



Capítulo 10

Movimiento Rotacional

Tú también puedes experimentar el rápido movimiento de rotación, si tu estómago es capaz de resistir la elevada velocidad angular y la aceleración centrípeta de alguna de las atracciones más rápidas del parque de diversiones. Si no, intenta con el carrusel o con la rueda de la fortuna, que son más lentos. Los juegos de rotación de las ferias tienen energía cinética rotacional, así como cantidad de movimiento angular. La aceleración angular se produce por una fuerza no balanceada y un objeto en rotación tiene energía cinética rotacional

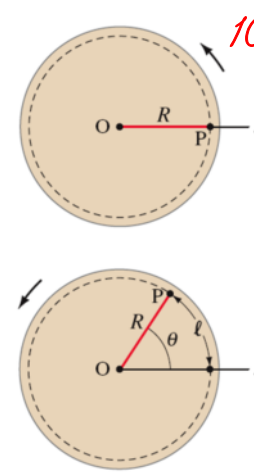


Unidades del Capítulo 10

- Cantidades Angulares
- Naturaleza vectorial de las Cantidades Angulares
- Aceleración Angular Constante
- Torque
- Dinámica Rotacional; Torque e Inercia Rotacional
- Resolviendo Problemas en Dinámica Rotacional

Unidades del Capítulo 10

- Determinación de Momentos de Inercia
- Energía Cinética Rotacional
- Movimiento Rotacional más Traslacional; Rodamiento
- ¿Por qué desacelera una esfera rodante?



10-1 Cantidades Angulares

En un movimiento puramente rotacional, todos los puntos sobre el objeto se mueven en círculos alrededor del eje de rotación ("O"). El radio del círculo es R . Todos los puntos sobre una línea recta (radio) recorren el mismo ángulo en el mismo tiempo. El ángulo θ en radianes es definido:

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

donde ℓ es la longitud del arco.

FIGURA 10-1 Vista de una rueda con rotación antihoraria alrededor de un eje que pasa por el centro O de la rueda (perpendicular a la página). Cada punto, como el punto P, se mueve en una trayectoria circular; ℓ es la distancia que viaja el punto P conforme la rueda gira a través del ángulo θ .

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D.

10-1 Cantidades Angulares

Para objetos rígidos tridimensionales en rotación alrededor de un eje fijo, se usa el símbolo R para representar la distancia perpendicular de un punto o una partícula del objeto al eje de rotación. Esto se hace para distinguir R de r , que continuará representando la posición de una partícula con referencia al origen (un punto) de algún sistema coordenado.

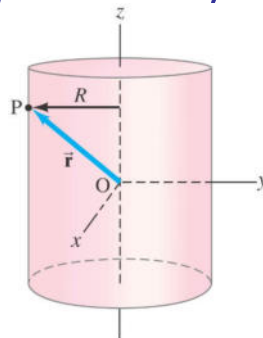


FIGURA 10-2 Se muestra la diferencia entre (vector posición) $\vec{r}$ y R (distancia perpendicular desde el eje de rotación) para un punto P sobre el borde de un cilindro que gira alrededor del eje z.

10-1 Cantidades Angulares

Desplazamiento angular:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

La rapidez angular promedio es definida como el desplazamiento angular total dividido por el tiempo:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La rapidez angular instantánea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

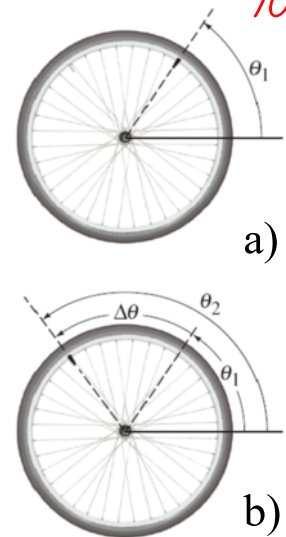


FIGURA 10-4 Una rueda gira de a) la posición inicial θ_1 a b) la posición final θ_2 . El desplazamiento angular es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D.

