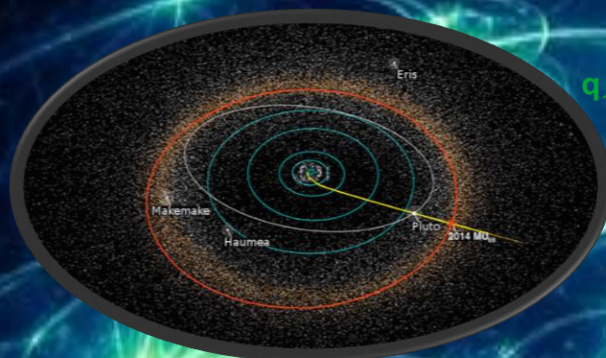
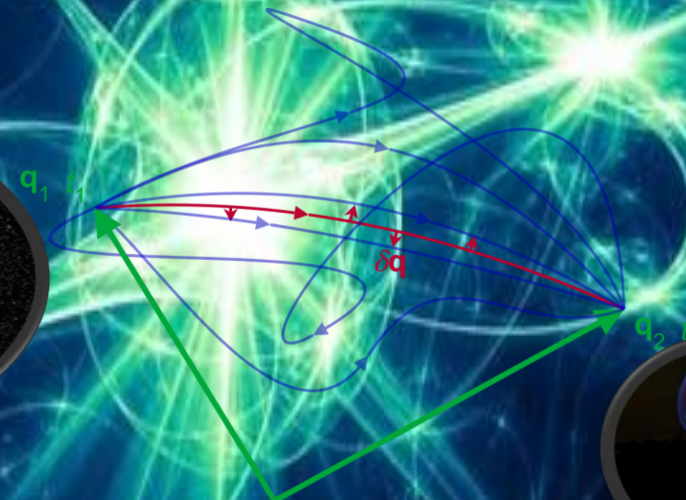
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\,dt = 0$$

Pearson

Física Básica





Marlon Basantes Valverde, Ph.D

Pearson

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

EJEMPLO 14–1 **Resortes automotrices.** Cuando una familia de cuatro personas con una masa total de 200 kg se sube a su automóvil de 1200 kg, los resortes del vehículo se comprimen 3.0 cm. *a*) ¿Cuál es la constante de resorte de los resortes del auto (figura 14-4), suponiendo que éstos actúan como un solo resorte? *b*) ¿Cuánto más bajo estará el automóvil si se carga con 300 kg, en vez de 200 kg?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ley de Hooke: el peso de la gente mg provoca un desplazamiento de 3.0 cm.

SOLUCIÓN *a*) La fuerza agregada de $(200\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 1960\text{ N}$ ocasiona que los resortes se compriman 3.0×10^{-2} m. Por lo tanto, la constante del resorte es

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1960\text{ N}}{3.0 \times 10^{-2}\text{ m}} = 6.5 \times 10^4\text{ N/m}.$$

b) Si el automóvil está cargado con 300 kg, la ley de Hooke proporciona

$$x = \frac{F}{k} = \frac{(300\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(6.5 \times 10^4\text{ N/m})} = 4.5 \times 10^{-2}\text{ m},$$

o 4.5 cm.

NOTA En *b*) podríamos haber obtenido x sin despejar k: como x es proporcional a F, si 200 kg comprimen el resorte 3.0 cm, entonces 1.5 veces esta fuerza, comprimirá al resorte 1.5 veces más, es decir, 4.5 cm.

14-2 Movimiento Armónico Simple

EJEMPLO 14–2 **De nuevo, resorte automotriz.** Determine el periodo y la frecuencia del automóvil en el ejemplo 14-1a después de golpear un tope (protuberancia en el camino). Suponga que los amortiguadores están en mal estado, por lo que el auto realmente oscila hacia arriba y hacia abajo.

