

# Procesamiento de señales

## FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad III: DISEÑO DE FILTROS FIR

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



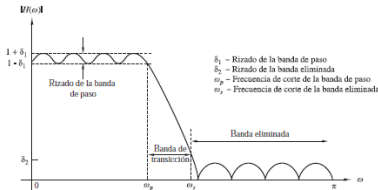
- 1 Diseño de filtros FIR
- 2 Filtro FIR utilizando ventanas
- 3 Filtro FIR basado en el muestreo en frecuencia

- 1 Diseño de filtros FIR
- 2 Filtro FIR utilizando ventanas
- 3 Filtro FIR basado en el muestreo en frecuencia

# Características de filtros prácticos.

En cualquier problema de diseño de filtros podemos especificar:

- Rizado: Normalmente, es tolerable un pequeño rizado en la banda de paso.
- Transición: La transición de la respuesta en frecuencia de la banda de paso a la banda eliminada define la banda de transición o región de transición del filtro.
- Frecuencias: La frecuencia de corte  $\omega_p$  define el límite superior de la banda de paso y la frecuencia  $\omega_s$  designa el comienzo de la banda eliminada.



Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson  
Presntice—Hall, 2007.

- Nuestro tratamiento está centrado en los filtros FIR de fase lineal.

Un filtro FIR de longitud  $M$  con entrada  $x(n)$  y salida  $y(n)$  se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_{M-1}x(n-M+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

donde  $\{b_k\}$  es el conjunto de coeficientes del filtro. Alternativamente, podemos expresar la secuencia de salida como la convolución de la respuesta del sistema al impulso unidad  $h(n)$  con la señal de entrada. Así, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

donde los límites inferior y superior de la convolución reflejan la causalidad y la característica de duración finita de filtro. Evidentemente, (10.2.1) y (10.2.2) son idénticas en la forma y, por tanto, podemos deducir que  $b_k = h(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ .

El filtro también puede caracterizarse mediante su función de sistema

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k}$$

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson Presntice—Hall, 2007.

Un filtro FIR tiene fase lineal si su respuesta al impulso unidad satisface la condición

$$h(n) = \pm h(M-1-n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

Si incorporamos las condiciones de simetría y antisimetría

tenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(M-2)z^{-(M-2)} + h(M-1)z^{-(M-1)} \\ &= z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \left[ z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\}, \quad M \text{ impar} \\ &= z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) [z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2}], \quad M \text{ par} \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos  $z^{-1}$  por  $z$  obtenemos

y multiplicamos ambos lados de la ecuación resultante por  $z^{-(M-1)}$ ,

$$z^{-(M-1)}H(z^{-1}) = \pm H(z)$$

Este resultado implica que las raíces del polinomio  $H(z)$  son idénticas a las raíces del polinomio  $H(z^{-1})$ . En consecuencia, las raíces de  $H(z)$  deben producir parejas recíprocas. En otras palabras, si  $z_1$  es una raíz o un cero de  $H(z)$ , entonces  $1/z_1$  también es una raíz. Además, si la respuesta al impulso unidad  $h(n)$  del filtro es real, las raíces complejas deben producir parejas complejas conjugadas. Por tanto, si  $z_1$  es una raíz compleja,  $z_1^*$  también es una raíz. Como consecuencia  $H(z)$  también tiene un cero en  $1/z_1^*$ .

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson Presntice—Hall, 2007.

La respuesta en frecuencia de los filtros FIR de fase lineal se obtiene evaluando unidad. Esta sustitución proporciona la expresión para  $H(\omega)$ .

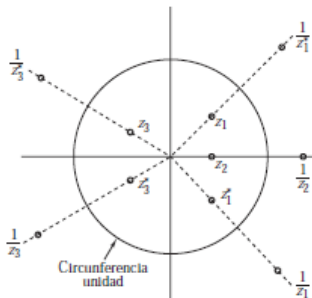
la circunferencia

Cuando  $h(n) = h(M-1-n)$ ,  $H(\omega)$  puede expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\omega(M-1)/2}$$

donde  $H_f(\omega)$  es una función real de  $\omega$  y se puede expresar como

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right), \quad M \text{ impar}$$



Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson

Prentice-Hall 2007

Navigation icons: back, forward, search, and other controls.

