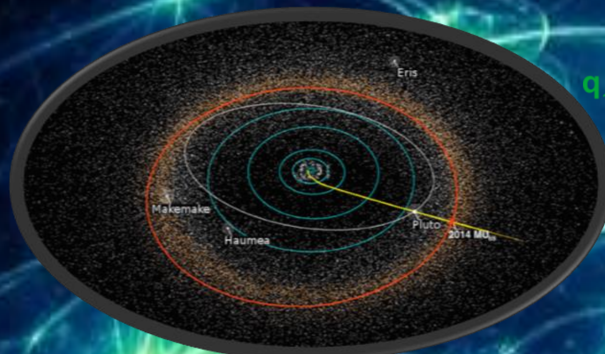
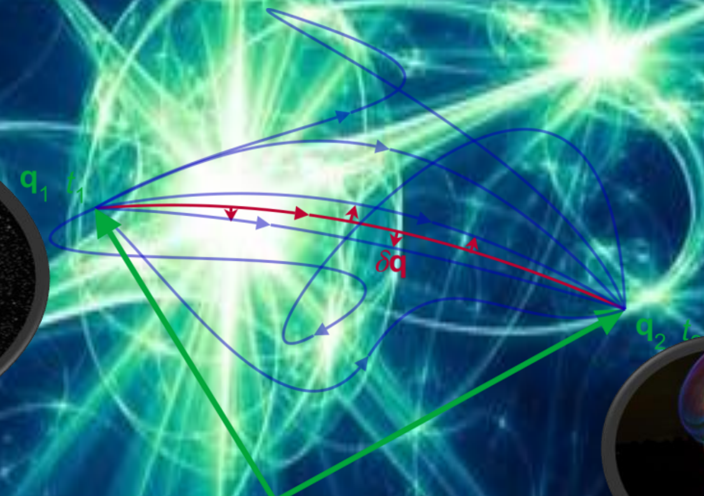
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$

Pearson

Física Básica





Marlon Basantes Valverde, Ph.D

Pearson

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

15-1 Carcaterísticas del movimiento ondulatorio

EJEMPLO CONCEPTUAL 15–1 **Onda versus la velocidad de partícula.** ¿La velocidad de una onda que se mueve a lo largo de una cuerda es la misma que la velocidad de una partícula de la cuerda? Véase la figura 15-1.

RESPUESTA No. Las dos velocidades son diferentes, tanto en magnitud como en dirección. La onda sobre la cuerda de la figura 15-1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la mesa, pero cada trozo de la cuerda sólo vibra de un lado al otro. (Como es evidente, la cuerda no viaja en la dirección en que lo hace la onda).