PLANTEAMIENTO Consideramos $m = 1400$ kg y $k = 6.5 \times 10^4$ N/m del ejemplo 14-1a

SOLUCIÓN De ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1400\text{ kg}}{6.5 \times 10^4\text{ N/m}}} = 0.92\text{ s},$$

o ligeramente menos que un segundo. La frecuencia $f = 1/T = 1.09$ Hz.

14-2 Movimiento Armónico Simple

EJEMPLO 14–3 ESTIMACIÓN **Un piso que vibra.** En una fábrica un motor grande provoca que el piso vibre con una frecuencia de 10 Hz. La amplitud del movimiento del piso cerca del motor es de aproximadamente 3.0 mm. Estime la aceleración máxima del piso cerca del motor.

PLANTEAMIENTO Suponiendo que el movimiento del piso es aproximadamente MAS, podemos estimar para la aceleración máxima

SOLUCIÓN Dado $\omega = 2\pi f = (2\pi)(10\,\mathrm{s}^{-1}) = 62.8\,\mathrm{rad/s}$, entonces

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (62.8\,\mathrm{rad/s})^2(0.0030\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m/s^2}.$$

NOTA La aceleración máxima es un poco mayor que g, de manera que cuando el piso acelera hacia abajo, los objetos colocados en el piso realmente pierden contacto en un instante, lo que causará ruido y desgaste importante.

14-2 Movimiento Armónico Simple

EJEMPLO 14–4 **Altavoz.** El cono de un altavoz (figura 14-9) vibra con MAS a una frecuencia de 262 Hz ("do medio"). La amplitud en el centro del cono es $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m, y en $t = 0$, $x = A$. *a*) ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento en el centro del cono? *b*) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración como función del tiempo? *c*) ¿Cuál es la posición del cono en $t = 1.00$ ms ($= 1.00 \times 10^{-3}$ s)?

PLANTEAMIENTO El movimiento comienza ($t = 0$) con el cono en su máximo desplazamiento ($x = A$ en $t = 0$), por lo que usamos la función coseno, $x = A \cos \omega t$, con $\phi = 0$.

FIGURA 14–9 Ejemplo 14-4. Un cono de un altavoz.

SOLUCIÓN *a*) La amplitud $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m y

$$\omega = 2\pi f = (6.28\,\text{rad})(262\,\text{s}^{-1}) = 1650\,\text{rad/s}.$$

El movimiento se describe como

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos(1650t),$$

donde t está en segundos.

b) la velocidad máxima es

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (1650\,\text{rad/s})(1.5 \times 10^{-4}\,\text{m}) = 0.25\,\text{m/s},$$

Por lo que

$$v = -(0.25\,\text{m/s})\,\text{sen}(1650t).$$

la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (1650\ \text{rad/s})^2(1.5 \times 10^{-4}\ \text{m}) = 410\ \text{m/s}^2$, que es más de 40 g. Entonces,

$$a = -(410\,\text{m/s}^2)\cos(1650t).$$

c) En $t = 1.00 \times 10^{-3}$ s,

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos[(1650\,\text{rad/s})(1.00 \times 10^{-3}\,\text{s})]$$

$$= (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos(1.65\,\text{rad}) = -1.2 \times 10^{-5}\,\text{m}.$$

NOTA Asegúrese de que su calculadora esté en modo RAD, y no en modo DEG, para estos cálculos de cos ωt.

14-2 Movimiento Armónico Simple

EJEMPLO 14–5 **Cálculos en un resorte.** Un resorte se estira 0.150 m cuando se cuelga suavemente de él una masa de 0.300 kg, como en la figura 14-3b. Luego el resorte se coloca horizontalmente con la masa de 0.300 kg descansando sobre una mesa sin fricción, como en la figura 14-2. La masa se empuja de manera que el resorte se comprime 0.100 m del punto de equilibrio, y se libera a partir del reposo. Determine: *a*) la constante de rigidez del resorte k y la frecuencia angular ω; *b*) la amplitud de la oscilación horizontal A; *c*) la magnitud de la velocidad máxima, $v_{máx}$; *d*) la magnitud de la aceleración máxima de la masa, $a_{máx}$; *e*) el periodo T y la frecuencia f; *f*) el desplazamiento x en función del tiempo; y *g*) la velocidad en $t = 0.150$ s.