La característica de fase del filtro tanto para  $M$  impar como para  $M$  par es

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \left( \frac{M-1}{2} \right), & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ -\omega \left( \frac{M-1}{2} \right) + \pi, & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Si

$$h(n) = -h(M-1-n)$$

la respuesta al impulso unidad es *antisimétrica*. Para  $M$  impar, el punto central de la secuencia  $h(n)$  antisimétrica es  $n = (M-1)/2$ . En consecuencia,

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

Sin embargo, si  $M$  es par, cada término de  $h(n)$  tiene el término correspondiente de signo opuesto.

Es sencillo demostrar que la respuesta en frecuencia de un filtro FIR con una respuesta al impulso antisimétrica pueda expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{j[-\omega(M-1)/2 + \pi/2]}$$

donde

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right), \quad M \text{ impar}$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right), \quad M \text{ par}$$

Considere el filtro ideal pasa bajas con función de respuesta en frecuencia que se indica en la Figura:

$$H_I(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & -\pi - \Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c + \pi \end{cases}$$

The sequence which gives rise to corresponds to the inverse DTFT (IDTFT) which is obtained from the definition of IDTFT

$$h_I[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_I(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin(n\Omega_c)}{n\pi} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{n\Omega_c}{\pi}\right), \quad -\infty \leq n \leq \infty,$$

where the sinc function is defined as

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson

Prentice-Hall, 2007

window of length  $N = 2M + 1$  samples centered at  $n = 0$ . Thus, we can write the impulse response of the desired FIR filter as

$$h[n] = h_I[n]w_R[n], \quad -M \leq n \leq M,$$

where the rectangular window of length  $2M + 1$  is described by

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Because we multiply the ideal impulse response by the rectangular window, the design technique is called *windowing technique*. The second observation is that the truncated impulse response approaches the ideal impulse response as the window length increases. Is rectangular window the only window available for the design of an FIR filter, or are there other windows with desirable properties? We will deal with is that the resulting FIR filter is non-causal because its impulse response is not zero for  $n < 0$ . However, since the impulse response sequence is of finite duration, we can shift it to the right by  $M$  samples so that the impulse response of the causal FIR filter can be described by

$$h[n] = h_I[n - M]w_R[n - M], \quad 0 \leq n \leq 2M$$

**Example** Design a lowpass, length-9 FIR filter that approximates an ideal lowpass filter whose normalized cutoff frequency is  $\frac{\pi}{2}$  rad.

- 1 Diseño de filtros FIR
- 2 Filtro FIR utilizando ventanas
- 3 Filtro FIR basado en el muestreo en frecuencia

En este método, a partir de la especificación de la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(\omega)$  determinamos la correspondiente respuesta al impulso unidad  $h_d(n)$ . Así,  $h_d(n)$  está relacionada con  $H_d(\omega)$  por la transformada de Fourier

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

donde

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Por tanto, dada  $H_d(\omega)$ , podemos determinar la respuesta al impulso unidad  $h_d(n)$  evaluando la integral

En general, la respuesta al impulso unidad  $h_d(n)$  es infinita en duración y tiene que truncarse en algún punto, por ejemplo en  $n = M - 1$ , para proporcionar un filtro FIR de longitud  $M$ . Truncar  $h_d(n)$  a una longitud  $M - 1$  es equivalente a multiplicar  $h_d(n)$  por una "ventana rectangular", definida como

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego ahora la respuesta al impulso unidad del filtro FIR es

$$h(n) = h_d(n) w(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es instructivo considerar el efecto de la función de ventana sobre la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(\omega)$ . Recuerde que multiplicar la función de ventana  $w(n)$  por  $h_d(n)$  es equivalente a convolucionar  $H_d(\omega)$  con  $W(\omega)$ , donde  $W(\omega)$  es la representación en el dominio de la frecuencia (transformada de Fourier) de la función de ventana, es decir,

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j\omega n}$$

Luego la convolución de  $H_d(\omega)$  con  $W(\omega)$  proporciona la respuesta en frecuencia del filtro FIR (truncado). Es decir,

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\nu) W(\omega - \nu) d\nu$$

La transformada de Fourier de la ventana rectangular es

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(M-1)/2} \frac{\text{sen}(\omega M/2)}{\text{sen}(\omega/2)} \end{aligned}$$

