

La representación fasorial de la potencia en circuitos AC monofásicos

G. Aguirre-Zamalloa¹, N. Vidal-Lekue²

¹ Departamento de Ingeniería Eléctrica
ETSIB, Universidad del País Vasco

² Departamento de Electricidad y Electrónica
Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco

¿Crees que los que están así han visto otra cosa [...] sino las sombras proyectadas por el fuego sobre la pared de la caverna que está frente a ellos? [...] Entonces no hay duda -dije- de que tales hombres no tendrán por real ninguna otra cosa más que las sombras de los objetos...

Platón, Libro VII de La República

Resumen

Se define la potencia reactiva instantánea $q(t)$ para circuitos AC monofásicos en régimen permanente. Esto permite obtener la potencia compleja instantánea $\underline{s}=p+jq$, la cual admite a su vez una interpretación fasorial extremadamente útil que se estudia con cierto detalle. A continuación proponemos una generalización de estas magnitudes instantáneas para el caso transitorio por medio de los vectores espirales de Yamamura.

Palabras clave

Fasores, vectores espirales, potencia compleja, transitorio, potencia reactiva instantánea (PRI).

1. Introducción

Fue Steinmetz [1] a finales del S. XIX quien introdujo el empleo de la potente notación fasorial (compleja) para analizar circuitos AC. Esta mejora del formalismo matemático propició un notable avance debido a que permitió aplicar directamente a los circuitos AC los métodos desarrollados para resolver circuitos DC. Otra ventaja decisiva de los fasores reside en su interpretación geométrica directa: los diagramas fasoriales que muestran las relaciones entre corrientes y tensiones son herramientas de representación muy comunes y útiles. En la actualidad estas representaciones gráficas ya no se emplean como herramientas de cálculo sino como recursos mnemónicos, cualitativos, que permiten captar inmediatamente relaciones entre varias cantidades de

manera mucho más directa que mediante una ecuación algebraica, por ejemplo.

Aunque la representación fasorial de señales sinusoidales puras (ondas de tensión, corriente, fuerzas magnetomotrices, etc.) es trivial, hay otras magnitudes eléctricas de gran importancia que aparentemente no la admiten, como la potencia por ejemplo. Es indudablemente cierto que la potencia instantánea absorbida por un dipolo eléctrico $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ por ser el producto de dos señales monocromáticas presenta naturalmente la mezcla de frecuencias (función heterodina):

$$2 \cdot \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t \quad (1)$$

por lo que no puede ser representada por medio de un fasor estándar. No obstante, en este trabajo nos proponemos demostrar que para el caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ si que puede obtenerse una representación cuasi-fasorial por medio de fasores “excéntricos”. Creemos que esta representación es muy ilustrativa de modo que vamos a definirla cuidadosamente y a estudiar sus propiedades.

En el año 1984 Akagi y Nabae [2] introdujeron los conceptos de potencia activa y reactiva instantáneas para el análisis del problema de la transmisión de potencia en sistemas trifásicos, empleándolo en concreto para demostrar las posibilidades de mejora de rendimiento y compensación mediante elementos no almacenadores de energía. A partir de ese momento varios otros grupos han trabajado sobre el mismo tema, ampliando y

generalizando los conceptos y herramientas, por lo que se ha generado una abundante bibliografía [3-4]. Mencionemos brevemente que según estos autores la potencia activa instantánea (en adelante PAI) para sistemas trifásicos AC se define como: $p(t) = \overline{u(t)} \cdot \overline{i(t)}$ y el vector potencia reactiva instantánea se define como: $\overline{q(t)} = \overline{u(t)} \times \overline{i(t)}$, donde $\overline{u(t)} = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$ e $\overline{i(t)} = [i_1(t), i_2(t), i_3(t)]^T$. Con toda lógica se define la potencia reactiva instantánea (PRI) como el módulo del vector PRI.

