CAPITULO V

RELACIONES ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

RESUMEN

Se presenta la transformación de coordenadas, desde el punto de vista estructural, no matemático, para relacionar dos sistemas de coordenadas generalizadas o no. Por otra parte, en este capítulo, se presentan aplicaciones únicamente para el Análisis Estático de estructuras no para el Análisis Dinámico.

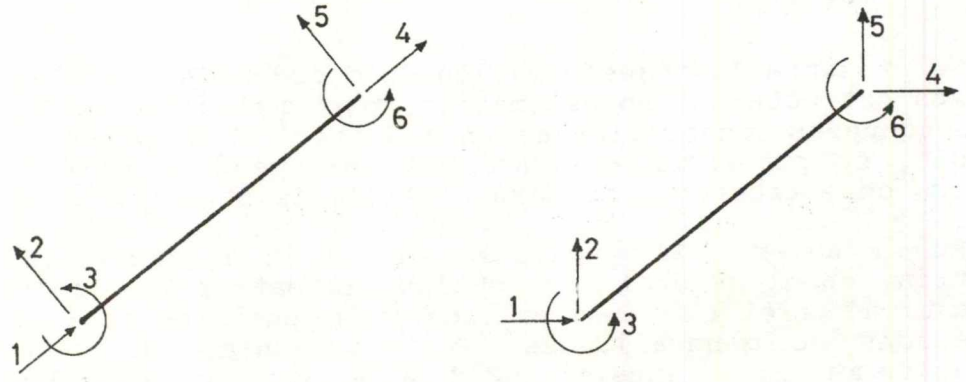
En el numeral 2 se calcula la matriz T, que relaciona la geometría; en el numeral 3 se obtiene la matriz $\mathbf{T}_1$, que relaciona la estática, en el 4 se indican conceptos generales para relacionar coordenadas no generalizadas. Posteriormente, se presenta una aplicación muy importante orientada a la programación del vector de cargas generalizadas **Q**, en pórticos planos con cargas en los miembros.

En el transcurso del capítulo, se resuelven 9 ejemplos, los mismos que sirven para aclarar la teoría que se ha presentado, tanto en este capítulo como en los capítulos anteriores.

5.1 CAMBIO DE COORDENADAS

Uno de los principales capítulos del "Análisis Matricial de Estructuras"y porque no decirlo de la "Dinámica de Estructuras" es el estudio de la "Matriz de Transformación de Coordenadas" o también llamada "Matriz de Paso", que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas $\mathbf{Q} - \mathbf{q}$ a otro $\mathbf{Q}^* - \mathbf{q}^*$, cuando se lo requiere. En efecto, en estática se puede empezar a resolver un problema con un determinado sistema de coordenadas, se puede calcular la matriz de rigidez **K**, el vector de cargas generalizadas **Q** de una determinada estructura mas por alguna razón se decide cambiar el sistema de coordenadas generalizadas; entonces quedan dos alternativas a saber: la primera desechar el trabajo realizado y empezar de nuevo todo el cálculo y, la segunda alternativa que es la más óptima, por medio de la matriz de paso continuar con la solución del problema aprovechando el trabajo ya realizado y calcular $\mathbf{K}^*$ y $\mathbf{Q}^*$, mediante simples operaciones matriciales.

Por otra parte, se aplica fundamentalmente cuando se desea encontrar la matriz de rigidez de miembro de un determinado sistema de coordenadas a partir de otro ya conocido, esto se lo ilustra en el capítulo XII de este libro.



Coordenadas locales Coordenadas globales

Figura N.- 5.1 Una aplicación de la matriz de transformación de coordenadas

En "Dinámica de Estructuras" se puede ver a la matriz de transformación de coordenadas como aquella matriz que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está acoplado a otro sistema de coordenadas, en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está desacoplado, siendo fácil la solución matemática en este último sistema de coordenadas. Todo esto siempre y cuando las matrices sean diagonalizables.

En fin, es extenso el campo de aplicación de la matriz de transformación de coordenadas y tan fácil su cálculo como se lo verá posteriormente. El cambio de coordenadas se lo va a estudiar desde dos puntos de vista:

i) Punto de vista geométrico.

ii) Punto de vista estático.

.2 PUNTO DE VISTA GEOMETRICO

.2.1 Relación entre dos sistemas de coordenadas generalizadas

Al sistema de coordenadas generalizadas $\bar{Q}$ - $\bar{q}$, se denomina "sistema original" o "sistema viejo" y al sistema de coordenadas $\bar{Q}^*$ - $\bar{q}^*$, "sistema nuevo". En este numeral se estudia la relación existente entre $\bar{q}$ y $\bar{q}^*$. Nótese que ambas son coordenadas generalizadas.

El pórtico plano de la figura 5.2.1 tiene tres grados de libertad, pudiendo ser el sistema $\bar{Q}$ - $\bar{q}$ el indicado en la figura 5.2.2 y el sistema $\bar{Q}^*$ - $\bar{q}^*$ el presentado en la figura 5.2.3. *1

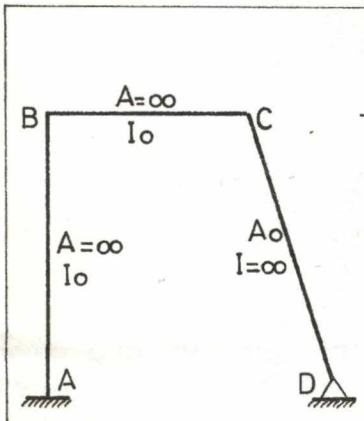


Figura N.- 5.2.1

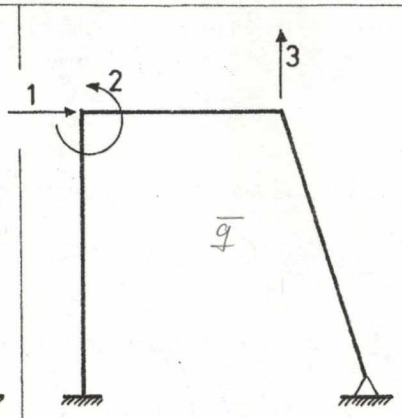


Figura N.- 5.2.2
Sistema viejo $\bar{Q}$-$\bar{q}$

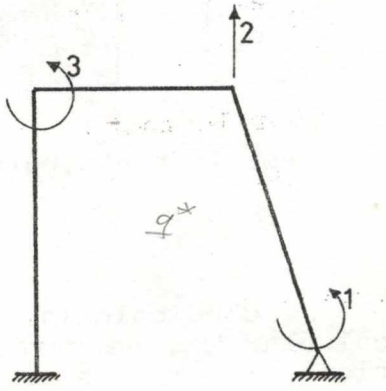


Figura N.- 5.2.3
Sistema nuevo $\bar{Q}^*$-$\bar{q}^*$

Siempre, cualquier transformación se realizará de la siguiente manera: expresar el sistema de coordenadas viejo en función del sistema de coordenadas nuevo. En este caso, se define una relación entre los sistemas de coordenadas generalizadas, de la siguiente forma:

$$\bar{q} = \bar{T} \cdot \bar{q}^* \qquad (1)$$

Donde:

$\bar{T}$: Matriz de transformación de coordenadas.

*1 El sistema $\bar{Q}$-$\bar{q}$ no es el único

En consecuencia,se establece una relación geométrica entre dos sistemas de coordenadas. En este caso la matriz **T** es cuadrada porque los dos sistemas son coordenadas generalizadas. En forma general se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ .. \\ .. \\ q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & \cdots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \cdots & \cdots & T_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{i1} & T_{i2} & T_{i3} & \cdots & \cdots & T_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \cdots & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ \cdots \\ \cdots \\ q_i^* \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n^* \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,para un término cualquiera q_i, se tiene:

$$q_i = T_{i1}\, q_1^* + T_{i2}\, q_2^* + T_{i3}\, q_3^* + \ldots + T_{in}\, q_n^* \qquad (2)$$

¿ Cómo calcular T_{i1} ?. De la ecuación 2, se observa que para calcular T_{i1}, se hará: $q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$ entonces se tiene: $q_i = T_{i1}$. resultando que el valor de T_{i1} es el correspondiente valor de q_i.

En general un término cualquiera T_{ij} es el valor de q_i correspondiente a la deformación elemental $q_j^* = 1$ y las demás nulas.

EJEMPLO N.- 1

Calcular la matriz $\bar{T}$, que relaciona el vector de coordenadas $\bar{q}$ de la figura 5.2.2, con el vector de coordenadas $\bar{q}^*$ de la figura 5.2.3.

SOLUCION

Para obtener, los elementos de la primera columna de la matriz de transformación, se dibuja la deformada elemental $q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$. Esto se presenta en la figura 5.2.4, se deja al estudiante la explicación de la deformada respectiva.

$q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$

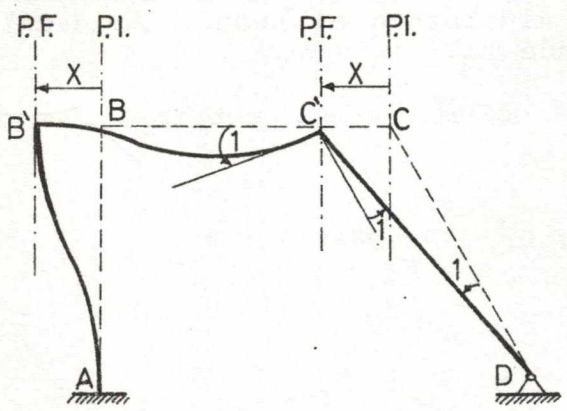


Figura N.- 5.2.4 Diagrama elemental q_1*

Al medir los desplazamientos en el sistema de coordenadas $\overline{q}$, se encuentra:

$T_{11} = -x = q_1$
$T_{21} = 0 = q_2$
$T_{31} = 0 = q_3$

Para obtener los términos de la segunda columna de $\overline{T}$ se construye la deformada elemental q_2*.

$q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 2$

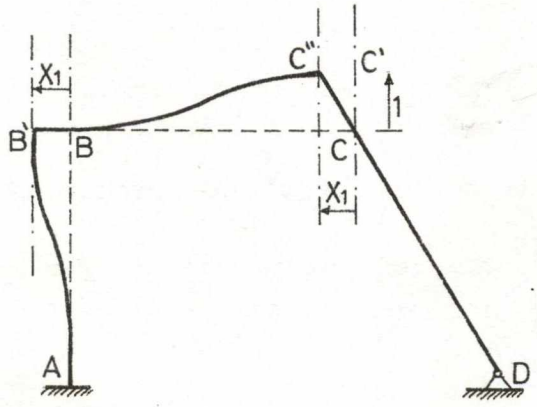


Figura N.- 5.2.5 Diagrama elemental q_2^*

El nudo B, se desplaza horizontalmente hacia la izquierda x_1, por lo tanto: $T_{12} = - x_1 = q_1$. No rota el nudo B, esto implica que $T_{22} = 0 = q_2$. Finalmente el nudo C se desplaza verticalmente la unidad, de donde $T_{32} = 1 = q_3$.

La última columna de la matriz $\overline{T}$, se obtendrá del diagrama elemental:

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i^* = 0 \quad para \ i \neq 3$$

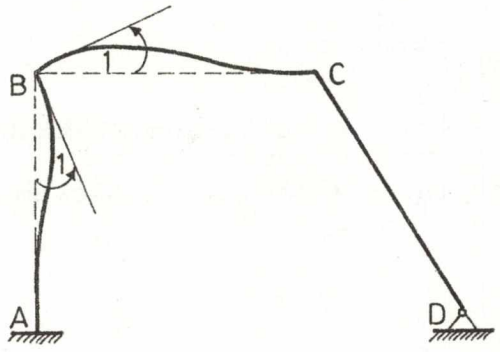


Figura N.- 5.2.6 Diagrama elemental q_3^*

De donde:

$T_{13} = 0 = q_1$
$T_{23} = 1 = q_2$
$T_{33} = 0 = q_3$

Por lo tanto, la matriz de transformación $\overline{T}$, es:

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} -x & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

El cálculo de x y x_1 se realiza empleando Geometría.

5.2.2 Relación entre dos sistemas de cargas

Se desea saber que relación existe entre $\bar{Q}^*$ y $\bar{Q}$. Dado que $\bar{q} = \bar{T}\,\bar{q}^*$. Para encontrar esta relación se da un desplazamiento virtual cualquiera a la estructura; por ejemplo, con relación al pórtico de la figura 5.2.1, en la figura 5.2.7, se presenta el diagrama virtual. Este es producido por un sistema de cargas que actúa sobre el pórtico.

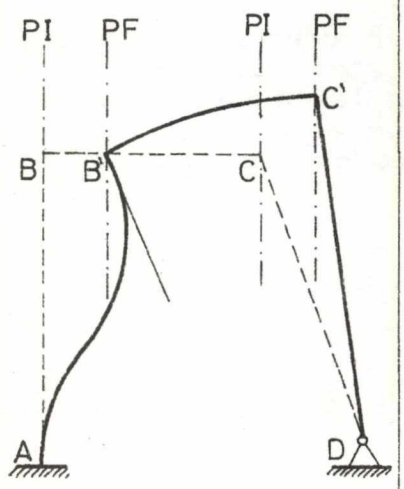


Figura N.-5.2.7
Diagrama virtual

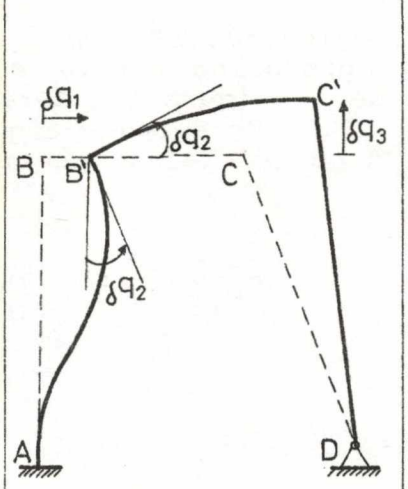


Figura N.- 5.2.8
Sistema Q-q

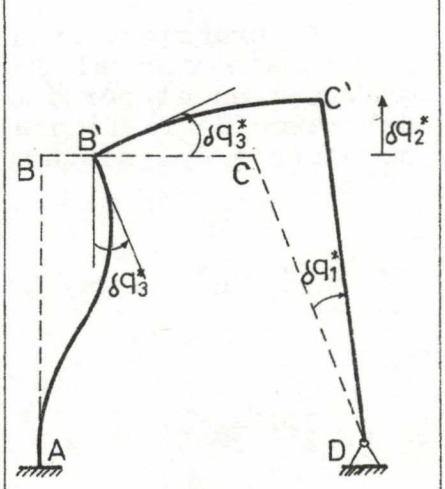


Figura N.- 5.2.9
Sistema Q^*-q^*

Los desplazamientos virtuales, se pueden medir en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas. El "sistema viejo", figura 5.2.8 o el "sistema nuevo", figura 5.2.9. La relación que existe entre estos dos sistemas de coordenadas, es la siguiente:

$$\delta\bar{q} = \bar{T}.\delta\bar{q}^* \qquad (3.1)$$

El trabajo virtual (TV_1) de las cargas que actúan sobre el pórtico de la figura 5.2.1, en los desplazamientos virtuales de la estructura de la figura 5.2.8, es:

$$TV_1 = Q_1.\delta q_1 + Q_2.\delta q_2 + Q_3.\delta q_3 \qquad (3.2)$$

En forma matricial, la ecuación 3.2, queda:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$TV_1 = \delta \overline{q}^t \, \overline{Q} \qquad (3.3)$$

El trabajo virtual calculado TV_1 debe ser axactamente igual, al trabajo virtual TV_2, producido por el sistema de cargas que gravitan en el pórtico de la figura 5.2.1 en los desplazamientos del marco de la figura 5.2.9. En virtud de que el trabajo virtual no depende del sistema de coordenadas, puesto que la solución es única.

$$TV_2 = \begin{bmatrix} \delta q_1^* & 2q_2^* & \delta q_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_{2*} \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

$$TV_2 = \delta \overline{q}^{*\,t} \, \overline{Q}^* \qquad (3.4)$$

Como:

$$TV_1 = TV_2$$

$$\delta \overline{q}^t \, \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*\,t} \, \overline{Q}^*$$

Al sustituir (3.1), en esta última ecuación, se tiene:

$$(\overline{T}.\delta \overline{q}^*)^t \, \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*\,t} \, \overline{Q}^*$$

$$\delta \overline{q}^{*\,t} \, \overline{T}^t \, \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*\,t} \, \overline{Q}^*$$

Se recuerda que en algebra matricial, de la igualdad:

$$\overline{A}.\overline{B} = \overline{A}.\overline{C}$$

No siempre se puede concluir que: $\overline{B} = \overline{C}$

En el problema, el vector δq^*, no es una constante fija, sino que puede adoptar cualquier valor por el mismo hecho de ser virtual. Por lo tanto, se concluye que:

$$\overline{T}^t \, \overline{Q} = \overline{Q}^* \qquad (3.6)$$

Lo demostrado, a partir del ejemplo de la figura 5.2.1, puede generalizarse. En resumen, se tiene:

si $\overline{q} = \overline{T}\,\overline{q}^*$	*entonces*	$\overline{Q}^* = \overline{T}^t \, \overline{Q}$

Una vez que se conoce el vector de cargas generalizadas Q, para un determinado sistema de coordenadas de una estructura; el mismo que ha sido obtenido aplicando el problema primario y complementario, o mediante trabajos virtuales, como se presentó en el capítulo IV; se puede encontrar el vector de cargas generalizadas para un nuevo sistema de coordenadas mediante la ecuación 3.6, debiendo calcular únicamente la matriz **T**.

5.3 PUNTO DE VISTA ESTATICO

Esto No

5.3.1 Relación entre dos sistemas de cargas

El pórtico de la figura 5.3.1, tiene tres grados de libertad y, su sistema de coordenadas $\overline{Q}$ - $\overline{q}$ es el mostrado en la figura 5.3.2 y en la figura 5.3.3, se presenta el sistema $\overline{Q}^*$ - $\overline{q}^*$.

