 0.99% < 1%
13. $20\sqrt{2}\pi$

Ejercicios 6.7, página 354

1. -4	3. $\frac{34}{3}$
5. 3	7. 0
9. 2	11. $\frac{61}{9}$
13. 24	15. $\frac{1}{12}$
17. 0	19. $3\sqrt{3}/\pi$
21. $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0.1547$	23. 12
25. 103°	29. $2kt_1/3$

Ejercicios 6.8, página 360

1. 3 300 pies-lb	3. $\frac{2}{5}$ pies
5. a) 10 joules b) 27.5 joules	
7. a) 7.5 pies-lb b) 37.5 pies-lb	
9. 453.1×10^8 joules	11. 127 030.9 pies-lb
13. 45 741.6 pies-lb	15. 57 408 pies-lb
17. 64 000 pies-lb	
19. a) 5 200 pies-lb b) 6 256.25 pies-lb	
21. $3k/4$, donde k es la constante de proporcionalidad	

Ejercicios 6.9, página 365

1. a) 196 000 N/m ² ; 4 900 000 π N	
b) 196 000 N/m ² ; 784 000 π N	
c) 196 000 N/m ² ; 19 600 000 π N	
3. a) 499.2 lb/pie ² ; 244 640 lb b) 59 904 lb; 29 952 lb	
5. 129.59 lb	7. 1 280 lb
9. 3 660.8 lb	11. 13 977.6 lb
13. 9 984 π lb	15. 5 990.4 lb

Ejercicios 6.10, página 372

1. $-\frac{2}{7}$	3. $-\frac{13}{30}$
5. 1	7. $\frac{115}{36}$
9. $\frac{4}{7}$	11. $\frac{19}{15}$
13. $\frac{11}{10}$	15. $\frac{15}{2}$
17. $\bar{x} = -\frac{2}{7}, \bar{y} = \frac{17}{7}$	19. $\bar{x} = \frac{17}{11}, \bar{y} = -\frac{20}{11}$
21. $\bar{x} = \frac{10}{9}, \bar{y} = \frac{28}{9}$	23. $\bar{x} = \frac{3}{4}, \bar{y} = \frac{3}{10}$
25. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = \frac{54}{7}$	27. $\bar{x} = \frac{93}{35}, \bar{y} = \frac{45}{56}$
29. $\bar{x} = \frac{1}{2}, \bar{y} = \frac{8}{5}$	31. $\bar{x} = \frac{16}{35}, \bar{y} = \frac{16}{35}$
33. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{121}{540}$	35. $\bar{x} = -\frac{7}{10}, \bar{y} = \frac{7}{8}$
37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2$	39. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{8}(\pi + 8)$

Revisión del capítulo 6, página 373

A. 1. falso	3. verdadero
5. verdadero	7. verdadero
9. verdadero	11. falso
B. 1. joule	3. 2 500 pies-lb
5. 6	7. suave
C. 1. $-\int_0^a f(x) dx$	3. $\int_0^a \left[f(x) - \frac{f(a)}{a}x \right] dx$
5. $-\int_a^b 2f(x) dx + \int_b^c 2f(x) dx$	
7. $\int_b^c [a - f(y)] dy + \int_c^d [f(y) - a] dy$	
9. $\frac{1}{4}a^2 + b^2$	
11. $\bar{x} = \frac{\int_0^2 x[f(x) - g(x)] dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx}, \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx}$	
13. $2\pi \int_0^2 x[f(x) - g(x)] dx$	
15. $2\pi \int_0^2 (2 - x)[f(x) - g(x)] dx$	
17. $\frac{5}{2}$	19. a) 4 b) π
21. $\frac{315\sqrt{41}}{16} \pi \text{ pies}^2 \approx 396.03 \text{ pies}^2$	23. $\frac{256}{45}$
25. 37.5 joules	27. 624 000 pies-lb
29. 2 040 pies-lb	31. 691 612.83 pies-lb
33. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.07$	35. 17 066.7 N
37. $\frac{3}{4}$ m desde la izquierda sobre la barra de 1 m y $\frac{6}{5}$ m desde la izquierda en la barra de 2 m	

Ejercicios 7.1, página 382

1. $-\frac{5^{-5x}}{5 \ln 5} + C$	3. $-2 \cos \sqrt{1+x} + C$
5. $-\frac{1}{4}\sqrt{25-4x^2} + C$	7. $\frac{1}{5} \sec^{-1} \left \frac{2}{5}x \right + C$
9. $\frac{1}{10} \tan^{-1} \left(\frac{2}{5}x \right) + C$	11. $\frac{1}{20} \ln \left \frac{2x-5}{2x+5} \right + C$
13. $\frac{1}{10} \ln \sin 10x + C$	15. $(3-5t)^{-1.2} + C$
17. $\frac{1}{3} \ln \sec 3x + \tan 3x + C$	19. $\frac{1}{2}(\sec^{-1} x)^2 + C$
21. $-\tan^{-1}(\cos x) + C$	23. $\frac{1}{4} \tanh x^4 + C$
25. $\frac{1}{2} \sec 2x + C$	27. $\csc(\cos x) + C$
29. $\frac{1}{3}(1 + \tan x)^3 + C$	31. $\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C$

Ejercicios 7.2, página 385

1. $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$
3. $\frac{4}{5}(x-5)^{5/2} + \frac{22}{3}(x-5)^{3/2} + C$
5. $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$
7. $\frac{2}{9}(3x-4)^{1/2} - \frac{26}{9}(3x-4)^{-1/2} + C$
9. $2\sqrt{x} - 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$
11. $(\sqrt{t}+1)^2 - 10(\sqrt{t}+1) + 8 \ln(\sqrt{t}+1) + C$
13. $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3} + C$
15. $-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + C$
17. $2\sqrt{e^x-1} - 2 \tan^{-1} \sqrt{e^x-1} + C$
19. $\frac{4}{5}(1-\sqrt{v})^{5/2} - \frac{4}{3}(1-\sqrt{v})^{3/2} + C$
21. $\frac{4}{3}(1+\sqrt{t})^{3/2} + C$
23. $\ln(x^2+2x+5) + \frac{5}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
25. $-2\sqrt{16-6x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{5}\right) + C$
27. $2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln|x^{1/6}-1| + C$
29. $\frac{506}{375}$
31. $6 + 20 \ln \frac{11}{14}$
33. $\frac{177}{2}$
35. $\frac{1}{1326}$
37. $3 + 3 \ln \frac{2}{3}$
39. $\frac{1}{168}$
43. $-\frac{3}{2} + 3 \ln 2$
45. $\frac{32\pi}{3} - 4\pi \ln 3$
47. $\frac{232}{15}$

Ejercicios 7.3, página 392

1. $\frac{2}{3}x(x+3)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+3)^{5/2} + C$
3. $x \ln 4x - x + C$
5. $\frac{1}{2}x^2 \ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + C$
7. $-x^{-1} \ln x - x^{-1} + C$
9. $t(\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t + C$
11. $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$
13. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$
15. $-\frac{1}{4}x^3e^{-4x} - \frac{3}{16}x^2e^{-4x} - \frac{3}{32}xe^{-4x} - \frac{3}{128}e^{-4x} + C$
17. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
19. $\frac{1}{8}t \sin 8t + \frac{1}{64} \cos 8t + C$
21. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$
23. $\frac{1}{3}x^3 \sin 3x + \frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \frac{2}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x + C$
25. $\frac{1}{17}e^x(\sin 4x - 4 \cos 4x) + C$
27. $\frac{1}{5}e^{-2\theta}(\sin \theta - 2 \cos \theta) + C$