Estas definiciones, sin embargo, no son completamente trasladables al caso monofásico. Así, aunque la definición de PAI es la correcta: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, la PRI resulta idénticamente nula $q(t) = 0$, lo cual no puede ser cierto en general. A nosotros no nos consta que ninguna definición satisfactoria de la PRI monofásica haya sido publicada hasta la fecha. En el presente trabajo vamos a proponer una definición válida de PRI para sistemas AC monofásicos en régimen permanente que es independiente de la definición previamente mencionada, y que vamos a generalizar inmediatamente al régimen transitorio.

En este trabajo no nos volveremos a ocupar de las potencias trifásicas. Sin embargo, con respecto a esta cuestión no queremos dejar pasar la ocasión de comentar un prometedor desarrollo del formalismo matemático que en el futuro podría muy bien ser la vía para la unificación y generalización de estos conceptos. Nos estamos refiriendo al “álgebra geométrica” (AG) que es un formalismo que abarca, generaliza y simplifica el cálculo de matrices, de números complejos, de cuaterniones y de espinores por ejemplo y que tuvo su origen en los trabajos de los matemáticos Grassman y Clifford [5]. Como ilustración señalemos que en AG se define un “nuevo” producto de vectores, el producto geométrico:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + j\vec{a} \times \vec{b} \quad (2)$$

donde “ \wedge ” indica el producto “exterior” y “ j ” es el pseudoescalar del álgebra, que es tal que $j^2 = -1$. La suma de escalares y vectores (multivectores) no solamente es posible, sino que es inmensamente beneficiosa; así, por ejemplo, el producto geométrico de los vectores tensión y corriente trifásicos nos da automáticamente el (multivector) potencia. Entre las bondades del producto geométrico destacaremos que es generalizable a cualquier dimensión e invertible, por lo que se nos va a permitir ¡dividir entre vectores! Aunque a primera vista la expresión (2) parezca incorrecta la realidad es que, y esto puede ser una auténtica sorpresa para algunos, la estamos empleando continuamente al manejar números complejos (dimensión 2); así,

$$\underline{ab}^* = (a_1 + ja_2)(b_1 - jb_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + j(a_2b_1 - a_1b_2) \quad (3)$$

es esencialmente equivalente a (2).

Este artículo está estructurado de la manera siguiente: después de esta introducción definimos la PRI monofásica $q(t)$ en el régimen permanente en la sección

2. Este es el resultado central del trabajo por lo que dedicamos el resto de la sección a su justificación y a demostrar sus principales propiedades. En la sección 3 presentamos con cierto detalle el diagrama fasorial de las potencias y damos algún ejemplo, siempre en régimen permanente. La sección 4 introduce brevemente el formalismo de los vectores espirales AC de Yamamura. En la sección 5 elaboramos una redefinición de las PAI y PRI en términos de vectores espirales para poder generalizar estos resultados al régimen transitorio, y se presentan algunos ejemplos más. En la sección 6 se elaboran las más importantes conclusiones.

2. Definiciones en régimen AC permanente

En ese apartado analizamos el régimen permanente de circuitos alternos sinusoidales monofásicos. Establezcamos en primer lugar la notación con toda claridad. Las letras minúsculas, con o sin dependencia temporal explícita denotan valores instantáneos mientras que las mayúsculas indican valores constantes. Los símbolos subrayados son complejos y si no lo están son reales. Las variables complejas instantáneas las escribimos normalmente en notación exponencial. Así, por ejemplo, $i = i(t)$, $u = u(t)$ son funciones periódicas de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. También $\underline{i} = \underline{i}(t) = \sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$,

$i = \text{Re}[\underline{i}] \neq |\underline{i}|$ e $I^2 = |\underline{I}|^2 = \overline{I^2}$. Finalmente resulta muy conveniente introducir las siguientes abreviaturas: $\check{f}(t) \equiv f(t - \frac{T}{4})$ y $\hat{f}(t) \equiv f(t + \frac{T}{4})$.

