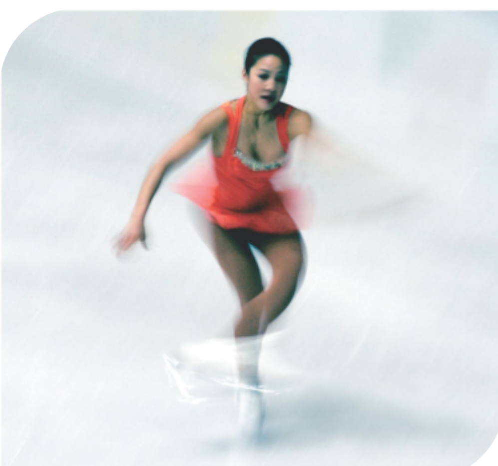
Capítulo 11

Cantidad de Movimiento Angular: Rotación General



Esta patinadora está haciendo un giro. Cuando sus brazos se extienden horizontalmente, gira menos rápido que cuando los mantiene cerca del eje de rotación. Éste es un ejemplo de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

La cantidad de movimiento angular, que estudiaremos en este capítulo, se conserva sólo si no actúa ninguna torca neta sobre el objeto o sistema. De otra forma, la tasa de cambio de la cantidad de movimiento angular es proporcional a la torca neta aplicada, la cual, si es cero, implica que la cantidad de movimiento angular se conserva. En este capítulo también examinaremos aspectos más complejos del movimiento de rotación.

Unidades del Capítulo 11

- Cantidad de Movimiento Angular—Rotación de Objetos en Torno a un Eje Fijo.
- Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector
- Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula
- Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un sistema de partículas: Movimiento General
- Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Cuerpo Rígido

Unidades del Capítulo 11

- Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular
- El Trompo y el Giroscopio
- Marcos de Referencia en Rotación; Fuerzas Inerciales
- El Efecto Coriolis

11-1 Cantidad de Movimiento Angular—Objectos en Torno a un Eje Fijo

El análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal es la cantidad de movimiento angular **L**:

$$L = I\omega$$

Entonces el análogo rotacional a la segunda ley de Newton es:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$$

Esta forma de la segunda ley de Newton es válida inclusive si ***I*** no es constante.

11-1 Cantidad de Movimiento Angular—Objectos en Torno a un Eje Fijo

En ausencia de torques externos, la cantidad de movimiento angular se conserva:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad L = I\omega = \text{constante}$$

Más formalmente,

La cantidad de movimiento angular total de un objeto que rota permanece constante si el torque neto externo que actúa sobre él es cero.

11-1 Cantidad de Movimiento Angular—Objectos en Torno a un Eje Fijo

Esto significa: $I\omega = I_0\omega_0 = \text{constante}$

Por lo tanto, si el momento de inercia de un objeto cambia, su rapidez angular cambia también.

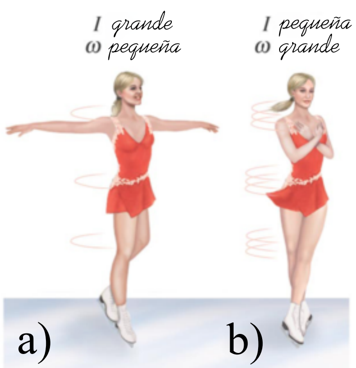


FIGURA 11.1 Una patinadora que realiza un giro sobre el hielo ilustra la conservación de la cantidad de movimiento angular: a) I es grande y v es pequeña; b) I es menor, así que ω es mayor

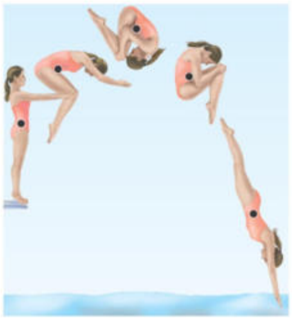
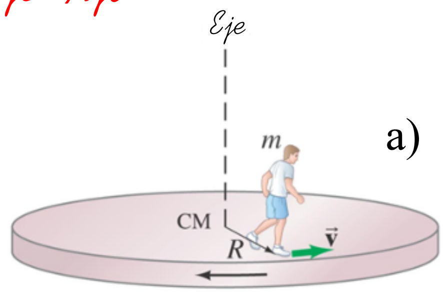


FIGURA 11.2 Una clavadista gira más rápido cuando sus brazos y piernas están doblados que cuando están extendidos. La cantidad de movimiento angular se conserva.

11-1 Cantidad de Movimiento Angular—Objectos en Torno a un Eje Fijo

La Cantidad de Movimiento Angular es un vector; para un objeto simétrico que gira alrededor de un eje de simetría está en la misma dirección que el vector velocidad angular.