PLANTEAMIENTO Cuando la masa de 0.300 kg cuelga en reposo del resorte, como en la figura 14-3b, aplicamos la segunda ley de Newton para las fuerzas verticales: $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$, de modo que $k = mg/x_0$. Para las oscilaciones horizontales, se da la amplitud, y las otras cantidades se encuentran a partir de las ecuaciones

Elegimos x positiva a la derecha.

SOLUCIÓN *a*) El resorte se estira 0.150 m cuando se cuelgan de él una carga de 0.300 kg, por lo que

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0} = \frac{(0.300\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})}{0.150\,\mathrm{m}} = 19.6\,\mathrm{N/m}.$$

De

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19.6\,\mathrm{N/m}}{0.300\,\mathrm{kg}}} = 8.08\,\mathrm{s^{-1}}.$$

b) Como el resorte está ahora de forma horizontal (sobre una mesa). Se comprime 0.100 desde el equilibrio y no se le da rapidez inicial, por lo que $A = 0.100$ m.

c)la velocidad máxima es

$$v_{máx} = \omega A = (8.08\,\mathrm{s^{-1}})(0.100\,\mathrm{m}) = 0.808\,\mathrm{m/s}.$$

d) Como $F = ma$, la aceleración máxima ocurre donde la fuerza también es máxima, es decir, cuando $x = \pm A = \pm 0.100$ m. Así su magnitud es

$$a_{\text{máx}} = \frac{F}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{(19.6\,\text{N/m})(0.100\,\text{m})}{0.300\,\text{kg}} = 6.53\,\text{m/s}^2.$$

[Este resultado también podría haberse obtenido directamente
pero en general es útil regresar a los fundamentos como lo hicimos aquí].

e) Las ecuaciones dan

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.300\,\text{kg}}{19.6\,\text{N/m}}} = 0.777\,\text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.29\,\text{Hz}.$$

f) El movimiento empieza en un punto de compresión máxima. Si tomamos x positiva hacia la derecha en la figura 14-2, entonces en $t = 0$, $x = -A = -0.100$ m. Por lo tanto, necesitamos una curva senoidal que tenga su valor máximo negativo en $t = 0$; ésta es justamente un coseno negativo:

$$x = -A\cos\omega t.$$

Para escribir esto (sin signo menos), recuerde que cos
$\theta = -\cos(\theta - \pi)$; entonces, con valores numéricos, y recordando $-\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$
$= \cos(\theta - \pi)$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= -(0.100\,\text{m})\cos 8.08t \\ &= (0.100\,\text{m})\cos(8.08t - \pi), \end{aligned}$$

donde t está en segundos y x en metros. Note que el ángulo de fase es
$\phi = -\pi$ o $-180°$.

g) La velocidad en cualquier tiempo t es dx/dt (véase también el inciso *c*):

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \,\text{sen}\, \omega t = (0.808\,\text{m/s})\,\text{sen}\, 8.08t.$$

En $t = 0.150$ s, $v = (0.808$ m/s) sen (1.21 rad) $= 0.756$ m/s, y es hacia la derecha (+).

14-2 Movimiento Armónico Simple

EJEMPLO 14–6 **El movimiento de un resorte se inicia empujándolo.** Suponga que el resorte del ejemplo 14-5 está comprimido 0.100 m desde su posición de equilibrio ($x_0 = -0.100$ m) y se le da un empujón para generar una velocidad en la dirección $+x$ de $v_0 = 0.400$ m/s. Determine *a*) el ángulo de fase ϕ, *b*) la amplitud A, y *c*) el desplazamiento x en función del tiempo, $x(t)$.