29. $\theta \sec \theta - \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$
31. $\frac{1}{3} \cos x \cos 2x + \frac{2}{3} \sin x \sin 2x + C$
33. $\frac{1}{3}x^2(x^2+4)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+4)^{5/2} + C$
35. $\frac{1}{2}x \sin(\ln x) - \frac{1}{2}x \cos(\ln x) + C$
37. $-\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + C$
39. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$
41. $\frac{3}{2} \ln 3$
43. $-12e^{-2} + 8e^{-1}$
45. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$
47. $3 \ln 3 + e^{-1}$
49. $5\pi(\ln 5)^2 - 10\pi \ln 5 + 8\pi$
51. $2\pi^2$
53. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$
55. $v(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 2$; $s(t) = te^{-t} + 2e^{-t} + 2t - 3$
57. $(124.8) \cdot \frac{8(\pi-2)}{\pi^2} \approx 115.48 \text{ lb}$
59. $4 \tan^{-1} 2 - \pi/2 - \ln \frac{5}{2}$
61. $-2\sqrt{x+2} \cos \sqrt{x+2} + 2 \sin \sqrt{x+2} + C$
67. $-\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C$
69. $\frac{1}{30} \cos^2 10x \sin 10x + \frac{1}{15} \sin 10x + C$
73. $\frac{35\pi}{256}$
83. $b) \frac{17\pi}{4}$

Ejercicios 7.4, página 398

1. $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + C$
3. $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$
5. $-\cos t + \frac{2}{3} \cos^3 t - \frac{1}{5} \cos^5 t + C$
7. $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C$
9. $\frac{3}{8}t - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t + C$
11. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$
13. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C$
15. $\frac{1}{8} \tan^4 2t + \frac{1}{12} \tan^6 2t + C$
17. $\frac{1}{4} \tan x \sec^3 x - \frac{1}{8} \sec x \tan x - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C$
19. $\frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C$
21. $\frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C$
23. $\frac{1}{4} \tan x \sec^3 x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C$
25. $\ln |\sin x| + \frac{1}{2} \cos^2 x + C$
27. $-\frac{1}{11} \cot^{11} x - \frac{1}{13} \cot^{13} x + C$
29. $\frac{1}{7 \tan^7(1-t)} + \frac{1}{5 \tan^5(1-t)} + C$

$$31. \frac{1}{2} \sec x \tan x + 2 \sec x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$33. \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \quad 35. -\frac{1}{2} \csc^2 t - \ln |\sec t| + C$$

$$37. \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + C \quad 39. -\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{1}{6} \cos^3 x^2 + C$$

$$41. \frac{25\sqrt{2}}{168} \quad 43. 0$$

$$45. \frac{3}{4} \quad 47. -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$$

$$49. \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \quad 51. \frac{5}{12}$$

$$55. \frac{16\pi}{3} \quad 57. \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Ejercicios 7.5, página 405

$$1. -\sin^{-1} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C \quad 3. \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 36}}{6} \right| + C$$

$$5. \frac{1}{3}(x^2 + 7)^{3/2} + C$$

$$7. -\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$$

$$9. -\frac{x}{4\sqrt{x^2 - 4}} + C$$

$$11. \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2 \ln x \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{2} \right| + C$$

$$13. \sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

$$15. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{4 - \sqrt{16 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$17. \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right| + C \quad 19. -\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

$$21. \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$23. \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{x}{2(1 + x^2)} + C$$

$$25. \frac{x}{16\sqrt{4 + x^2}} - \frac{x^3}{48(4 + x^2)^{3/2}} + C$$

$$27. \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 10} + x + 1}{3} \right| + C$$

$$29. \frac{1}{16} \tan^{-1}\left(\frac{x + 3}{2}\right) + \frac{x + 3}{8(x^2 + 6x + 13)} + C$$

$$31. \frac{-5x - 1}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C \quad 33. \ln(x^2 + 4x + 13) + C$$

$$35. x - 4 \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$37. \frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x - 3}{3}\right) + \frac{1}{2}(x - 3)\sqrt{9 - (x - 3)^2} + C$$

$$39. \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \quad 41. \frac{\sqrt{2}}{50}$$

$$43. 2\sqrt{3} - \frac{172}{81}$$

$$45. \frac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C$$

$$47. \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}} \right)$$

$$51. \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$53. 12\pi\sqrt{2} - 4\pi \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$55. 2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

$$57. b) y = -10 \ln \left(\frac{10 - \sqrt{100 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{100 - x^2}$$

$$59. 15.6\pi \approx 49.01 \text{ lb}$$

Ejercicios 7.6, página 413

$$1. \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$$

$$3. \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2} + \frac{D}{(x + 2)^3}$$

$$5. \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 3}$$

$$7. \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

$$9. -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |x - 2| + C$$

$$11. -2 \ln |x| + \frac{5}{2} \ln |2x - 1| + C$$

$$13. \frac{5}{8} \ln |x - 4| + \frac{3}{8} \ln |x + 4| + C$$

$$15. -\frac{1}{6} \ln |2x + 1| + \frac{2}{3} \ln |x + 2| + C$$

$$17. 6 \ln |x| - \frac{7}{2} \ln |x + 1| - \frac{3}{2} \ln |x - 1| + C$$

$$19. \frac{1}{2} \ln |x + 1| - \ln |x + 2| + \frac{1}{2} \ln |x + 3| + C$$

$$21. -2 \ln |t| - t^{-1} + 6 \ln |t - 1| + C$$

$$23. \ln |x| - \ln |x + 1| + (x + 1)^{-1} + C$$

$$25. -2(x + 1)^{-1} + \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + C$$

$$27. -\frac{1}{32} \ln |x + 1| - \frac{1}{16}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{32} \ln |x + 5| - \frac{1}{16}(x + 5)^{-1} + C$$

$$29. -\frac{19}{16} \ln |x| - \frac{19}{8}x^{-1} + \frac{11}{8}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3} + \frac{35}{16} \ln |x + 2| + C$$

$$31. -\ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x + C$$

$$33. \frac{1}{2}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$$

$$35. \frac{1}{3} \tan^{-1} x - \frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$37. \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$39. 5 \ln |x + 1| - \ln(x^2 + 2x + 2) - 7 \tan^{-1}(x + 1) + C$$

$$41. \frac{1}{2(x^2 + 4)} + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$43. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{11}{16} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5x + 12}{8(x^2 + 4)} + C$$

$$45. \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x - 10 \ln |x + 1| - 8(x + 1)^{-1} + C$$

RES-24 Respuestas de los problemas impares seleccionados

47. $-\frac{1}{2} \ln 3$ 49. $2 \ln \frac{5}{3} - \frac{14}{15}$

51. $\frac{1}{6} \ln \frac{8}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + C$ 53. 0

55. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + C$

57. $3(x+1)^{1/3} + \ln |(x+1)^{1/3} - 1| -$

$\frac{1}{2} \ln |(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3} + 1| - \sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2(x+1)^{1/3} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