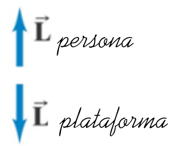


FIGURA 11.5 a) Una persona se encuentra sobre una plataforma circular (ambas están inicialmente en reposo); el sujeto comienza a caminar por la orilla con una rapidez v (respecto de la Tierra). La plataforma, que se supone está montada sobre chumaceras libres de fricción, comienza a girar en sentido contrario, de manera que la cantidad de movimiento angular total sigue siendo cero, como se observa en b)

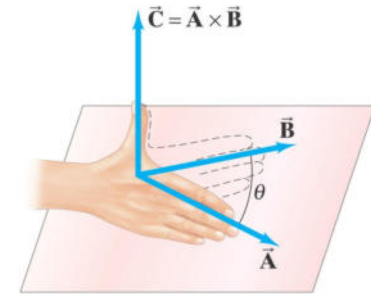
11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

El producto vectorial o cruz es definido como otro vector, cuya magnitud es:

$$C = |\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB \operatorname{sen} \theta$$

La dirección del producto cruz está definida por la regla de la mano derecha:

FIGURA 11.7 El vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{A}}$ y a $\vec{\mathbf{B}}$; su sentido está dado por la regla de la mano derecha



11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

El producto cruz también puede ser escrito en forma de determinante:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{k}}.$$

¿Es posible escribir el producto vectorial en forma tensorial?

11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

Algunas propiedades del producto cruz:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) + (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}.$$

11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

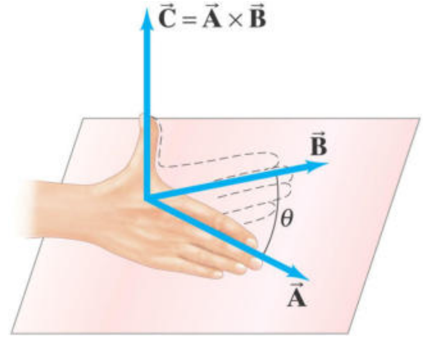


FIGURA 11.7 El vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$ su sentido está dado por la regla de la mano derecha.

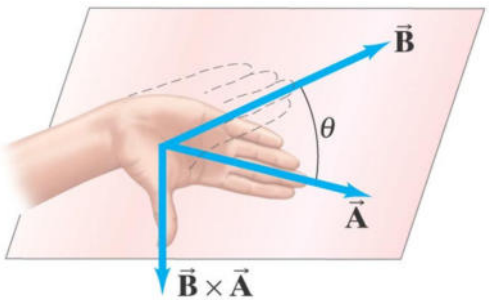


FIGURA 11.8 El vector $\vec{B} \times \vec{A}$ es igual a $-\vec{A} \times \vec{B}$; compare con la figura 11-7.

11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

El Torque puede ser definido como el producto vectorial del vector de posición desde el eje de rotación al punto de acción de la fuerza, por el vector Fuerza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

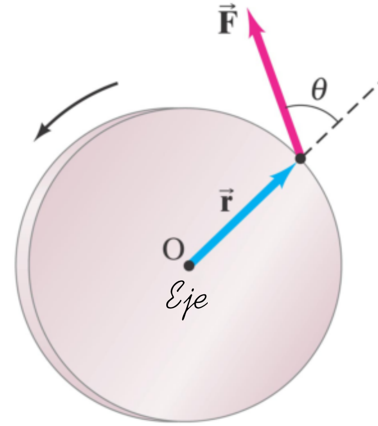


FIGURA 11.10 La torca producida por la fuerza aplicada $\vec{F}$ (en el plano de la rueda) hace girar a la rueda en sentido antihorario, de manera que $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ señalan hacia fuera de la página.

11-2 Producto Cruz ó Vectorial; Torque como un Vector

Para una partícula, el torque puede ser definido alrededor de un punto O:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Aquí, $\vec{r}$ es el vector de posición desde la partícula, relativo a O.

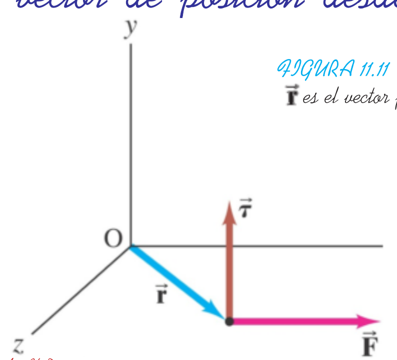


FIGURA 11.11 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, donde $\vec{r}$ es el vector posición.