Recordemos que por definición la potencia compleja consumida por un dipolo es $\underline{S} \equiv \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$, donde P es la potencia promedio (potencia activa) absorbida que vale $P = \overline{p(t)} = \overline{i(t) \cdot u(t)} = \text{Re}[\underline{U} \underline{I}^*]$. Esta última expresión naturalmente nos invita a examinar la función de correlación cruzada entre corriente y tensión:

$$\psi(\tau) = \overline{u(t) \cdot i(t + \tau)} = \frac{1}{4} \overline{(\underline{u} + cc)(\underline{i} e^{j\omega\tau} + cc)} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\psi(\tau) = P \cos \omega\tau + Q \sin \omega\tau$$

donde “ cc ” denota conjugación compleja. En términos generales una función de correlación cruzada nos da una medida del grado de semejanza de las funciones. En el presente caso se trata una función sinusoidal de periodo T que verifica $\psi(0) = P$ obviamente y también $\psi(\frac{T}{4}) = Q$.

De este modo se justifica la introducción de la función auxiliar $\xi(t) \equiv u \cdot \hat{i} = u(t) \cdot i(t + \frac{T}{4})$ cuyas propiedades vamos a estudiar a continuación para comprobar si se trata de un buen candidato para identificarlo como $q(t)$ o “potencia reactiva instantánea”. En cualquier caso, debemos tener presente que por muy incierto que sea su sentido físico, su definición matemática, dada más arriba, es clara y distinta.

Esta función $\xi(t)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es dimensionalmente homogénea a una potencia.

2. Tal y como se ha demostrado $\overline{\xi(t)} = Q$, donde Q denota la potencia reactiva absorbida por el circuito.

3. El teorema Tellegen [6] garantiza que $\sum_{k=1}^R \xi_k(t) = 0$, donde R indica el número total de ramas del circuito.

De la combinación de las propiedades 2 y 3 resulta una prueba de la parte imaginaria del teorema de Boucherot [6]. Además, al verificarse las relaciones siguientes:

$$\hat{i} = \operatorname{Re} \left[\hat{i} e^{j\omega \frac{T}{4}} \right] = \operatorname{Re} [j\hat{i}] = \operatorname{Im} [\hat{i}^*] \quad (5a)$$

y también

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [\hat{i}] = \operatorname{Re} \left[\frac{d\hat{i}}{dt} \right] = \operatorname{Re} [j\omega \hat{i}] = \omega \operatorname{Im} [\hat{i}^*] \quad (5b)$$

se puede probar que:

$$4. \quad Q = \overline{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = \frac{1}{\omega \cdot T} \int_0^T u \frac{d\hat{i}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \oint u \cdot d\hat{i} \quad (6)$$

Esta última propiedad revela el significado físico del área limitada por la elipse inclinada descrita por el punto (\hat{i}, u) , tal y como se podría medir mediante un osciloscopio. Podemos ahondar algo más en la interpretación de este resultado tomando la siguiente analogía mecánica: un móvil de masa unidad ($m=1$) que se desplaza por el plano ($\hat{i} = x, u = y$) siguiendo las oscilaciones de tensión y corriente en una impedancia $\underline{Z} = Z \angle \varphi$ estaría localizado en el punto:

$$\vec{r}(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi) \cdot \hat{x} + \sqrt{2}U \cos \omega t \cdot \hat{y}$$

animado de velocidad:

$$\vec{v}(t) = -\sqrt{2}I\omega \sin(\omega t - \varphi) \cdot \hat{x} - \sqrt{2}U\omega \sin \omega t \cdot \hat{y}$$

Por lo que su momento angular se conservaría:

$$M_z = \vec{r} \times \vec{p} \Big|_z = -2UI\omega \sin \varphi = -2\omega \cdot Q$$

5. Mediante un razonamiento dual al del apartado 4, podemos llegar a la conclusión de que el área limitada por la curva cerrada descrita en el plano (\hat{i}, \vec{u}) (y medida con un osciloscopio digital) es P , la potencia activa:

$$P = \overline{u\hat{i}} = \frac{1}{T} \int_0^T u \hat{i} dt = \frac{1}{\omega \cdot T} \int_0^T \hat{i} \frac{d\vec{u}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \oint \hat{i} \cdot d\vec{u} \quad (7)$$