59. $\frac{1}{4} \ln \frac{15}{7} \approx 0.191$

61. $7 \ln 2 - 8 \ln 3 + 3 \ln 4 \approx 0.222$

63. $8\pi \ln \frac{2}{3} + \frac{11\pi}{3} \approx 1.329$

65. $8\pi \ln 2 - 4\pi \approx 4.854$

Ejercicios 7.7, página 421

1. $\frac{1}{81}$ 3. diverge

5. $\frac{1}{2}e^6$ 7. diverge

9. $\frac{1}{2}$ 11. 0

13. $-\frac{1}{18}$ 15. $3e^{-2}$

17. 1 19. $\frac{\pi}{2}$

21. $\frac{1}{2}$ 23. 4

25. $\ln 2$ 27. $\frac{1}{4} \ln \frac{7}{3}$

29. $\frac{1}{21}$ 31. diverge

33. 100 35. $2\sqrt{2}$

37. diverge 39. 6

41. $-\frac{1}{4}$ 43. diverge

45. diverge 47. $-\frac{4}{3}$

49. $\frac{\pi}{4}$ 51. $\frac{\pi}{2}$

53. $\frac{\pi}{6}$ 55. $\frac{1}{6}$

57. 2 59. 8

61. $\frac{1}{2} \ln 2$ 63. 2.86×10^{10} joules

65. $\frac{1}{s}, s > 0$ 67. $\frac{1}{s-1}, s > 1$

69. $\frac{1}{s^2+1}, s > 0$ 71. $\frac{e^{-s}}{s}, s > 0$

Ejercicios 7.8, página 430

1. 78; $M_3 = 77.25$ 3. 22; $T_3 = 22.5$

5. 1.7564; 1.8667

7. 1.1475; 1.1484

9. 0.4393; 0.4228

11. 0.4470; 0.4900

13. $\frac{26}{3}$; $S_4 = 8.6611$

15. 1.6222

17. 0.7854

19. 0.4339

21. 11.1053

23. $n \geq 8$

25. 1.11

27. la regla de Simpson: $n \geq 26$; la regla trapezoidal: $n \geq 366$

29. la regla trapezoidal resulta en 1.10

31. para $n = 2$ y $n = 4$, la regla del punto medio proporciona el valor exacto del entero: 36

33. a) $\frac{2}{3}$ b) $M_8 = \frac{21}{22}$ c) $T_8 = \frac{11}{16}$

d) $E_8 = \frac{1}{96}$ para la regla del punto medio y $E_8 = \frac{1}{48}$ para la regla trapezoidal. El error de la regla del punto medio es la mitad del error de la regla trapezoidal.

37. 7.0667

39. aproximadamente 4 975 gal

41. 41.4028

43. b) 1.2460

45. 1.4804

47. 14.9772

Revisión del capítulo 7, página 433

A. 1. verdadero

3. verdadero

5. verdadero

7. falso

9. falso

11. verdadero

13. verdadero

15. falso

17. verdadero

19. falso

B. 1. $\frac{1}{5}$

3. $\sqrt{\pi}$

5. $\ln \sqrt{2}$

C. 1. $2\sqrt{x} - 18 \ln(\sqrt{x} + 9) + C$

3. $(x^2 + 4)^{1/2} + C$

5. $\frac{3}{256} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{32(x^2 + 4)} + \frac{x}{32(x^2 + 4)^2} - \frac{x^3}{128(x^2 + 4)^2} + C$

7. $x - \frac{4}{x} + C$

9. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{5}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

11. $\frac{1}{10}(\ln x)^{10} + C$

13. $\frac{1}{2}t^2 \sin^{-1} t - \frac{1}{4} \sin^{-1} t + \frac{1}{4}t\sqrt{1-t^2} + C$

15. $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{3}{4}(x+1)^4 + C$

17. $x \ln(x^2 + 4) - 2x + 4 \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

19. $-\frac{2}{125} \ln|x| - \frac{1}{25}x^{-1} + \frac{2}{125} \ln|x+5| - \frac{1}{25}(x+5)^{-1} + C$

21. $-\frac{1}{12} \ln|x+3| - \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + \frac{1}{12} \ln|x-3| + C$

23. $\tan t - t + C$ 25. $\frac{1}{13} \tan^{13} t + \frac{1}{11} \tan^{11} t + C$

27. $y \sin y + \cos y + C$ 29. $\sin t - \frac{1}{5} \sin^5 t + C$

31. $\frac{1}{6}(1 + e^w)^6 + C$

33. $-\frac{1}{8} \csc^2 4x - \frac{1}{4} \ln |\sin 4x| + C$

35. $\frac{1}{4}$ 37. $\sec x - \tan x + x + C$

39. $\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$ 41. $\frac{1}{10} e^x (\cos 3x + 3 \sin 3x) + C$

43. $\frac{1}{2} t \cos(\ln t) + \frac{1}{2} t \sin(\ln t) + C$

45. $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$

47. $-\frac{2}{3} \cos^3 x + C$

49. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1}{2} \right| + C$

51. $\frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$

53. $\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + C$

55. $\frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1} + C$

57. $\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$

59. $2(\sin x)e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C$ 61. $\sqrt{6} - 2$

63. $t \sinh^{-1} t - \sqrt{t^2 + 1} + C$ 65. $\ln \frac{3}{2}$

67. $\frac{1}{39} \tan^{13} 3u + \frac{1}{45} \tan^{15} 3u + C$

69. $3 \tan x + \sec x + C$

71. $\frac{1}{2} x^2 (1 + \ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 (1 + \ln x) + \frac{1}{4} x^2 + C$

73. $e^{e^x} + C$ 75. $t^2 - \ln(1 + e^{t^2}) + C$

77. $\frac{1}{5} \sin^{-1}(5x + 2) + C$ 79. $(\sin x) \ln |\sin x| - \sin x + C$

81. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{9}$ 83. 0

85. diverge 87. 0

89. diverge 91. $2 - 2e^{-1}$

95. $\frac{1}{2}$ 97. $\frac{2}{3}$

99. a) 2π b) las áreas son infinitas

101. 126 joules

Ejercicios 8.1, página 444

1. $y = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$ 3. $y^{-2} = 2x^{-1} + C$

5. $y + y^2 + \frac{1}{3} y^3 = x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + C$

7. $\cos y = x^{-1} - 5x + C$ 9. $y = Cx^4$

11. $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

13. $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{2} y^2 + 2y + \ln |y| + C$

15. $\ln |N| = te^{t+2} - e^{t+2} - t + C$

17. $P = \frac{5}{1 + Ce^{-5t}}$ 19. $(y + 3)^5 e^x = C(x + 4)^5 e^y$

21. $y^3 = -3x^{-1} + 30$

25. $y = \frac{e^{-(1+1/x)}}{x}$

29. $y = 3$

33. a) $y = \frac{1}{1 + Cx}$ b) $y = 0$ c) $y = \frac{1}{1 + 2x}$

Ejercicios 8.2, página 448

1. $y = Ce^{4x}$

5. $y = \frac{1}{4} e^{3t} + Ce^{-t}$

9. $y = \frac{\ln}{x} + \frac{C}{x}$

13. $y = -x \cos x + Cx$

17. $y = \sin x + C \csc x$

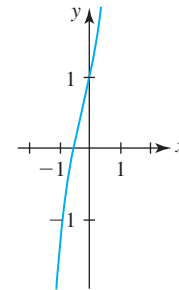
19. $y = \frac{5}{3} (x + 2)^{-1} + C(x + 2)^{-4}$

21. $y = \frac{e^x}{2x^2} + C \frac{e^{-x}}{x^2}$

25. $y = \frac{e^x + 2 - e}{x}$

29. $(t + 1)x = t \ln t - t + 21$

33. a) $y = e^{x^2} [1 + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)]$ b) $y(2) = 150.92$


Ejercicios 8.3, página 455

1. 7.9 años; 10 años

5. aproximadamente 11 h

9. $0.00098I_0$

13. 36.67° ; aproximadamente 3.06 min

15. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$

19. 100 min

21. $s(t) = \frac{mg}{k} t - \frac{m}{k} \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-kt/m} + \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}$

23. $X(t) = \frac{A}{B} - \frac{A}{B} e^{-Bt}$; $X(t) \rightarrow \frac{A}{B}$ cuando $t \rightarrow \infty$; $t = (\ln 2)/B$

25. $E(t) = E_0 e^{-(t-t_0)/RC}$

27. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500t}$; $i(t) \rightarrow \frac{3}{5}$ cuando $t \rightarrow \infty$