PLANTEAMIENTO Usamos $t = 0$ para escribir $v_0 = -\omega A \operatorname{sen} \phi$, y para escribir $x_0 = A \cos \phi$. Combinándolas, obtenemos ϕ. Calculamos A utilizando de nuevo $t = 0$. Del ejemplo 14-5, $\omega = 8.08\ \mathrm{s}^{-1}$.

SOLUCIÓN *a*) Combinamos las ecuaciones $t = 0$, y despejamos la tangente:

$$\tan \phi = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} = \frac{(v_0/-\omega A)}{(x_0/A)} = -\frac{v_0}{\omega x_0} = -\frac{0.400\ \mathrm{m/s}}{(8.08\ \mathrm{s}^{-1})(-0.100\ \mathrm{m})} = 0.495.$$

Una calculadora da el ángulo como 26.3°, pero notamos de esta ecuación que tanto el seno como el coseno son negativos, por lo que nuestro ángulo se halla en el tercer cuadrante. Por lo tanto,

$$\phi = 26.3^\circ + 180^\circ = 206.3^\circ = 3.60\ \mathrm{rad}.$$

b) Usando de nuevo $t = 0$, como se estableció en el planteamiento,

$$A = \frac{x_0}{\cos \phi} = \frac{(-0.100\ \mathrm{m})}{\cos(3.60\ \mathrm{rad})} = 0.112\ \mathrm{m}.$$

c) $x = A \cos(\omega t + \phi) = (0.112\ \mathrm{m}) \cos(8.08t + 3.60)$.

14-3 Energía en el Oscilador Armónico Simple

EJEMPLO 14–7 **Cálculos de la energía.** Para la oscilación armónica simple del ejemplo 14-5, determine *a*) la energía total, *b*) las energías cinética y potencial en función del tiempo, *c*) la velocidad cuando la masa está a 0.050 m de la posición de equilibrio, *d*) y las energías cinética y potencial a media amplitud ($x = \pm A/2$).

PLANTEAMIENTO Usamos la conservación de la energía para el sistema resorte-masa

SOLUCIÓN *a*) Del ejemplo 14-5, $k = 19.6$ N/m y $A = 0.100$ m, por lo que la energía total E

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.100\,\mathrm{m})^2 = 9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}.$$

b) De los incisos *f*) y *g*) del ejemplo 14-5, tenemos $x = -(0.100\ \mathrm{m})\cos 8.08t$ y $v = (0.808\ \mathrm{m/s})\,\mathrm{sen}\,8.08t$, por lo que

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.100\,\mathrm{m})^2\cos^2 8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}\right)\cos^2 8.08t$$

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.300\,\mathrm{kg})(0.808\,\mathrm{m/s})^2\,\mathrm{sen}^2\,8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}\right)\mathrm{sen}^2\,8.08t.$$

c) Usamos la ecuación y encontramos

$$v = v_{\text{máx}}\sqrt{1 - x^2/A^2} = (0.808\,\mathrm{m/s})\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = 0.70\,\mathrm{m/s}.$$