10-1 Cantidades Angulares

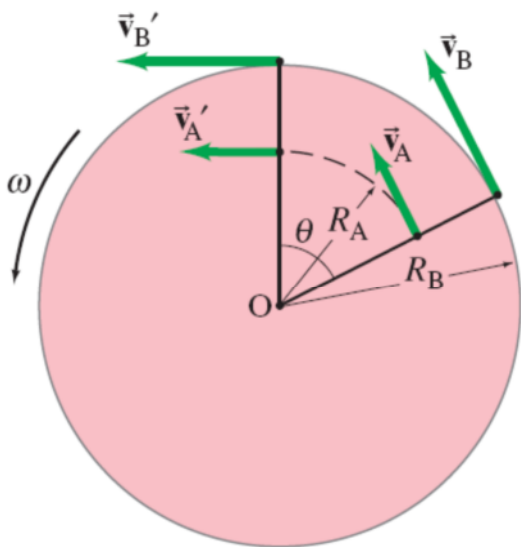
La *aceleración angular* es la razón del cambio de la *velocidad angular* respecto al tiempo:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

La *aceleración instantánea*:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

10-1 Cantidades Angulares



Los objetos más alejados del eje de rotación se moverán más rápido.

FIGURA 10-6 Rueda que gira uniformemente en sentido antihorario. Dos puntos sobre la rueda, a distancias R_A y R_B desde el centro, tienen la misma velocidad angular ω porque recorren el mismo ángulo θ en el mismo intervalo de tiempo. Sin embargo, los dos puntos tienen diferentes velocidades lineales porque recorren distancias diferentes en el mismo intervalo de tiempo. Como $R_B > R_A$, entonces $v_B > v_A$ (ya que $v = R\omega$)

10-1 Cantidades Angulares

Cada punto sobre un cuerpo que rota tiene una *velocidad angular* ω y una *velocidad lineal* v .

Ellas se relacionan así:

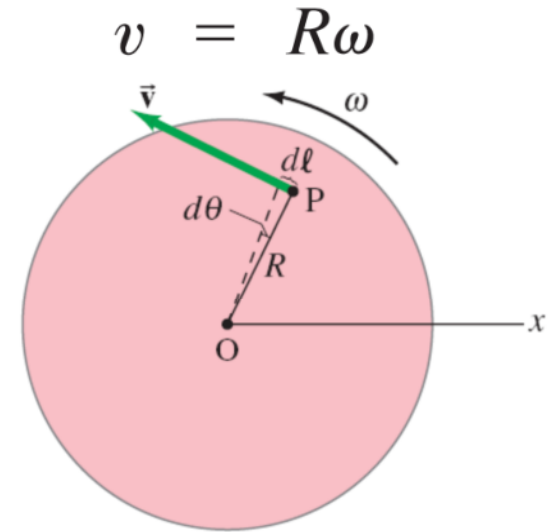


FIGURA 10-5 Un punto P sobre una rueda en rotación tiene una velocidad lineal $\vec{v}$ en cualquier momento.

10-1 Cantidades Angulares



Si la *velocidad angular* de un objeto que rota cambia, ésta tiene una *aceleración tangencial*:

FIGURA 10-7 Sobre una rueda en rotación cuya velocidad angular está creciendo, un punto P tiene componentes de aceleración tangencial y radial (centrípeta). (Véase también el capítulo 5).

Aunque la *velocidad angular* sea constante, cada punto tiene una *aceleración centrípeta*:

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$$

10-1 Cantidades Angulares

Aquí se resume la correspondencia entre cantidades lineales y rotacionales:

TABLA 10-1
Cantidades lineales y rotacional

Lineal	Tipo	Rotacional (θ en radianes)	Relación
x	desplazamiento	θ	$x = R\theta$
v	velocidad	ω	$v = R\omega$
a_{tan}	aceleración	α	$a_{\text{tan}} = R\alpha$

10-1 Cantidades Angulares

La frecuencia es el número de revoluciones completas por segundo:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Las frecuencias son medidas en Hertz:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

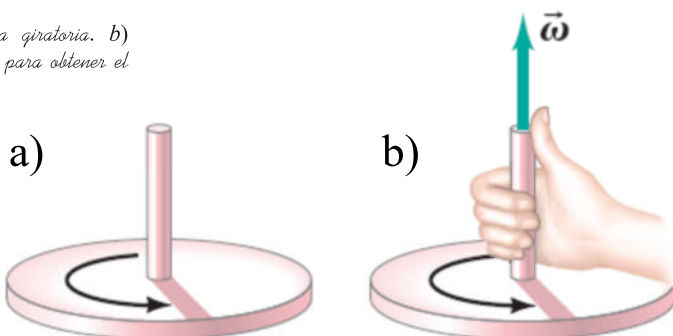
El período es el tiempo que le toma a una revolución:

$$T = \frac{1}{f}$$

10-2 Naturaleza Vectorial de las Cantidades Angulares

El vector velocidad angular apunta a lo largo del eje de rotación, con la dirección dada por la regla de la mano derecha. Si la dirección del eje de rotación no cambia, el vector aceleración angular apunta a lo largo de él también.