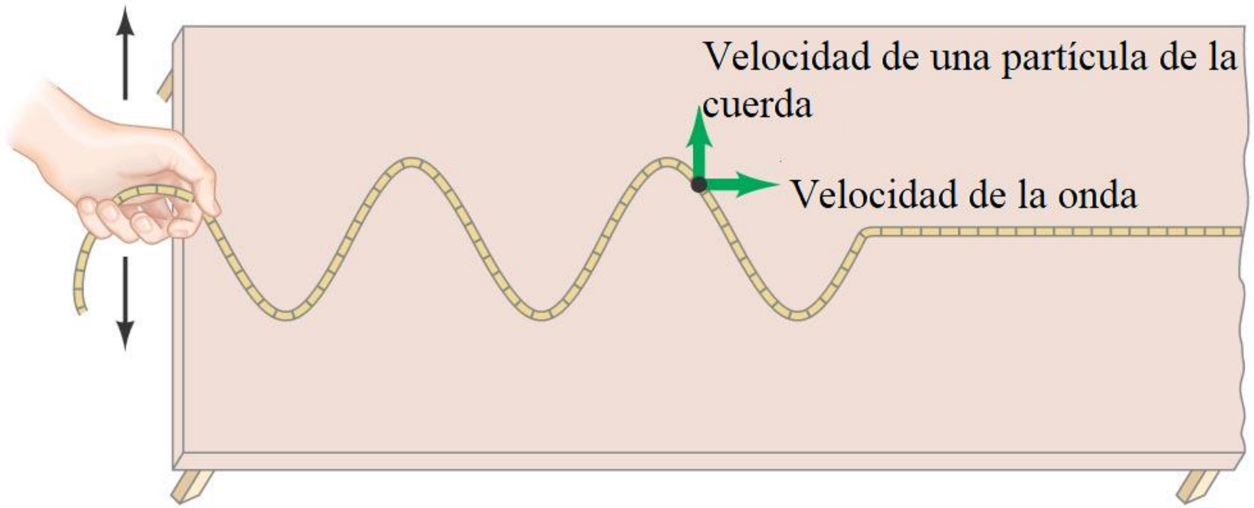


FIGURA 15–1 Onda que viaja en una cuerda. La onda viaja hacia la derecha a lo largo de la cuerda. Las partículas de la cuerda oscilan de ida y vuelta sobre la mesa.

15-2 Tipos de ondas: transversales y longitudinales

EJEMPLO 15–2 **Pulso en un alambre.** Un alambre de cobre de 80.0 cm de largo y 2.10 mm de diámetro se estira entre dos postes. Una ave se posa en el punto central del alambre, enviando un pequeño pulso de onda en ambas direcciones. Los pulsos se reflejan en los extremos y regresan a la ubicación del ave 0.750 segundos después de que ésta se posó. Determine la tensión en el alambre.

PLANTEAMIENTO la tensión está dada por $F_T = \mu v^2$. La rapidez v es la distancia dividida entre el tiempo. La masa por unidad de longitud μ se calcula a partir de la densidad del cobre y las dimensiones del alambre.

SOLUCIÓN Cada pulso de onda recorre 40.0 m hasta el poste y regresa (= 80.0 m) en 0.750 s. Por lo tanto, su rapidez es $v = (80.0\text{ m})/(0.750\text{ s}) = 107\text{ m/s}$. La densidad del cobre) se toma como $8.90 \times 10^3\text{ kg/m}^3$. El volumen del alambre de cobre es el área transversal (πr^2) por la longitud ℓ, y la masa del alambre es el volumen por la densidad: $m = \rho(\pi r^2)$ para un alambre de radio r y longitud ℓ. Entonces, $\mu = m/\ell$ es

$$\mu = \rho\pi r^2\ell/\ell = \rho\pi r^2 = \left(8.90 \times 10^3\,\text{kg/m}^3\right)\pi\left(1.05 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)^2 = 0.0308\,\text{kg/m}.$$

Por lo tanto, la tensión es $F_T = \mu v^2 = (0.0308\,\text{kg/m})(107\,\text{m/s})^2 = 353\,\text{N}$.

15-2 Tipos de ondas: transversales y longitudinales

EJEMPLO 15–3 **Ecolocalización.** La ecolocalización es una forma de percepción sensorial que usan animales como los murciélagos, las ballenas y los delfines. El animal emite un pulso de sonido (una onda longitudinal) que, después de reflejarse en los objetos, regresa y es detectado por el animal. Las ondas de ecolocalización pueden tener frecuencias de aproximadamente 100,000 Hz. *a*) Estime la longitud de onda de una onda de ecolocalización de un animal marino. *b*) Si un obstáculo está a 100 m del animal, ¿cuánto tiempo después de que el animal emite una onda se detecta su reflexión?

PLANTEAMIENTO Primero calculamos la rapidez de las ondas longitudinales (sonido) en el agua de mar La longitud de onda es $\lambda = v/f$.

SOLUCIÓN *a*) La rapidez de las ondas longitudinales en el agua de mar, que es ligeramente más densa que el agua pura, es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}}{1.025 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}} = 1.4 \times 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

Luego, encontramos

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{(1.4 \times 10^3\ \mathrm{m/s})}{(1.0 \times 10^5\ \mathrm{Hz})} = 14\ \mathrm{mm}.$$

b) El tiempo requerido para el viaje redondo entre el animal y el objeto es

$$t = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{2(100\ \mathrm{m})}{1.4 \times 10^3\ \mathrm{m/s}} = 0.14\ \mathrm{s}.$$

NOTA Más adelante se verá que las ondas se pueden usar para "resolver" (o detectar) objetos sólo si la longitud de onda es comparable con el objeto o menor que éste. De esta forma, un delfín puede detectar objetos del orden de un centímetro o más de tamaño.