31. 276

Ejercicios 8.4, página 465

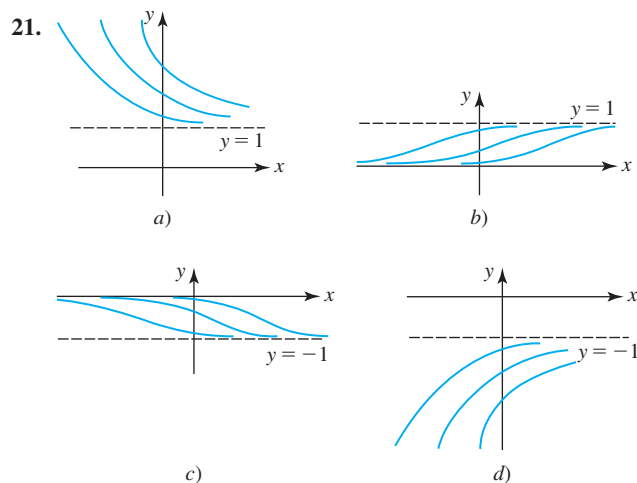
13. 0 es estable asintóticamente, 3 no es estable

15. 2 es semiestable

RES-26 Respuestas de los problemas impares seleccionados

17. -2 no es estable, 0 es semiestable; 2 es estable asintóticamente

19. -1 es estable asintóticamente, 0 no es estable



25. mg/k

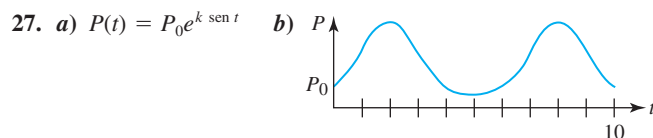
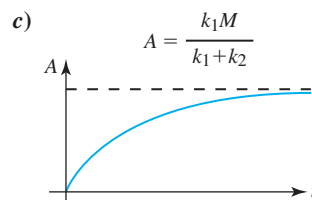
27. $i = E/R$ es una solución de equilibrio y E/R es asintóticamente estable

Ejercicios 8.5, página 470

1. $y_2 = 2.9800, y_4 = 3.1151$
3. $y_{10} = 2.5937, y_{20} = 2.6533; y = e^x$
5. $y_5 = 0.4198, y_{10} = 0.4124$
7. $y_5 = 0.5639, y_{10} = 0.5565$
9. $y_5 = 1.2194, y_{10} = 1.2696$

Revisión del capítulo 8, página 471

A. 1. verdadero	3. verdadero
B. 1. $y = x - 3x^2 + 4e^{3x} + C$	3. e^{-x}
5. vida media	7. $dP/dt = 0.16P, P(0) = P_0$
C. 1. $y = C \csc x$	3. $y = -\frac{1}{4}t + Ct^5$
5. $y = \frac{1}{4} + C(x^2 + 4)^{-4}$	7. $y = \sin(x^2 + C)$
9. $y = xe^{3x} - e^{3x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + Ce^{2x}$	
11. $P(t) = 1\,000e^{0.05t}$	
13. $y = \frac{1}{25}t^{-1} + \frac{1}{25}t^4(-1 + 5 \ln t)$	15. $y = \frac{6}{5e^{-2x} - 3}$
17. $y = \tan(x - 7\pi/12)$	19. $y = \frac{1}{2(1 + x^4)}$
21. $3y^4 = 4x^2 + 48$	
25. a) $A(t) = \frac{k_1M}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t})$	
b) $A \rightarrow \frac{k_1M}{k_1 + k_2}$ cuando $t \rightarrow \infty$, el material nunca se memorizará completamente	



31. 1.3214

Ejercicios 9.1, página 483

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$	3. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
5. 10, 100, 1 000, 10 000, ...	7. 2, 4, 12, 48, ...
9. $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots$	
15. 0	17. 0
19. $\frac{1}{2}$	21. la secuencia diverge
23. la secuencia diverge	25. 0
27. 0	29. la secuencia diverge
31. 0	33. $\frac{5}{7}$
35. 1	37. 6
39. 1	41. 1
43. $\ln \frac{4}{3}$	45. 0
47. $\left\{ \frac{2n}{2n-1} \right\}$, converge a 1	
49. $\{(-1)^{n+1}(2n+1)\}$, diverge	51. $\left\{ \frac{2}{3^{n-1}} \right\}$, converge a 0
53. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$	55. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$
57. 8	59. $a_{n+1} = \frac{5}{n+1}a_n, a_1 = 5$
61. converge a 0	63. converge a 0
67. $\frac{40}{9}\pi$; $15\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pies	
69. 15, 18, 18.6, 18.72, 18.744, 18.7488, ...	
71. 32	

Ejercicios 9.2, página 489

1. creciente	3. no monotónica
5. creciente	7. no creciente
9. creciente	11. no monotónica
13. acotada y creciente	15. acotada y creciente
17. acotada y decreciente	19. acotada y decreciente
21. acotada y creciente	23. acotada y decreciente
25. 10	27. 7

Ejercicios 9.3, página 498

1. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \dots$
5. $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \dots$
9. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$
13. $\frac{1}{2}$
17. $\frac{2}{3}$
21. 9 000
25. $\frac{2}{9}$
29. $\frac{1\,313}{999}$
43. $-2 < x < 2$
47. 75 pies
51. 18.75 mg
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \dots$
7. $2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} + \frac{128}{35} + \dots$
11. 1
15. $\frac{15}{4}$
19. diverge
23. diverge
27. $\frac{61}{99}$
31. $\frac{17}{6}$
45. $-2 < x < 0$
49. $\frac{N_0}{1-s}$; 1 000

Ejercicios 9.4, página 503

1. converge
5. diverge
9. converge
13. diverge
17. converge
21. converge
25. converge
29. converge
33. converge
35. converge para $p > 1$, diverge para $p \leq 1$
3. converge
7. converge
11. converge
15. converge
19. diverge
23. diverge
27. converge
31. diverge

Ejercicios 9.5, página 507

1. converge
5. diverge
9. converge
13. converge
17. converge
21. converge
25. diverge
29. diverge
33. converge
37. converge
3. diverge
7. diverge
11. converge
15. diverge
19. converge
23. converge
27. converge
31. diverge
35. diverge
39. diverge

Ejercicios 9.6, página 511

1. converge
5. converge
9. converge
13. converge
3. diverge
7. diverge
11. converge
15. diverge

17. converge
21. converge
25. diverge
29. diverge
33. converge para $0 \leq p < 1$
35. converge para todos los valores reales de p
39. utilice la prueba del cociente
19. diverge
23. converge
27. converge
31. converge

Ejercicios 9.7, página 517

1. converge
5. converge
9. converge
13. diverge
17. absolutamente convergente
21. absolutamente convergente
25. condicionalmente convergente
29. condicionalmente convergente
33. divergente
37. 5
41. menor que $\frac{1}{101} \approx 0.009901$
43. la serie contiene signos algebraicos mixtos pero los signos no se alternan; converge
45. los signos algebraicos no se alternan; converge
47. $a_{k+1} \leq a_k$ no se satisface para k suficientemente grande. La sucesión de las sumas parciales $\{S_{2n}\}$ es la misma que la sucesión de las sumas parciales para la serie armónica. Lo anterior implica que la serie diverge.
49. diverge
3. diverge
7. converge
11. converge
15. condicionalmente convergente
19. absolutamente convergente
23. divergente
27. divergente
31. absolutamente convergente
35. 0.84147
39. 0.9492
51. converge

Ejercicios 9.8, página 522

1. $(-1, 1]$; 1
5. $[2, 4]$; 1
9. $\{0\}$; 0
13. $[-1, 1)$; 1
17. $(-\frac{75}{32}, \frac{75}{32})$; $\frac{75}{32}$
21. $(-\infty, \infty)$; ∞
25. $(-\infty, \infty)$; ∞
29. 4
33. $x < -\frac{1}{2}$
37. $x < 0$
39. $0 \leq x < \pi/3, 2\pi/3 < x < 4\pi/3, 5\pi/3 < x \leq 2\pi$
41. a) $(-\infty, \infty)$
3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $\frac{1}{2}$
7. $(-5, 15)$; 10
11. $[0, \frac{2}{3}]$; $\frac{1}{3}$
15. $(-16, 2)$; 9
19. $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$; $\frac{1}{3}$
23. $(-3, N)$; 3
27. $(-\frac{15}{4}, -\frac{9}{4})$; $\frac{3}{4}$
31. $x > 1$ o $x < -1$
35. $-2 < x < 2$