FIGURA 10-9 a) Rueda giratoria. b) Regla de la mano derecha para obtener el sentido de $\vec{\omega}$.



10-3 Aceleración Angular Constante

Las ecuaciones de movimiento para una aceleración angular constante son las mismas como para el movimiento lineal, sustituyendo las cantidades angulares en lugar de las lineales.

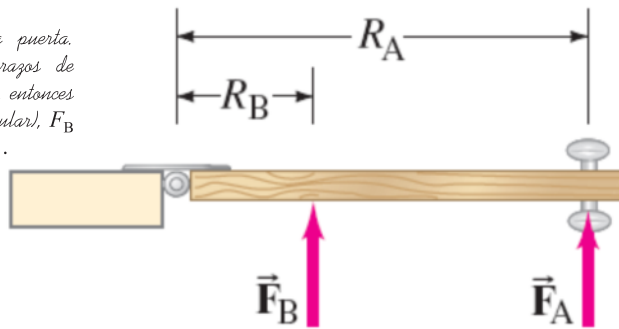
Angular	Lineal
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$
$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$	$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$

10-4 Torque, Torca ó Momento de una Fuerza

Para hacer que un objeto empiece a rotar, es necesaria una fuerza; la posición y dirección de la fuerza también se tomará en cuenta.

La distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea a lo largo de la cual la fuerza actúa (línea de acción) se llama brazo de momento o brazo de palanca.

FIGURA 10-11 Vista superior de una puerta. Aplicación de la misma fuerza con brazos de palanca diferentes, R_A y R_B . Si $R_A = 3R_B$, entonces para crear el mismo efecto (aceleración angular), F_B necesita ser tres veces F_A , ó $F_A = 1/3 F_B$.



Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-4 Torque, Torca ó Momento de una Fuerza

Aquí, el brazo de momento para F_A es la distancia desde la perilla a la bisagra; el brazo de momento para F_D es cero; y el brazo de momento para F_C se muestra en la figura (R_C).

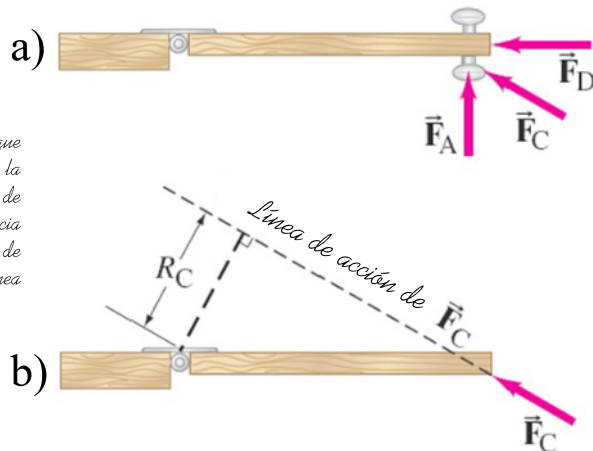
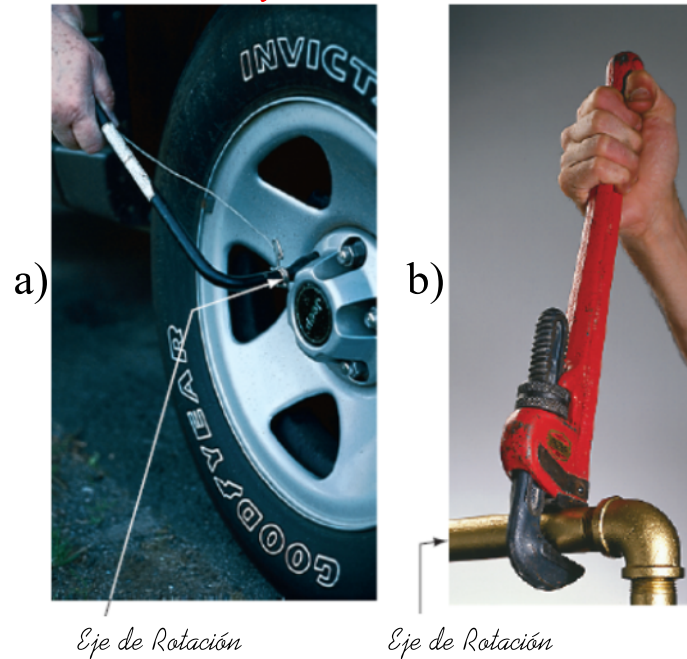


