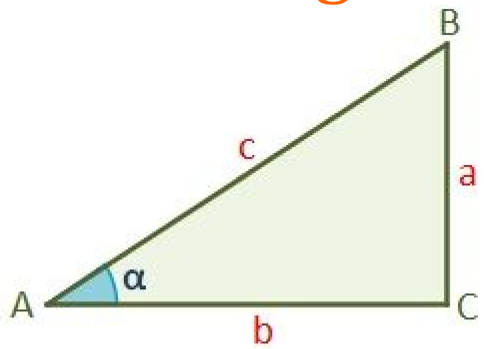
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las **identidades trigonométricas** son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas.

Razones trigonométricas



Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, la comparación por su cociente de sus tres lados *a*, *b* y *c*.

Sea α uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

- El **seno** de un **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

- El **coseno** se define como la **razón** entre el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

$$\cos \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

- La **tangente** es la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*).

$$\tan \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

Razones trigonométricas recíprocas

Las **razones trigonométricas recíprocas** (o **recíprocas**) son los inversos multiplicativos de las razones trigonométricas. Éstas son:

- **Cosecante** (*csc*): es la razón inversa del seno. Es decir, csc α · sen α=1.
- **Secante** (*sec*): la razón inversa del coseno. Es decir, sec α · cos α=1
- **Cotangente** (*cot*): es la razón inversa de la tangente. También en este caso, cot α · tan α=1

Relación entre razones trigonométricas

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	*sen α*	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	*cos α*	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	*tan α*	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	*csc α*	$\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\pm\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	*sec α*	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	*cot α*

Nota: *el signo ± que corresponde en cada caso depende del cuadrante en que esté el ángulo.*

Relaciones trigonométricas básicas

- **Identidad fundamental de la trigonometría**

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- **Relación entre el seno, coseno y tangente**

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

- **Relación trigonométrica entre la tangente y la secante**

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

- **Relación trigonométrica entre la cosecante y la cotangente**

$$\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha$$

Ángulos complementarios

- **Seno** del ángulo complementario:

$$\operatorname{sen}(90^o - \alpha) = \cos \alpha$$

- **Coseno** del ángulo complementario:

$$\cos(90^o - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

- **Tangente** del ángulo complementario:

$$\tan(90^o - \alpha) = \cot \alpha$$

- **Cosecante** del ángulo complementario:

$$\csc(90^o - \alpha) = \sec \alpha$$

- **Secante** del ángulo complementario:

$$\sec(90^o - \alpha) = \csc \alpha$$

- **Cotangente** del ángulo complementario:

$$\cot(90^o - \alpha) = \tan \alpha$$

Ángulos suplementarios

- **Seno** del ángulo suplementario:

$$\operatorname{sen}(180^{o} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

- **Coseno** del ángulo suplementario:

$$\cos(180^{o} - \alpha) = -\cos \alpha$$

- **Tangente** del ángulo suplementario:

$$\tan(180^{o} - \alpha) = -\tan \alpha$$

- **Cosecante** del ángulo suplementario:

$$\csc(180^{o} - \alpha) = \csc \alpha$$

- **Secante** del ángulo suplementario:

$$\sec(180^{o} - \alpha) = -\sec \alpha$$

- **Cotangente** del ángulo suplementario:

$$\cot(180^{o} - \alpha) = -\cot \alpha$$

Ángulos conjugados

- **Seno** del ángulo conjugado:

$$\operatorname{sen}(360^{o} - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

- **Coseno** del ángulo conjugado:

$$\cos(360^{o} - \alpha) = \cos \alpha$$

- **Tangente** del ángulo conjugado:

$$\tan(360^{o} - \alpha) = -\tan \alpha$$

- **Cosecante** del ángulo conjugado:

$$\csc(360^{o} - \alpha) = -\csc \alpha$$

- **Secante** del ángulo conjugado:

$$\sec(360^{o} - \alpha) = \sec \alpha$$

- **Cotangente** del ángulo conjugado:

$$\cot(360^{o} - \alpha) = -\cot \alpha$$

Ángulos opuestos

- **Seno** del ángulo opuesto:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

- **Coseno** del ángulo opuesto:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

- **Tangente** del ángulo opuesto:

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

- **Cosecante** del ángulo opuesto:

$$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$$

- **Secante** del ángulo opuesto:

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$$

- **Cotangente** del ángulo opuesto:

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Ángulos que difieren 90º

- **Seno** del ángulo que difiere 90º:

$$\operatorname{sen}(90^{o} + \alpha) = \cos\alpha$$

- **Coseno** del ángulo que difiere 90º:

$$\cos(90^{o} + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

- **Tangente** del ángulo que difiere 90º:

$$\tan(90^{o} + \alpha) = -\cot\alpha$$

- **Cosecante** del ángulo que difiere 90º:

$$\csc(90^{o} + \alpha) = \sec\alpha$$

- **Secante** del ángulo que difiere 90º:

$$\sec(90^{o} + \alpha) = -\csc\alpha$$

- **Cotangente** del ángulo que difiere 90º:

$$\cot(90^{o} + \alpha) = -\tan\alpha$$

Ángulos que difieren 180º

- **Seno** del ángulo que difiere 180º:

$$\operatorname{sen}(180^o + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

- **Coseno** del ángulo que difiere 180º:

$$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$$

- **Tangente** del ángulo que difiere 180º:

$$\tan(180^o + \alpha) = \tan\alpha$$

- **Cosecante** del ángulo que difiere 180º:

$$\csc(180^o + \alpha) = -\csc\alpha$$

- **Secante** del ángulo que difiere 180º:

$$\sec(180^o + \alpha) = -\sec\alpha$$

- **Cotangente** del ángulo que difiere 180º:

$$\cot(180^o + \alpha) = \cot\alpha$$

Transformaciones de razones trigonométricas

- **Suma en producto**

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- **Producto en suma**

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cdot[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