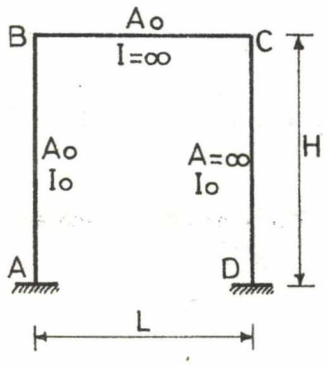


Figura N.- 5.3.1

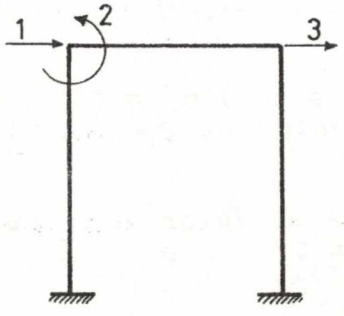


Figura N.- 5.3.2
Sistema $\overline{Q}$-$\overline{q}$

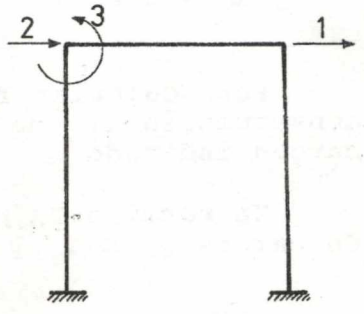


Figura N.- 5.3.3
Sistema $\overline{Q}^*$-$\overline{q}^*$

Se define, ahora, una relación entre los dos sistemas de cargas, de la siguiente manera.

$$\bar{Q} = \bar{T}_1 \, \bar{Q}^* \qquad (4)$$

$\bar{T}_1$ Matriz de transformación, de orden (n x n).

Al desarrollar la ecuación matricial 4, para un sistema de n grados de libertad, se tiene:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ .. \\ .. \\ Q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} & \cdots & \cdots & T_{11n} \\ T_{121} & T_{122} & T_{123} & \cdots & \cdots & T_{12n} \\ T_{131} & T_{132} & T_{133} & \cdots & \cdots & T_{13n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{1i1} & T_{1i2} & T_{1i3} & \cdots & \cdots & T_{1in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{1n1} & T_{1n2} & T_{1n3} & \cdots & \cdots & T_{1nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ Q_3^* \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_i^* \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n^* \end{bmatrix}$$

Para un término cualquiera Q_i , se tiene:

$$Q_i = T_{1i1} \, Q_1^* + T_{1i2} \, Q_2^* + T_{1i3} \, Q_3^* + \ldots + T_{1in} \, Q_n^* \qquad (5)$$

Para calcular T_{1i1}, se hará $Q_1^* = 1$ y $Q_i^* = 0$ para $i \neq 1$, en consecuencia **T_{1i1} es el valor de Q_i, correspondiente al estado de cargas indicado.**

Un término T_{1ij}, será el valor de Q_i correspondiente al estado de cargas $Q_j^* = 1$ y $Q_i^* = 0$, $i \neq j$.

EJEMPLO N.- 2

Calcular la matriz T_1, de la estructura de la figura 5.3.1, si el sistema $\bar{Q}$-$\bar{q}$ es el indicado en la figura 5.3.2 y el sistema $\bar{Q}^*$-$\bar{q}^*$, el indicado en la figura 5.3.3.

SOLUCION

La primera columna de la matriz T_1 se obtiene del estado de carga Q_1^* igual a uno y las demás cargas nulas, como se indica en la figura 5.3.4. Para este estado de carga, se debe hallar el vector de cargas generalizadas $\bar{Q}$. El mismo, se puede calcular de dos maneras, a saber.

i) Por trabajos Virtuales.
ii) Mediante el Problema Primario y Complementario.

$$Q_1^* = 1 \text{ y } Q_i^* = 0 \text{ para } i \neq 1$$

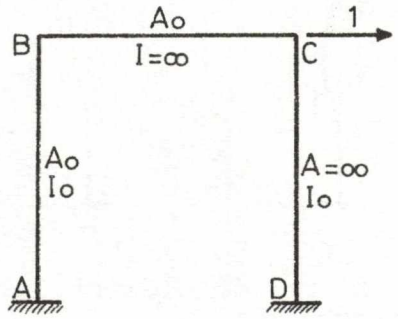
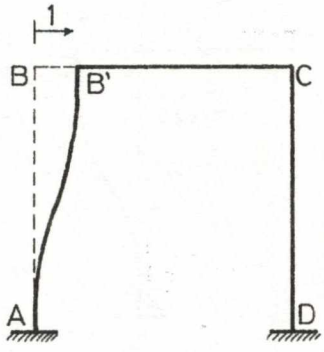


Figura N.- 5.3.4 Estado de carga elemental Q_1^*

Se precede a calcular los elementos de la primera columna de la matriz $\bar{T}_1$, por Trabajos Virtuales. En el sistema de coordenadas de la figura 5.3.2, se tiene:

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 1$$

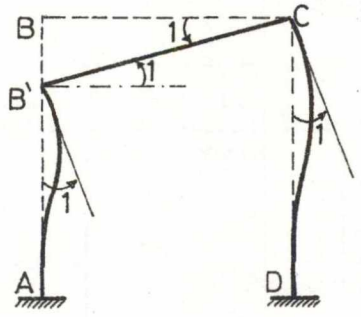


$$Q_1 = T_{111} = 0$$

Figura N.- 5.3.5 Deformada elemental, del desplazamiento virtual q_1

T_{121} es el Trabajo virtual de la carga concentrada unitaria que actúa sobre el pórtico de la figura 5.3.4, en el diagrama elemental $\delta q_2 = 1$ y $\delta q_i = 0$ para $i \neq 2$. Figura 5.3.6.

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad para \quad i \neq 2$$

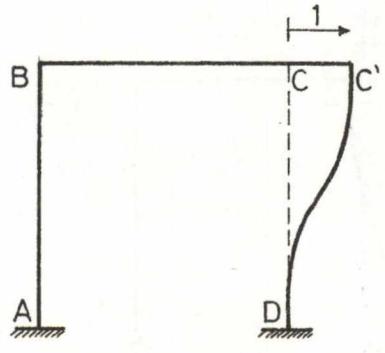


$Q_2 = T_{121} = 0$

Figura N.- 5.3.6 Deformada elemental, correspondiente al desplazamiento virtual q_2

El último término de la columna de la matriz T_1, será:

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad para \quad i \neq 3$$



$Q_3 = T_{131} = 1$

Figura N.- 5.3.7 Deformada elemental, del desplazamiento virtual q_3

Los términos de la segunda columna de la matriz T_1, se obtendrá a través del problema primario y complementario, esto se hace por didáctica únicamente, se pudo obtener por Trabajos Virtuales. El estado de cargas, ahora es:

$$Q_2^* = 1 \quad y \quad Q_i^* = 0 \quad para \quad i \neq 2$$

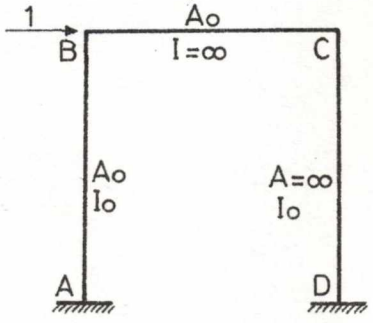


Figura N.- 5.3.8 Estado de Carga elemental Q_2^*

En resumen, se desea obtener el vector de cargas generalizadas Q para el estado de cargas de la figura 5.3.8.

El problema primario, corresponde a tener $\bar{q} = 0$ en la figura 5.3.2, este se muestra en la figura 5.3.9.

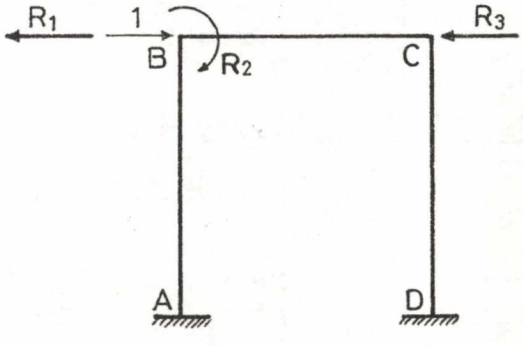
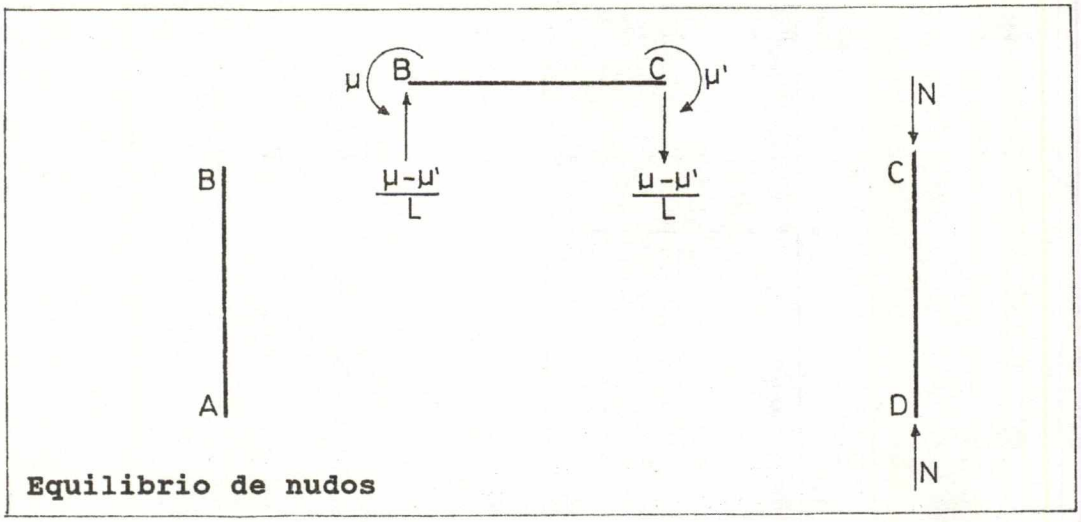


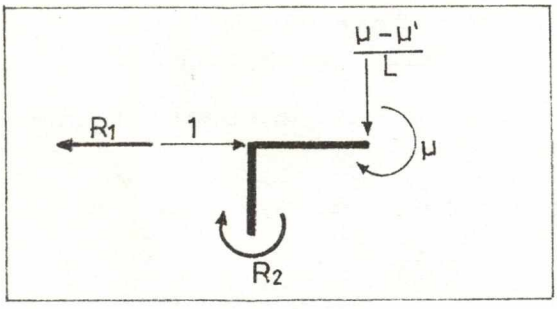
Figura N.- 5.3.9 Problema primario

Equilibrio de miembros



Equilibrio de nudos

Nudo B



$\rightarrow+$

$\Sigma F_x = 0$

$R_1 = 1$

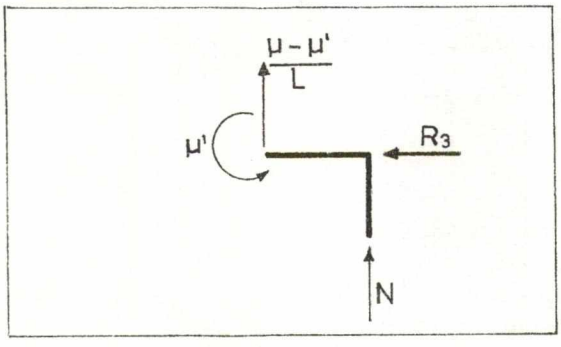
$\Sigma M = 0$

$R_2 + \mu = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$

$\mu = \mu'$

Nudo C



$\rightarrow+$

$\Sigma F_x = 0$

$R_3 = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$

$$N + \frac{\mu + \mu'}{L} = 0$$

$\Sigma M = 0$

$\mu' = 0$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se tiene que todo vale cero excepción de R_1 que es igual a uno. El problema complementario, es muy sencillo, razón por la cual se escribe directamente la respuesta.

$Q_1 = 1 = T_{112}$
$Q_2 = 0 = T_{122}$
$Q_3 = 0 = T_{132}$

La última columna de la matiz T_1 se deja a que el estudiante calcule, su resultado, es:

$T_{113} = 0$
$T_{123} = 1$
$T_{133} = 0$

Por consiguiente, la matriz $\overline{T}_1$, es:

$$\overline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Relación entre dos sistemas de desplazamientos

Dada la relación: $\bar{Q} = \overline{T}_1 \bar{Q}^*$, se desea saber que relación existe entre q y q^*.

En este caso, sobre la estructura actúa, un sistema de fuerzas virtuales arbitrarias y se calcula los trabajos virtuales en los desplazamientos reales.

Para el ejercicio de la figura 5.3.1, se tendrá, por ejemplo las fuerzas virtuales mostradas en la figura 5.3.10.

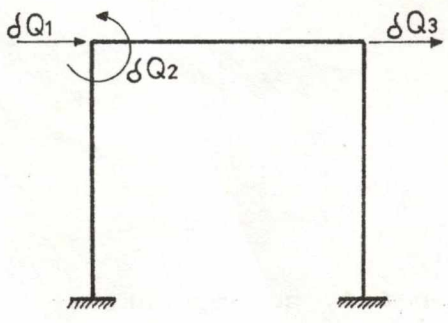


Figura N.- 5.3.10 Fuerzas virtuales

Al calcular el trabajo virtual TV_1, de las fuerzas virtuales, figura 5.3.10, en los desplazamientos reales medidos en el sistema **q**, figura 5.3.2, se tiene:

$$TV_1 = \delta Q_1\ q_1 + \delta Q_2\ q_2 + \delta Q_3\ q_3 \qquad (6.1)$$

De donde:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta Q_1 & \delta Q_2 & \delta Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$TV_1 = \delta \overline{Q}^t\ \overline{q} \qquad (6.2)$$

De igual forma, al calcular el trabajo virtual TV_2 de las fuerzas virtuales, figura 5.3.10, en los desplazamientos reales medidos en las coordenadas q*, figura 5.3.3, se encuentra:

$$TV_2 = \delta \overline{Q}^{*t}\ \overline{q}* \qquad (6.3)$$

Por lo indicado en el numeral 5.2.2, de este capítulo, se tiene:

$$TV_1 = TV_2$$

$$\delta \overline{Q}^t\ \overline{q} = \delta \overline{Q}^{*t}\ \overline{q}* \qquad (6.4)$$

Se sabe:

$$\delta \overline{Q} = \overline{T}_1\ \delta \overline{Q}^* \qquad (6.5)$$

Al reemplazar 6.5 en 6.4, se encuentra:

$$(\overline{T}_1\ \delta \overline{Q}^*)^t\ \overline{q} = \overline{Q}^{*t}\ \overline{q}*$$

$$\delta \overline{Q}^{*t}\ \overline{T}_1^t \overline{q} = \delta \overline{Q}^{*t}\ \overline{q}*$$

Como δQ^* es un sistema de cargas virtuales arbitrario y la igualdad anterior se verifica siempre. Entonces, se tiene:

$$\bar{T}_1^t \, \bar{q} = \bar{q}* \tag{6.6}$$

Resumen general:

si	$\bar{Q} = \bar{T}_1 \, \bar{Q}^*$	*entonces:*	$\bar{q}* = \bar{T}_1^t \, \bar{q}$

5.3.3 Relación entre $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$

En el numeral 5.2.1 de este capítulo, se analizó la matriz $\bar{T}$ que relaciona: $\bar{q} = \bar{T} \, \bar{q}^*$ y, en el numeral 5.3.1, se estudió la matriz $\bar{T}_1$, teniéndose: $\bar{Q} = \bar{T}_1 \, \bar{Q}^*$. Se desea encontrar ahora que relación existe entre las matrices $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$.

SOLUCION

Si: $\bar{Q} = \bar{T}_1 \bar{Q}^*$ se tiene que $\bar{q}^* = \bar{T}_1{}^t \, \bar{q}$, sustituyendo este valor en la relación: $\bar{q} = \bar{T} \, \bar{q}^*$, se tiene:

$$\bar{q} = \bar{T} \, (\, \bar{T}_1^t \, \bar{q} \,)$$

Por ser $\bar{q}$ un vector general, se cumple:

$$\bar{T} = (\, \bar{T}_1^t \,)^{-1} \tag{7}$$

Se deja, al estudiante que demuestre la siguiente relación que también existe entre $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$.

$$\bar{T}^t = \bar{T}_1^{-1} \tag{8}$$

La transpuesta de la matriz $\bar{T}$ es igual a la matriz inversa de $\bar{T}_1$.

5.4 RELACION ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS NO GENERALIZADAS

5.4.1 Relación $\overline{q}_{ng} = \overline{T}\ \overline{q}$

Para la estructura de la figura 5.4.1, cuyos miembros son totalmente flexibles, se han elegido dos sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la figura 5.4.2 y 5.4.3. El primer sistema de coordenadas **q** es generalizado ya que éste tiene coordenadas que son independientes. En cambio $\mathbf{q}_{ng}$ **no es generalizado** ya que este tiene coordenadas que son dependientes.

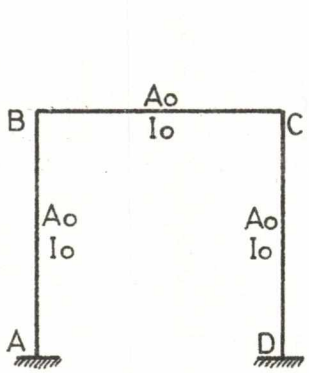


Figura N.- 5.4.1

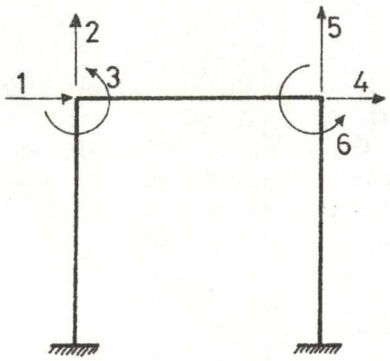


Figura N.- 5.4.2
Coordenadas
generalizadas

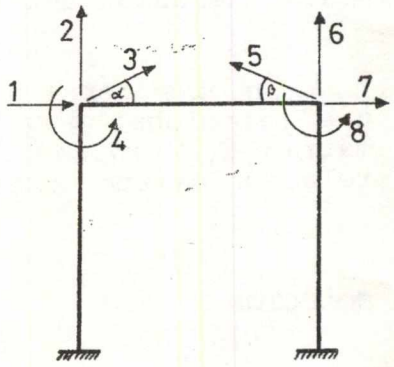


Figura N.- 5.4.3
Coordenadas
no generalizadas.

La relación entre los dos sistemas de coordenadas, se define de la siguiente manera:

$$\overline{q}_{ng} = \overline{T}\ \overline{q} \qquad (9)$$

Donde:

$\overline{T}$ Matriz de transformación de coordenadas. La matriz T, en este caso, no es cuadrada, es de orden (**n** x **m**). Siendo:

n Número de coordenadas del sistema no generalizado $\mathbf{q}_{ng}$.
m Número de coordenadas del sistema generalizado **q**.

Para el ejemplo que se está analizando, figura 5.4.1, la matriz T, tendrá 8 filas y 6 columnas.