La expresión de las funciones auxiliares $\xi(t)$ para los diferentes elementos ideales es muy convincente:

$$6. \quad \text{Resistencia: } \xi_R = R \hat{i} = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{dt} (R \hat{i}^2) \text{ y } \overline{\xi_R} = 0 \quad (8)$$

Una resistencia no impone ningún criterio de continuidad.

$$7. \quad \text{Inductancia: } \xi_L(t) = L \hat{i} \frac{d\hat{i}}{dt} = 2\omega \cdot \frac{1}{2} L \hat{i}^2 = 2\omega \hat{w}_L$$

$$\text{y por lo tanto: } \overline{\xi_L} = Q_L = 2\omega \overline{w}_L \quad (9)$$

La continuidad de la función i_L conlleva la de w_L (y por consiguiente la de \hat{w}_L) lo que implica que ξ_L es también continua; sin embargo u_L (y por tanto p_L) pueden presentar discontinuidades finitas.

8. Capacidad:

$$\xi_C(t) = C u \frac{d\hat{u}}{dt} = \omega C u \hat{u} = -\omega C u^2 = -2\omega w_C$$

$$\overline{\xi_C} = Q_C = -2\omega \overline{w}_C \quad (10)$$

(hemos aplicado que derivación temporal y retraso conmutan) La continuidad de la función u_C conlleva la de w_C lo que implica que ξ_C es también continua; sin embargo i_C (y por tanto p_C) pueden presentar discontinuidades finitas.

Llegados a este punto del análisis consideramos que disponemos de argumentos suficientes como para afirmar que la función auxiliar $\xi = u\hat{i}$ puede identificarse razonablemente con la potencia reactiva instantánea q .

Como consecuencia inmediata del análisis realizado se desprende la siguiente definición de la potencia compleja instantánea válida para circuitos monofásicos en régimen AC permanente:

$$\underline{s} \equiv p + j \cdot q = u\hat{i} + j u \hat{i} \Rightarrow \underline{s} = u \cdot \hat{i}^* \quad (11)$$

Esta expresión que generaliza lindamente la ecuación $\underline{S} \equiv \underline{U} \underline{I}^*$ es también algo sorprendente por su falta de simetría, pero téngase en cuenta que la aparentemente más intuitiva definición $\underline{s} = \underline{u} \cdot \hat{i}^*$ (?) no es en absoluto correcta (¡es una constante compleja!). La ecuación (11) indica que la potencia compleja instantánea \underline{s} es un auténtico “fasor” cuya extremidad describe una circunferencia en el sentido de las agujas del reloj (la corriente está conjugada) en el plano (p, q) con centro en

$$\underline{S} = \overline{\underline{s}} = \overline{p} + j \cdot \overline{q} = P + j \cdot Q, \text{ radio } S \text{ y periodo } \frac{T}{2}.$$

Al ser la distancia del origen al centro igual al radio, la circunferencia pasa por el origen o pivota en el origen y las llamaremos CPO para abreviar. Este es el primer resultado básico del trabajo. A partir de este punto debemos interpretarlo e ilustrarlo antes de poder generalizarlo al régimen transitorio. Para fijar las ideas vamos a concentrarnos en el análisis de circuitos sencillos. En la Figura 1 puede apreciarse claramente cómo esta construcción generaliza y enriquece el triángulo de potencias clásico.

3. Diagrama fasorial de la potencia: propiedades y ejemplos.

La primera propiedad que queremos destacar es la superposición: puede fácilmente demostrarse a partir de (11) que dados dos subcircuitos 1 y 2 conectados en serie

o en paralelo, la potencia instantánea total se calcula como $s_T = s_1 + s_2$.