FIGURA 10-13 a) Fuerzas que actúan a diferentes ángulos en la manija de la puerta. b) El brazo de palanca se define como la distancia perpendicular desde el eje de rotación (la bisagra) hasta la línea de acción de la fuerza.

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-4 Torque, Torca ó Momento de una Fuerza

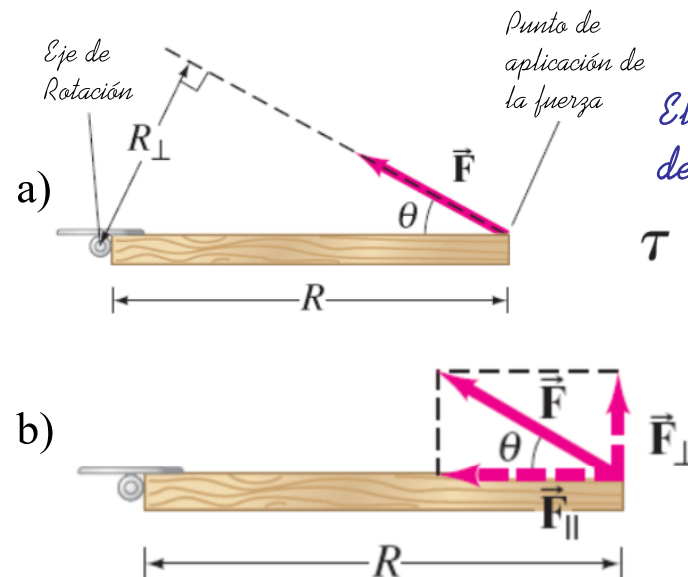


Un gran brazo de momento es de mucha ayuda para rotar objetos.

FIGURA 10-12 a) Una llave para neumáticos puede tener un brazo de palanca largo. b) Un plomero puede ejercer una torca mayor al usar una llave con un brazo de palanca largo. a) Eje de rotación b) Eje de rotación

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-4 Torque, Torca ó Momento de una Fuerza



El torque es definido como:

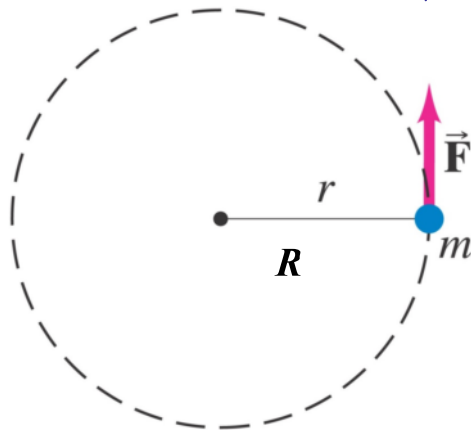
$$\tau = R_{\perp} F$$

FIGURA 10-14 Torca = $R_{\perp} F = R F_{\perp}$

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-5 Dinámica Rotacional; Torque e Inercia Rotacional

Conociendo $F = ma$, vemos que $\tau = mR^2\alpha$



Esto es para una masa puntual; ¿qué pasa con un objeto extendido?

Como la aceleración angular es la misma para todo el objeto, se puede escribir:

$$\Sigma \tau = (\Sigma m R^2) \alpha$$

FIGURA 10-17 Una masa m que gira en un círculo de radio R con respecto a un punto fijo.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-5 Dinámica Rotacional; Torque e Inercia Rotacional

La cantidad $I = \Sigma m_i R_i^2$ es llamada la inercia rotacional de un objeto.