11-3 Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula

La cantidad de movimiento angular de una partícula alrededor de un eje especificado está dada por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

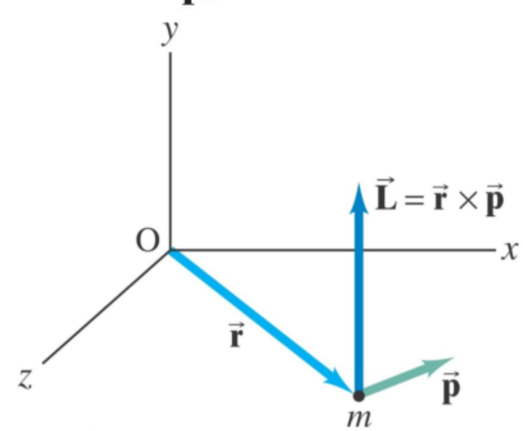


FIGURA 11.12 La cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m está dada por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

11-3 Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula

Si se toma la derivada de $\vec{L}$, se encuentra:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

ya que: $$\vec{\mathbf{r}} \times \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$$

se tiene: $$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$$

11-4 Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Sistema de Partículas; Movimiento General

La cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas puede cambiar solamente si hay un torque externo – los torques debido a fuerzas internas se cancelan.

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}.$$

Esta ecuación es válida en cualquier sistema de referencia inercial. También es válida para el centro de masa, incluso si se está acelerando

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{CM}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{CM}}.$$

11-5 Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Cuerpo Rígido

Para un cuerpo rígido, puedes demostrar que su cantidad de movimiento angular, cuando rota alrededor de un eje particular, está dada por:

$$L_\omega = I\omega$$

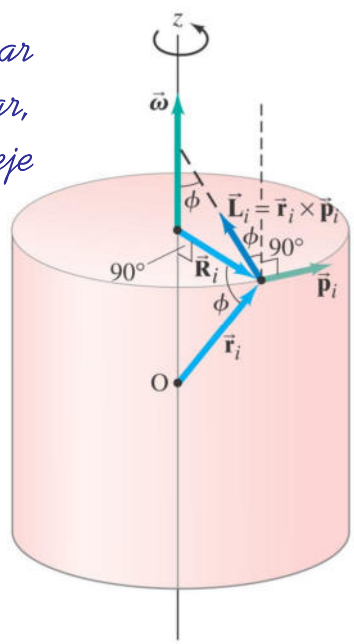


FIGURA 11.15 Cálculo de $L_\omega = L_z = \Sigma L_{iz}$. Observe que $\vec{\mathbf{L}}_i$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}_i$, y $\vec{\mathbf{R}}_i$ es perpendicular al eje z, de forma que los tres ángulos marcados como ϕ son iguales.

11-5 Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Cuerpo Rígido

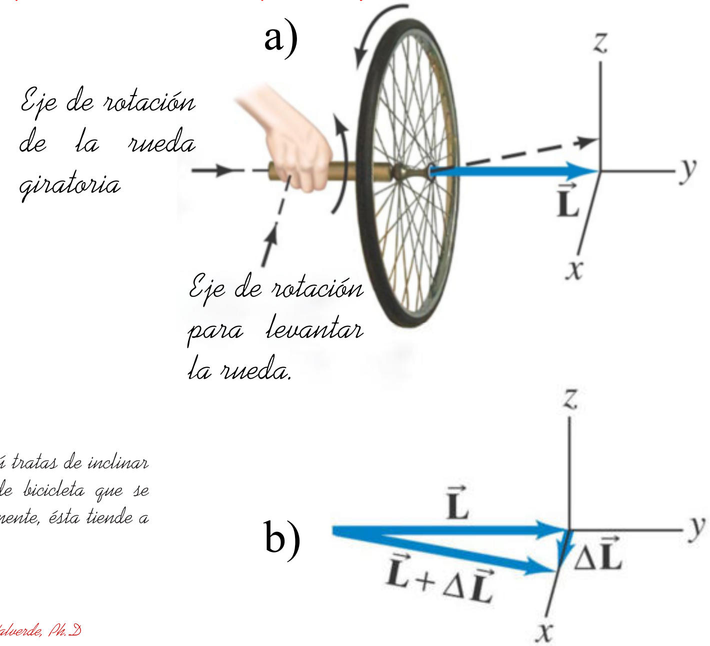


FIGURA 11.17 Cuando tú tratas de inclinar hacia arriba una rueda de bicicleta que se encuentra girando verticalmente, ésta tiende a desviarse lateralmente.

11-5 Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Cuerpo Rígido

Un sistema que es rotacionalmente desequilibrado no tendrá sus cantidades de movimiento angular y sus vectores velocidad angular en la misma dirección. Un torque es requerido para mantener un sistema desequilibrado girando.