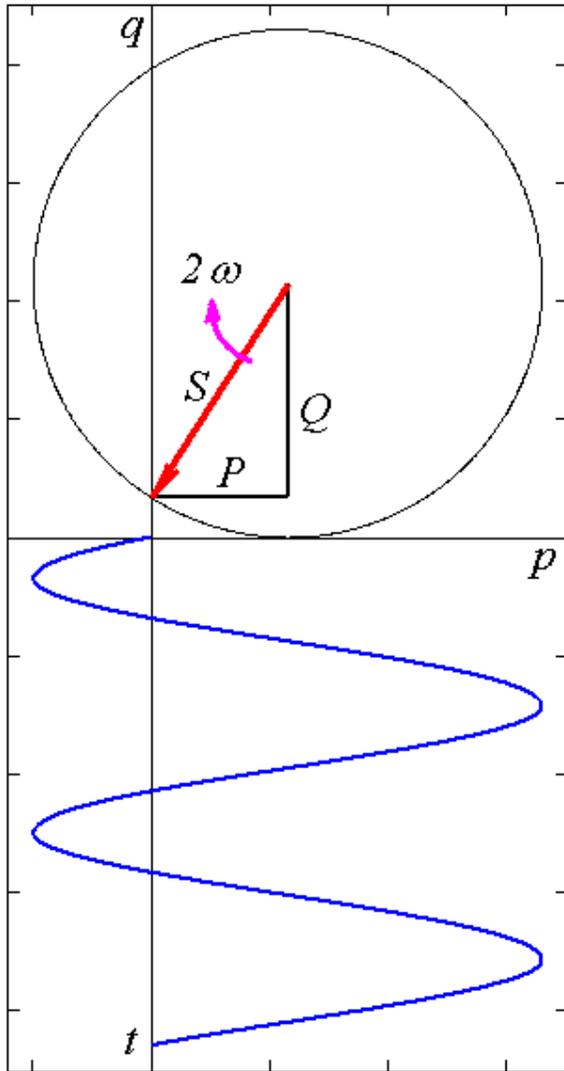


Figura 1: Triángulo de potencias, fasor potencia y potencia activa instantánea

Tabla 1: Puntos singulares del diagrama fasorial RL

$\alpha(0,0)$	$C(P,Q)$
$\alpha(2P,0)$	$\eta(P,0)$
$\beta(0,2Q)$	$\varepsilon(0,Q)$
$\delta\left(\frac{2PQ^2}{S^2}, \frac{2P^2Q}{S^2}\right)$	$\gamma\left(\frac{4PQ^2}{S^2}, \frac{4P^2Q}{S^2}\right)$
$\mu\left(\frac{-2PQ^2}{S^2}, \frac{2P^2Q}{S^2}\right)$	$\nu\left(\frac{2PQ^2}{S^2}, \frac{-2P^2Q}{S^2}\right)$

Esta situación queda ilustrada por la Figura 2 en la que se han representado las circunferencias dextróginas y

síncronas descritas por las potencias s_R consumida por R, s_L consumida por L y la total $s_{RL} = s_R + s_L$ para un circuito RL serie simple.

En cada instante la proyección sobre el eje p nos indica la potencia instantánea absorbida por cada elemento. Además, la superficie coloreada corresponde al intervalo durante el cual el circuito devuelve potencia a la fuente. En este ejemplo hemos puesto $s_{RL} = 0$ en $t = 0$

Para obtener el máximo partido de la representación conviene familiarizarse con la estructura geométrica del diagrama. En la Tabla 1 hemos indicado las coordenadas de los puntos singulares, es decir de los puntos de intersección de las circunferencias y en la Figura 3 los hemos representado (se trata del mismo caso sencillo de un circuito RL). Hay que advertir sin demora que intersección no quiere necesariamente decir coincidencia o encuentro simultáneo; las condiciones de coincidencia las vamos a estudiar más adelante. Dos puntos opuestos por un diámetro en cualquiera de los CPO están separados en el tiempo por $\frac{T}{4}$ segundos.