15-3 Energía transportada por las ondas

EJEMPLO 15–4 **Intensidad sísmica.** La intensidad de una onda sísmica P que viaja a través de la Tierra y se detecta a 100 km de la fuente es de $1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2}$. ¿Cuál es la intensidad de esa onda si se detecta a 400 km de la fuente?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la onda es esférica, de manera que la intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia desde la fuente.

SOLUCIÓN A 400 km la distancia es 4 veces mayor que a 100 km, de manera que la intensidad será $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ de su valor a 100 km o $(1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2})/16 = 6.3 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2}$.

NOTA Al utilizar directamente la ecuación

$$I_2 = I_1 r_1^2/r_2^2 = \left(1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2}\right)(100\ \mathrm{km})^2/(400\ \mathrm{km})^2 = 6.3 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2}.$$

15-4 Representación matemática de una onda viajera

EJEMPLO 15–5 **Una onda viajera.** El extremo izquierdo de una cuerda larga, horizontal y estirada oscila transversalmente en MAS con frecuencia $f = 250$ Hz y 2.6 cm de amplitud. La cuerda está bajo una tensión de 140 N y tiene una densidad lineal $\mu = 0.12$ kg/m. En $t = 0$, el extremo de la cuerda tiene un desplazamiento hacia arriba de 1.6 cm y está bajando (figura 15-14). Determine *a*) la longitud de onda de las ondas producidas y *b*) la ecuación de la onda viajera.

PLANTEAMIENTO Primero determinamos la velocidad de fase de la onda transversal luego, $\lambda = v/f$. En *b*) necesitamos determinar la fase ϕ usando las condiciones iniciales.

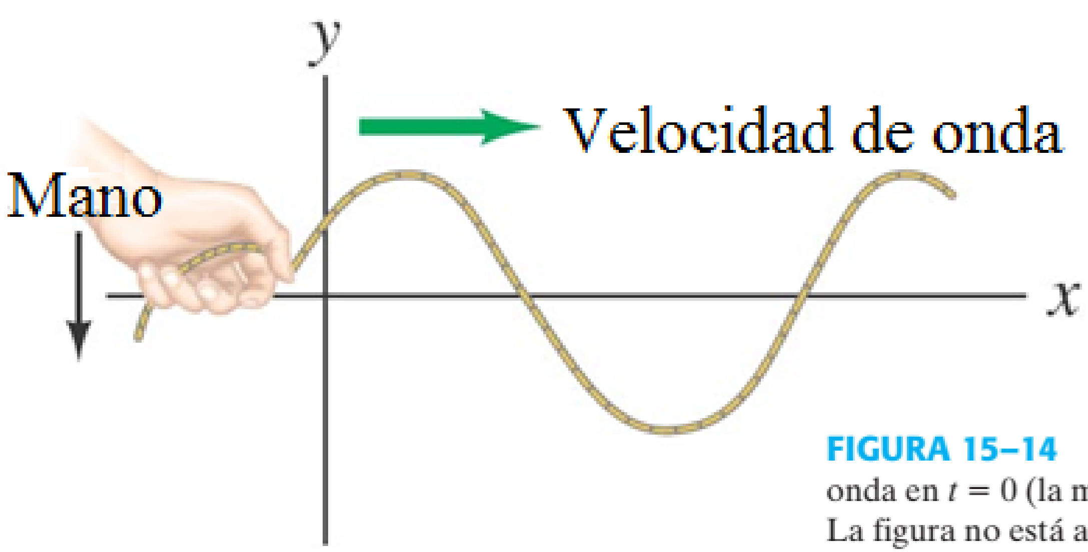


FIGURA 15–14 Ejemplo 15-5. La onda en $t = 0$ (la mano en descenso). La figura no está a escala.