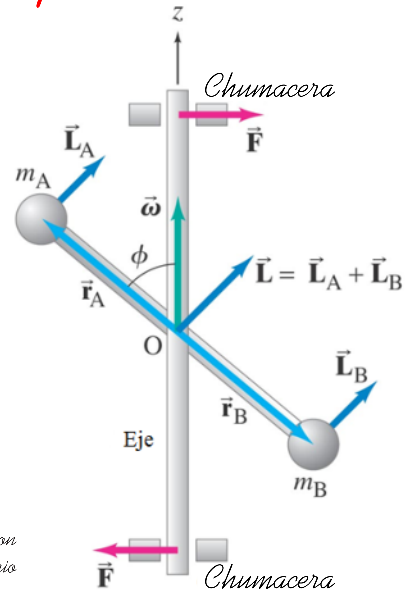


FIGURA 11.18 En este sistema $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ no son paralelos. Éste es un ejemplo de desequilibrio rotacional.

11-5 Cantidad de Movimiento Angular y Torque para un Cuerpo Rígido

A veces el eje tiende a moverse por lo que puede oscilar conforme gira. Esto tiene muchas aplicaciones, como en el caso de las vibraciones que se sienten en un automóvil cuyas ruedas no están balanceadas.

Cuando las ruedas están balanceadas (en la figura 11-19 la masa m_A balancea el giro), giran uniformemente sin oscilar. De ahí la importancia del "balanceo dinámico" de las ruedas y los neumáticos de un automóvil.

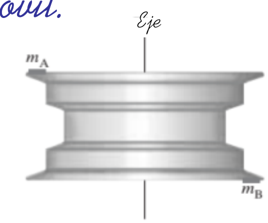


FIGURA 11.19 Rin desbalanceado de un automóvil.

11-6 Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular

Si el torque neto de un sistema es constante:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{L}} = \text{constante.} \quad \left[\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0\right]$$

La cantidad de movimiento angular total de un sistema permanece constante si el torque neto externo que actúa sobre el sistema es cero.

11-7 El Trompo y el Giroscopio

Un trompo tendrá un movimiento de precesión alrededor de su punto de contacto con la superficie, debido al torque creado por la gravedad cuando su eje de rotación deja de ser vertical.

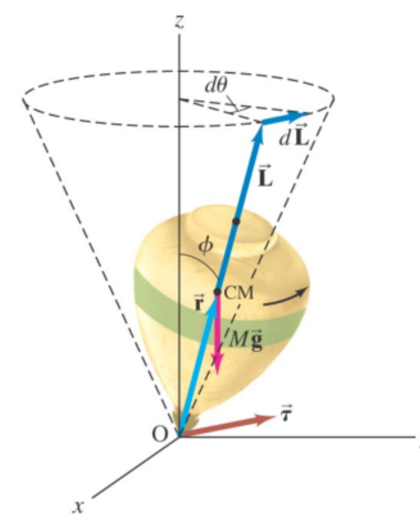


FIGURA 11.23 Trompo en rotación.

11-7 El Trompo y el Giroscopio

La velocidad angular de la precesión está dada por:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}.$$

En la figura 11-24 se muestra la velocidad angular de la precesión de un giroscopio de juguete.

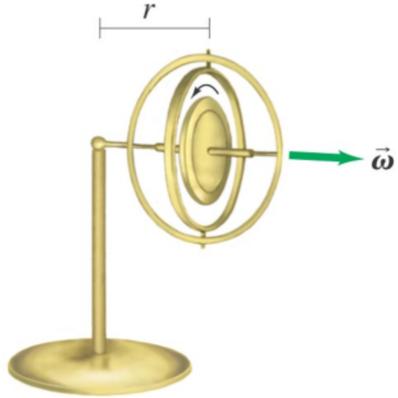


FIGURA 11.24 Un giróscopo de juguete.

11-8 Marcos de Referencia en Rotación; Fuerzas Inerciales

Un marco de referencia inercial es uno en el cual las leyes de Newton son válidas; en un marco de referencia no-inercial los objetos se pueden mover sin que una fuerza actúe sobre ellos.