Ejercicios 9.9, página 528

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}$; $(-3, 3)$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k$; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

RES-28 Respuestas de los problemas impares seleccionados

5. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}; \quad (-1, 1)$ 7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} x^{2k}; \quad (-2, 2)$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^{k-1}; \quad (-3, 3)$
11. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k-1)2^{k-3}}{5^{k+1}} x^{k-2}; \quad \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{2k-1}; \quad (-1, 1)$
15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}; \quad [-1, 1]$
17. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+2}; \quad [-1, 1]$
19. $\ln 4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)4^{k+1}} x^{k+1}; \quad (-4, 4]$
21. $1 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2x)^k; \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
23. $\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1)x^k; \quad (-1, 1)$
25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+3}; \quad [-1, 1]$
27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}; \quad [-1, 1]$
29. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5^{k+1}} (x-6)^k; \quad (1, 11)$
31. $-1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+1)^{k+1}; \quad (-2, 0)$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{4^k} - \frac{1}{3^k} \right] x^k; \quad (-3, 3)$
35. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \dots$ 37. $(-3, 3]$
39. 0.0953 41. 0.4854
43. 0.0088

Ejercicios 9.10, página 539

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ 3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ 7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
11. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$
13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}} (x-4)^k$ 15. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$
17. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$
19. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots$

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$
23. $\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} (x-2)^k$ 25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$
27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$ 29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} x^k$
31. $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \dots$ 33. 6
35. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
37. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \dots$
39. $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$
43. $\frac{\pi}{4}$ 45. -1
47. 0.71934; cuatro lugares decimales
49. 1.34983; cuatro lugares decimales
55. c) $y = 7.92$ pulg d) $y = 7.92000021$ pulg

Ejercicios 9.11, página 543

1. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} x^3 - \dots; \quad 1$
3. $3 - \frac{3}{2 \cdot 9}x - \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 9^2} x^2 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3! \cdot 9^3} x^3 - \dots; \quad 9$
5. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^6 + \dots; \quad 1$
7. $8 + \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 4}x + \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 4^2} x^2 - \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 \cdot 3! \cdot 4^3} x^3 + \dots; \quad 4$
9. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 2! \cdot 2^2} x^3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 3! \cdot 2^3} x^4 + \dots; \quad 2$
11. $|S_2 - S| < a_3 = \frac{1}{9}x^2$
13. $x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1}$
17. $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
19. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2^4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 3}{2^6 \cdot 3!}(x-1)^3 - \dots$

Revisión del capítulo 9, página 544

- A. 1. falso 3. falso
5. verdadero 7. falso
9. verdadero 11. falso
13. verdadero 15. falso
17. verdadero 19. falso
21. falso 23. falso
25. falso 27. verdadero
29. verdadero
- B. 1. 20; 9; $\frac{4}{5}$; 16 3. 4

5. $n/9$; $22/9$
 9. $x < -5$ o $x > 5$

C. 1. converge

5. converge

9. diverge

13. $\frac{61\,004}{201}$

7. e^x

11. $(-1, 1]$

3. converge

7. diverge

11. converge

15. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

17. $\{-5\}$

21. $\frac{1}{\alpha - 1}$

25. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots$

27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x - \pi/2)^{2k+1}$

19. $\frac{4}{3}$

23. $1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{9}x^{10} - \dots$

29. \$6 millones

A

- Amplitud, 32
- Antiderivada, 268
 - más general, 268-269
- Antidiferenciación, 269
- Aproximación
 - cuadrática local de f en a , 538
 - lineal local, 248, 538
 - local de grado n -ésimo de f en a , 538
 - por diferenciales, 250
- Arcseno de x , 41
- Área, 286-295, 325-332
 - A de la región, 327
 - acotada por dos gráficas, 326-327
 - bajo la gráfica, 286, 291, 298
 - como integral definida, 298
 - de la región, 325-326
 - de un triángulo, 289-290
 - neta con signo, 302
 - total A , 325
- Ascenso vertical. Véase Cambio en y
- Asíntota
 - horizontal, 26, 49, 97
 - inclinada, 26
 - vertical, 26, 51, 96
- Atractor, 465

B

- Base, 48
 - cambio de, 53
 - fórmula general de, 53
- Bicilindro, 340
- Bisección
 - método de, 86
- Bombeo, 357

C

- Cables, 359-360
- Cálculo
 - diferencial, 110
 - integral, 110
 - teorema fundamental del, 305-316
 - forma de antiderivada, 305-307
 - forma de derivada, 307-309
 - primera forma, 305-307
 - segunda forma, 307-309
- Cambio
 - en x , 21
 - en y , 21

- Campo
 - de dirección, 460
 - de pendientes. Véase Campo de dirección
- Cantidad de movimiento, 204
- Capacidad de transporte, 484
- Catenaria, 179, 185
- Catenoide, 185
- Centro de masa, 367
 - del sistema, 369
- Centroide, 370
- Cero
 - de multiplicidad m . Véase Cero repetido
 - repetido, 25
 - simple, 25
- Ciclo, 30, 32
- Cilindro recto, 333
- Cociente diferencial, 111
- Coefficiente principal, 20
- Coefficientes binomiales, 541
- Combinación de desplazamientos, 15
- Combinaciones aritméticas, 11
 - cociente, 11
 - diferencia, 11
 - dominio de, 11
 - producto, 11
 - suma, 11
- Comportamiento
 - extremo o global, 4
 - final, 24, 98
- Composición
 - de f y g , 13
 - de g y f , 13
 - dominio de una, 14
- Compresiones, 16
 - gráfica comprimida horizontalmente, 16
 - gráfica comprimida verticalmente, 16
- Concavidad, 230
 - prueba para, 231
 - y la segunda derivada, 230
- Condición inicial, 273
- Condiciones iniciales, 322
- Constante
 - de crecimiento, 451
 - de decaimiento, 451
 - de Euler, 484
 - gravitacional, 357
- Continuidad, 81-88
 - de una función compuesta, 85
 - de una función inversa, 84, 162
 - de una suma, un producto y un cociente, 83
 - en a , 81