SOLUCIÓN *a*) La velocidad de onda es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{140\ \mathrm{N}}{0.12\ \mathrm{kg/m}}} = 34\ \mathrm{m/s}.$$

Luego,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{34\ \mathrm{m/s}}{250\ \mathrm{Hz}} = 0.14\ \mathrm{m} \quad \text{o} \quad 14\ \mathrm{cm}.$$

b) Sea $x = 0$ en el extremo izquierdo de la cuerda. La fase de la onda en $t = 0$ no es cero en general, como se supuso . La forma general para una onda que viaja hacia la derecha es

$$D(x, t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi),$$

donde ϕ es el ángulo de fase. En este caso, la amplitud $A = 2.6$ cm; y en $t = 0$, $x = 0$, tenemos $D = 1.6$ cm. Por consiguiente,

$$1.6 = 2.6\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

de manera que $\phi = \mathrm{sen}^{-1}(1.6/2.6) = 38° = 0.66$ rad. También tenemos que $\omega = 2\pi f = 1\,570\ \mathrm{s}^{-1}$ y $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.14\ \mathrm{m} = 45\ \mathrm{m}^{-1}$. Por lo tanto,

$$D = (0.026\ \mathrm{m})\,\mathrm{sen}\left[\left(45\ \mathrm{m}^{-1}\right)x - (1570\ \mathrm{s})t + 0.66\right]$$

que podemos escribir de manera más sencilla como

$$D = 0.026\,\mathrm{sen}(45x - 1570t + 0.66),$$

y se especifica claramente que D y x están en metros y t en segundos.

15-5 La ecuación de onda

EJEMPLO 15–6 **Solución a la ecuación de onda.** Verifique que la onda sinusoidal de la ecuación $D(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, satisface la ecuación de onda.

PLANTEAMIENTO Sustituimos la ecuación en la ecuación de onda

SOLUCIÓN Tomamos la derivada de la ecuación dos veces con respecto a t:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\omega^2 A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t).$$

Con respecto a x, las derivadas son

$$\frac{\partial D}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -k^2 A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t).$$

Si ahora dividimos las segundas derivadas, obtenemos

$$\frac{\partial^2 D/\partial t^2}{\partial^2 D/\partial x^2} = \frac{-\omega^2 A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)}{-k^2 A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)} = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

tenemos que $\omega^2/k^2 = v^2$, y vemos que satisface la ecuación de onda

15-6 El principio de superposición

EJEMPLO CONCEPTUAL 15–7 **Generación de una onda cuadrada.** En $t = 0$, tres ondas están dadas por $D_1 = A\cos kx$, $D_2 = -\frac{1}{3}A\cos 3kx$ y $D_3 = \frac{1}{5}A\cos 5kx$, donde $A = 1.0$ m y $k = 10\ \text{m}^{-1}$. Grafique la suma de las tres ondas desde $x = -0.4$ m hasta $+0.4$ m. (Estas tres ondas son los primeros tres componentes de Fourier de una "onda cuadrada").

RESPUESTA La primera onda, D_1, tiene 1.0 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k = (2\pi/10)$ m $= 0.628$ m. La segunda onda, D_2, tiene 0.33 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/3k = (2\pi/30)$ m $= 0.209$ m. La tercera onda, D_3, tiene 0.20 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/5k = (2\pi/50)$ m $= 0.126$ m. Cada onda se grafica en la figura 15-17a. La suma de las tres ondas se muestra en la figura 15-17b. La suma comienza a recordar una "onda cuadrada", que se muestra en azul en la figura 15-17b.