Razones trigonométricas del ángulo suma

- **Seno** del ángulo suma:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Coseno** del ángulo suma:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Tangente** del ángulo suma:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo resta

- **Seno** del ángulo resta:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Coseno** del ángulo resta:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Tangente** del ángulo resta:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

- **Seno** del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

- **Coseno** del ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

- **Tangente** del ángulo doble:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

- **Seno** del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

- **Coseno** del ángulo mitad:

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

- **Tangente** del ángulo mitad:

$$\tan(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Razones trigonométricas del ángulo triple

- **Seno** del ángulo triple:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$$

- **Coseno** del ángulo triple:

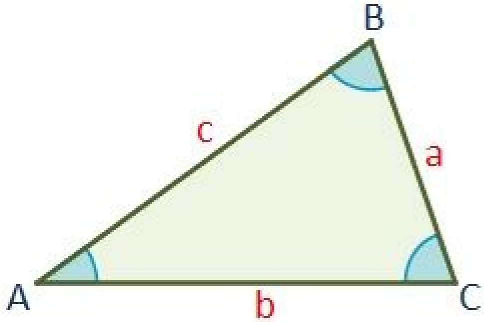
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

- **Tangente** del ángulo triple:

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Teorema del seno

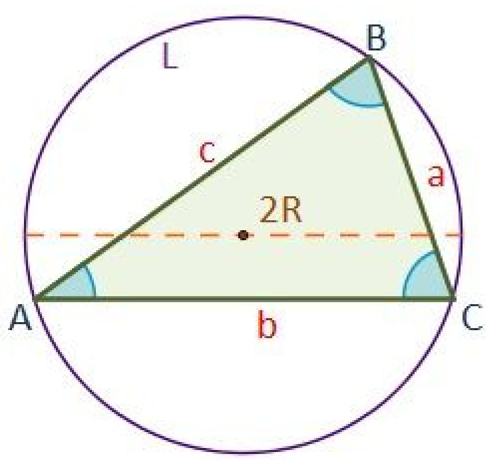
El **teorema del seno** relaciona proporcionalmente los lados y los ángulos de un **triángulo**. Éste enuncia que:



Cada **lado** de un triángulo (*a*, *b* y *c*) es directamente **proporcional** al **seno** del **ángulo opuesto** (*A*, *B* y *C*).

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

siendo a, b y c los costados y A, B y C los ángulos del triángulo



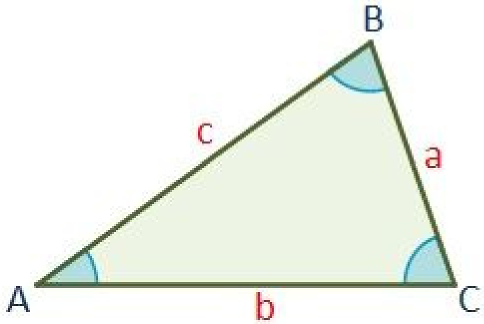
La razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro (el doble del radio, 2*R*) de la circunferencia (*L*) en la que se circunscribe el triángulo.

Es decir, todas las **razones** entre cada **lado** (*a*, *b* y *c*) y el seno del **ángulo opuesto** (*A*, *B* y *C*) son **directamente proporcionales** y dicha proporción es **2*R***.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

Teorema del coseno

El **teorema del coseno** relaciona un lado del **triángulo** con los otros dos y el ángulo que forman éstos. El teorema enuncia que:



El cuadrado de un **lado** (*a*, *b* o *c*) cualquiera de un triángulo es **igual** a la suma de los cuadrados de los dos **lados restantes** menos el doble del producto de ellos por el **coseno** del ángulo (*A*, *B* o *C*) que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

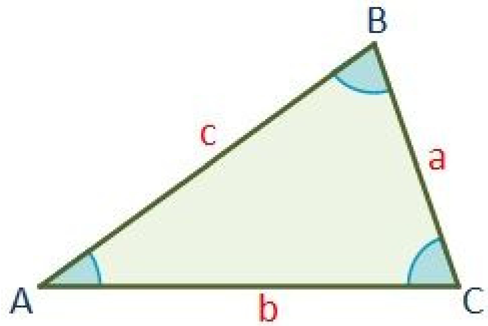
siendo a, b y c los costados y A, B y C los ángulos del triángulo

El **teorema del coseno** es una generalización del **teorema de Pitágoras** para cualquier **triángulo**.

De hecho, si el ángulo *A* fuese recto (90º), su coseno seria cero, quedando: $a^2 = b^2+c^2$. Si el ángulo *A* fuese obtuso, es decir >90º, entonces el coseno sería negativo.

Teorema de la tangente

El **teorema de la tangente** relaciona las longitudes de dos lados de un **triángulo** con las tangentes de los dos ángulos opuestos a éstos. Éste enuncia que:



La razón entre la suma de dos lados (*a*, *b* o *c*) de un triángulo y su resta es igual a la razón entre la **tangente** de la media de los dos ángulos opuestos a dichos lados y la **tangente** de la mitad de la diferencia de éstos.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan[\frac{A+B}{2}]}{\tan[\frac{A-B}{2}]}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan[\frac{A+C}{2}]}{\tan[\frac{A-C}{2}]}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan[\frac{B+C}{2}]}{\tan[\frac{B-C}{2}]}$$

siendo a, b y c los lados y A, B y C los ángulos del triángulo