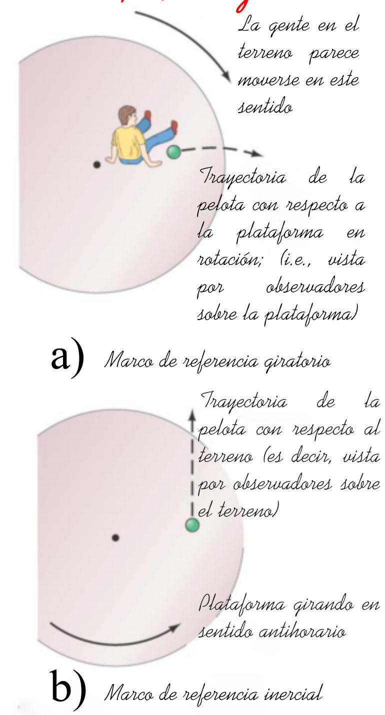


FIGURA 11.25 Trayectoria de una pelota soltada en un carrusel en movimiento, a) en el marco de referencia del carrusel y b) en un marco de referencia inercial.

11-8 Marcos de Referencia en Rotación; Fuerzas Inerciales

Hay una **fuerza aparente** hacia el exterior sobre los objetos en sistemas de referencia que rotan; esta es una **fuerza ficticia o pseudofuerza**. La “fuerza” centrífuga es de este tipo; no hay ninguna fuerza hacia afuera cuando se observa desde un sistema de referencia inercial.

Tales pseudofuerzas se llaman también **fuerzas inerciales**.

11-9 El Efecto Coriolis

Si un objeto se mueve en un sistema de referencia no-inercial hay otra pseudofuerza sobre él, puesto que la velocidad tangencial no se incrementa mientras el objeto se mueve más lejos del eje de rotación. Esto resulta en una desviación hacia los lados.

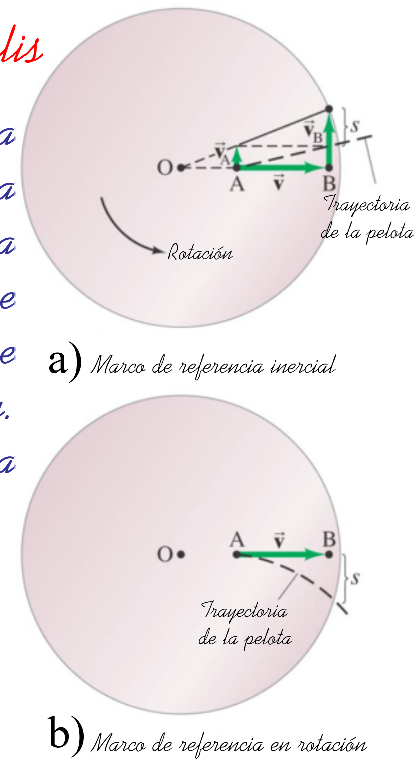


FIGURA 11.26 Origen del efecto Coriolis. Observando hacia abajo una plataforma que gira, a) vista desde un marco de referencia inercial, que no gira; y b) vista desde una plataforma en rotación como marco de referencia.

11-9 El Efecto Coriolis

El efecto Coriolis es el responsable de la rotación del aire alrededor de áreas de baja presión en sentido antihorario en el hemisferio norte y en sentido horario en el hemisferio sur. La aceleración de Coriolis es:

$$a_{\mathrm{Cor}} = 2\omega v.$$

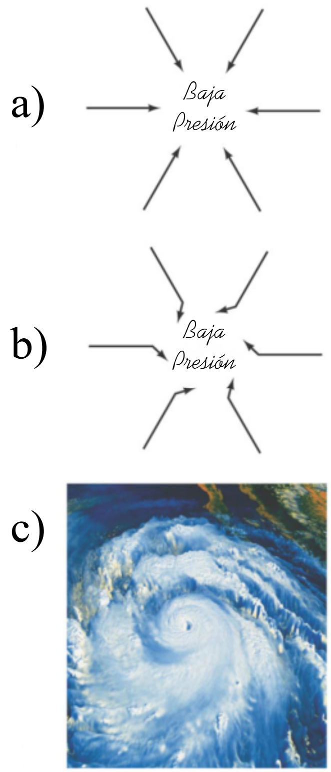


FIGURA 11.27 a) Los vientos (masa de aire en movimiento) fluirían directamente hacia una zona de baja presión si la Tierra no girara. b) y c) Como resultado de la rotación de la Tierra, los vientos se desvían hacia la derecha en el hemisferio norte (figura 11-26), como si actuara una fuerza ficticia (la fuerza de Coriolis).

Resumen del Capítulo 11

· La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido:

$$L = I\omega.$$

· La segunda ley de Newton:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}.$$

·La cantidad de movimiento angular se conserva.

· El torque:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}.$$

Resumen del Capítulo 11

· La cantidad de movimiento angular de una partícula:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}.$$

· El torque neto:

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$$

· Si el torque neto es cero, el vector cantidad de movimiento angular se conserva.