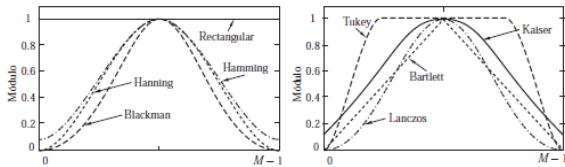
El módulo de esta función de ventana es

$$|W(\omega)| = \frac{|\text{sen}(\omega M/2)|}{|\text{sen}(\omega/2)|}, \quad \pi \leq \omega \leq \pi$$

y una parte de su fase lineal es

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \left( \frac{M-1}{2} \right), & \text{cuando } \text{sen}(\omega M/2) \geq 0 \\ -\omega \left( \frac{M-1}{2} \right) + \pi, & \text{cuando } \text{sen}(\omega M/2) < 0 \end{cases}$$

| Nombre de la ventana  | Secuencia en el dominio del tiempo,<br>$h(n), 0 \leq n \leq M-1$                                                                                                                                  |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bartlett (triangular) | $1 - \frac{2 \left  n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$                                                                                                                                              |
| Blackman              | $0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$                                                                                                                               |
| Hamming               | $0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$                                                                                                                                                             |
| Hanning               | $\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$                                                                                                                                          |
| Kaiser                | $\frac{I_0 \left[ \alpha \sqrt{\left( \frac{M-1}{2} \right)^2 - \left( n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[ \alpha \left( \frac{M-1}{2} \right) \right]}$                             |
| Lanczos               | $\left\{ \frac{\sin \left[ 2\pi \left( n - \frac{M-1}{2} \right) / \left( \frac{M-1}{2} \right) \right]}{2\pi \left( n - \frac{M-1}{2} \right) / \left( \frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L, L > 0$ |



| Tipo de ventana | Anchura aproximada de la región de transición del lóbulo principal | Pico del lóbulo secundario (dB) |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| Rectangular     | $4\pi/M$                                                           | -13                             |
| Bartlett        | $8\pi/M$                                                           | -25                             |
| Hanning         | $8\pi/M$                                                           | -31                             |
| Hamming         | $8\pi/M$                                                           | -41                             |
| Blackman        | $12\pi/M$                                                          | -57                             |

**Table** Formulas to calculate the order of an FIR filter

| Window name | FIR filter order                                                                                                                                      |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kaiser      | $N \cong \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_p \delta_s}) - 13}{14.6(\Omega_s - \Omega_p)/2\pi}$                                                         |
| Bellanger   | $N \cong \frac{2 \log_{10}(10\delta_p \delta_s)}{3(\Omega_s - \Omega_p)/2\pi} - 1$                                                                    |
| Hermann     | $N \cong \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s) - F(\delta_p, \delta_s) \left[ \frac{(\Omega_s - \Omega_p)}{2\pi} \right]^2}{(\Omega_s - \Omega_p)/2\pi}$ |

$\delta_p$  and  $\delta_s$  are, respectively, the passband and stopband ripples;  $\Omega_p$  is the passband edge, and  $\Omega_s$  is the stopband edge.

Determine the order of the FIR filter with the following specifications: passband edge at 1.5 kHz, stopband edge at 2 kHz, sampling frequency of 8 kHz, peak passband ripple  $\alpha_p = 0.1 \text{ dB}$ , and minimum stopband attenuation of  $\alpha_s = 40 \text{ dB}$ .

# ORDEN DE LA VENTANA DEL FILTRO FIR

## Dolph-Chebyshev (DC) Window

The DC window function of length  $2M + 1$  is defined as

$$w[n] = \frac{1}{2M + 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} + 2 \sum_{k=1}^M T_{2M} \left( \beta \cos \left( \frac{k\pi}{2M + 1} \right) \right) \cos \left( \frac{2nk\pi}{2M + 1} \right) \right\}, \quad -M \leq n \leq M,$$

where  $\gamma$  is the relative amplitude of the side lobe, that is,

$$\gamma = \frac{\text{amplitude of side lobe}}{\text{amplitude of main lobe}},$$

$$\beta = \cosh \left( \frac{1}{2M} \cosh^{-1} \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right),$$

and the  $k$ th-order Chebyshev polynomial in the variable  $x$  is given by

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1}(x)), & |x| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

Unlike the fixed window functions, the order of the DC window is determined from

# ORDEN DE LA VENTANA DEL FILTRO FIR

$$N = \frac{2.05\alpha_s - 16.4}{2.285(\Delta\Omega)},$$

where  $\alpha_s$  is the minimum stopband attenuation in dB, and  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$  is the transition width with  $\Omega_p$  being the passband edge and  $\Omega_s$  the stopband edge.