Por un procedimiento similar a los realizados anteriormente se puede demostrar fácilmente que un término cualquiera **Tij será el valor de la componente q_{ing}, medido en el sistema de coordenadas no generalizado, correspondiente al diagrama elemental $q_j = 1$ y $q_i = 0$ para $i \neq j$,** Diagrama realizado en el sistema de coordenadas generalizadas.

Para el sistema de coordenadas presentado en las figuras 5.4.2 y 5.4.3, no se puede escribir: $\mathbf{q = T\ q_{ng}}$, puesto que existen condiciones de restricción entre las coordenadas **q. Por lo tanto, la relación inversa sólo será válida si los dos sistemas de coordenadas son generalizadas.**

5.4.2 Relación $\bar{Q} = \bar{T}^t \bar{Q}_{ng}$

Dada la relación: $\bar{q}_{ng} = \bar{T}\ \bar{q}$, Se demuestra por medio por medio de trabajos virtuales que: $\bar{Q} = \bar{T}^t\ \bar{Q}_{ng}$. Esta ecuación, indica que si se conocen los valores de $\bar{Q}_{ng}$ se podrá determinar cuanto vale $\bar{Q}$, pero, en general no se podría determinar $\bar{Q}_{ng}$ conocido los valores de $\bar{Q}$.

Esto es si se desea utilizar la estática únicamente, ya que para calcular Q_{ng} a partir de Q (dato) se procederá de la siguiente manera:

i) Calcular la matriz T por geometría, utilizando la ecuación 9
ii) Obtener $\bar{T}^t$.
iii) Calcular $(\bar{T}^t)^{-1}$. Esto será posible si T^t es una matriz singular, caso contrario no se puede resolver el problema.
iv) Calcular: $\bar{Q}_{ng} = (\bar{T}^t)^{-1}\ \bar{Q}$.

5.5 CALCULO DEL VECTOR Q, POR MEDIO DE LA MATRIZ $\bar{T}$ → Desde aquí

5.5.1 Matriz $\bar{T}_{2\text{-}3}$ (Matriz de Dirección)

Como se estudiará en el capítulo XII, se denomina matriz $\bar{T}_{2\text{-}3}$ a la matriz que relaciona los sistemas de coordenadas de miembro de la figura 5.1 → copia lo de la hoja

Esta matriz permite pasar de coordenadas locales a globales. Por didáctica se presenta nuevamente, estos sistemas de coordenadas, a continuación.

MATRIZ DE ROTACION

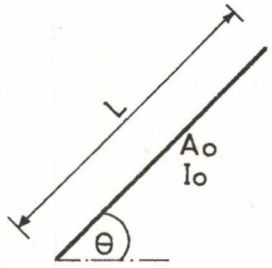
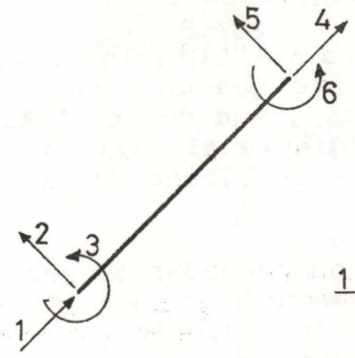
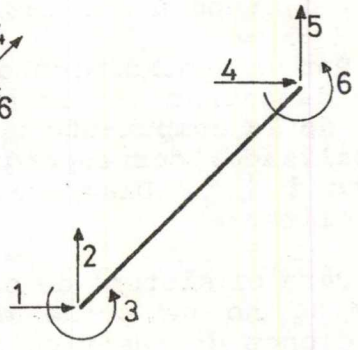


Figura N.- 5.5.1



LOCALES

Figura N.- 5.5.2
Sistema q



GLOBALES

Figura N.- 5.5.3
Sistema q^*

En la figura 5.5.1, se define:

L Longitud del miembro.

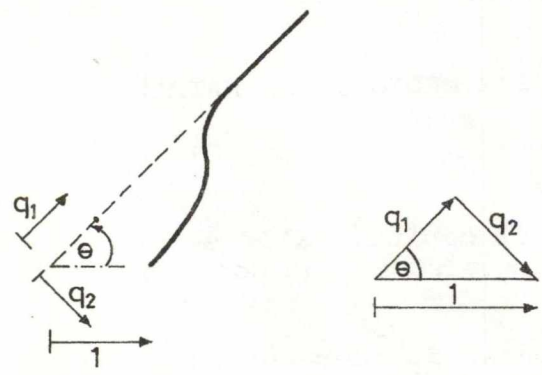
θ Angulo que forma el eje del miembro con el eje X.

. Cálculo de $\bar{T}_{2-3}$

$$\bar{q} = \bar{T}_{2-3}\ \bar{q}^*$$

primera columna de $\bar{T}_{2-3}$

$q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$



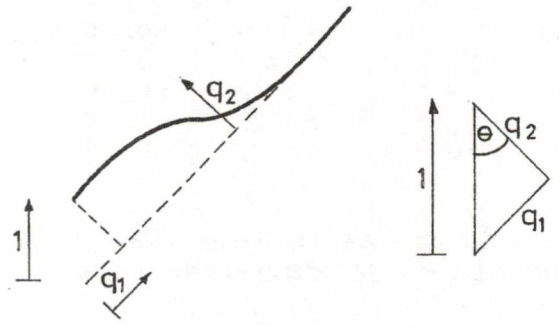
$q_1 = \cos\theta$
$q_2 = -\operatorname{sen}\theta$
$q_3 = 0$
$q_4 = q_5 = q_6 = 0$

Figura N.- 5.5.4 Deformada elemental q_1^*

Objetivo: Se va a encontrar la matriz que permite pasar de coordenadas locales a globales, en algunos libros Matriz $\bar{R}$ aquí Matriz $\bar{T}_{2-3}$

Segunda columna de $\overline{T}_{2-3}$

$q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 2$

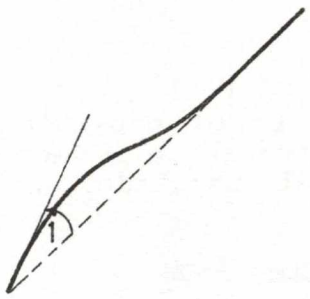


$q_1 = \text{sen } \theta$
$q_2 = \cos \theta$
$q_3 = 0$
$q_4 = q_5 = q_6 = 0$

Figura N.- 5.5.5 Deformada elemental q_2^*

Tercera columna de T_{2-3}

$q_3^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 3$



$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 1$
$q_4 = q_5 = q_6 = 0$

Figura N.- 5.5.6 Deformada elemental q_3^*

Se deja al lector el cálculo de las restantes columnas de la matriz T_{2-3}. El resultado final se presenta a continuación.

$$\bar{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Es muy importante la matriz T_{2-3} en la programación de pórticos planos. Una aplicación inmediata de lo estudiado en este capítulo, es la siguiente:

Si $\bar{q} = \bar{T}_{2-3}\ \bar{q}^*$ Entonces: $\bar{Q}^* = \bar{T}_{2-3}{}^t\ \bar{Q}$ (11)

Se denomina:

$\bar{Q}_2$ Vector de cargas de empotramiento perfecto en coordenadas locales.

$\bar{Q}_3$ Vector de cargas de empotramiento perfecto en coordenadas globales.

Con esta nomenclatura la ecuación 11, se transforma, en:

$$\bar{Q}_3 = \bar{T}_{2-3}{}^t\ \bar{Q}_2 \quad (12)$$

5.5.2 Cálculo de $\bar{Q}$

En base a la teoría expuesta en el capítulo IV y en este capítulo, el algoritmo para calcular el vector de cargas generalizadas $\bar{Q}$, orientado al uso del computador, es el siguiente:

5.5.2.1 Caso de cargas en las juntas

Cuando las cargas actúan únicamente en las juntas, el cálculo de $\bar{Q}$, es directo. Solamente se identifican los grados de libertad en los cuales actúan las cargas.

El usuario de un programa de computación, deberá indicar la junta cargada, la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento. En base a la junta cargada se obtienen los correspondientes grados de libertad.

EJEMPLO N.- 3

Calcular el vector de cargas generalizadas para el marco de la figura 5.6.1, cuyos elementos son totalmente flexibles. En la figura 5.6.2, se presenta el sistema de coordenadas generalizadas.

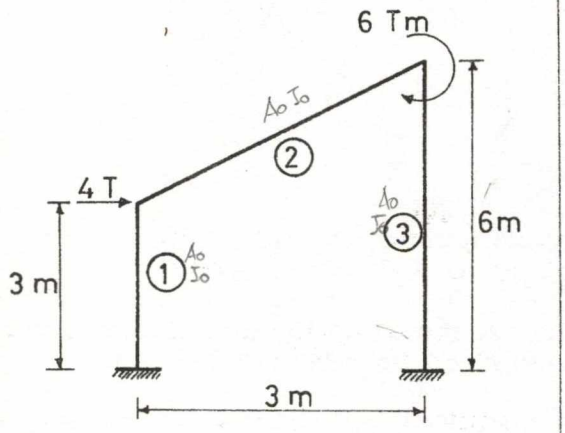


Figura N.- 5.6.1 Datos de las cargas

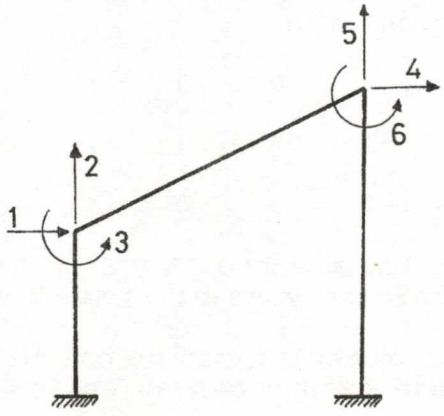


Figura N.- 5.6.2 Sistema de coordenadas $\overline{Q}$ - $\overline{q}$

SOLUCION

La fuerza horizontal de 4 T, está aplicada en el grado de libertad 1 y el momento de 6 T m, en el grado de libertad 6. Se recuerda la convención de signos: Fuerza horizontal positiva si está dirigida hacia la derecha, Fuerza vertical positiva si está dirigida hacia arriba y momento positivo si es antihorario.

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Se estudia el algoritmo para calcular Q en pórticos planos cuyos elementos son totalmente flexibles . La programación se facilita notablemente en este caso pudiendo tenerse pórticos con elementos no ortogonales como el de la figura 5.6.1.

5.5.2.2 Caso de cargas en los miembros

Se define el vector de colocación de un miembro **i**, como VC(i), a un vector de 6 elementos que contiene los grados de libertad del nudo inicial y nudo final de un miembro, en coordenadas globales. Tiene 6 elementos para pórticos planos.

Para la estructura de la figura 5.6.1 los vectores de colocación, son:

$\overline{VC}(1) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ]$

$\overline{VC}(2) = [\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\ ]$

$\overline{VC}(3) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad 6\ ]$

En los miembros 1 y 3 se ha considerado el nudo inicial, en el empotramiento y en el miembro inclinado a la izquierda.

El procedimiento de cálculo del vector de cargas generalizadas Q, cuando existe cargas en los miembros, es el siguiente:

i) Encontrar el vector de empotramiento perfecto de cargas, en coordenadas locales, $\bar{Q}_2$, de cada uno de los miembros cargados.

ii) Obtener la matriz $\overline{T}_{2\text{-}3}$ de los elementos con cargas en los miembros.

iii) Calcular el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales $\bar{Q}_3$ y cambiarle de signo, para tener cargas en las juntas.

$$\bar{Q}_3 = - \overline{T}_{2\text{-}3}^{\,t}\ \bar{Q}_2$$

iv) Mediante el vector de colocación, correspondiente al miembro cargado realizar el ensamblaje y calcular el vector de cargas generalizadas.

EJEMPLO N.- 4

Calcular el vector $\bar{Q}$, de la estructura de la figura 5.7.1, cuyos elementos son totalmente flexibles, por medio de la matriz $\overline{T}_{2\text{-}3}$.

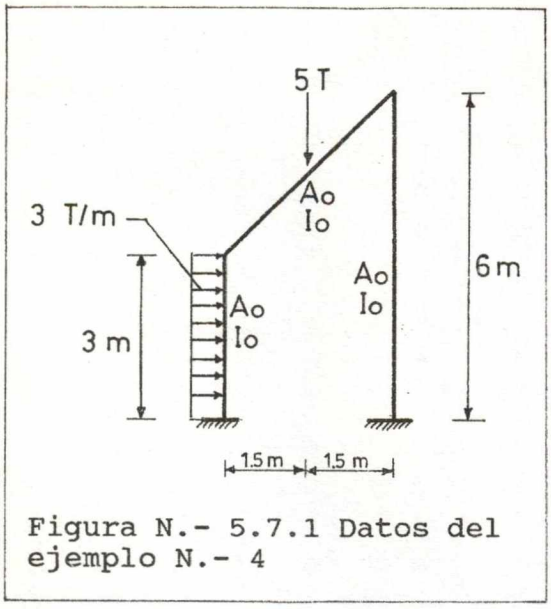


Figura N.- 5.7.1 Datos del ejemplo N.- 4

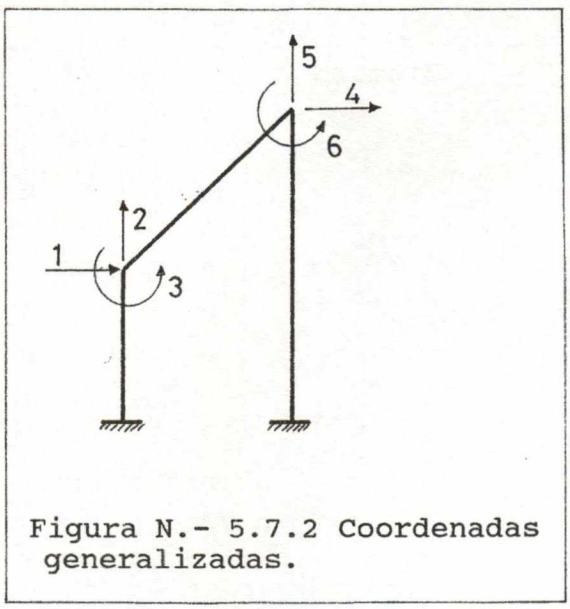
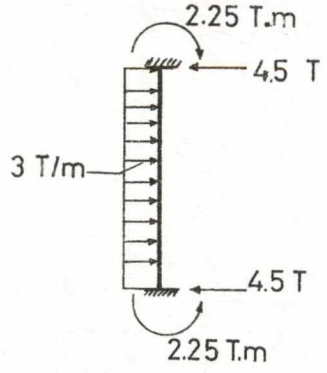


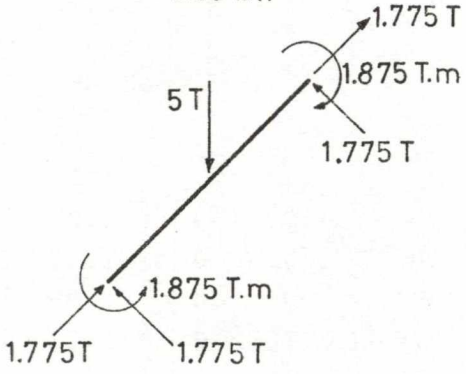
Figura N.- 5.7.2 Coordenadas generalizadas.

SOLUCION

i) Vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales.



$$\overline{Q}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 4.50 \\ 2.25 \\ 0.00 \\ 4.50 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$



$$\overline{Q}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.775 \\ 1.875 \\ 1.775 \\ 1.775 \\ -1.875 \end{bmatrix}$$

ii) Matriz $\overline{T}_{2\text{-}3}$

Miembro 1 $\quad \theta = 90°$

Miembro 2 $\quad \theta = 45°$

$$\overline{T}_{2-3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{T}_{2-3}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Vector $\overline{Q}_3$

$$\overline{Q}_3 = - \overline{T}_{2-3}{}^t \overline{Q}_2$$

$$\overline{Q}_3^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 4.50 \\ 2.25 \\ 0.00 \\ 4.50 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$\overline{Q}_3^{(2)} = -\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.775 \\ 1.875 \\ 1.775 \\ 1.775 \\ -1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

iv) Ensamblaje de $\overline{Q}$

$\overline{VC}(1) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ]$

$\overline{VC}(2) = [\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\ ]$

$$\overline{Q}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.50 & 0 \\ 0.00 & 0 \\ -2.50 & 0 \\ 4.50 & 1 \\ 0.00 & 2 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{posición}$$

$$\overline{Q}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000 & 1 \\ -2.500 & 2 \\ -1.875 & 3 \\ 0.000 & 4 \\ -2.500 & 5 \\ 1.875 & 6 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{posición}$$

VECTOR $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 4.5 + 0.0 \\ 0.0 - 2.5 \\ 2.25 - 1.875 \\ 0.0 \\ -2.5 \\ 1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.500 \\ -2.500 \\ 0.375 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO N.- 5

Para la estructura de la figura 5.8.1, se presentan dos sistemas de coordenadas generalizadas, en las figuras 5.8.2 y

5.8.3. Calcular la matriz $\overline{T}$, de transformación de coordenadas, tal que $\overline{q} = \overline{T}\ \overline{q}^*$.