ÍND-2 Índice analítico

- en un número, 88
 - sobre un intervalo, 82
 - abierto, 82
 - cerrado, 82
 - uso de la, 88-89
 - Convergencia
 - absoluta, 515
 - condición necesaria para, 495
 - condición suficiente para la, 487-488
 - condicionada, 515
 - de una serie de potencias, 520
 - de una serie de Taylor, 532
 - intervalo de, 520
 - radio de, 520
 - Correspondencia con valor único. *Véase* Función
 - Cosecante, 31
 - hiperbólica, 179
 - Coseno hiperbólico, 179
 - Cotangente, 31
 - hiperbólica, 179
 - Crecimiento
 - exponencial, 54
 - logístico, 55
 - Curva
 - del copo de nieve de Koch, 484
 - logística, 171, 457
 - Curvas solución sin solución, 459-468
 - Cúspide, 135
- D
- Datación con carbono, 452
 - Decaimiento radiactivo, 451
 - Derivada, 121-186
 - aplicaciones de la, 191-259
 - cuarta, 135
 - de la función
 - logaritmo natural, 172
 - potencia, 130
 - de un polinomio, 133
 - de una función, 124
 - exponencial, 168
 - inversa, 163
 - natural, 168-169
 - notación, 124
 - n -ésima, 135
 - valor de la, 135
 - por la derecha, 125
 - por la izquierda, 125
 - primera, 135, 224
 - prueba de la, 224-225
 - segunda, 135
 - prueba de la, 321-233
 - tercera, 135
 - valor de una, 124
 - Derivadas
 - de funciones exponenciales, 169
 - de funciones logarítmicas, 173
 - de funciones trigonométricas, 147, 153
 - inversas, 164
 - de orden superior, 135, 159
 - del seno y coseno, 144
 - Desintegración exponencial, 54
 - Desplazamiento de fase, 34
 - Diferenciabilidad, 125
 - de una función inversa, 163
 - implica continuidad, 126
 - Diferenciación, 124
 - comprobación por, 387
 - fórmula de, 270
 - implícita, 156-162
 - directrices para, 158
 - logarítmica, 175
 - directrices para, 175-176
 - operadores, 124-125
 - Diferencial, 276
 - de la longitud de arco, 346-347
 - de la variable dependiente, 250
 - de la variable independiente, 250
 - Diferenciales, 249-254
 - reglas para, 251
 - Directrices
 - para diferenciación implícita, 158
 - para resolver problemas relacionados, 197-200
 - Discontinuidad,
 - de tipo salto, 84
 - finita, 84
 - infinita, 84
 - removible, 84
 - Discontinuidades infinitas, 418
 - Distancia total, 323
 - Divergencia
 - prueba del término n -ésimo para, 496
 - División término por término, 272
 - Dominio, 2, 12
 - de la función constante, 3
 - implícito, 3
 - natural, 3
 - restringido, 40-41

E

 - Ecuación
 - de estado de Van der Waals, 143
 - de la lente, 143
 - diferencial, 272, 440
 - de Bertalanffy, 385
 - de primer orden, 273, 439-470
 - de segundo orden, 440
 - forma normal de la, 440, 446
 - lineal de primer orden, 445
 - separable de primer orden, 441
 - directrices para resolver una, 441-442
 - solución general de la, 448
 - lineal, 22
 - logística, 457
 - discreta, 484
 - no lineal, 445
 - punto pendiente, 21
 - Ecuaciones
 - de Bernoulli, 449
 - diferenciales, 272
 - autónomas, 462
 - de primer orden, 439-470

- de segundo orden, 440
- lineales, 445-450
 - directrices para resolver, 446
- Efecto Stiles-Crawford, 224
- Elemento de recta, 460
- Enfriamiento, 453
- Error
 - absoluto, 469
 - porcentual, 248, 469
 - relativo, 248, 469
- Estiramientos, 16-17
 - gráfica estirada horizontalmente, 16
 - gráfica estirada verticalmente, 16
- Existencia implica unicidad, 79
- Exponente, 48
- Exponentes, 48
 - leyes de los, 48
- Expresión racional propia, 407
- Extremos, 204
 - absolutos, 204-205
 - determinación de, 208
 - de funciones, 204-210
 - definidos sobre un intervalo cerrado, 208
 - de un punto frontera, 205
 - globales. *Véase* Extremos absolutos
 - relativos, 205-206

F

- Factor de integración, 446
- Factores
 - cuadráticos
 - distintos, 410-411
 - repetidos, 411-412
 - lineales
 - distintos, 407-408
 - repetidos, 408-409
- Factorial, 481
- Fluido
 - fuerza ejercida por un, 363
 - fuerza F del, 362-368
- Forma indeterminada, 71-72
 - 0° , 221
 - $0/0$, 216
 - $0 \cdot \infty$, 220
 - 1^∞ , 221
 - ∞° , 221
 - $\infty - \infty$, 220
- Fórmula de recursión, 481
- Fórmulas
 - de suma, 288-289
 - de suma y diferencia, 35
 - de sumas especiales, 288
 - para el doble de un ángulo, 35
 - para la mitad de un ángulo, 35
- Fracción impropia, 407
- Fracciones
 - impropias, 412
 - parciales, 406-415
 - descomposición en, 407
- Fuerza de arrastre, 454-455

- Función, 2
 - aceleración, 192
 - arcoseno, 43
 - arcseno, 42
 - arctangente, 44
 - cambio en la, 249
 - cero de la, 5
 - con valor real de una sola variable real, 2
 - constante, 20, 212
 - coseno inverso, 43
 - creciente, 22, 162, 213
 - cuadrática, 20
 - cúbica, 20
 - de densidad de probabilidad, 422
 - de Dirichlet, 88
 - de Heaviside, 19
 - de longitud de arco, 346
 - decreciente, 22, 162, 213
 - definida por partes, 5-6
 - gráfica de una, 6
 - derivada, 122
 - diferenciable
 - en todas partes, 125
 - sobre el intervalo abierto, 125
 - sobre un intervalo cerrado, 125
 - dominio de una, 3-4
 - implícito, 3
 - natural, 3
 - entero, 10
 - mayor, 7, 70
 - entrada de la, 2
 - escalón unitario. *Véase* Función de Heaviside
 - explícita, 157
 - exponencial, 48
 - inversa de la, 50
 - natural, 50
 - propiedades de una, 49
 - factorial, 9
 - generalizada, 422
 - gamma, 422
 - generadora de los polinomios de Legendre, 544
 - impar, 17-18
 - implícita, 157
 - integrable, 297
 - integral
 - logarítmica, 432
 - seno, 314, 449
 - inversa, 38
 - continuidad de la, 162
 - directrices para encontrar la, 39
 - propiedades de la, 39
 - límite de una, 67-116
 - lineal, 20
 - logarítmica, 50
 - dominio de una, 50
 - propiedades de la, 51
 - objetivo, 235
 - par, 17-18
 - pendiente, 440, 460
 - polinomial, 12, 20
 - de un solo término, 12

ÍND-4 Índice analítico

- posición, 192
 - potencia, 10, 276
 - pruebas para simetría de la gráfica de una, 17
 - racional, 12, 20
 - integración de una, 272
 - raíz, 5
 - raíz cuadrada, 3
 - rango de la, 2
 - razón de cambio media de la, 114
 - redondeo
 - hacia el entero inferior anterior, 7
 - hacia el entero superior siguiente, 7, 10
 - salida de la, 2
 - seno inverso, 41-42
 - suave, 345
 - tangente inversa, 44
 - terminología, 2-3
 - timbre postal, 7
 - uno a uno, 38
 - inversa de una, 38
 - valor
 - absoluto, 6
 - medio (promedio) de una, 351-354
 - promedio de una, 353
 - valor de la, 2
 - velocidad, 192
 - volver a escribir una, 133-134
 - Funciones, 1-66
 - algebraicas, 26, 30
 - combinación de, 10-20
 - composición de, 13-14
 - compuestas, 101
 - continuas por partes, 309-310
 - cuadráticas, 23
 - de las palabras a las, 55-61
 - escalón, 7
 - exponenciales, 167-172
 - exponencial y logarítmica, 48-55
 - hiperbólicas, 178-186
 - derivadas de, 180-182
 - gráficas de, 179-180
 - inversas, 182-184
 - como logaritmos, 183
 - derivadas de, 183-184
 - inversas, 37-47
 - derivadas de, 162-167
 - logarítmicas, 172-178
 - polinomiales, 20-25
 - de orden superior, 23-24
 - intersecciones de las, 24-25
 - simetría de las, 24
 - potencia, 10-11
 - simples, 11
 - racionales, 12-13, 26-27
 - gráficas de, 26-27
 - representación de las
 - analítica, 2
 - numérica, 2
 - verbal, 2
 - visual, 2
 - trascendentes, 27, 30-37
 - trigonométricas, 143-148, 152-153
 - inversas, 41, 45, 165
 - propiedades de las, 44
 - y gráficas, 2-10
- ## G
- Grado, 20
 - n , 20
 - Gráfica
 - longitud de una, 345-347
 - rectificable, 346
 - suave, 345
 - Gráficas, 4
 - cóncavas hacia abajo, 230
 - cóncavas hacia arriba, 230
 - del seno y coseno, 30
 - y la primera derivada, 224-228
 - y la segunda derivada, 230-234
 - Gravedad
 - centro de, 367. *Véase también* Centro de masa
- ## H
- Hipocicloide, 190
 - Hoja de Descartes, 157
 - Hueco, 27
 - gráfica con un, 27
- ## I
- Identidades
 - hiperbólicas, 180
 - logarítmicas, 183
 - pitagóricas, 35
 - útiles, 284
 - Imagen, 2
 - especular, 15
 - Incrementos, 249
 - Índice
 - de a_n , 476
 - de la suma, 287
 - Infinito
 - símbolos de, 94
 - Integrabilidad, 297
 - condiciones suficientes para, 297
 - continuidad implica, 297
 - Integración, 269. *Véase también* Antidiferenciación
 - aproximada, 423-430
 - constante de, 269
 - de productos, 386
 - de una función racional, 272
 - fórmula de, 270
 - fórmulas de, 280, 380-381
 - límite inferior de, 297
 - límite superior de, 297
 - límites de, 299-300
 - por partes, 386-393
 - directrices para, 386
 - por sustitución u , 276, 382