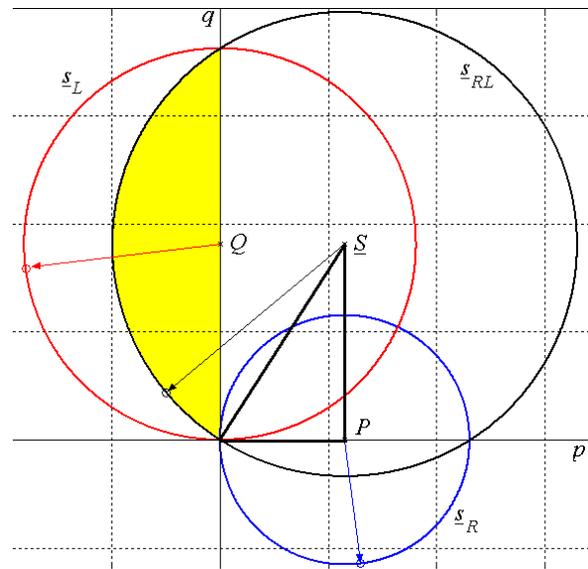


Figura 2: Fasores de potencia y potencias instantáneas en un circuito RL serie en el régimen permanente AC.

Sobre la Figura 3 puede apreciarse cómo las rectas $o\delta\gamma$ y $\beta C\delta\alpha$ son perpendiculares, como lo son las rectas oC y $\mu o\nu$ (esta última es tangente al CPO s_{RL} en el punto o)

La construcción geométrica pone de manifiesto las ligaduras con toda claridad. Si inicialmente el circuito fuese resistivo puro, la $s_{RL} = s_R$ describe una circunferencia tumbada, con su centro sobre el eje p . Al ir incrementando el valor de L suceden varias cosas simultáneamente. El círculo varía su radio pero sobre todo pivota en torno al origen de modo que al abandonar su centro el eje horizontal la circunferencia va a penetrar en la zona $p < 0$ y va a ganar un Q (q promedio) no nulo.

Y estos efectos se hacen más importantes cuanto mayor es L . De hecho el intervalo de tiempo durante el cual se cede potencia a la fuente es el que tarda en recorrer el arco $oC\beta$ de valor 2φ : $\tau = \frac{T}{2} \frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{\omega}$.

Todavía queda por examinar en qué condiciones la superposición (suma) de dos CPO da origen a otra CPO: vamos a comprobar que en realidad hay restricciones de fase bien definidas.

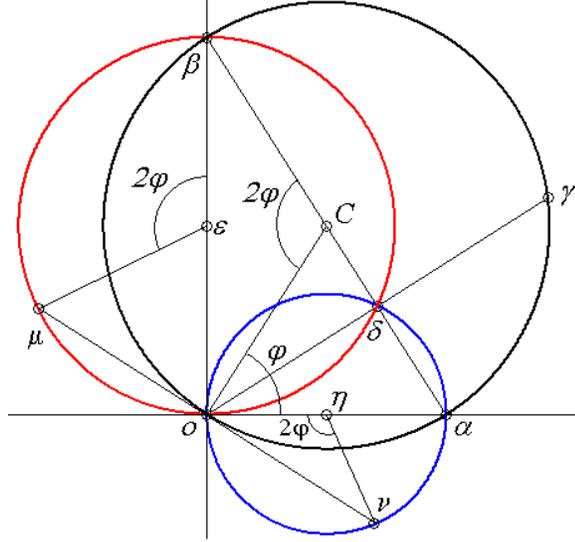


Figura 3: Puntos singulares y relaciones geométricas del diagrama fasorial RL

Sean los CPO $s_k(t) = C_k e^{j\varphi_k} + C_k e^{j(2\omega t + \theta_k)}$ con $k=1,2$, donde los $C \angle \varphi$ son los centros de las circunferencias, C son sus radios y los θ fijan un origen de fases. Para que la suma $s_1 + s_2$ sea un CPO el radio debe ser igual a la distancia del centro al origen. Esto solo ocurrirá si

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \pm \theta_1 \mp \theta_2 \quad (12)$$

Veamos unos ejemplos. Ejemplo 1: Conexión de bobina $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ y condensador $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$. Además si quiero que

en $t=0$ s_L esté en el origen pondré $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ y de (12)

obtengo $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ como una única solución y

$s_{LC}(t) = j \cdot (Q_L - Q_C) \cdot (1 - e^{j2\omega t})$, esto es la compensación de energía reactiva. Ejemplo 2: conexión de resistencia $\varphi_1 = 0$, $\theta_1 = \pi$ con inductancia $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. En este caso

dos son los valores de θ_2 que satisfacen (12): $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ y

$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$. Vamos a ver que corresponden a las conexiones serie y paralelo respectivamente.