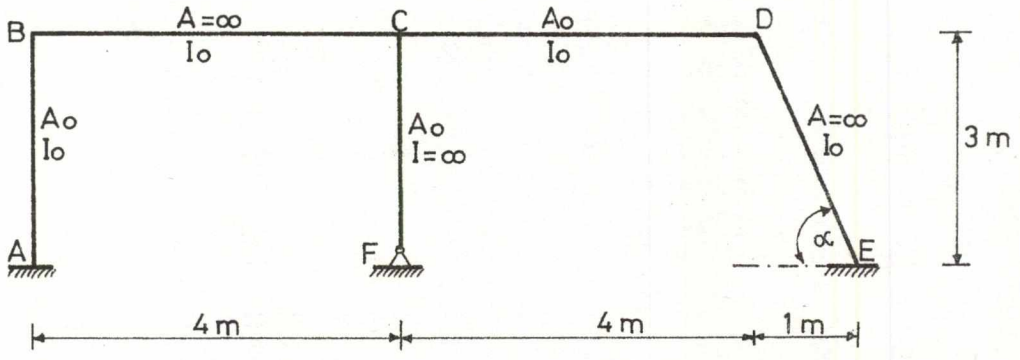


Figura N.- 5.8.1 Pórtico plano del ejemplo N.- 5

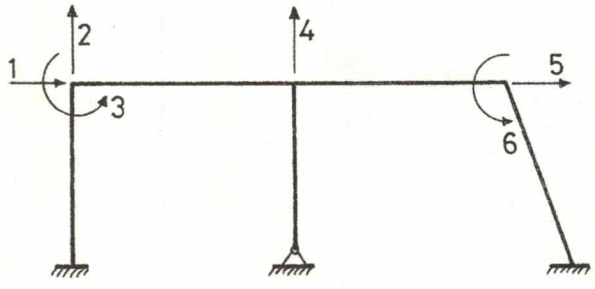


Figura N.- 5.8.2 Sistema de coordenadas $\overline{Q}$ - $\overline{q}$

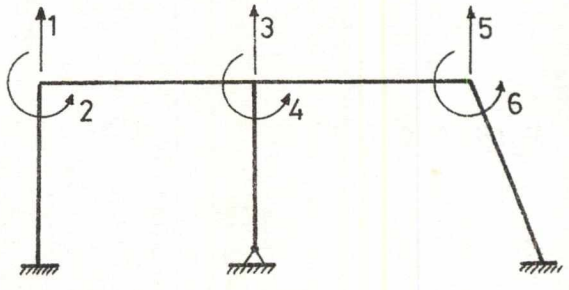
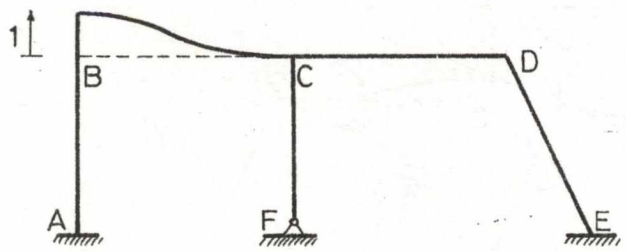


Figura N.- 5.8.3 Sistema de coordenadas $\overline{Q}^*$- $\overline{q}^*$

SOLUCION

Primera columna de la matriz $\overline{T}$

$q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$

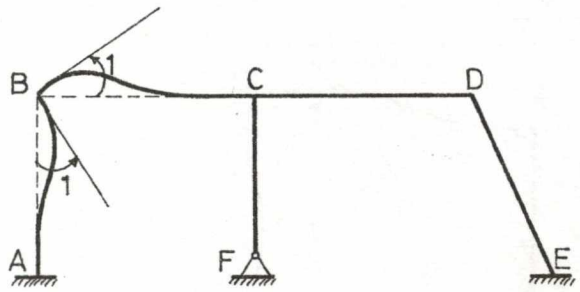


$q_1 = 0$
$q_2 = 1$
$q_3 = 0$
$q_4 = 0$
$q_5 = 0$
$q_6 = 0$

Figura N.- 5.8.4 Deformada elemental q_1^*

Segunda columna de $\overline{\mathbf{T}}$

$q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 2$

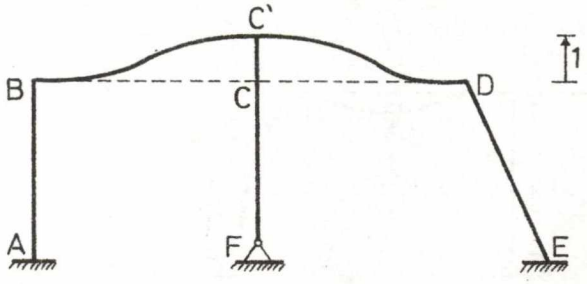


$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 1$
$q_4 = 0$
$q_5 = 0$
$q_6 = 0$

Figura N.- 5.8.5 Deformada elemental q_2^*

Tercera columna de $\overline{\mathbf{T}}$

$q_3^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 3$

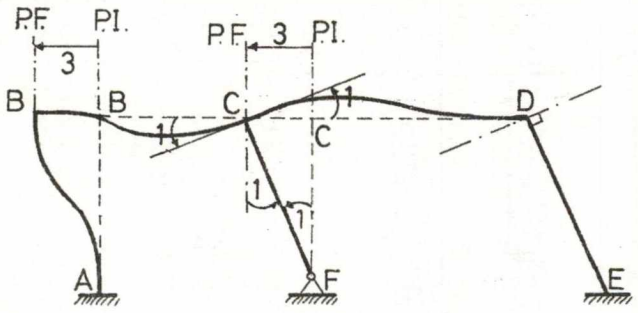


$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 1$
$q_5 = 0$
$q_6 = 0$

Figura N.- 5.8.6 Deformada elemental q_3^*

Cuarta columna de $\overline{\mathbf{T}}$

$\mathbf{q_4^* = 1}$ y $\mathbf{q_i^* = 0}$ para $\mathbf{i \neq 4}$

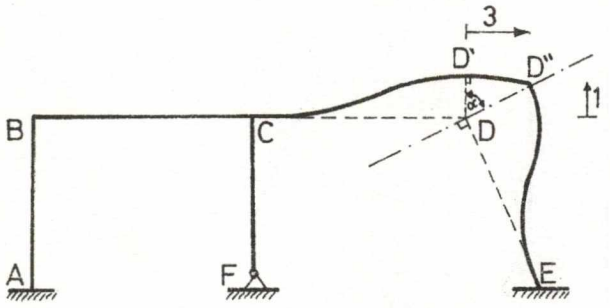


$q_1 = -3$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 0$
$q_5 = 0$
$q_6 = 0$

Figura N.- 5.8.7 Deformada elemental q_4^*

Quinta columna de $\overline{\mathbf{T}}$

$\mathbf{q_5^* = 1}$ y $\mathbf{q_i^* = 0}$ para $\mathbf{i \neq 5}$

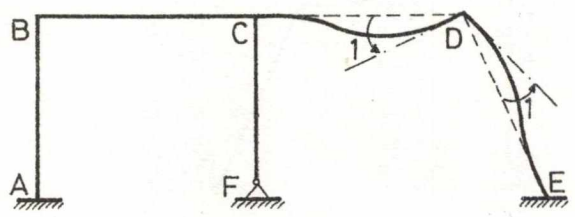


$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 0$
$q_5 = 3$
$q_6 = 0$

Figura N.- 5.8.8 Deformada elemental q_5^*

Sexta columna de $\overline{\mathbf{T}}$

$\mathbf{q_6^* = 1}$ y $\mathbf{q_i^* = 0}$ para $\mathbf{i \neq 6}$



$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 0$
$q_5 = 0$
$q_6 = 1$

Figura N.- 5.8.9 Deformada elemental q_6^*

Matriz $\overline{\mathbf{T}}$

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO N.- 6

Para el pórtico plano que se presenta en la figura 5.9.1, se han seleccionado los sistemas de coordenadas generalizadas de las figuras 5.9.2 y 5.9.3. Encontrar la matriz de transformación de coordenadas $\overline{\mathbf{T}}$.

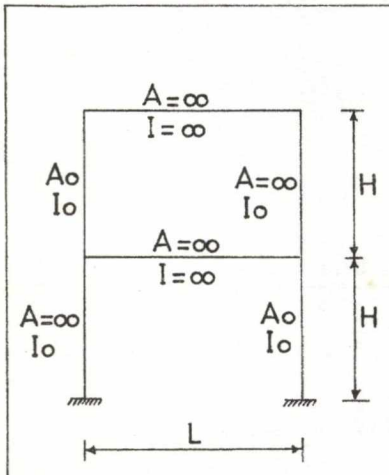


Figura N.- 5.9.1
Estructura del ejemplo N.- 6

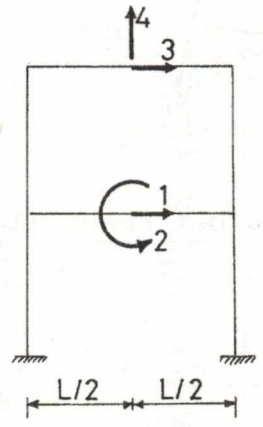


Figura N.- 5.9.2
Sistema $\overline{Q}$-$\overline{q}$

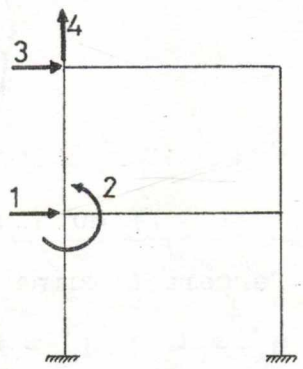


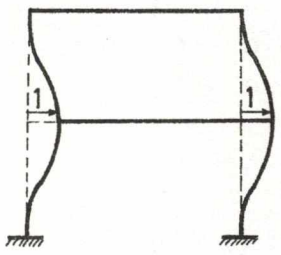
Figura N.- 5.9.3
Sistema $\overline{Q}^*$-$\overline{q}^*$

SOLUCION

$$\overline{q} = \overline{T}\ \overline{q}^*$$

Primera columna de $\overline{T}$

$q_1^* = 1$ y $q_{i*} = 0$ para $i \neq 1$

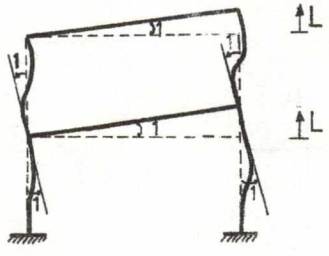


$q_1 = 1$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 0$

Figura N.- 5.9.4 deformada elemental q_1^*

Segunda columna de $\overline{T}$

$q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 2$

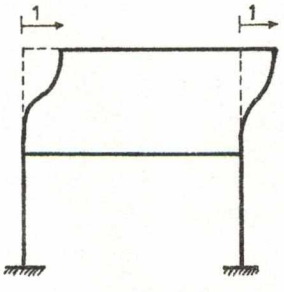


$q_1 = 0$
$q_2 = 1$
$q_3 = 0$
$q_4 = L/2$

Figura N.- 5.9.5 Deformada elemental q_2^*

Tercera columna de $\overline{T}$

$q_3^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 3$

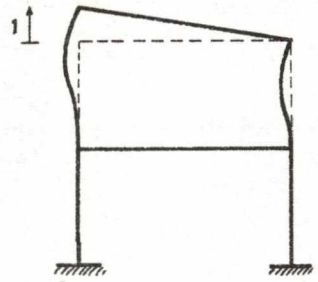


$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 1$
$q_4 = 0$

Figura N.- 5.9.6 Deformada elemental q_3^*

Cuarta columna de $\bar{T}$

$q_4^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 4$



$q_1 = 0$
$q_2 = 0$
$q_3 = 0$
$q_4 = 1/2$

Figura N.- 5.9.7 Deformada elemental q_4^*

Matriz $\bar{T}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO N.- 7

En relación con la estructura y sistemas de coordenadas del ejemplo N.- 5, calcular la matriz $\bar{T}_1$, tal que: $\bar{Q} = \bar{T}_1 \bar{Q}^*$

SOLUCION

Primera columna de la matriz $\bar{T}_1$

$Q_1^* = 1$ y $Q_i^* = 0$ para $i \neq 1$

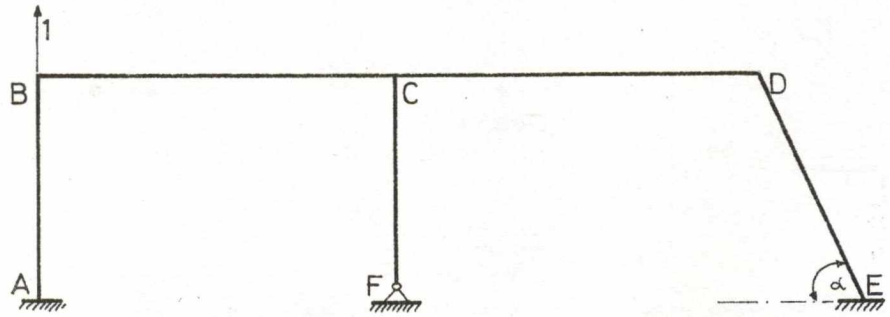


Figura N.- 5.10.1 Estado de carga, para la primera columna de T_1

Se va a calcular la primera columna de la matriz T_1, por medio del problema primario y complementario.

Problema primario

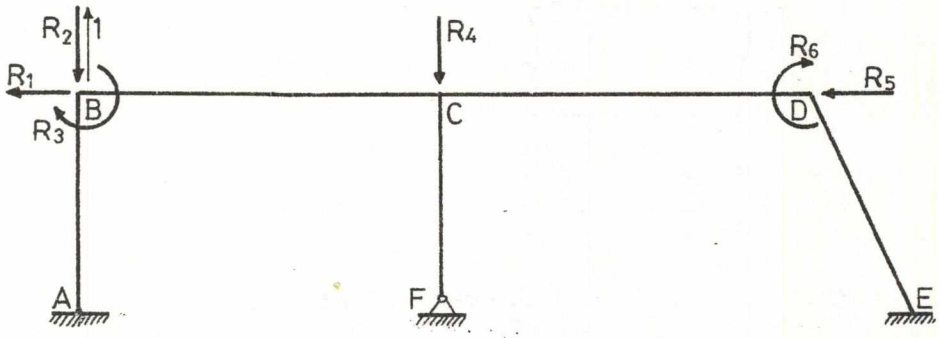
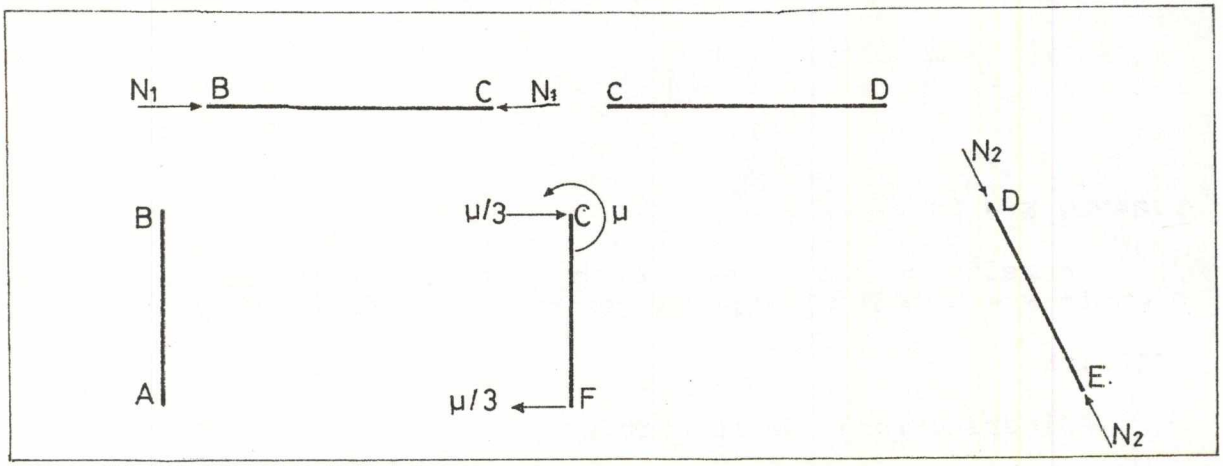


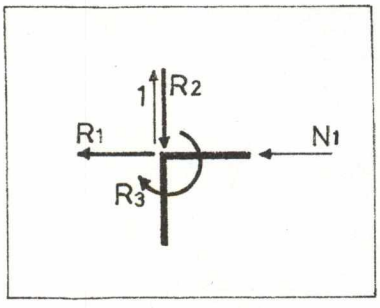
Figura N.- 5.10.2 Problema primario para la primera columna de $\overline{T}_1$

Equilibrio de miembros



Equilibrio de juntas

Junta B



$\rightarrow+$

$\Sigma Fx = 0$

$-N_1 - R_1 = 0$

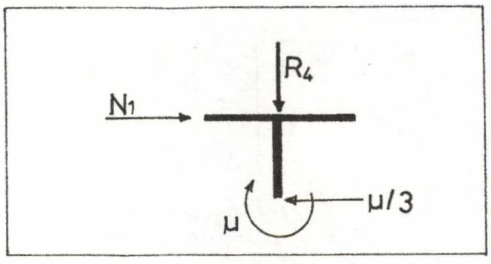
$+\uparrow \Sigma Fy = 0$

$1 - R_2 = 0$

$\Sigma M = 0$

$R_3 = 0$

Junta C

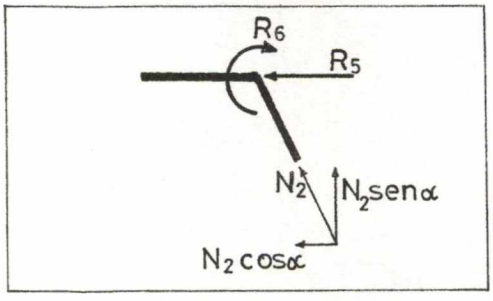


$\rightarrow+$
$\Sigma Fx = 0$
$N_1 - \mu/3 = 0$

$+\uparrow\Sigma Fy = 0$
$-R_4 = 0$

$\Sigma M = 0$
$\mu = 0$

Junta D



$\rightarrow+$
$\Sigma Fx = 0$
$R_5 + N_2 \cos\alpha = 0$

$+\uparrow\Sigma Fy = 0$
$N_2 \operatorname{sen}\alpha = 0$

$\Sigma M = 0$
$R_6 = 0$

De la solución del sistema de ecuaciones, se obtiene:

$R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = N_1 = N_2 = u = 0$ $\qquad R_2 = 1$

Problema Complementario

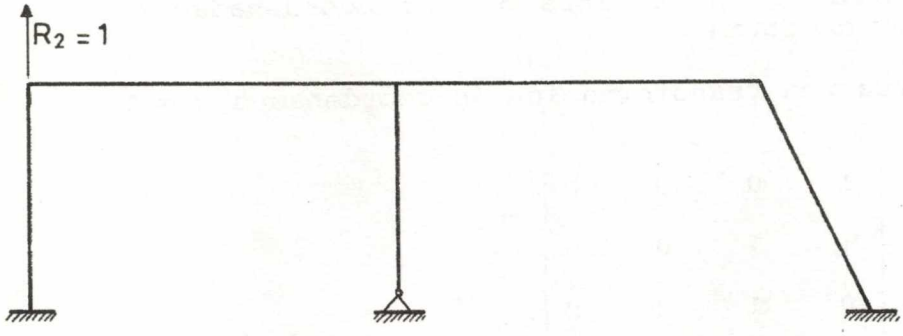


Figura N.- 5.10.3 Problema complementario

Por un procedimiento parecido, se obtendrán las diferentes columnas de la matriz $\mathbf{T}_1$. Como se sabe, el vector Q, también se puede obtener por medio de trabajos virtuales. Se deja al estudiante que obtenga las demás columnas de la matriz $\mathbf{T}_1$, en especial de la cuarta y quinta columna.

MATRIZ $\overline{T}_1$

$$\overline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO N.- 8

1.- Seleccionar un sistema de coordenadas generalizadas $\overline{Q}$ - $\overline{q}$ apropiado.