tabular, 389
técnicas de, 379-430

Integraciones sucesivas, 388

Integral
aplicaciones de la, 321-373
construcción de una, 327, 333-335, 341-342, 345-346, 348-349, 352-353, 363-364, 368
definida, 295-305
de una constante, 301
directrices para sustituir una, 310
propiedades de la, 299-301
sustitución en una, 310
elíptica completa del segundo tipo, 543
indefinida, 268-275
de la potencia de una función, 277
notación de la, 269
propiedades de la, 271
no elemental, 313
prueba de la, 501-504

Integrales, 267-319
definidas, 391
teorema del valor medio para, 353
despeje de, 390-391
impropias, 415-423, 418-421
indefinidas de funciones trigonométricas, 279-283
no elementales, 313, 536
trigonométricas especiales, 283
que convergen, 415
que divergen, 415

Integrando, 269, 297

Integrandos
algebraicos, 381
constantes, 380
exponenciales, 380
hiperbólicos, 381
que contienen una expresión cuadrática, 383, 404
que son potencia, 380
trigonométricos, 380

Intersección, 5, 26
 x , 5, 25

Intersecciones, 5, 31
de funciones racionales, 26
 x de polinomios, 25
 y , 5

Intervalos no acotados

Inversa, 38
de una función uno a uno, 38
función, 38

Isoclina, 468

L

Lámina, 369

Lemniscata, 161

Ley
de enfriamiento de Newton, 55, 453
de Fick, 457
de Hooke, 356
de movimiento de Newton, 454
primera, 454
segunda, 454

de Poiseulle, 245
de Snell, 244

Límite
de funciones polinomiales, 76-77
de una función compuesta, 84-85
de una raíz, 78-79
definición de, 104-105
en el infinito, 97, 107-108
existencia, 69
infinito, 95, 107
no existencia, 69
que no existe, 77-78

Límites, 536-537
de una potencia, 75-76
de una suma, un producto y un cociente, 75
igualdad de, 299
infinitos, 94-95, 107
inversión de, 299
laterales, 68-69, 107
por dos lados, 69
por la derecha, 107
por la izquierda, 107
que involucran el infinito, 94-103, 107
teoremas sobre, 75-80
trigonométricos, 88-94

Linealización, 247-249
cambio en la, 249

Logaritmos
comunes, 51
leyes de los, 52
naturales, 51

Longitud
de arco, 345-346
 L , 345-346

M

Masa
centro de, 367
de la barra, 368
momento de, 367
total del sistema, 367

Máximo
absoluto, 204
relativo, 206

Media aritmética, 229, 352

Método
de encubrimiento, 413
de Euler, 468
de la arandela, 336-337
de las rectas tangentes. Véase Método de Euler
de los cascarones, 340-345
de Newton, 254-259
análisis gráfico, 255
de Newton-Raphson. Véase Método de Newton
de rebanadas, 333-340
del disco, 334

Mezclas, 453-454

Mínimo
absoluto, 204
relativo, 206

ÍND-6 Índice analítico

Modelo

- de Malthus, 450
- matemático, 7
- de Jentsch, 171

Modelos matemáticos, 450-459

Módulo de elasticidad de Young, 245

Momento con respecto al origen, 368

Monotonía

- guías para demostrar la, 486

Movimiento

- cantidad de, 204
- rectilíneo, 115, 192, 322-324

N

Norma, 295

Notación

- de suma. Véase Notación sigma
- sigma, 287
- propiedades de la, 287-288

Nulclina, 468

Número

- crítico, 206-207
- e , 49-50
- trascendente, 170

Números armónicos, 497

O

Operadores diferenciación, 123-124

Optimización, 235-247

- Directrices para resolver problemas de, 236

Orden, 272, 440

P

Parábola, 11

- eje de la, 23
- forma normal, 23
- vértice de la, 23

Paradoja de Zenón, 500

Parámetro

- familia de soluciones de un, 441

Parte fraccionaria de x , 20

Partición, 295

- regular, 290, 298

Pendiente, 21

- de la curva, 111
- de rectas secantes, 111

Periodo, 30, 32

Peso específico, 357

Polinomio

- cero, 20
- de Taylor de f en a , 532

Polinomios de Taylor, 534-535, 538

- aproximaciones utilizando, 535-536

Posición inicial, 322

Potencias

- de funciones trigonométricas, 393-399
- reglas de, 130-138, 142, 177

Presión, 204

Principio

- de Fermat, 244, 264
- de Pascal, 363

Problema con valor inicial, 273, 442-444

Producto de dos números, 55-56

Promedio. Véase Media aritmética

- de valores funcionales, 352

Prueba

- de comparación, 423
- del límite, 506-507
- directa, 504-505, 507
- de la derivada para creciente/decreciente, 214
- de la integral, 501-504
- de la raíz, 510, 517
- de la recta horizontal, 38
- de la recta vertical, 4
- de la serie alternante, 512
- de las proporciones, 509-510, 516
- del único número crítico, 228
- para crecimiento/decrecimiento, 213-214

Punto

- crítico, 207, 462
- asintóticamente estable, 465
- inestable, 465
- semiestable, 465
- de inflexión, 231
- fronterizo derecho, 291
- fronterizo izquierdo, 293

Puntos

- de equilibrio, 463
- estacionarios, 463
- muestra, 290, 295

R

Radicando, 3

Radio de convergencia

- $R = 0$, 520
- $R = \infty$, 521
- $R > 0$, 521

Rapidez, 192

Razón

- áurea, 485
- de cambio media, 114
- de la función, 114
- instantánea de la función, 114, 128

Razones de cambio relacionadas, 196-197

Rearreglo de términos, 517

Recorrido horizontal. Véase Cambio en x

Recta, 11

- de fase, 463
- indefinida, 21
- normal, 134
- tangente, 111
- a una gráfica, 110
- con pendiente, 111