d) En $x = A/2 = 0.050$ m, tenemos

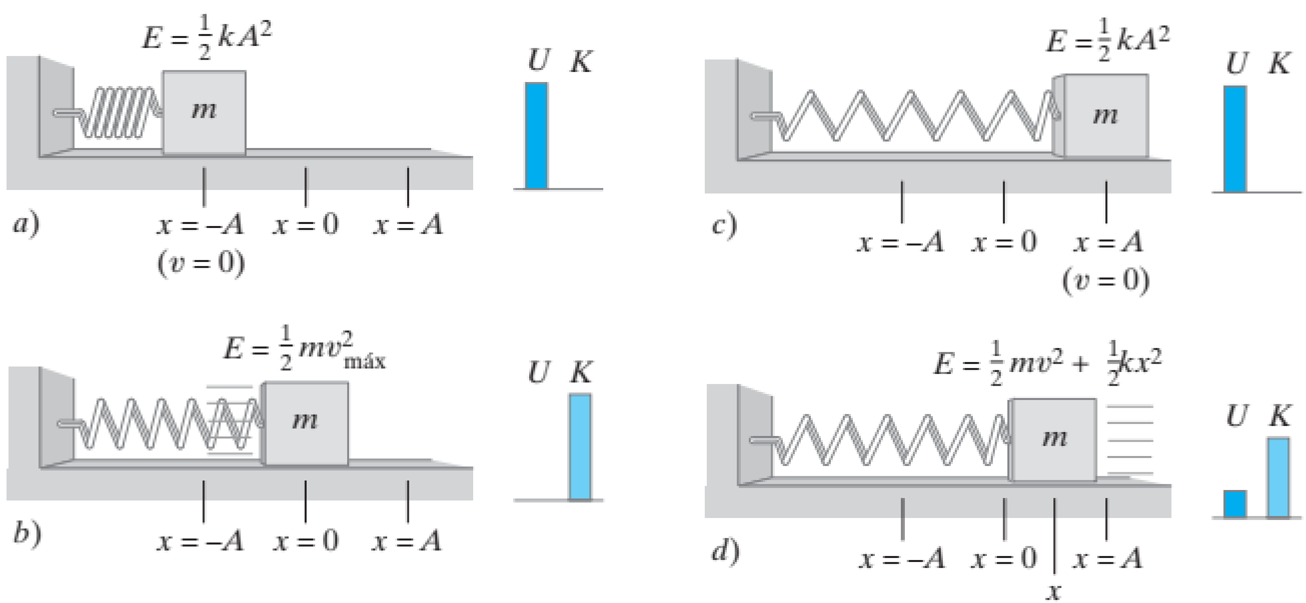
$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.050\,\mathrm{m})^2 = 2.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$K = E - U = 7.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}.$$

14-3 Energía en el Oscilador Armónico Simple

EJEMPLO CONCEPTUAL 14–8 **Se duplica la amplitud.** Suponga que el resorte de la figura 14-10 se estira el doble (a $x = 2A$). ¿Qué sucede a *a*) la energía del sistema, *b*) la velocidad máxima de la masa oscilante, *c*) la aceleración máxima de la masa?

RESPUESTA *a*) la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud A, por lo que estirándolo al doble la energía se cuadruplica ($2^2 = 4$). Usted podría objetar: "Yo efectúe trabajo al estirar el resorte desde $x = 0$ hasta $x = A$. ¿No efectúo yo el mismo trabajo al estirarlo desde A hasta $2A$?" No. La fuerza que usted tiene que ejercer es proporcional al desplazamiento x, por lo que para el segundo desplazamiento, de $x = A$ a $2A$, usted haría más trabajo que para el primer desplazamiento (de $x = 0$ a A). *b*) observamos que cuando la energía se cuadruplica, la velocidad máxima debe duplicarse con respecto al valor anterior. $[v_{\text{máx}} \propto \sqrt{E} \propto A.]$ *c*) Como la fuerza aplicada es dos veces más grande cuando estiramos el resorte al doble, la aceleración es también dos veces más grande: $a \propto F \propto x$.



14-5 El Péndulo Simple

EJEMPLO 14–9 **Medición de *g*.** Un geólogo usa un péndulo simple cuya longitud es de 37.10 cm y tiene una frecuencia de 0.8190 Hz en un lugar específico sobre la Tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en este lugar?

PLANTEAMIENTO Podemos utilizar la longitud ℓ y la frecuencia f del péndulo en la ecuación que contiene nuestra incógnita, g.