Circuito RL serie

En un circuito serie los elementos ven la misma corriente y diferentes tensiones por lo que los $s_k = e_k i^*$ tienen la misma fase y por lo tanto están alineados sobre rectas que pasan por el origen. Esta situación queda ilustrada por la Figura 4 y puede comprobarse mediante los datos recogidos en la Tabla 2, la cual indica las posiciones de los fasores s_R , s_L y s_{RL} para instantes de tiempo seleccionados.

Tabla 2: Posiciones instantáneas de los fasores s_R , s_L y s_{RL} en un circuito RL serie.

t	s_R	s_L	s_{RL}	Descripción
0	v	μ	o	$p = q = 0 \Leftrightarrow e = 0$
$\frac{\varphi}{\omega}$	o	β	β	$i = 0 \Rightarrow p = 0$ i retrasa φ respecto e
$\frac{T}{4}$	o'_C	μ'_ε	v'_η	e min/max ($\hat{e} = 0$)
$\frac{2\varphi}{\omega}$	δ	δ	γ	
$\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}$	α	o	α	i min/max ($\hat{i} = 0$) es decir $q = 0$

Mediante la notación x'_y nos referimos al punto opuesto a x en la circunferencia con centro en y ; así, por ejemplo $\alpha \equiv o'_\eta \equiv \beta'_C$.

Tabla 3: Posiciones instantáneas de los fasores s_R , s_L y s_{RL} en un circuito RL paralelo

t	s_R	s_L	s_{RL}	Descripción
0	o	o	o	$p = q = 0 \Leftrightarrow e = 0$
$\frac{\varphi}{\omega}$	δ	δ'_ε	β	$i = 0 \Rightarrow p = 0$ i retrasa φ respecto e
$\frac{T}{4}$	α	β	o'_C	e min/max ($\hat{e} = 0$)
$\frac{2\varphi}{\omega}$	ver CG	ver CG	γ	
$\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}$	δ'_η	δ	α	i min/max ($\hat{i} = 0$) es decir $q = 0$

Circuito RL paralelo

En un circuito RL paralelo equivalente a un circuito RL serie tendremos exactamente la misma construcción geométrica (circunferencias, intersecciones), pero los CPOs s_L y s_R son recorridos de modo distinto (distintas relaciones de fase y distintas coincidencias). Esta es la característica que vamos a explorar ahora y cuyos

un lado está claro que mientras el régimen permanente periódico no se instale la definición que manejábamos

previamente: $q(t) \equiv u(t) \cdot i(t + \frac{T}{4})$ no tiene sentido. Por

otro lado es evidente que la nueva definición debe reducirse a la primera en el régimen periódico, el cual todos los circuitos estables, amortiguados, acaban por alcanzar tarde o temprano. Lo que nosotros proponemos es escribir todavía $\underline{s} = p + j \cdot q = u \cdot \underline{i}^*$ pero reinterpretando ahora las cantidades complejas como vectores espirales en el sentido de Yamamura. La parte real de dicha ecuación coincide naturalmente con el valor del PAI, mientras que la parte imaginaria define el PRI. Además, en el régimen periódico, permanente recuperamos la definición original.

Tomemos el ejemplo del circuito RL serie para el que podemos escribir el vector espiral:

$$\underline{i} = \underline{A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \underline{E} \cdot e^{j\omega t}}{R + j \cdot \omega \cdot L} \quad \text{con } \tau = \frac{L}{R} \quad (17)$$