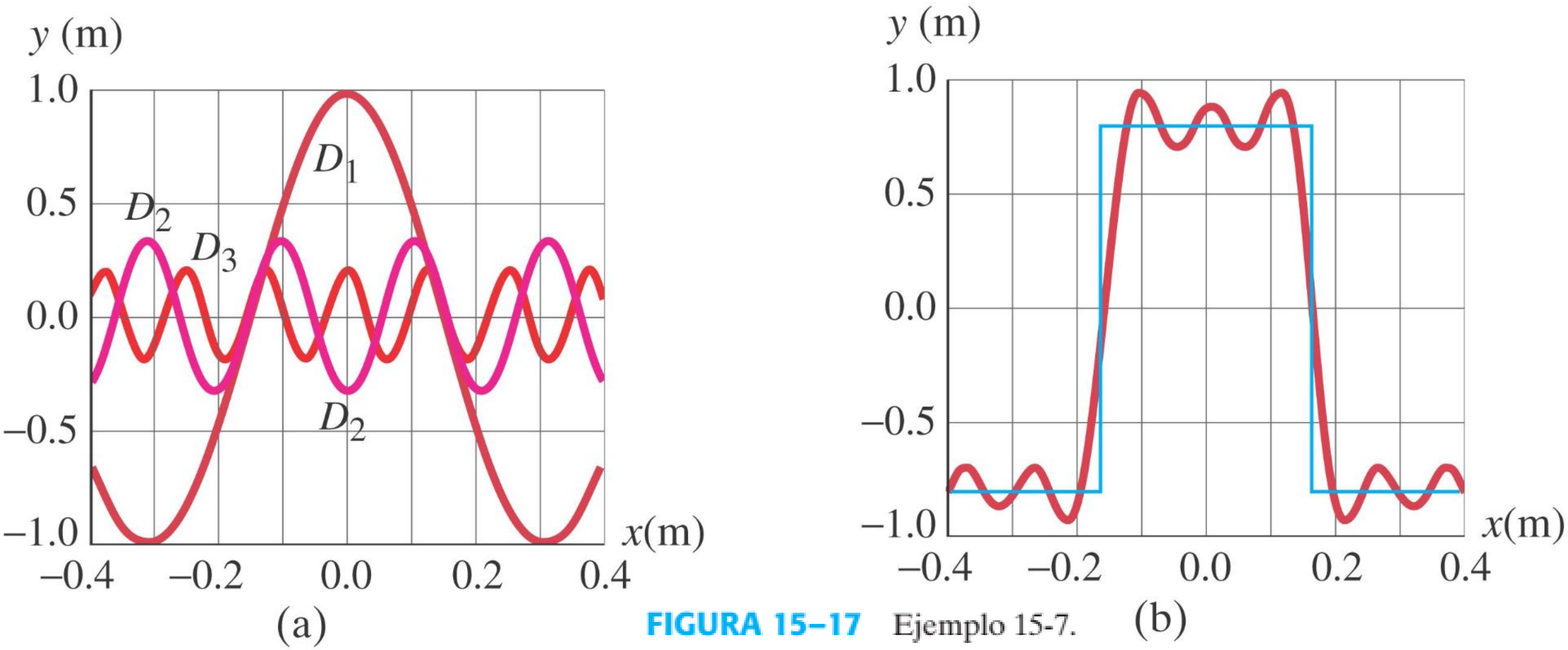


FIGURA 15–17 Ejemplo 15-7. Generación de una onda cuadrada.

15-9 Ondas estacionarias; Resonancia

EJEMPLO 15–8 **Cuerda de piano.** Una cuerda de piano mide 1.10 m de largo y tiene una masa de 9.00 g. *a*) ¿Bajo cuánta tensión debe estar la cuerda si debe vibrar a una frecuencia fundamental de 131 Hz? *b*) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros cuatro armónicos?

PLANTEAMIENTO Para determinar la tensión, necesitamos determinar la rapidez de la onda ($v = \lambda f$), y luego despejar F_T.

SOLUCIÓN *a*) La longitud de onda del modo fundamental es $\lambda = 2\ell = 2.20$ m con $n = 1$). La rapidez de la onda en la cuerda es $v = \lambda f = (2.20 \text{ m})(131 \text{ s}^{-1}) = 288$ m/s. Entonces, tenemos

$$F_T = \mu v^2 = \frac{m}{\ell} v^2 = \left(\frac{9.00 \times 10^{-3} \text{ kg}}{1.10 \text{ m}}\right)(288 \text{ m/s})^2 = 679 \text{ N}.$$

b) Las frecuencias del segundo, tercero y cuarto armónicos son dos, tres y cuatro veces la frecuencia fundamental: 262, 393 y 524 Hz, respectivamente..