Determine the lowpass FIR filter order with a passband edge at  $0.23\pi$ , stopband edge at  $0.5\pi$ , and a minimum stopband attenuation of 40 dB. Use the Dolph-Chebyshev window.

For the Kaiser window, the FIR filter order is evaluated from

$$N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285\Delta\Omega}$$

For the same specifications as in Example determine the order of the FIR filter if Kaiser window is used.

- 1 Diseño de filtros FIR
- 2 Filtro FIR utilizando ventanas
- 3 Filtro FIR basado en el muestreo en frecuencia

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

En el método basado en el muestreo en frecuencia para el diseño de filtros FIR, especificamos la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(\omega)$  en un conjunto de frecuencias equiespaciadas, es decir:

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), & k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, & \quad M \text{ impar} \\ & & k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, & \quad M \text{ par} \\ \alpha &= 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y resolvemos para obtener la respuesta al impulso unidad  $h(n)$  del filtro FIR a partir de esta especificación en frecuencia. Para reducir los lóbulos secundarios, es deseable optimizar la especificación en frecuencia en la banda de transición del filtro. Esta optimización puede llevarse a cabo numéricamente utilizando una computadora digital y aplicando técnicas de programación lineal, como puede verse en Rabiner *et al.* (1970).

En esta sección aplicamos la propiedad de simetría básica de la respuesta en frecuencia muestreada para simplificar los cálculos. La respuesta en frecuencia deseada del filtro es [para simplificar, hemos eliminado el subíndice en  $H_d(\omega)$ ],

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n=0,1,\dots,M-1$$

La relación dada nos permite calcular los valores de la respuesta al impulso unidad  $h(n)$  a partir de la especificación de las muestras en frecuencia  $H(k+\alpha)$ ,  $k=0,1,\dots,M-1$ . Observe que cuando  $\alpha=0$ , (10.2.32) se reduce a la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia  $\{h(n)\}$  y la Ecuación es la DFT inversa (IDFT).

Puesto que  $\{h(n)\}$  es real, podemos demostrar fácilmente que las muestras en frecuencia  $\{H(k+\alpha)\}$  satisfacen la condición de simetría

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha)$$

Esta condición de simetría, junto con las condiciones de simetría para  $\{h(n)\}$ , pueden emplearse para reducir las especificaciones de frecuencia de  $M$  puntos a  $(M+1)/2$  puntos para  $M$  impar y a  $M/2$  puntos para  $M$  par. Por tanto, las ecuaciones lineales para determinar  $\{h(n)\}$  a partir de  $\{H(k+\alpha)\}$  se simplifican de forma considerable.

En particular, si se muestrea en las frecuencias  $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)/M$ ,  $k=0,1,\dots,M-1$ , obtenemos

$$H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

donde  $\beta = 0$  cuando  $\{h(n)\}$  es simétrica y  $\beta = 1$  cuando  $\{h(n)\}$  es antisimétrica. Podemos hacer una simplificación definiendo un conjunto de muestras en las frecuencia reales  $\{G(k+\alpha)\}$

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right), \quad k=0, 1, \dots, M-1$$

Sustituimos (10.2.36) en (10.2.35) para eliminar  $H_r(\omega_k)$  y así obtenemos

$$H(k+\alpha) = G(k+\alpha) e^{j\pi k} e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

Ahora la condición de simetría para  $H(k+\alpha)$  dada por (10.2.34) se traduce en la correspondiente condición de simetría para  $G(k+\alpha)$ , la cual se puede aplicar sustituyendo  $G(k+\alpha)$  por  $G(k+\alpha)$ , con el fin de simplificar las expresiones para la respuesta al impulso del filtro FIR  $\{h(n)\}$  para los cuatro casos:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  y  $\beta = 1$ .