2.- Encontrar el valor de $\overline{Q}$ que corresponde a la carga mostrada

3.- Encontrar la expresión de las elásticas horizontal y vertical del miembro BC en términos de las coordenadas q_i y de las funciones de forma.

4.- Se efectúa una transformación de coordenadas $\overline{q} = \overline{T} \cdot \overline{q}^*$

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dibujar el estado de desplazamiento $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas.

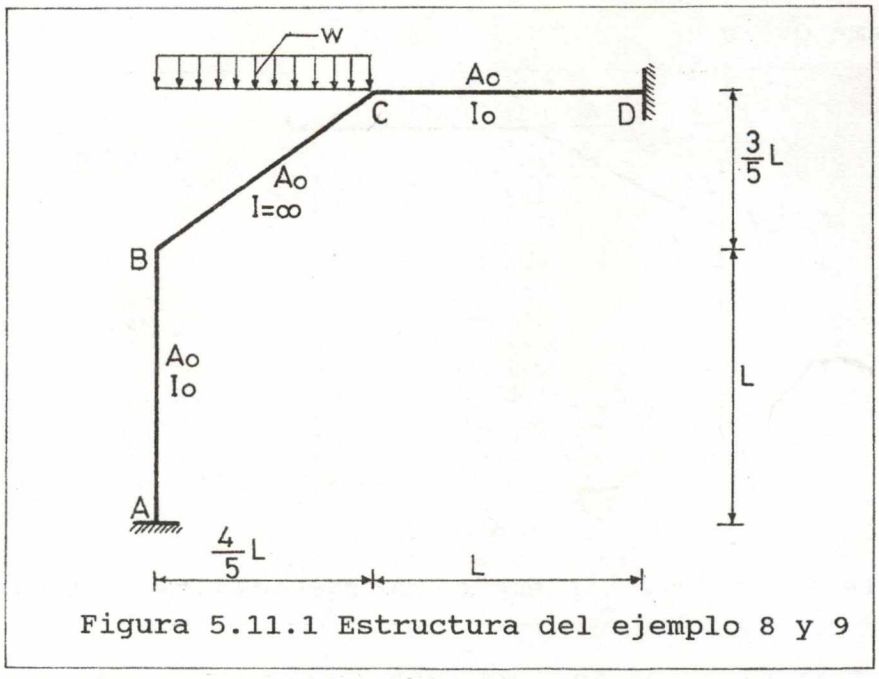
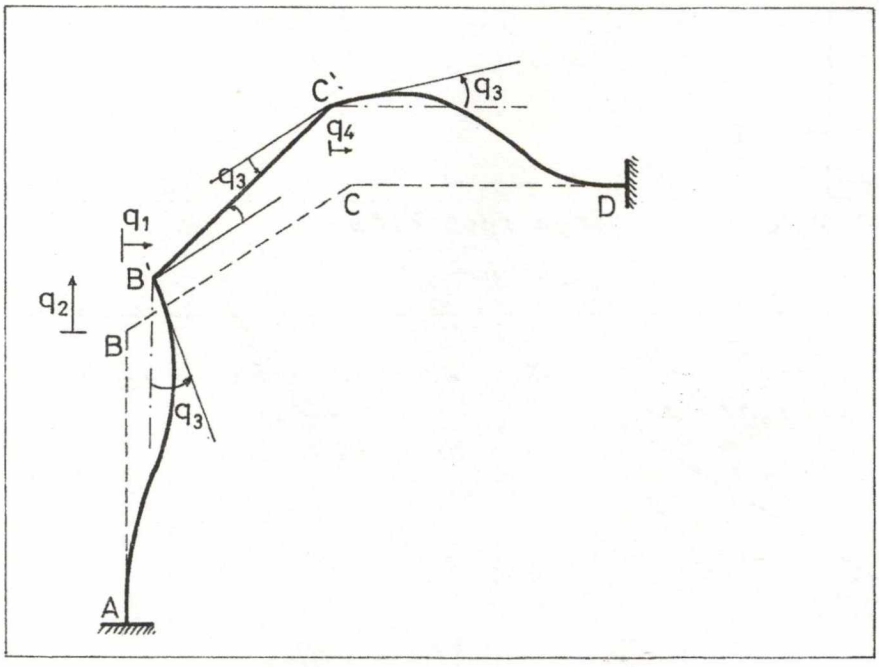


Figura 5.11.1 Estructura del ejemplo 8 y 9

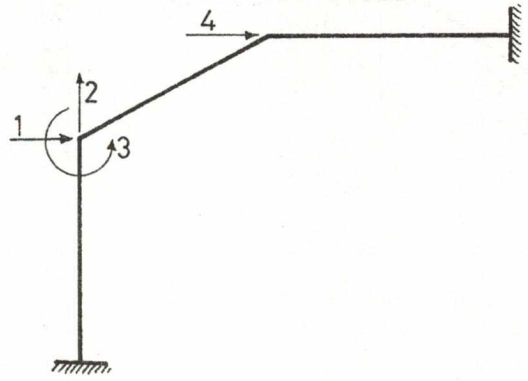
SOLUCION

1. Seleccionar un sistema de coordenadas generalizadas $\overline{Q}$ - $\overline{q}$ apropiado:

1.1 Deformada



1.2 Sistema $\overline{Q}$ - $\overline{q}$

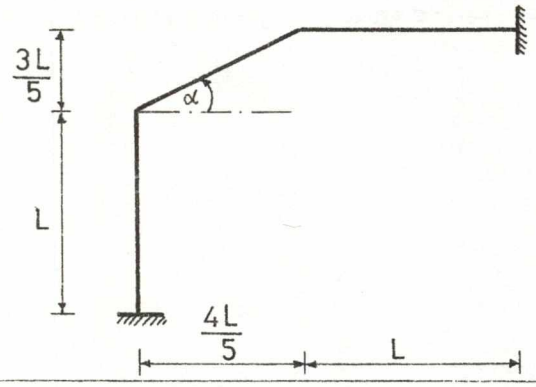


$\overline{Q}$ - $\overline{q}$

Figura N.- 5.11.2 Sistema de coordenadas generalizadas

2.- Encontrar el valor de Q que corresponde a la carga mostrada:

2.1 Parámetros geométricos:



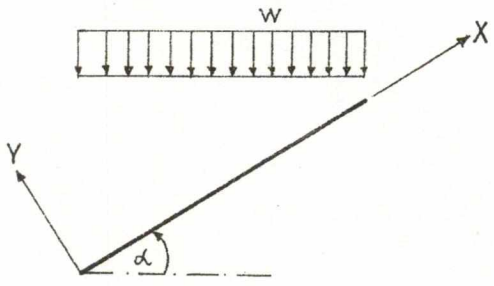
$tg\alpha = 3/4$

$sen\alpha = 3/5$

$cos\alpha = 4/5$

Longitud $\overline{BC}$ = L

2.2 Componentes de la carga repartida.



$$Wy = -W\cos^2\alpha = -\frac{16}{25}W$$

$$Wx = -W\,sen\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}W$$

2.3 Cálculo de $\bar{Q}$ aplicando trabajos virtuales.

Por ser el miembro BC transversalmente rígido se tiene:

$$u(x) = u_1\,\phi_1(x) + u_2\,\phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1 + \Theta_1\,X$$

CALCULO DE Q_1

$\delta q_1 = 1 \qquad \delta q_i = 0 \qquad i \neq 1$

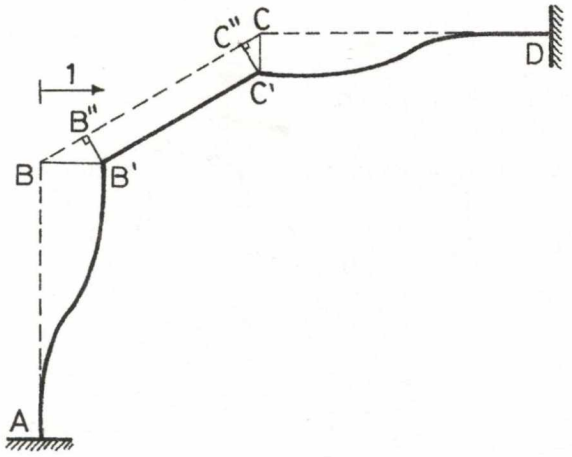
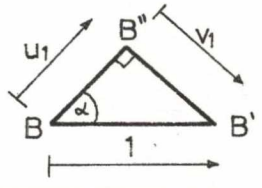


Figura N.- 5.11.3 Deformada elemental δq_1

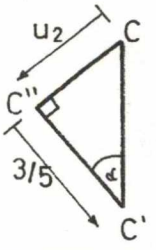
En el triángulo BB'B"



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$v_1 = -sen\alpha = -\frac{3}{5}$$

En el triángulo CC'C"



$$u_2 = -\frac{3}{5}\,tg\alpha = -\frac{9}{20}$$

En resumen para el miembro BC se tiene:

$$u_1 = \frac{4}{5} \qquad u_2 = -\frac{9}{20}$$

$$v_1 = -\frac{3}{5} \qquad v_2 = -\frac{3}{5}$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_1 = \int_o^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\,[u_1\phi_1(x) + u_2\phi_4(x)]\,dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\,(v_1 + \theta_1 X)\,dx$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\,[\frac{4}{5}\,(1 - \frac{X}{L}) - \frac{9}{20}\,\frac{X}{L}]\,dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\,(-\frac{3}{5})\,dx$$

$$Q_1 = \frac{3}{10}W\,L$$

CALCULO DE Q_2

$\delta q_2 = 1 \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$

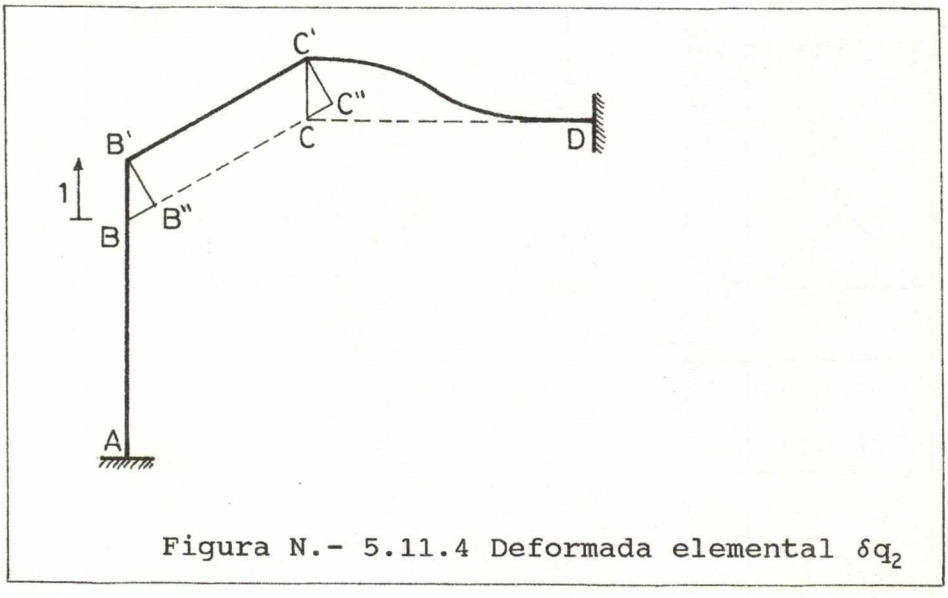
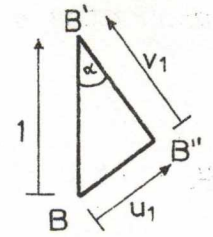


Figura N.- 5.11.4 Deformada elemental δq_2

El triángulo BB'B" es igual al triángulo CC'C"



$$u_1 = sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto, para la barra inclinada BC se tiene:

$$u_1 = \frac{3}{5} \qquad u_2 = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \frac{4}{5} \qquad v_2 = \frac{4}{5}$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_2 = \int_0^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_2 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left[\frac{3}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{3}{5}.\frac{X}{L}\right]dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left(\frac{4}{5}\right)dx$$

$$Q_2 = -\frac{4}{5}W\,L$$

CALCULO DE Q_3

$\delta q_3 = 1$ y $\delta q_i = 0 \quad i \neq 3$

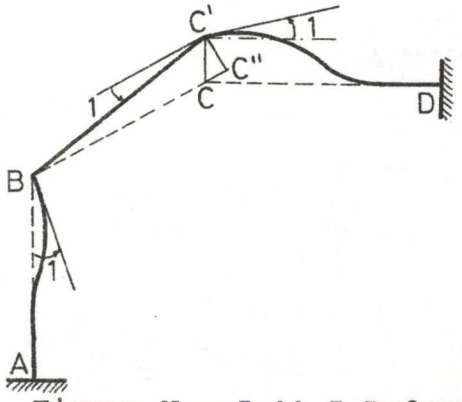
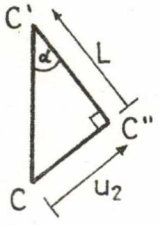


Figura N.- 5.11.5 Deformada elemental δq_3

Por ser los desplazamientos infinitésimos se puede suponer que C'C" = L. Por consiguiente en el triángulo CC'C" se tiene :



$$u_2 = L\ tg\alpha = \frac{3}{4}L$$

Para BC se obtiene:

$u_1 = 0$ $\quad u_2 = \frac{3}{4}L$

$v_1 = 0$ $\quad v_2 = L$

$\theta_1 = 1$ $\quad \theta_2 = 1$

De donde:

$$Q_3 = \int_0^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_3 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\ (\frac{3}{4}L * \frac{X}{L})\,dx + \int_0^L -\frac{16}{25}w\ (x)\,dx$$

$$Q_3 = -\frac{WL^2}{2}$$

CALCULO DE Q_4

$\delta q_4 = 1 \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$

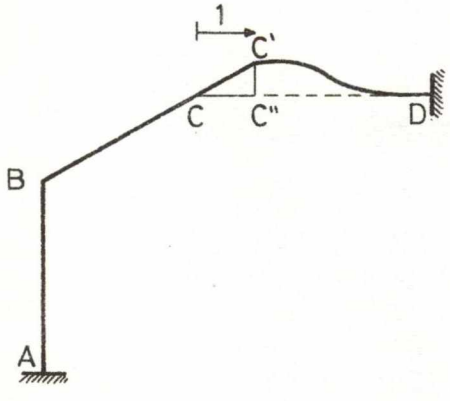
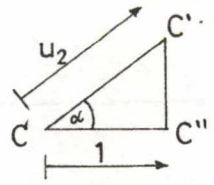


Figura N.- 5.11.6 Deformada elemental δq_4

En el triángulo CC'C" se tiene:



$$u_2 = \sec\alpha = \frac{5}{4}$$

En consecuencia se tiene:

$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$ $\qquad$ $u_2 = 5/4$, $v_2 = \theta_2 = 0$

$$Q_4 = \int_0^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_4 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\,(\frac{5}{4}\ .\ \frac{X}{L})\,dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\,(0)\,dx$$

$$Q_4 = -\frac{3}{10}W\,L$$

MATRIZ $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \frac{WL}{10}\begin{matrix}3\\-8\\-5L\\-3\end{matrix}$$

2.4 Cálculo de Q por medio del problema primario y complementario

Problema primario

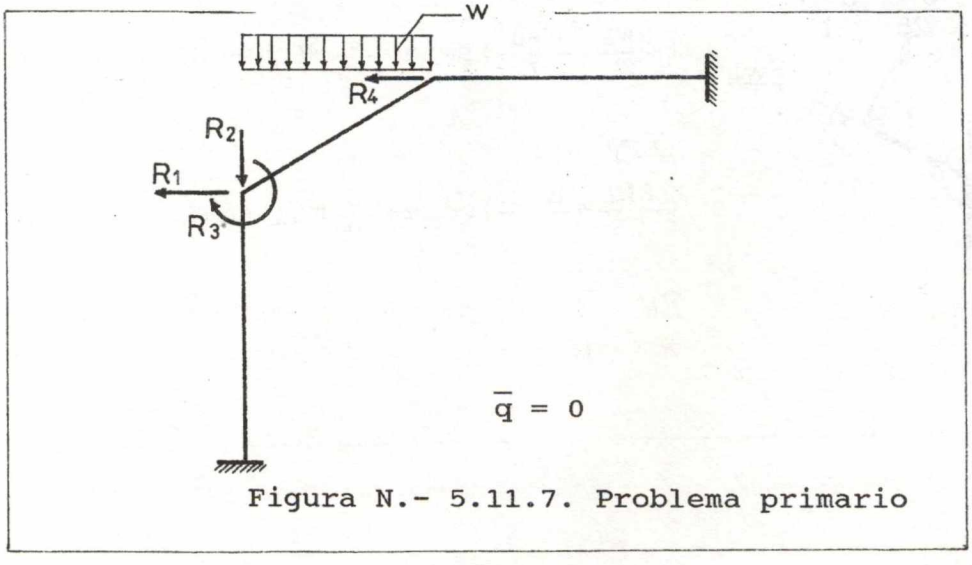
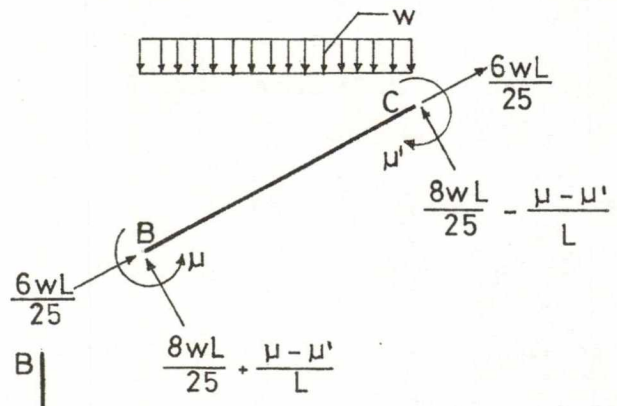


Figura N.- 5.11.7. Problema primario

Equilibrio de miembros:

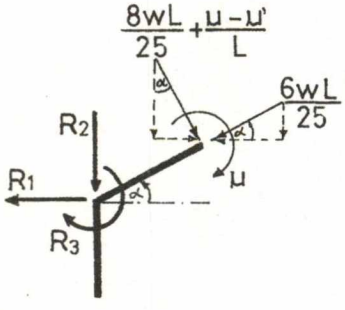


$$N_B = \int_0^L Wx.\phi_1(x)\,dx = \int_0^L \frac{12}{25} W\,(1 - \frac{X}{L})\,dx = \frac{6}{25} WL$$

$$N_C = \int_0^L Wx.\phi_4(x)\,dx = \frac{6}{25}\,WL$$

Equilibrio de juntas

JUNTA B



$$\Sigma Fx = 0$$

$$(\frac{8WL}{25} + \frac{\mu-\mu'}{L})\,sen\alpha - \frac{6}{25} WL\cos\alpha - R_1 = 0 \qquad (Ec.1)$$