Mira la distribución de masa aquí—éstos dos objetos tienen la misma masa, pero el de la izquierda tiene mayor inercia rotacional, pues mucha de su masa está lejos del eje de rotación.

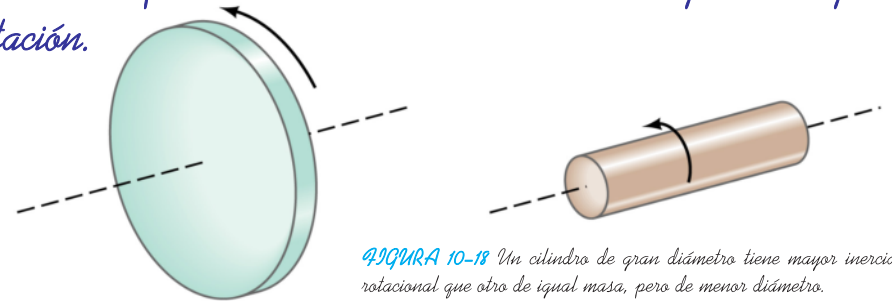


FIGURA 10-18 Un cilindro de gran diámetro tiene mayor inercia rotacional que otro de igual masa, pero de menor diámetro.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

Objeto	Posición del eje	Momento de inercia
a) Aro delgado de radio R_0	A través del centro	MR_0^2
b) Aro delgado de radio R_0 y ancho w	A través de un diámetro central	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
c) Cilindro sólido de radio R_0	A través del centro	$\frac{1}{2}MR_0^2$
d) Cilindro hueco de radio interior R_1 y radio exterior R_2	A través del centro	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
e) Esfera uniforme de radio r_0	A través del centro	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
f) Varilla larga uniforme de longitud ℓ	Por el centro	$\frac{1}{12}M\ell^2$
g) Varilla larga uniforme de longitud ℓ	Por un extremo	$\frac{1}{3}M\ell^2$
h) Placa rectangular delgada de longitud ℓ y ancho w	A través del centro	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

10-5 Dinámica Rotacional; Torque e Inercia Rotacional

La inercia rotacional de un objeto no solamente depende de su distribución de masa sino también de la localización del eje de rotación—compare (f) y (g), por ejemplo (figura).

FIGURA 10-20 Momentos de inercia de varios objetos de densidad uniforme. [Se usa R para la distancia radial desde el eje, y r para la distancia desde un punto cualquiera al origen (sólo en e), la esfera], como se vio en la figura 10-21.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-6 Resolviendo Problemas en Dinámica Rotacional

1. Dibuja un diagrama.
2. Decide qué compone el sistema.
3. Dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada objeto en consideración, incluyendo todas las fuerzas que actúan en él y dónde actúan.
4. Encuentra el eje de rotación; calcula el torque alrededor del él.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-6 Resolviendo Problemas en Dinámica Rotacional

5. Aplica la segunda ley de Newton para la rotación. Si la inercia rotacional no es proporcionada, tú necesitas encontrarla antes de proceder con este paso.
6. Aplica la segunda ley de Newton para la traslación y otras leyes y principios que se necesiten.
7. Resuelve.
8. Revisa tus respuestas tanto para unidades como para un correcto orden de magnitud.

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-7 Determinación de Momentos de Inercia

Si un objeto físico está disponible, el momento de inercia se puede medir experimentalmente.

De lo contrario, si el objeto puede ser considerado como una distribución continua de masa, el momento de inercia puede ser calculado:

$$I = \int R^2 dm$$

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-7 Determinación de Momentos de Inercia

El teorema de los ejes paralelos da el momento de inercia alrededor de algún eje paralelo a un eje que pasa a través del centro de masa de un objeto:

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2$$

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-7 Determinación de Momentos de Inercia

El teorema de los ejes perpendiculares es válido solamente para objetos planos.

$$I_z = I_x + I_y$$

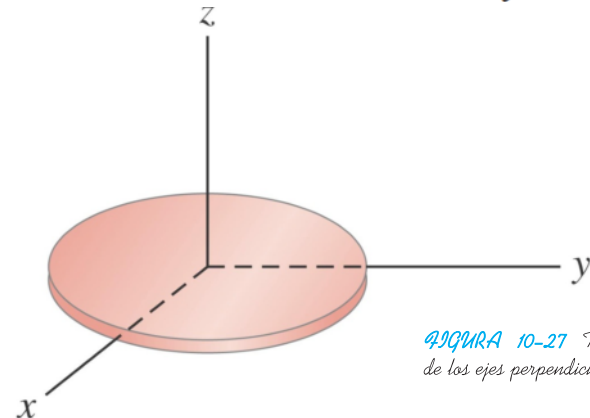


FIGURA 10-27 Teorema de los ejes perpendiculares.