NOTA La rapidez de la onda en la cuerda *no* es la misma que la rapidez de la onda sonora que produce la cuerda de piano en el aire

15-9 Ondas estacionarias; Resonancia

EJEMPLO 15–9 **Formas de onda.** Dos ondas que viajan en direcciones opuestas sobre una cuerda fija en $x = 0$ se describen mediante las funciones

$$D_1 = (0.20\,\text{m})\,\text{sen}(2.0x - 4.0t) \quad \text{y} \quad D_2 = (0.20\,\text{m})\,\text{sen}(2.0x + 4.0t)$$

(donde x está en m, t en s) y producen un patrón de onda estacionaria. Determine *a*) la función para la onda estacionaria, *b*) la amplitud máxima en $x = 0.45$ m, *c*) dónde está fijo el otro extremo ($x > 0$), *d*) la máxima amplitud y dónde ocurre.

PLANTEAMIENTO Usamos el principio de superposición para sumar las dos ondas. Las ondas dadas tienen la forma que empleamos

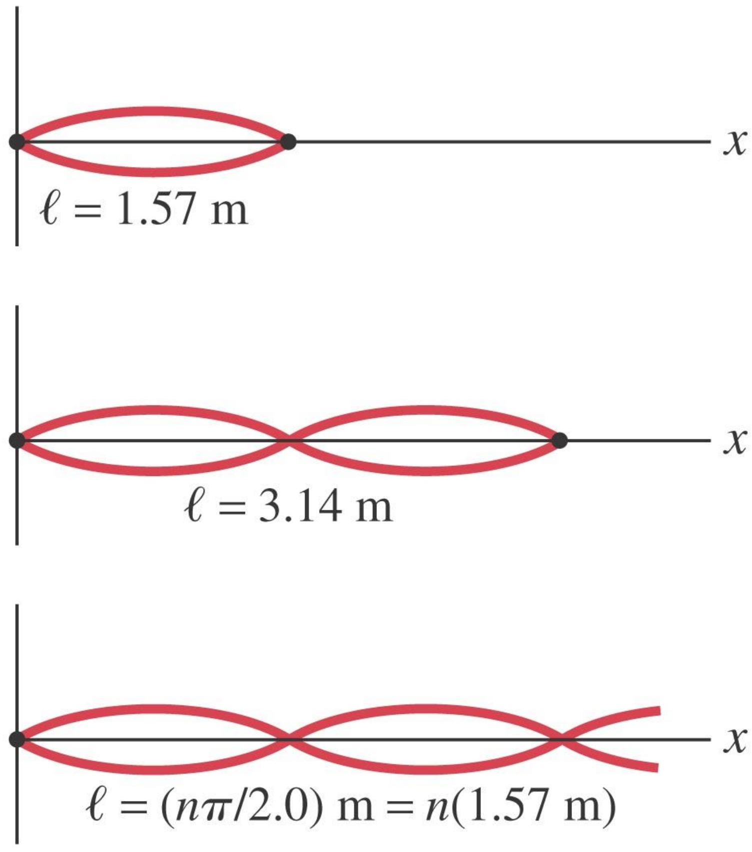


FIGURA 15–27 Ejemplo 15-9: posibles longitudes para la cuerda.

SOLUCIÓN *a*) Las dos ondas son de la forma $D = A\ \text{sen}(kx \pm \omega t)$, de manera que

$$k = 2.0\ \text{m}^{-1} \quad \text{y} \quad \omega = 4.0\ \text{s}^{-1}.$$

Éstos se combinan para formar una onda estacionaria

$$D = 2A\ \text{sen}\ kx \cos \omega t = (0.40\ \text{m})\ \text{sen}(2.0x) \cos(4.0t),$$

donde x está en metros y t en segundos.

(*b*) En $x = 0.45$ m,

$$D = (0.40\ \text{m})\ \text{sen}(0.90) \cos(4.0t) = (0.31\ \text{m}) \cos(4.0t).$$

La amplitud máxima en este punto es $D = 0.31$ m y ocurre cuando $\cos(4.0t) = 1$.

c) Estas ondas forman un patrón de onda estacionaria, de manera que ambos extremos de la cuerda deben ser nodos. Los nodos se presentan cada media longitud de onda, que para la cuerda es

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2.0}\ \text{m} = 1.57\ \text{m}.$$

Si la cuerda incluye sólo un bucle, su longitud es $\ell = 1.57$ m. Pero sin más información, podría ser el doble de largo, $\ell = 3.14$ m, o cualquier número entero por 1.57 m, y aún así dar un patrón de onda estacionaria, figura 15-27.

d) Los nodos se presentan en $x = 0$, $x = 1.57$ m y, si la cuerda es más larga que $\ell = 1.57$ m, en $x = 3.14$ m, 4.71 m, etcétera. La amplitud máxima (antinodo) es 0.40 m [de la parte *b*) anterior] y ocurre a la mitad entre los nodos. Para $\ell = 1.57$ m, sólo hay un antinodo, en $x = 0.79$ m.