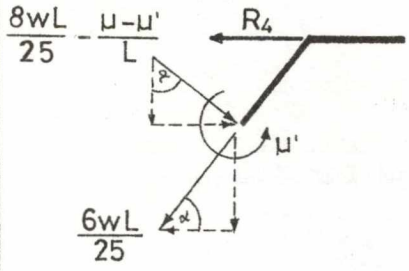
$$\downarrow\Sigma Fy = 0$$

$$(\frac{8WL}{25} + \frac{\mu-\mu'}{L})\cos\alpha + \frac{6}{25} WL\,sen\alpha + R_2 = 0 \qquad (Ec.2)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$R_3 + \mu = 0 \qquad (Ec.3)$$

JUNTA C



$$\Sigma Fx = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} - \frac{\mu-\mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL\cos\alpha - R_4 = 0 \qquad (Ec.4)$$

$$\downarrow \Sigma Fy = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} - \frac{\mu-\mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL\, sen\alpha = 0 \qquad (Ec.5)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$-\mu' = 0 \qquad (Ec.6)$$

Reemplazando $sen\alpha = 3/5$ y $\cos\alpha = 4/5$. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = \frac{3}{10} WL \qquad R_4 = -\frac{3}{10} WL$$

$$R_2 = -\frac{4}{5} WL \qquad \mu = \frac{WL^2}{2}$$

$$R_3 = -\frac{WL^2}{2} \qquad \mu' = 0$$

Problema complementario

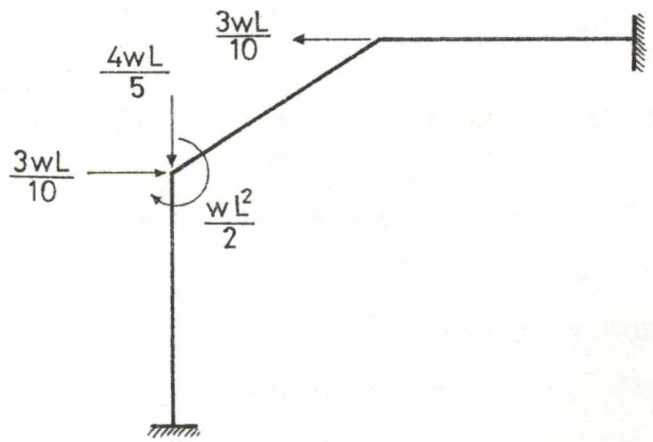


Figura N.- 5.11.8 Problema complementario

MATRIZ $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.- Expresión de la elástica horizontal y vertical del miembro BC en términos de las coordenadas q_i y de las funciones de forma

3.1 Componente vertical del nudo C

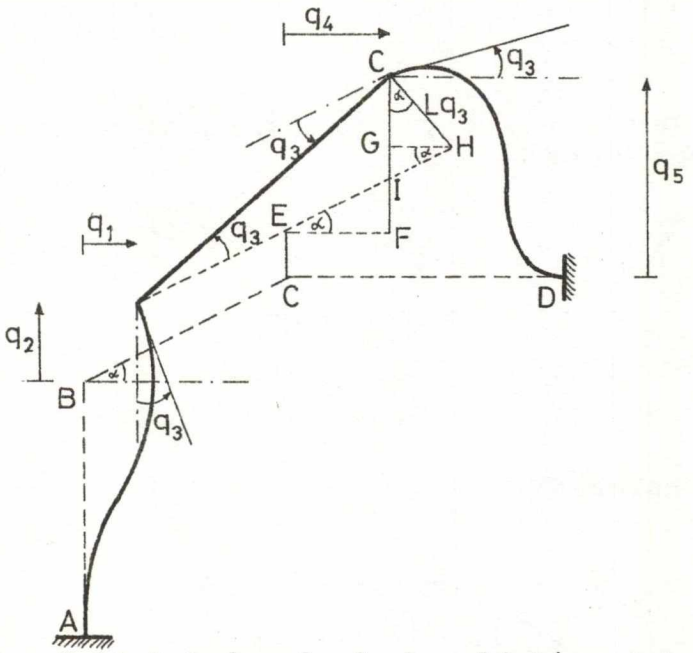
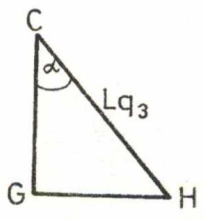


Figura N.- 5.11.9 Ordenada de la elástica del miembro BC

La coordenada dependiente q_5 se la puede expresar:

$q_5 = \overline{CE} + \overline{FI} + \overline{IG} + \overline{GC'}$

En el triángulo GHC' se tiene:



$$\overline{GC'} = L\, q_3 \cos\alpha$$

$$\overline{GH} = L\, q_3 \operatorname{sen}\alpha$$

Por lo tanto, es fácil ver que:

$\overline{GI} = tg\alpha.\ \overline{GH} = tg\alpha.L\ q_3 sen\alpha$

$\overline{IF} = tg\alpha.q_4$

$\overline{CE} = q_2$

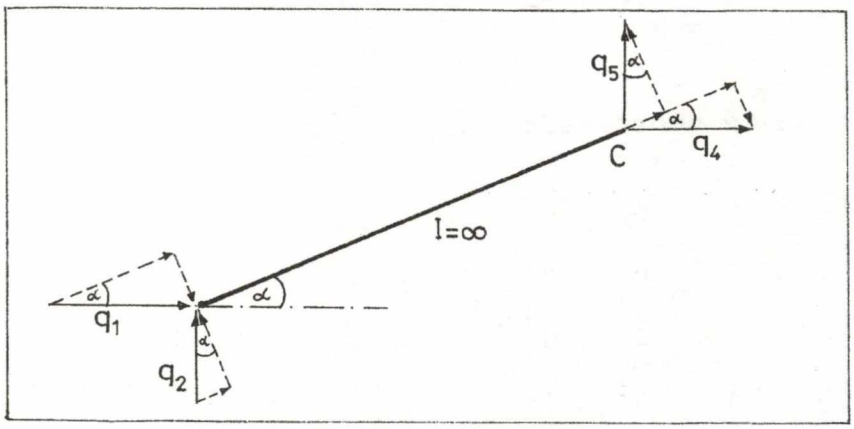
Reemplazando se tiene:

$$q_5 = q_2 + q_4\ tg\alpha + L\ q_3\ sen\alpha\ tg\alpha + L\ q_3\ \cos\alpha$$

$$q_5 = q_2 + \frac{3}{4}q_4 + \frac{9}{20}L\ q_3 + \frac{4}{5}L\ q_3$$

$$q_5 = q_2 + \frac{3}{4}q_4 + \frac{25}{20}L\ q_3 = q_2 + \frac{3}{4}q_4 + \frac{5}{4}L\ q_3$$

3.2 Cálculo de u_1, v_1, u_2



$$u_1 = q_1\ \cos\alpha + q_2\ sen\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2$$

$$v_1 = q_2\ \cos\alpha - q_1\ sen\alpha = \frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1$$

$$u_2 = q_4\ \cos\alpha + q_5\ sen\alpha = \frac{4}{5}q_4 + \frac{3}{5}q_5$$

Pero:

$$q_5 = q_2 + \frac{3}{4}q_4 + \frac{5}{4}L\ q_3$$

Luego:

$$u_2 = \frac{4}{5}q_4 + \frac{3}{5}(q_2+\frac{3}{4}q_4+\frac{5}{4}L\ q_3) = \frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}L\ q_3 + \frac{5}{4}q_4$$

3.3 Expresiones de la elástica:

$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$

$v(x) = v_1 + \Theta_1\ x$

Reemplazando valores:

$$u(x) = (\frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2)(1 - \frac{x}{L}) + (\frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}Lq_3 + \frac{5}{4}q_4)\frac{x}{L}$$

$$v(x) = (\frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1) + q_3.x$$

4.- Transformación de coordenadas $\overline{q} = \overline{T}\ .\ \overline{q}^*$ donde:

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dibujar el estado de desplazamiento $\mathbf{q_2^* = 1}$ y las demás coordenadas nulas.

Si $\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{T}}.\overline{\mathbf{q}}^*$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

De donde:

$$q_1 = q_{1*}^{*}$$
$$q_2 = q_{1*} + q_2^{*}$$
$$q_3 = q_{2*} + 2q_3^{*}$$
$$q_4 = q_2 + q_4$$

Si $q_2^{*} = 1$ y las demás nulas se observa que:

$$q_1 = 0$$
$$q_2 = 1$$
$$q_3 = 1$$
$$q_4 = 1$$

Por consiguiente el diagrama elemental buscado será:

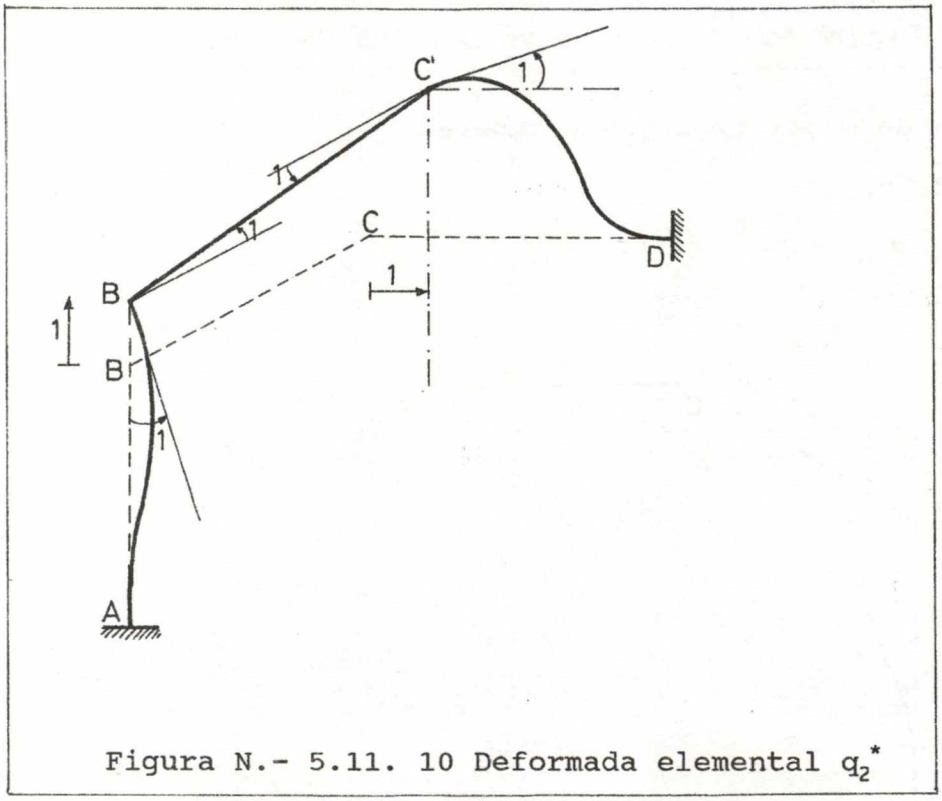


Figura N.- 5.11. 10 Deformada elemental q_2^{*}

EJEMPLO N.- 9

Resolver el ejemplo N.- 8 considerando el siguiente sistema de coordenadas:

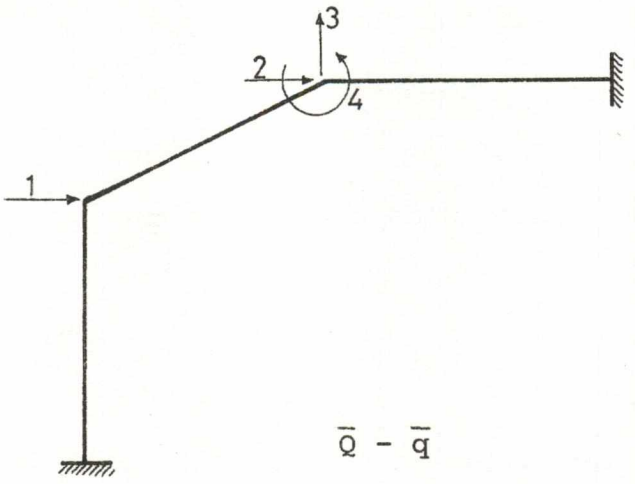


Figura N.- 5.12.1 Nuevo sistema de coordenadas

Obtención de $\bar{Q}$ por trabajos virtuales

Cálculo de Q_1

$\delta q_1 = 1$ y $\delta q_i = 0$ $\quad i \neq 1$

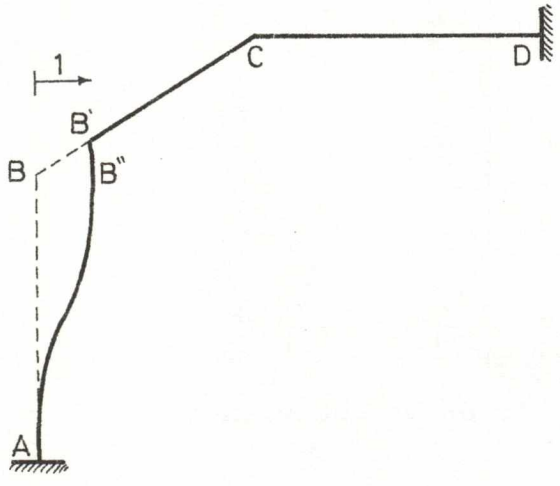
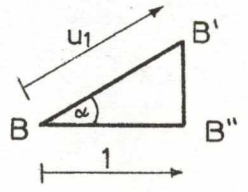


Figura N.- 5.12.2 Deformada elemental δq_1

Triángulo BB'B"



$$\cos\alpha = \frac{1}{u_1}$$

$$u_1 = \frac{5}{4}$$

$$u(x) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$v(x) = 0$$

$$Q_1 = \int_o^L Wx.u(x)\,dx + \int_o^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_1 = \int_o^L -\frac{12}{25}w.\frac{5}{4}\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx$$

$$Q_1 = -\frac{3}{10}W\,L$$

CALCULO DE Q_2

$\delta q_2 = 1$ y $\delta q_i = 0 \quad i \neq 2$

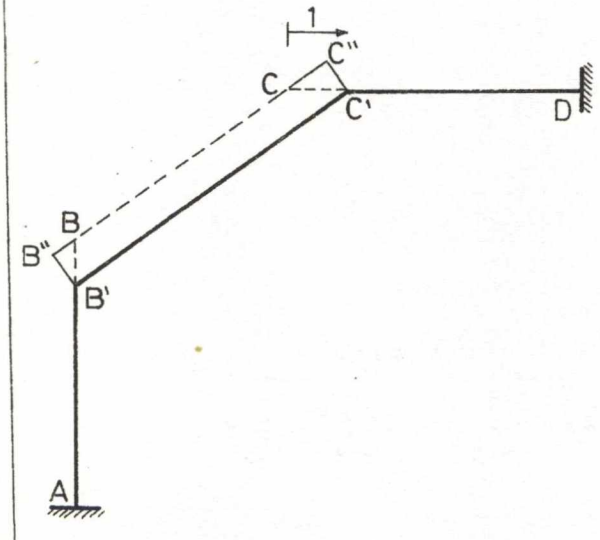
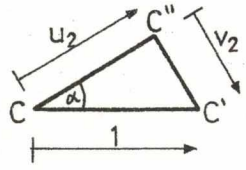


Figura 5.12.3 Deformada elemental δq_2

Triángulo CC'C"

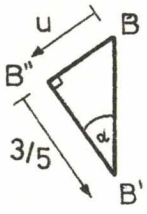


$$u_2 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$v_2 = -sen\alpha = -\frac{3}{5}$$

C"C' = B"B' porque el elemento BC es de I = ∞

Triángulo BB'B"



$$tg\alpha = \frac{u_1}{\frac{3}{5}} \qquad u_1 = \frac{9}{20}$$

pero u_1 es negativo, luego

$$u_1 = -\frac{9}{20} \quad ; \quad v_1 = -\frac{3}{5}$$

$$u(x) = -\frac{9}{20}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{4}{5}.\frac{x}{L} = \frac{5}{4}.\frac{X}{L} - \frac{9}{20}$$

$$v(x) = -\frac{3}{5}$$

$$Q_2 = \int_0^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_2 = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left(\frac{5}{4}.\frac{x}{L} - \frac{9}{20}\right)dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left(-\frac{3}{5}\right)dx$$

$$Q_2 = \frac{3}{10}W\,L$$

CALCULO DE Q_3

$\delta q_3 = 1$ y $\delta q_i = 0$ $\quad i \neq 3$

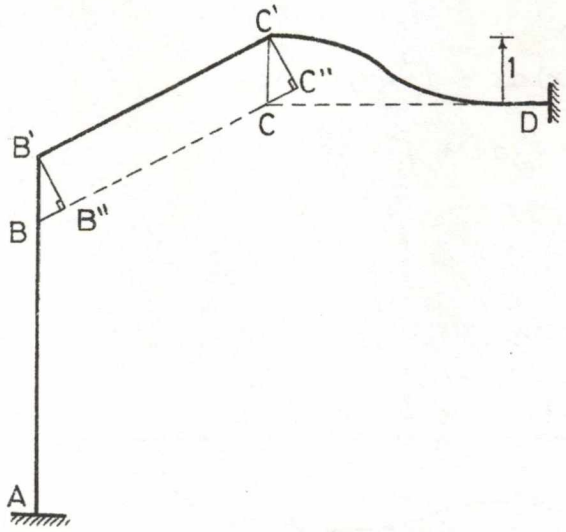
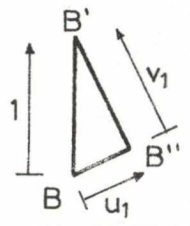


Figura N.- 5.12.4 Deformada elemental δq_3

Del estudio de la deformada se observa que:

Triángulo BB'B" = triángulo CC'C"



$$u_1 = sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Por la igualdad de los triángulos BB'B" y CC'C" se tiene:

$$u_2 = \frac{3}{5}$$

$$v_2 = \frac{4}{5}$$

$$u(x) = \frac{3}{5}(1 - \frac{x}{L}) + \frac{3}{5}\frac{x}{L} = \frac{3}{5}$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1 x = \frac{4}{5}$$

$$Q_3 = \int_0^L Wx.u(x)\,dx + \int_0^L Wy.v(x)\,dx$$

$$Q_3 = \int_0^L -\frac{12}{25}w.\frac{3}{5}dx + \int_0^L -\frac{16}{25}w.\frac{4}{5}dx$$

$$Q_3 = -\frac{4}{5}W\,L$$

CALCULO DE Q_4

$\delta q_4 = 1 \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$

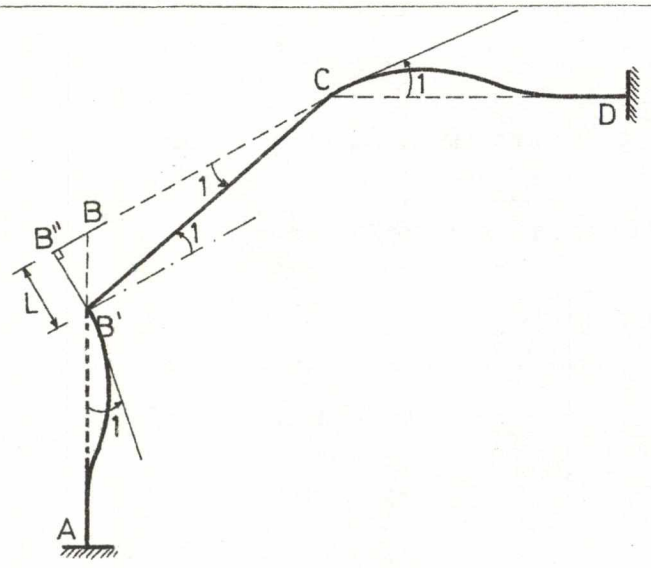
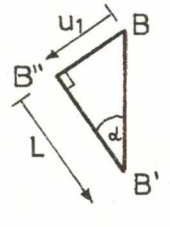


Figura N.- 5.12.5 Deformada generala δq_4

Triángulo BB'B"



$$u_1 = -tg\alpha\ L = -\frac{3}{4}L$$

$$v_1 = -L$$

$$\theta_1 = 1$$

$$u(x) = -\frac{3}{4}L(1 - \frac{x}{L})$$
$$v(x) = -L + x$$

$$Q_4 = \int_0^L wx.u(x)\,dx + \int_0^L wy.v(x)\,dx$$
$$Q_4 = \int_0^L -\frac{12}{25}w[-\frac{3}{4}L(1 - \frac{x}{L})]\,dx + \int_0^L -\frac{16}{25}w(-L + x)\,dx$$
$$Q_4 = \frac{WL^2}{2}$$

Matriz $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

Solución de $\overline{Q}$ a través del problema primario y complementario

Problema primario

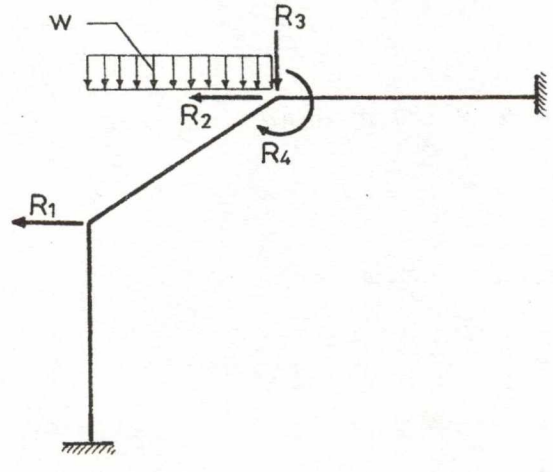
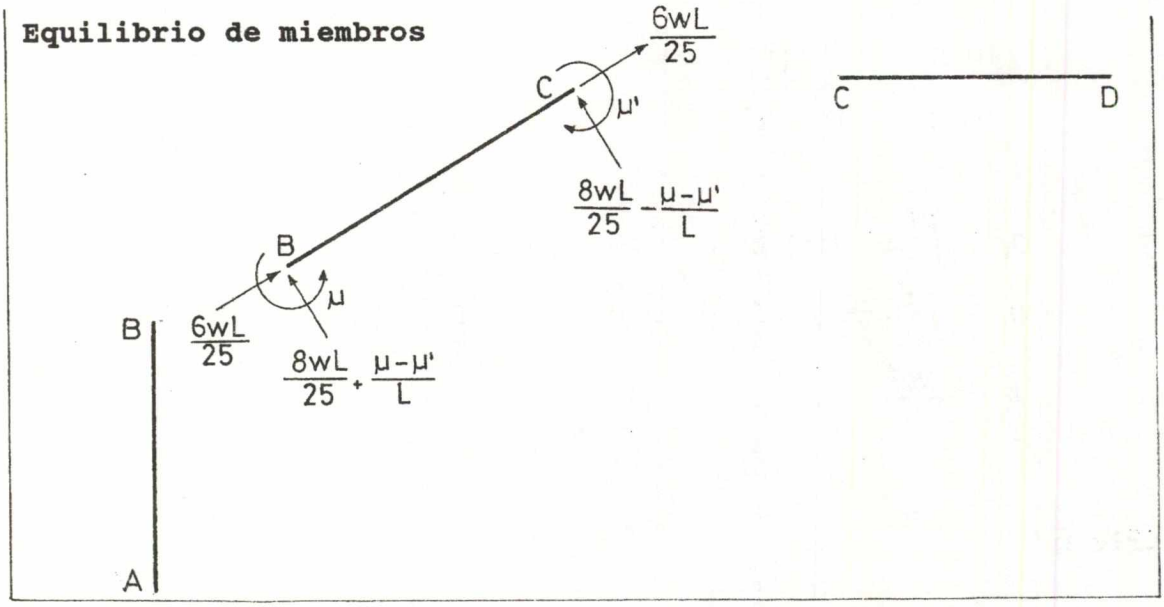
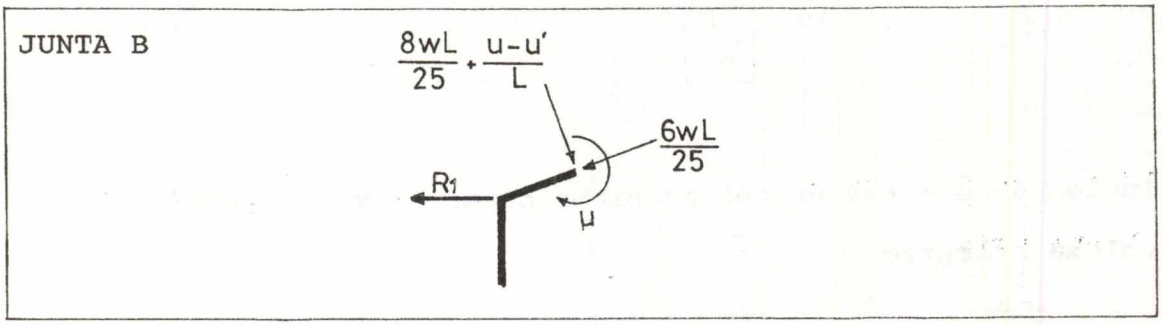


Figura N.- 5.12.6 Problema primario ($\overline{q} = 0$)

Equilibrio de miembros



Equilibrio de juntas



$$\Sigma Fx = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} + \frac{\mu-\mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_1 = 0 \quad (Ec.1)$$

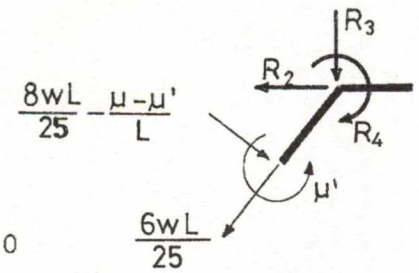
$$\downarrow \Sigma Fy = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} + \frac{\mu-\mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL \, sen\alpha = 0 \quad (Ec.2)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$\mu = 0 \quad (Ec.3)$$

JUNTA C



$$\Sigma Fx = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} - \frac{\mu-\mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_2 = 0 \quad (Ec.4)$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\left(\frac{8WL}{25} - \frac{\mu-\mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL\, sen\alpha + R_3 = 0 \quad (Ec.5)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$R_4 - \mu' = 0 \quad (Ec.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\mu = 0 \qquad \mu' = \frac{WL^2}{2} \qquad R_1 = -\frac{3}{10} W\, L$$

$$R_2 = \frac{3}{10} W\, L \qquad R_3 = -\frac{4}{5} W\, L \qquad R_4 = \frac{WL^2}{2}$$

Problema complementario

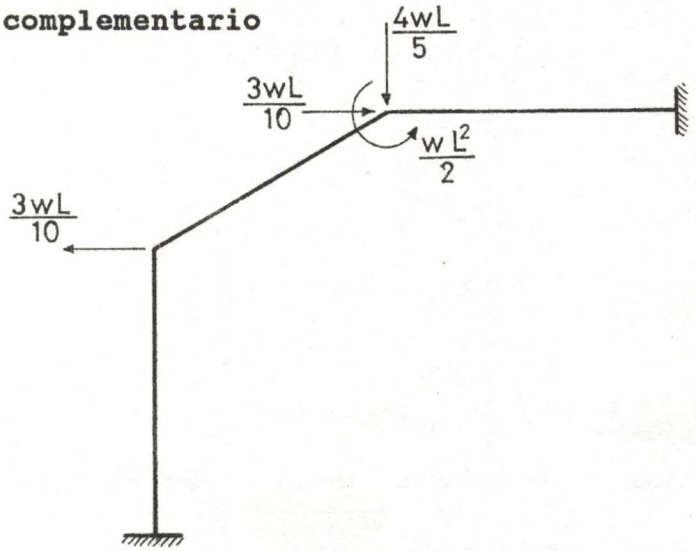


Figura N.- 5.12.7 Problema complementario

Matriz $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} W\ L \\ \frac{3}{10} W\ L \\ -\frac{4}{5} W\ L \\ \frac{WL^2}{2} \end{bmatrix}$$

Expresión de la elástica horizontal y vertical del miembro BC

Componente vertical del nudo B:

En este caso, se va a expresar q_5 en función de q_1, q_2, q_3 y q_4.

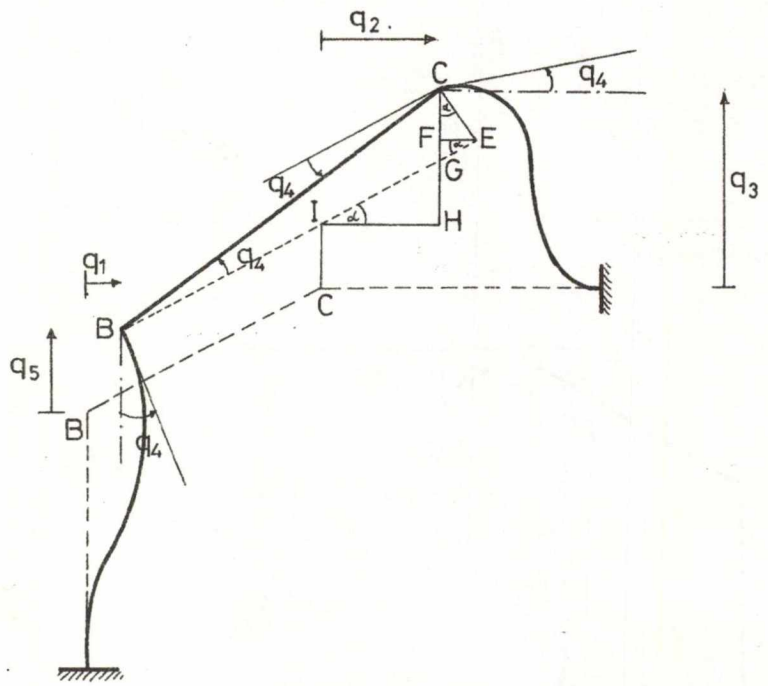
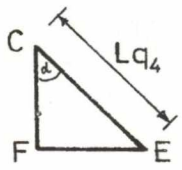


Figura N.- 5.12.8 Ordenadas de la elástica de BC

Del gráfico se observa que: $C'E = L.q_4$

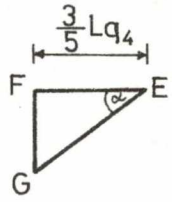
En el triángulo C'EF se tiene:



$$\overline{C'F} = \cos\alpha \; L.q_4 = \frac{4}{5} \; L.q_4$$

$$\overline{EF} = sen\alpha \; L.q_4 = \frac{3}{5} \; L.q_4$$

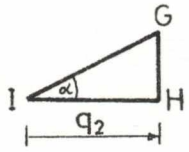
En el triángulo EGF se tiene:



$$\overline{FG} = tg\alpha . \frac{3}{5} \; L.q_4$$

$$\overline{FG} = \frac{9}{20} \; L.q_4$$

Para el triángulo IGH se obtiene:



$$\overline{GH} = q_2 . tg\alpha$$

$$\overline{GH} = \frac{3}{4} . q_2$$

Por ser $\overline{BC}$ de I = ∞ se tiene que: $\overline{IC} = q_5$

Por lo tanto:

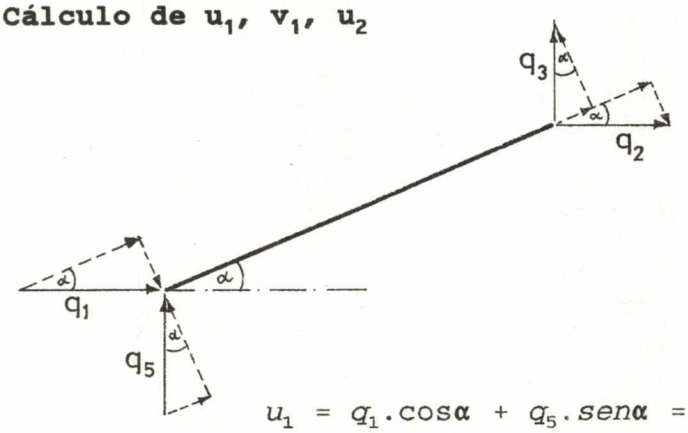
$q_5 = q_3 - \overline{C'F} - \overline{FG} - \overline{GH}$

Reemplazando valores:

$$q_5 = q_3 - \frac{4}{5} L.q_4 - \frac{9}{20} L.q_4 - \frac{3}{4} q_2$$

$$q_5 = q_3 - \frac{5}{4} L.q_4 - \frac{3}{4} q_2$$

Cálculo de u_1, v_1, u_2



$$u_1 = q_1.\cos\alpha + q_5.sen\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_5$$

$$= \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}(q_3 - \frac{5}{4}L.q_4 - \frac{3}{4}q_2)$$

$$v_1 = q_5.\cos\alpha - q_1.sen\alpha = \frac{4}{5}q_5 - \frac{3}{5}q_1$$

$$= \frac{4}{5}(q_3 - \frac{5}{4}L.q_4 - \frac{3}{4}q_2) - \frac{3}{5}q_1$$

$$u_2 = q_2\ \cos\alpha + q_3\ sen\alpha = \frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3$$

Expresiones de la elástica

$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$
$v(x) = v_1 + \Theta_1.x$

Sustituyendo:

$$u(x) = [\frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}(q_3 - \frac{5}{4}L.q_4 - \frac{3}{4}q_2)](1 - \frac{x}{L}) + (\frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3)\frac{x}{L}$$

$$v(x) = \frac{4}{5}(q_3 - \frac{5}{4}L.q_4 - \frac{3}{4}q_2) - \frac{3}{5}q_1 + q_4.x$$

Transformación de coordenadas $\overline{q} = \overline{T} \cdot \overline{q}^*$ donde:

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dibujar el diagrama correspondiente a $q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0 \quad i \neq 2$

Por definición de la matriz **T** se obtiene que para el diagrama elemental pedido se tiene que:

$q_1 = 0$
$q_2 = 1$
$q_3 = 1$
$q_4 = 1$

Los valores de la segunda columna de **T** (Esta es otra forma de resolver este numeral)

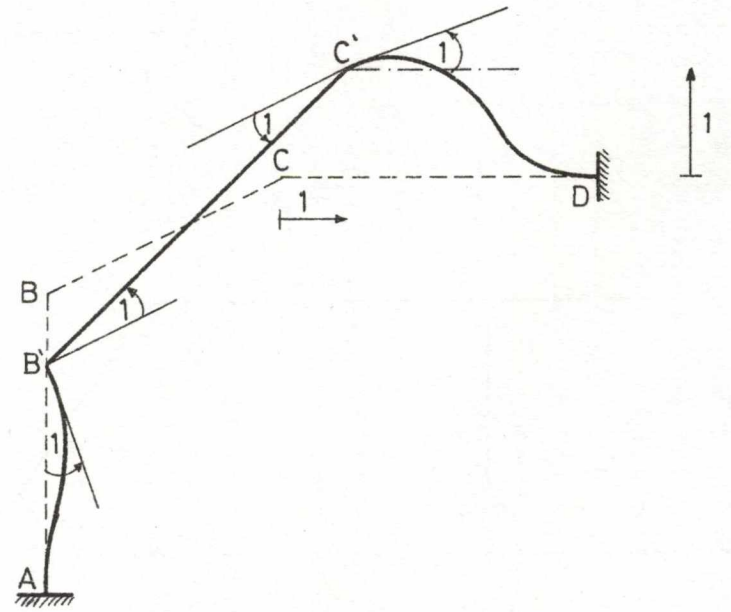


Figura N.- 5.12.9 Deformada elemental q_1^*

EJERCICIOS PROPUESTOS

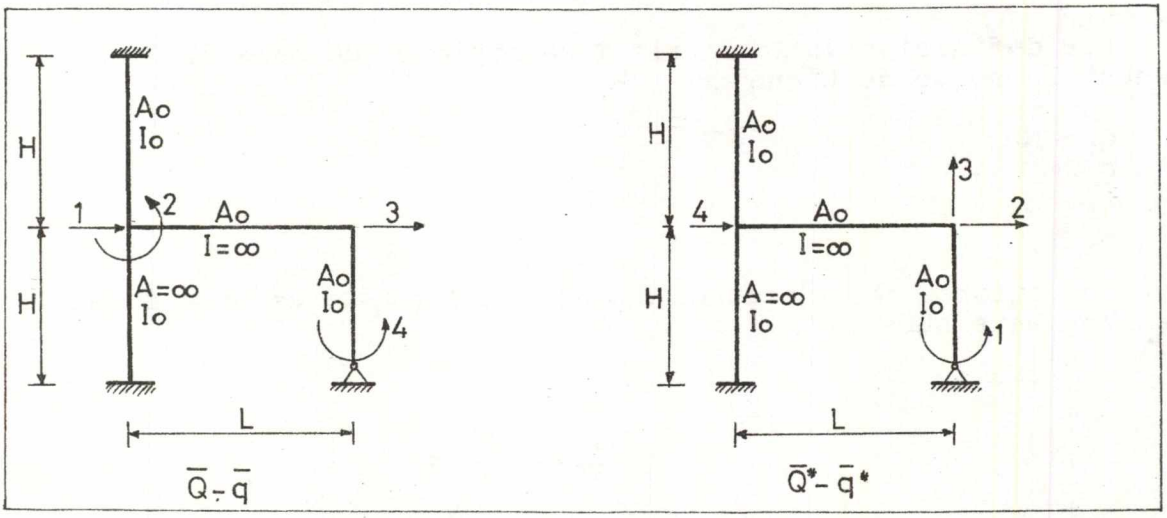
Dados los sistemas de coordenadas $\overline{Q}$-$\overline{q}$ y $\overline{Q}^*$-$\overline{q}^*$, en los ejercicios 1, 2 y 3, calcular:

i) Matriz $\overline{T}$, tal que $\overline{q} = \overline{T}\ \overline{q}^*$

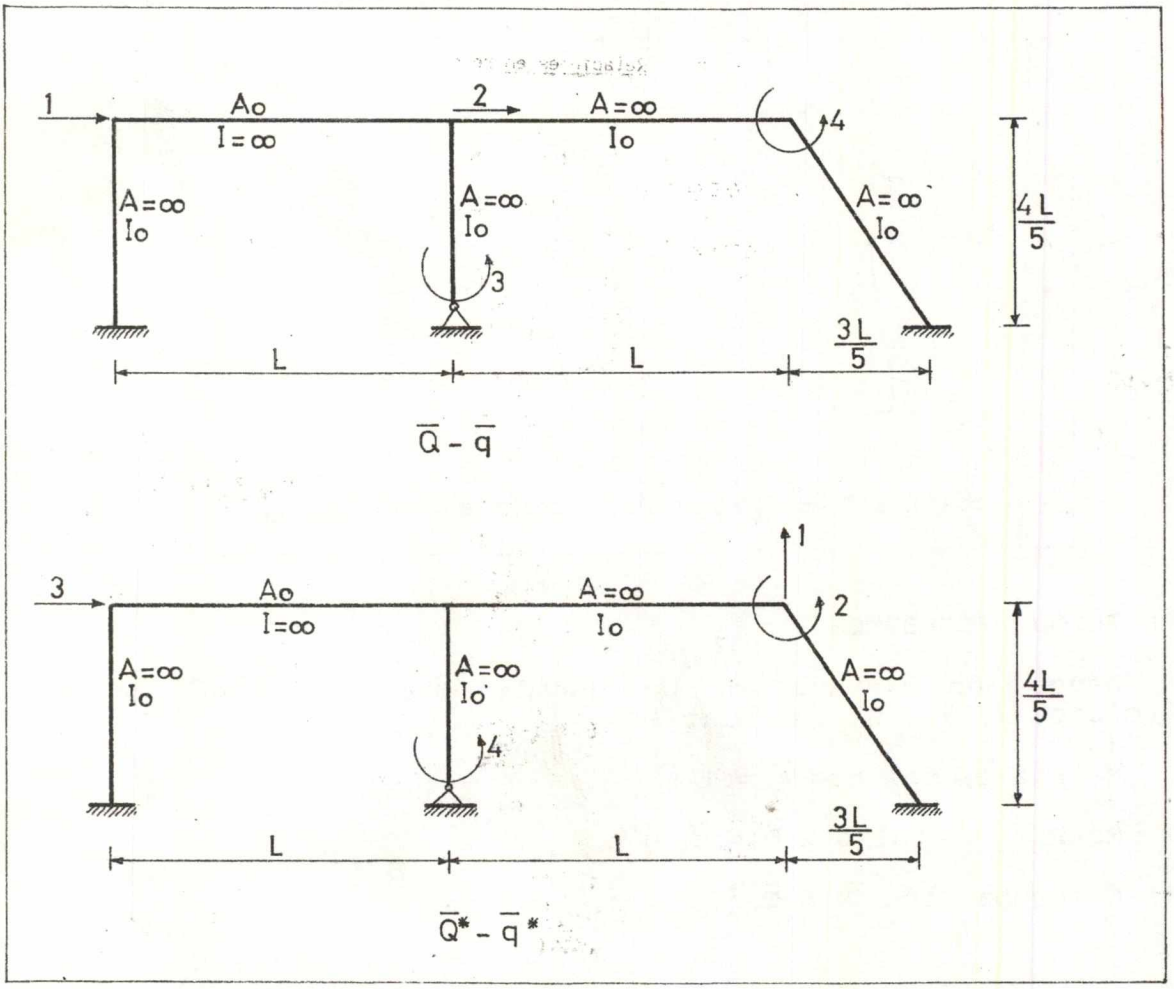
ii) Matriz $\overline{T}_1$, tal que $\overline{Q} = \overline{T}_1\ \overline{Q}^*$

iii) Comprobar que $\overline{T}^t = \overline{T}_1^{-1}$

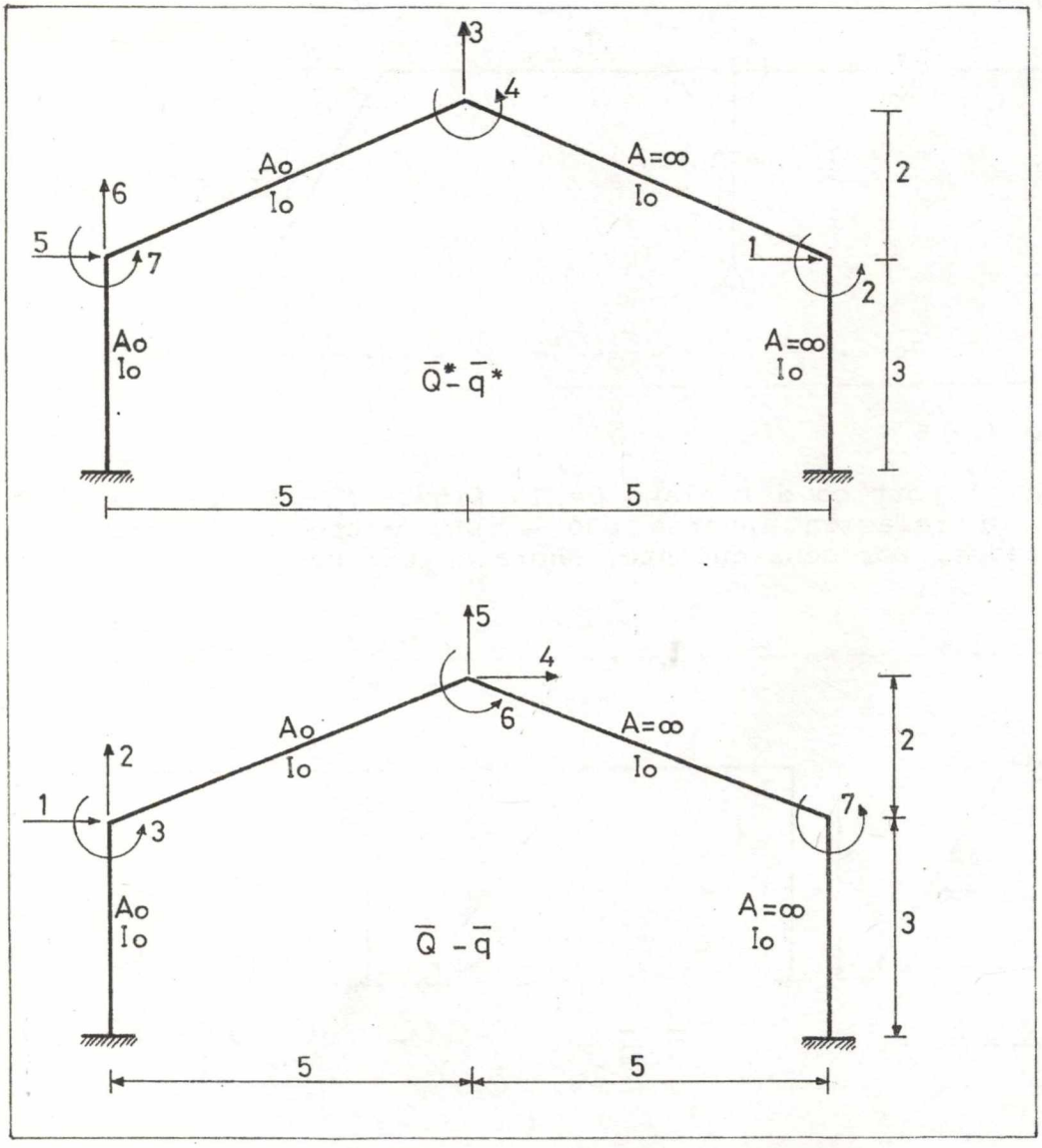
Ejercicio N.- 1



Ejercicio N.- 2

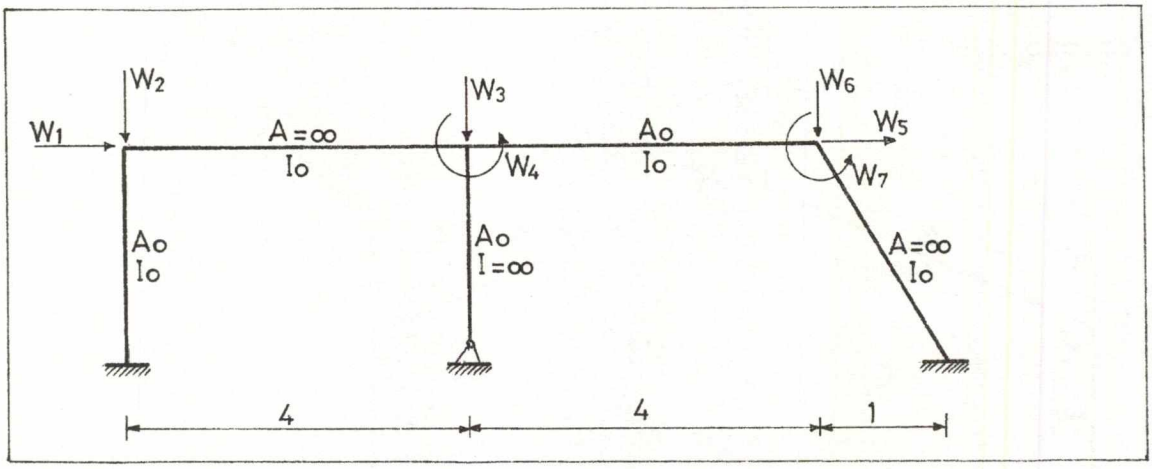


Ejercicio N.- 3



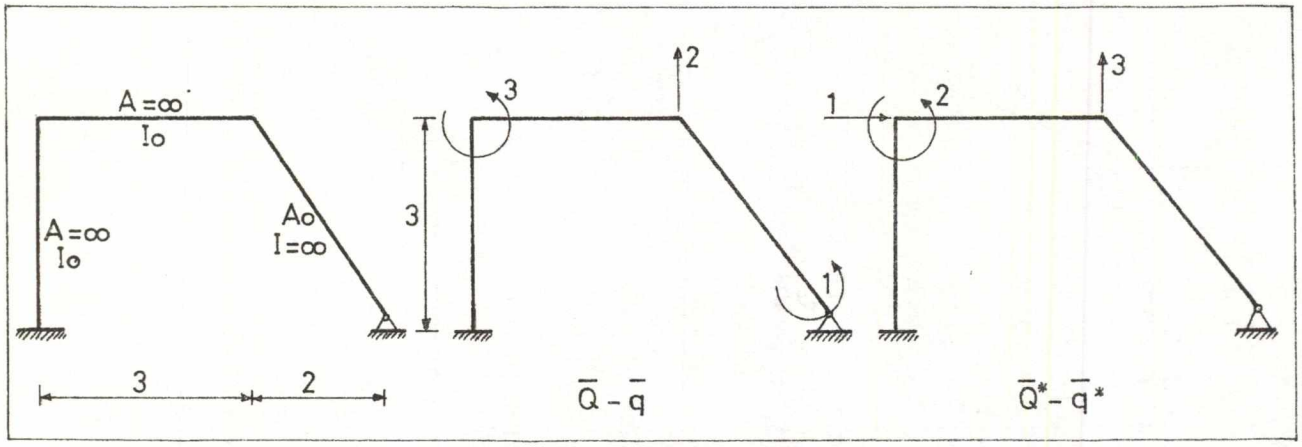
Ejercicio N.- 4

Si sobre la estructura de la figura 5.8.1, actúa el sistema de cargas representados a continuación. Calcular los vectores de cargas generalizadas $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}^*$ para los sistemas de coordenadas, presentados en las figuras 5.8.2 y 5.8.3. Comprobar el resultado obtenido utilizando la matriz $\mathbf{T}$ del ejemplo N.- 5, si se sabe que: $\mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^t\,\mathbf{Q}$.



Ejercicio N.- 5

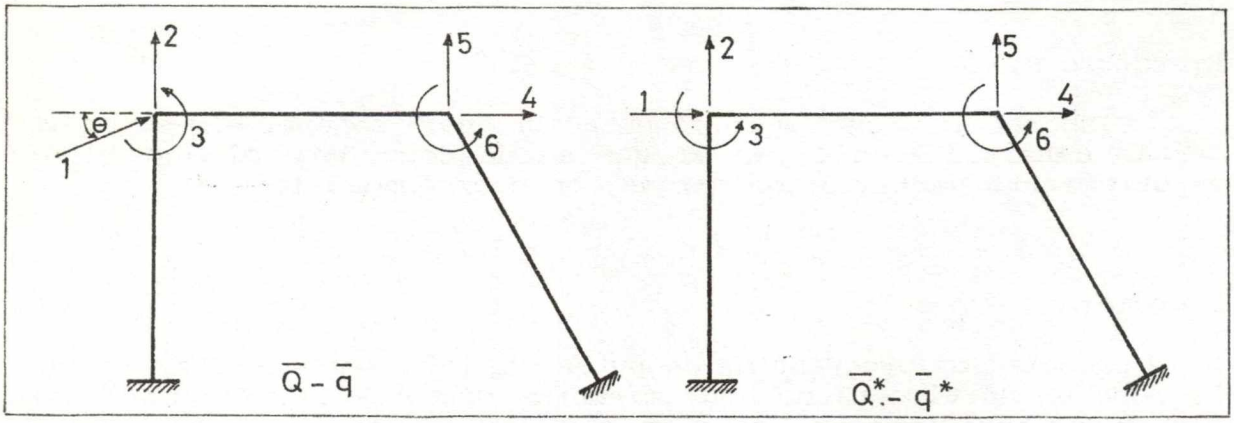
Para el pórtico del plano de la figura N.- 5.2.1, se desea calcular la relación inversa que existe entre las coordenadas generalizadas. Por consiguiente, ahora se tiene:



Calcular la matriz **T**, tal que: $\mathbf{q} = \mathbf{T}\,\mathbf{q}^*$

Ejercicio N.- 6

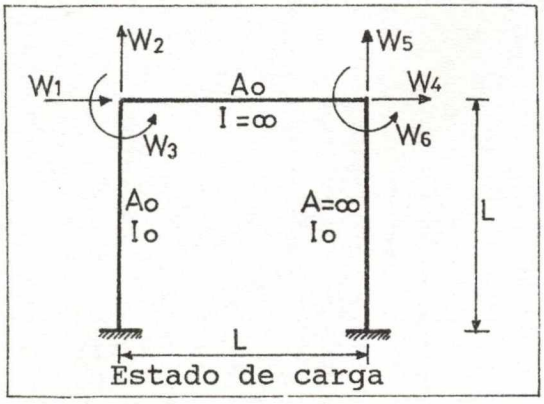
Para la siguiente estructura, compuesto por miembros totalmente flexibles, se dan dos sistemas de coordenadas generalizadas, el primero difiere del segundo en la coordenada uno, está inclinado θ con respecto a la horizontal. Calcular la matriz **T** , tal que: $\mathbf{q} = \mathbf{T}\,\mathbf{q}^*$



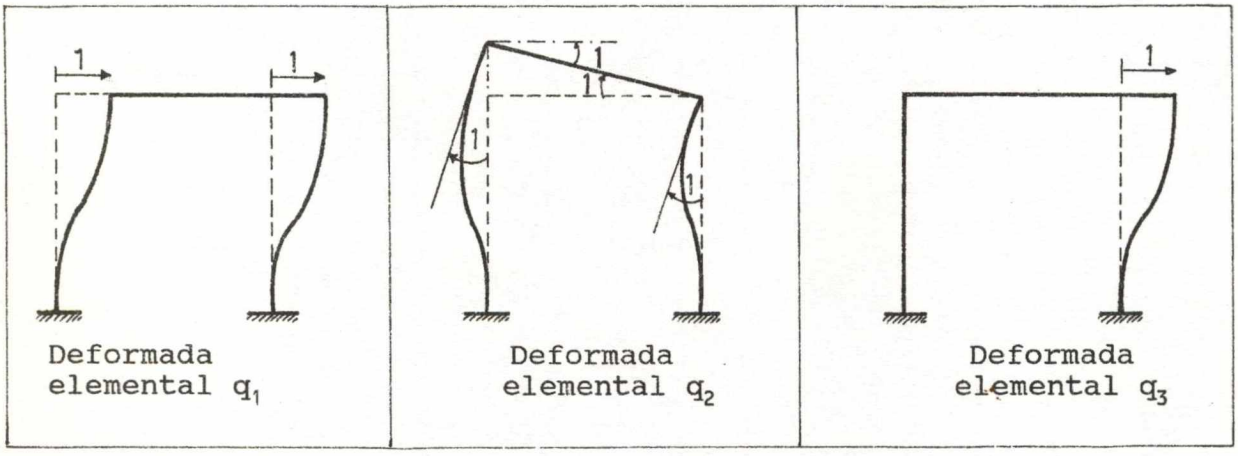
Ejercicio N.- 7

Las figuras muestran una estructura y las fuerzas externas que actúan, así como los diagramas de deformación elementales, para un sistema de coordenadas. Calcular:

i) El vector de cargas generalizadas Q
ii) Dibujar los diagramas de cargas elementales.
iii) Interpretar geométricamente, cada una de las componentes de **q**.



$q_1=1$ y $q_i=0$ para $i \neq 1$ $q_2=1$ y $q_i=0$ para $i \neq 2$ $q_3=1$ y $q_i=0$ para $i \neq 3$



Ejercicio N.- 8

Elaborar un programa de computación, para obtener el vector de cargas generalizadas Q, en el que se da como dato el vector de empotramiento perfecto, de cargas, en coordenadas locales.

Ejercicio N.- 9

Elaborar un programa de computación, para encontrar el vector Q, para un pórtico plano con miembros ortogonales, si sobre los elementos horizontales puede actuar una carga triangular o una carga trapesoidal.