SOLUCIÓN Despejamos g de la ecuación y obtenemos

$$g = (2\pi f)^2\ell = (6.283 \times 0.8190\,\mathrm{s^{-1}})^2(0.3710\,\mathrm{m}) = 9.824\,\mathrm{m/s^2}.$$

14-6 El Péndulo Físico y el Péndulo de Torsión

EJEMPLO 14–10 **Medición del momento de inercia.** Una manera fácil de medir el momento de inercia de un objeto con respecto a cualquier eje consiste en medir el periodo de oscilación alrededor de ese eje. *a*) Considere que una vara no uniforme de 1.0 kg puede equilibrarse en un punto a 42 cm desde un extremo. Si es "pivoteada" con respecto a ese extremo (figura 14-17), oscilará con un periodo de 1.6 s. ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a este extremo? *b*) ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la vara que pase por su centro de masa?

PLANTEAMIENTO Colocamos los valores dados y despejamos I.
Para *b*) usamos el teorema de los ejes paralelos

SOLUCIÓN *a*) Dadas $T = 1.6$ s y $h = 0.42$ m, despejamos I de la ecuación

$$I = mghT^2/4\pi^2 = 0.27\,\mathrm{kg\cdot m^2}.$$

b) Usamos el teorema de los ejes paralelos El CM está donde la vara queda en equilibrio, a 42 cm desde el extremo, por lo que

$$I_{\mathrm{cm}} = I - mh^2 = 0.27\,\mathrm{kg\cdot m^2} - (1.0\,\mathrm{kg})(0.42\,\mathrm{m})^2 = 0.09\,\mathrm{kg\cdot m^2}.$$

NOTA Como un objeto no oscila alrededor de su CM, no podemos medir I_{CM} directamente; sin embargo, el teorema de los ejes paralelos brinda un método conveniente para determinar I_{CM}.

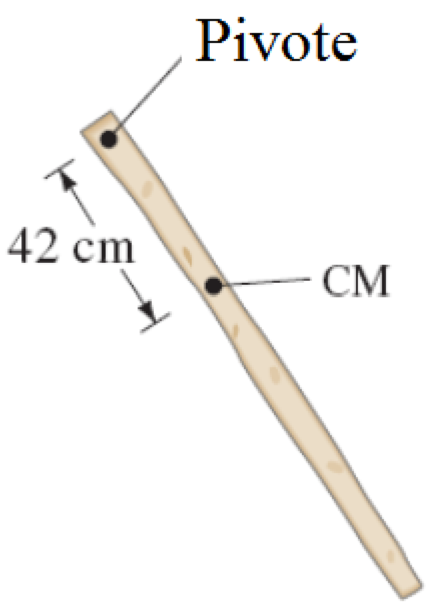


FIGURA 14–17 Ejemplo 14–10.

14-7 Movimiento Armónico Amortiguado

EJEMPLO 14–11 **Péndulo simple con amortiguamiento.** Un péndulo simple que tiene una longitud de 1.0 m (figura 14-22) se pone a oscilar con oscilaciones de pequeña amplitud. Después de 5.0 minutos, la amplitud es sólo el 50% del valor inicial. *a*) ¿Cuál es el valor de γ para el movimiento? *b*) ¿En qué factor difiere la frecuencia f' de la frecuencia no amortiguada f?