15-10 Refracción

EJEMPLO 15–10 **Refracción de una onda sísmica.** Una onda sísmica P pasa a través de una frontera en roca donde su velocidad aumenta de 6.5 km/s a 8.0 km/s. Si golpea esta frontera a 30°, ¿cuál es el ángulo de refracción?

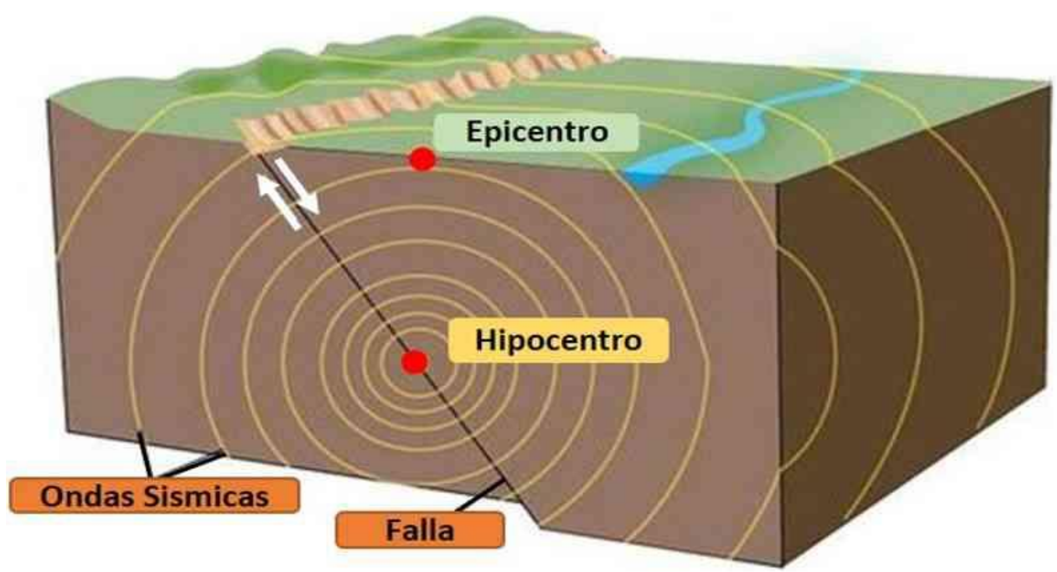
PLANTEAMIENTO Aplicamos la ley de refracción, $\operatorname{sen}\theta_2/\operatorname{sen}\theta_1 = v_2/v_1$.

SOLUCIÓN Dado que $\operatorname{sen} 30° = 0.50$,

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{(8.0\,\mathrm{m/s})}{(6.5\,\mathrm{m/s})}(0.50) = 0.62.$$

De manera que $\theta_2 = \operatorname{sen}^{-1}(0.62) = 38°$.

NOTA Tenga cuidado con los ángulos de incidencia y refracción. Como se explicó en la sección 15-7 (figura 15-21), estos ángulos están entre el frente de onda y la línea de frontera, o, de manera equivalente, entre el rayo (dirección de movimiento de la onda) y la línea perpendicular a la frontera (la normal). Inspeccione cuidadosamente la figura 15-30b.



Formulario

$$v = \lambda f.$$

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

$$D(x,t) = A\sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x - vt)\right] = A\sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi f.$$

$$D(x,t) = A\sin(kx + \omega t).$$

$$\partial^2 D/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 D/\partial t^2$$

$$\lambda_n = 2\ell/n$$

$$\partial_{\beta} F^{\alpha\beta} = j^{\alpha}$$

$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} = 0$$