Capítulo 10. Física Básica. Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-8 Energía Cinética Rotacional

La energía cinética de un objeto en traslación es dada por

$$K = \Sigma \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Sustituyendo cantidades rotacionales, se encuentra la energía cinética rotacional que puede ser escrita así:

$$\text{Rotacional } K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Un objeto que tiene ambos movimientos, traslacional y rotacional también tiene ambas, energías cinéticas, traslacional y rotacional:

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

10-8 Energía Cinética Rotacional

Cuando usas la conservación de la energía, ambas energías, rotacional y traslacional, deben tomarse en cuenta.

Todos estos objetos tienen la misma energía potencial arriba, pero el tiempo que tardan en bajar el plano inclinado depende de la cantidad de inercia rotacional que cada uno tiene.



FIGURA 10-34 Ejemplo 10-17.

10-8 Energía Cinética Rotacional

El torque hace trabajo cuando una rueda se mueve un ángulo θ :

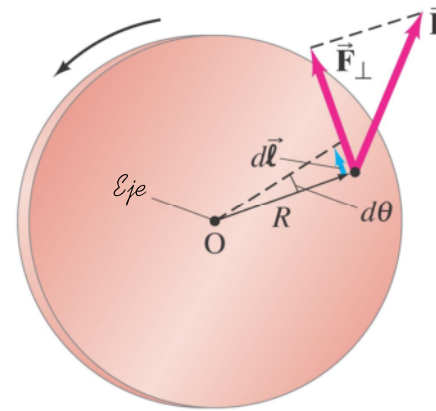


FIGURA 10-28 Cálculo del trabajo realizado por una torca que actúa sobre un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo.

$$W = \tau \Delta\theta$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F_{\perp} R d\theta,$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

La potencia en cualquier instante es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega.$$

10-8 Energía Cinética Rotacional

La fricción estática debe estar presente para que ruede un objeto redondo.

El punto de contacto de la esfera en cada instante no se desliza, sino que se mueve perpendicularmente al plano (primero hacia abajo y luego hacia arriba, como se indica en la figura 10-35) conforme rueda.



FIGURA 10-35 Una esfera rodando hacia la derecha sobre una superficie plana. El punto de contacto con el plano en cualquier momento, punto P, está momentáneamente en reposo. El punto A a la izquierda de P se está moviendo casi verticalmente hacia arriba en el instante mostrado, y el punto B a la derecha se mueve casi verticalmente hacia abajo. Un instante después, el punto B tocará el plano y estará momentáneamente en reposo. Por lo tanto, la fuerza de fricción estática no realiza ningún trabajo.

10-9 Movimiento Rotacional más Traslacional; Rodamiento

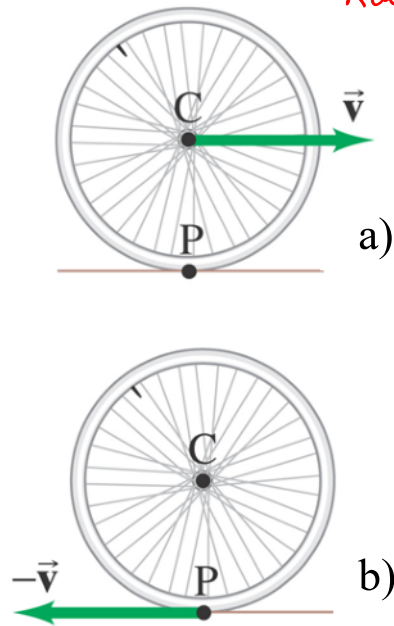


FIGURA 10-30 a) Una rueda que gira hacia la derecha. Su centro C se mueve con velocidad $\vec{v}$. El punto P está en reposo con respecto al piso en este momento. b) La misma rueda vista desde un marco de referencia en el que el eje de la rueda C está en reposo, es decir, nos movemos hacia la derecha con velocidad $\vec{v}$ relativa al suelo. El punto P, que estaba en reposo en a), en b) se mueve hacia la izquierda con velocidad $-\vec{v}$ como se muestra. (Véase también la sección 3-9 sobre velocidad relativa).