Además disponemos de la condición inicial

$$i_0 = \text{Re} \left(\underline{A} + \frac{\sqrt{2} \cdot \underline{E}}{\underline{Z}} \right) \quad \text{donde } \underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L, \quad \text{que}$$

impone la continuidad de la corriente o dicho de forma equivalente, la continuidad de $p(t)$. Queda claro entonces que para sistemas de primer orden todavía disponemos de un grado de libertad (A_2) para poder garantizar la continuidad de $q(t)$. Si por ejemplo el sistema parte del reposo en $t = 0$ podemos poner:

$$\underline{A} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \underline{E}}{\underline{Z}} \Rightarrow i = \frac{\sqrt{2} \cdot \underline{E}}{\underline{Z}} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (18)$$

Por lo que acabamos de señalar debe quedar claro también que para sistemas de 2º orden no vamos a poder garantizar en general la continuidad de $q(t)$. Este es un aspecto que debe ser tratado con el mayor detalle y que se presentará en otra publicación. En la Figura 5 mostramos los vectores espirales de potencia transitorios de la conexión del mismo circuito RL serie que se ha estudiado en el régimen permanente. Cabe destacar que en $t = 0^-$ el sistema se encontraba desenergizado, por lo que no puede cruzar el eje q inmediatamente. Para cualquier combinación de valores de los parámetros se verifica que la órbita parte del origen del plano (p, q) es decir hay continuidad de p y q .

6. Conclusiones

Se ha escrito y justificado una expresión para la potencia reactiva instantánea en el régimen AC permanente. Se ha introducido la representación fasorial de la potencia. Se ha analizado la estructura de los diagramas de circuitos de primer orden. Hemos recordado lo que son los vectores espirales de Yamamura y por fin en base al análisis anterior hemos propuesto una expresión para la potencia instantánea transitoria que resulta ser extremadamente satisfactoria para circuitos de primer orden. Su extensión a circuitos de orden superior debe ser

analizada con más profundidad. Hemos introducido herramientas gráficas y analíticas nuevas que creemos pueden resultar útiles para el análisis de circuitos en la academia. Invitamos a todos los investigadores e investigadoras a aplicarlas y a compartir sus experiencias.

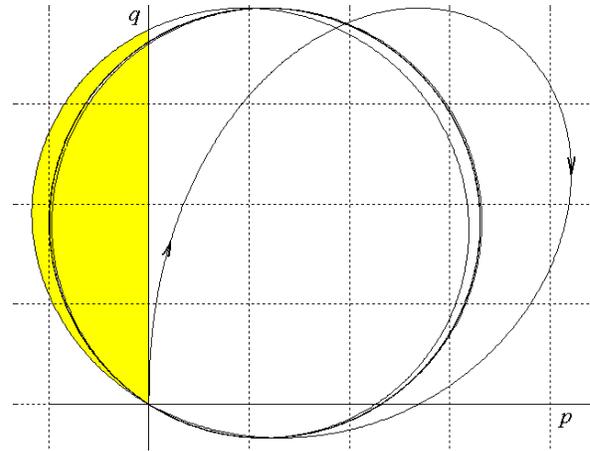


Figura 5: Ejemplo de vectores espirales de potencia en el régimen transitorio AC de un circuito RL serie.

Referencias

- [1] Charles Proteus Steinmetz, Lectures on Electrical Engineering, Vol. I-III (Dover Phoenix Editions), Dover Publications (2003)
- [2] H. Akagi et al., "Instantaneous reactive power compensators comprising switching devices without energy storage components", IEEE Trans. Ind. Appl., 20, 625-630 (1984)
- [3] J.L. Willems, "A new interpretation of the Akagi-Nabae power components of nonsinusoidal three-phase situations", IEEE Trans. Instrum. Meas., 41, 523-527 (1992)
- [4] Fang Zheng Peng et al, "Generalized instantaneous reactive power theory for three phase power systems", IEEE Trans. Instrum. Meas., 45, 293-297 (1996)
- [5] David Hestenes, "New Foundations for Classical Mechanics", Reidel Publishing Co, (1986)
- [6] Jesus Fraile Mora, Electromagnetismo y circuitos eléctricos (3ª ed.), Universidad Politécnica de Madrid (1995)
- [7] Sakae Yamamura, Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machines (Monographs in Electrical and Electronic Engineering, No 26), Clarendon Pr (1992)