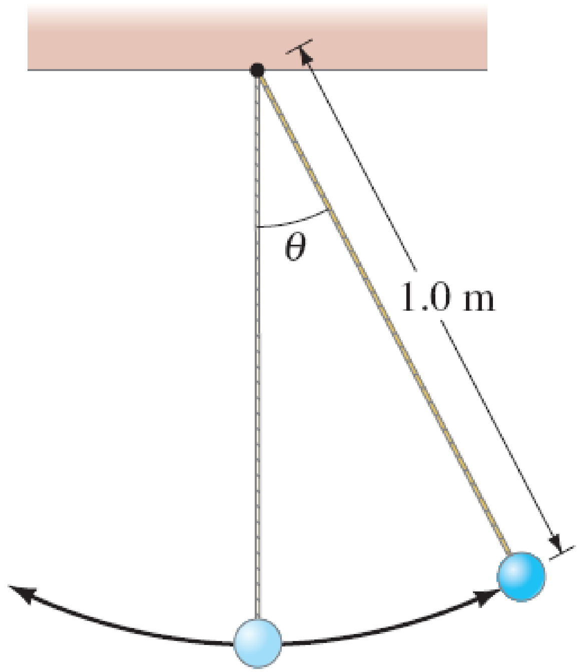


FIGURA 14–22 Ejemplo 14–11.

PLANTEAMIENTO Suponemos que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la rapidez angular, $d\theta/dt$. La ecuación del movimiento para el movimiento armónico amortiguado es

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

para el movimiento de una masa en el extremo de un resorte. Para el péndulo simple sin amortiguamiento, vimos que

$$F = -mg\theta$$

para θ pequeño. Como $F = ma$, donde a puede escribirse en términos de la aceleración angular $\alpha = d^2\theta/dt^2$ como $a = \ell\alpha = \ell\, d^2\theta/dt^2$, entonces $F = m\ell\, d^2\theta/dt^2$, y

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$$

Introduciendo el término de amortiguamiento, $b(d\theta/dt)$, tenemos

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0,$$

SOLUCIÓN *a*) con la ecuación anterior vemos que nuestra ecuación $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ se vuelve una ecuación para θ con

$$\gamma = \frac{b}{2\ell} \quad \text{y} \quad \omega' = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4\ell^2}}.$$

En $t = 0$, reescribimos la ecuación con θ reemplazando x como

$$\theta_0 = Ae^{-\gamma\cdot 0}\cos\omega'\cdot 0 = A.$$

Entonces en $t = 5.0$ min $= 300$ s, la amplitud dada por la ecuación descendió a 0.50 A, por lo que

$$0.50A = Ae^{-\gamma(300\,\mathrm{s})}.$$

Despejamos γ de aquí y obtenemos $\gamma = \ln 2.0/(300\text{ s}) = 2.3 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$.

b) Tenemos $\ell = 1.0$ m, por lo que $b = 2\gamma\ell = 2(2.3 \times 10^{-3}\text{s}^{-1})(1.0\text{ m}) = 4.6 \times 10^{-3}$ m/s. Así, $(b^2/4\ell^2)$ es mucho menor que g/ℓ $(= 9.8\text{ s}^{-2})$ y la frecuencia angular del movimiento permanece casi igual que la del movimiento sin amortiguamiento. Específicamente

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]$$

donde usamos el desarrollo binomial. Entonces, con $f = (1/2\pi)\sqrt{g/\ell}$

$$\frac{f - f'}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right) = 2.7 \times 10^{-7}.$$

Por lo que f' difiere de f en menos de una parte en un millón.

Formulario

$$F = -kx.$$

$$f = \frac{1}{T}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Formulario

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t,$$


$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = j^\alpha$$
$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$
Standard Model of Elementary Particles
three generations of matter (elementary fermions)
three generations of antimatter (elementary antifermions)
interactions / force carriers (elementary bosons)
u c t ū c̄ t̄ g H
d s b d̄ s̄ b̄ γ
e μ τ e⁺ μ̄ τ̄ Z
νe νμ ντ ν̄e ν̄μ ν̄τ W⁺ W⁻
QUARKS
LEPTONS
GAUGE BOSONS
VECTOR BOSONS
SCALAR BOSONS
Hydrogen Wave Function
Probability density plots.
(2,0,0) (3,0,0)
(2,1,0) (3,1,0) (3,1,1)
(2,1,1) (3,2,0) (3,2,1) (3,2,2)
(4,0,0) (4,1,0) (4,1,1) (4,2,0) (4,2,1)
(4,2,2) (4,3,0) (4,3,1) (4,3,2) (4,3,3)