La rapidez lineal de la rueda está relacionada con su rapidez angular:

$$v = R\omega$$

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-10 ¿Por qué desacelera una esfera rodante?

Una esfera rodante deberá detenerse en lugar de rodar para siempre. ¿Qué fuerza causa esto?

Si tú dices que la "fricción", hay problemas.

La fuerza de fricción actúa en el punto de contacto; esto significa que la rapidez angular de la esfera deberá incrementarse.

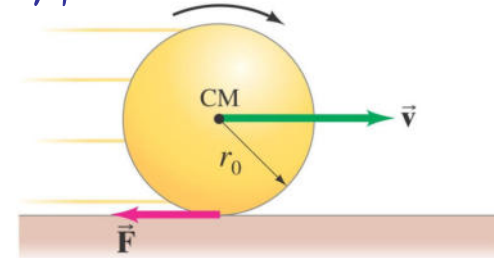


FIGURA 10-40 Esfera que rueda hacia la derecha.

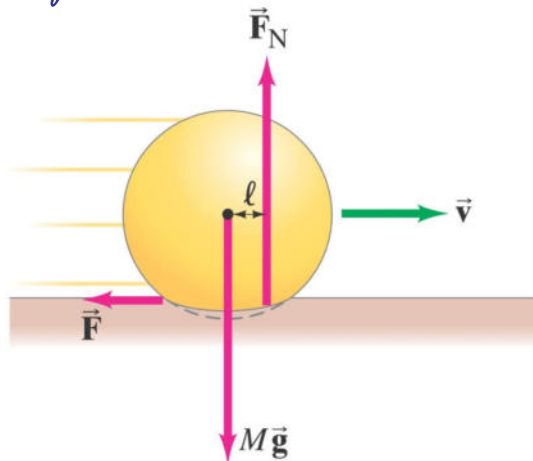
La gravedad y la fuerza normal (ambas) actúan en el centro de masa, y no pueden crear un torque.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

10-10 ¿Por qué desacelera una esfera rodante?

La solución: Ninguna esfera es perfectamente rígida. La parte inferior se deforma y la fuerza normal creará un torque que ralentiza la esfera.

FIGURA 10-41 La fuerza normal $\vec{F}_N$ ejerce una torca que desacelera la esfera. La deformación de la esfera y de la superficie sobre la que se mueve se ha exagerado para dar más detalles.



Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

Resumen del Capítulo 10

- Los ángulos se miden en radianes; un círculo completo es 2π radianes.
- La velocidad angular es la razón de cambio de la posición angular.
- La aceleración angular es la razón de cambio de la velocidad angular.
- La velocidad y la aceleración angulares pueden relacionarse con la velocidad y aceleración lineales.

Capítulo 10. Física Básica, Marlon Basantes Valverde, Ph.D

Resumen del Capítulo 10

· La frecuencia es el número de revoluciones completas por segundo; es período es el inverso de la frecuencia. Se mide en Hertz.

· Las ecuaciones del movimiento rotacional con aceleración constante tienen la misma forma que aquellas para el movimiento lineal con aceleración constante.

· El torque es el producto de la fuerza y su brazo de palanca (perpendicular).

$$\tau = R_{\perp} F$$

Resumen del Capítulo 10

· La inercia rotacional no solo depende de la masa de un objeto sino también de la forma en que se distribuye su masa alrededor del eje de rotación.

· La aceleración angular es proporcional al torque e inversamente proporcional a la inercia rotacional.

· Un objeto que está rotando tiene energía cinética rotacional. Si éste se traslada también, la energía cinética traslacional deberá ser añadida a la rotacional para encontrar su energía cinética total:

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

Resumen del Capítulo 10

Traslación	Rotación	Conexión
x	θ	$x = R\theta$
v	ω	$v = R\omega$
a	α	$a = R\alpha$
m	I	$I = \sum mR^2$
F	τ	$\tau = RF \sin \theta$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	
$W = Fd$	$W = \tau\theta$	
$\Sigma F = ma$	$\Sigma \tau = I\alpha$	