Rectas, 20

- ecuaciones de, 21-22
- paralelas, 22-23
- perpendiculares, 22-23

Reflexión o imagen especular, 15

- Reflexiones, 15-16, 162
- Regla
 - de la cadena, 149-156
 - de la función
 - constante, 131
 - impar, 311
 - par, 311
 - de la multiplicación constante, 132
 - de L'Hôpital, 216-224
 - de la sustitución u , 277
 - de potencias para funciones, 149-150, 160, 197
 - demostración de la, 152
 - de Simpson, 428
 - cota para el error para la, 429
 - error en la, 428
 - del cociente, 140-141
 - del producto, 139-140
 - del punto medio, 424-425
 - error en la, 425
 - trapezoidal, 426
 - cota para el error para la, 426
 - error en la, 426
- Reglas de suma y diferencia, 132
- Repelente, 465
- Representación asintótica de la función f , 543
- Residuo
 - forma de Lagrange del, 532
- Resistencia, 203
- Resonancia pura, 223
- Resorte
 - constante del, 356
- Restricción, 56, 236, 238
 - problemas con, 237
- Retrato
 - de fase, 463
 - de fase unidimensional, 463
- Revolución
 - alrededor del eje y , 350
 - área de una superficie de, 348-349
 - de una recta, 338
 - superficie de, 348
- S**
- Secante, 31
 - hiperbólica, 179
 - inversa, 165
- Segunda ley de Kirchhoff, 457
- Semicírculo
 - inferior, 6
 - superior, 6
- Seno
 - hiperbólico, 179
 - inverso, 164-165
 - de x , 41
- Serie, 490
 - absolutamente convergente, 515
 - alternante, 512-514
 - aproximación de la suma de una, 514
 - cota de error para una, 514
 - armónica, 495
 - alternante, 512
 - convergente, 492
 - de manera condicional, 515
 - de Maclaurin de f , 530
 - de potencias
 - centrada en a , 519
 - centro a . Véase Serie de potencias centrada en a
 - diferenciación de una, 523
 - empleo de la aritmética de una, 537
 - en x , 519
 - en $x - a$, 519
 - integración de una, 523-524
 - de Taylor, 529-540
 - centrada en a , 530
 - de f en a , 530
 - para una función f , 530
 - del binomio, 540-542
 - divergente, 492
 - prueba para una, 495
 - forma de una, 530
 - geométrica, 492
 - suma de una, 493
 - infinita, 490
 - múltiplo constante de una, 496
 - representación de f en, 524-525
 - suma de la, 492
 - telescópica, 492
 - términos de la, 490
 - Series, 490-544
 - alternantes, 512-519
 - aritmética de, 527-528
 - convergentes
 - suma de dos, 496
 - de Maclaurin, 534
 - intervalos de convergencia de las, 534
 - de potencias, 519-522
 - representación de funciones mediante, 523-529
 - Signo integral, 269
 - Signos algebraicos, 193
 - significado de los, 193
 - Simetría, 17-18
 - Sistema
 - algebraico computarizado (SAC), 381-382
 - de coordenadas cartesianas o rectangulares, 4
 - Sistemas bidimensionales, 369
 - Sólidos
 - de revolución, 334
 - de Steinmetz, 340
 - Solución, 440
 - curva, 440
 - de equilibrio, 463
 - particular, 273
 - singular, 445
 - Sucesión, 476
 - acotada, 487
 - por abajo, 486
 - por arriba, 487
 - convergente, 477-479
 - de sumas parciales, 491
 - de valores absolutos, 482
 - definida recursivamente, 481
 - diverge, 477
 - a infinito, 478

ÍND-8 Índice analítico

- a infinito negativo, 478
- por oscilación, 478
- límite de la, 477, 480
- monótona
 - creciente, 486
 - decreciente, 486
 - no creciente, 486
 - no decreciente, 486
- no acotada, 486
- términos de la, 476
- Sucesiones, 476-490
 - monótonas, 485-490
 - propiedades de, 479-480
- Suma
 - de una serie convergente y una divergente, 496
 - parcial n -ésima, 491
- Sumas de Riemann, 295-297
- Superficie de revolución, 348
- Sustitución, 92
 - u , 277
 - directrices para efectuar una, 277
 - uso de la, 277
 - uso de una, 92-93
- Sustituciones trigonométricas, 399-406
 - directrices para, 400
- T
- Tamaño de paso, 468
- Tangente, 31, 110
 - hiperbólica, 179
 - inversa, 165
 - que puede no existir, 114
- Tangentes
 - horizontales, 125
 - verticales, 114, 125
- Técnica integración, 381
- Teorema
 - de compresión, 89, 481
 - de Rolle, 210-211
 - de Taylor, 531-532
 - del binomio, 540-541
 - del valor extremo, 205
 - del valor intermedio, 85
 - del valor medio, 210-216
 - ampliado, 217
 - para derivados, 211-212
 - para integrales definidas, 353
 - impulso-cantidad de movimiento, 355
- Teoría de fractales, 484
- Término
 - constante, 20
 - general, 476, 490
 - transitorio, 448
- Trabajo, 355-362
 - realizado contra la gravedad, 357
- Tractriz, 186
- Transformación,
 - no rígida, 14, 16, 32
 - rígida, 14, 32
- Transformada de Laplace, 422
- Traslaciones
 - hacia abajo, 14
 - hacia arriba, 14
 - hacia la derecha, 14
 - hacia la izquierda, 14
- Trayectorias ortogonales, 161
- U
- Unidades
 - de distancia, 356
 - de fuerza, 356
 - de trabajo, 356
- V
- Valor promedio de una función, 353
- Valores funcionales,
 - promedio de, 352
- Variable
 - dependiente, 2
 - ficticia, 287, 300
 - independiente, 2
- Velocidad
 - inicial, 322
 - instantánea, 116
 - media, 115, 192
 - terminal, 186
- Velocidad terminal, 455
- Vida media, 55, 451-452
- Volumen por rebanadas, 334

Créditos de fotografías

Tabla de contenido

Página ix (arriba) © Pavel Kapish/Shutterstock, Inc.; **página ix (abajo)** Polka Dot Images/age fotostock; **página x (arriba)** © Jose Gil/Shutterstock, Inc.; **página x (en medio)** © coko/Shutterstock, Inc.; **página x (abajo)** © RubberBall/age fotostock; **página xi (arriba)** © Kim Steele/Alamy Images; **página xi (en medio)** © Joy Brown/Shutterstock, Inc.; **página xi (abajo)** © siloto/Shutterstock, Inc.; **página xii (arriba)** © Suzanne Tucker/Shutterstock, Inc.

Capítulo 1

Entrada de capítulo (izquierda) © Pavel Kapish/Shutterstock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Design Pics/age fotostock; **página 2** © PhotoCreate/Shutterstock, Inc.; **página 15** Cortesía de Joanna Lee, Flickr.com

Capítulo 2

Entrada de capítulo (izquierda) © Polka Dot Images/age fotostock

Capítulo 3

Entrada de capítulo (izquierda) © Jose Gil/Shutterstock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © ImageSource/age fotostock; **página 179** © Marcy J. Levinson/Shutterstock, Inc.

Capítulo 4

Entrada de capítulo (izquierda) © coko/Shutterstock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Corbis/age fotostock

Capítulo 5

Entrada de capítulo (en medio) © RubberBall/age fotostock

Capítulo 6

Entrada de capítulo (izquierda) © Tomasz Trojanowski/Shutterstock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Kim Steele/Alamy Images; **página 333** © Photoeuphoria/Dreamstime.com; **página 340** Cortesía de Vernon Byrd/U.S. Fish and Wildlife Service; **página 350** © Sergei Chumakov/Shutterstock, Inc.

Capítulo 7

Entrada de capítulo (izquierda) © Joy Brown/Shutterstock, Inc.; **página 399** © SlavaK/Shutterstock, Inc.

Capítulo 8

Entrada de capítulo (izquierda) Cortesía de Christine Myaskovsky; **entrada de capítulo (en medio)** © siloto/Shutterstock, Inc.

Capítulo 9

Entrada de capítulo (en medio, izquierda) © E.A. Janes/age footstock; **entrada de capítulo (en medio, derecha)** © Suzanne Tucker/Shutterstock, Inc.; **página 494** Cortesía de Michael Maggs; **página 499** © Andrjuss/Shutterstock, Inc.

A menos que se indique lo contrario, todas las fotografías y las ilustraciones están bajo el registro de Jones and Bartlett Publishers, LLC. El retrato de los matemáticos fue obra de Diana Coe.