Aunque el método basado en el muestreo en frecuencia nos proporciona otro medio para diseñar filtros FIR de fase lineal, su principal ventaja está ligada a la eficiente estructura del muestreo en frecuencia, la cual se obtiene cuando la mayoría de las muestras en frecuencia son cero.

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

Respuesta al impulso unidad  $h(n)$ :  $\pm h(M-1-n)$

---

Simétrica

---

$$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \quad G(k) = -G(M-k)$$

$$\alpha = 0 \quad h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ impar} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ par} \end{cases}$$

$$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(M - k - \frac{1}{2}\right)$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^U G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

Respuesta al impulso unidad  $h(n)$ :  $\pm h(M-1-n)$

---

Antisimétrica

---

$$H(k) = G(k)e^{j\pi/2}e^{j\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\alpha = 0 \quad G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \quad G(k) = G(M-k)$$

$$h(n) = -\frac{2}{M} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k) \sin \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ (-1)^{n+1} G(M/2) - 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k) \sin \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad M \text{ par}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = -G\left(M - k - \frac{1}{2}\right); \quad G(M/2) = 0 \text{ para } M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^V G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$V = \begin{cases} \frac{M-3}{2}, & M \text{ impar} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ par} \end{cases}$$

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA EJEMPLO 3

Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud  $M = 15$  que tiene una respuesta al impulso unidad simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface las siguientes condiciones

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.4, & k = 4 \\ 0, & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

**Solución.** Puesto que  $h(n)$  es simétrica y las frecuencias se seleccionan para que se correspondan con el caso de  $\alpha = 0$ , utilizamos la fórmula correspondiente de la Tabla para evaluar  $h(n)$ . En este caso,

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

El resultado de este cálculo es

$$\begin{aligned} h(0) = h(14) &= -0.014112893 \\ h(1) = h(13) &= -0.001945309 \\ h(2) = h(12) &= 0.040000004 \\ h(3) = h(11) &= 0.01223454 \\ h(4) = h(10) &= -0.09138802 \\ h(5) = h(9) &= -0.01808986 \\ h(6) = h(8) &= 0.3133176 \\ h(7) &= 0.52 \end{aligned}$$

# FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA EJEMPLO 3

**Solución.** Puesto que  $h(n)$  es simétrica y las frecuencias se seleccionan para que se correspondan con el caso de  $\alpha = 0$ , utilizamos la fórmula correspondiente de la Tabla para evaluar  $h(n)$ . En este caso,

$$G(k) = (-1)^k H\left(\frac{2\pi k}{15}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

El resultado de este cálculo es

$$h(0) = h(14) = -0.014112893$$

$$h(1) = h(13) = -0.001945309$$

$$h(2) = h(12) = 0.040000004$$

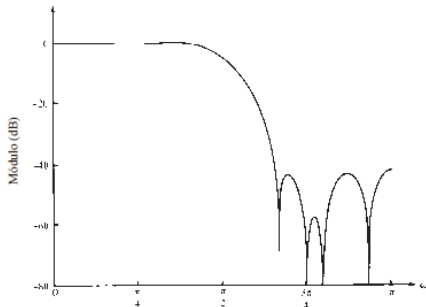
$$h(3) = h(11) = 0.01223454$$

$$h(4) = h(10) = -0.09138802$$

$$h(5) = h(9) = -0.01808986$$

$$h(6) = h(8) = 0.3133176$$

$$h(7) = 0.52$$



Diseñe un filtro pasa bajas FIR de longitud  $N = 30$  que tenga una frecuencia de corte de  $\Omega_c = \pi/3$ . Utilice la ventana rectangular.

- (a) Grafique la respuesta al impulso del filtro.
- (b) Grafique la magnitud de la curva de respuesta en frecuencia, y determine el rizo de la banda de paso.
- (c) Calcule y grafique la respuesta del filtro a una entrada de  $x[n] = 1 + 2 \cos(\pi n/6) + 2 \cos(2\pi n/3)$ . Explique el efecto de filtrado sobre las diversas componentes de  $x[n]$ .

Diseñe un filtro pasa altas FIR de longitud  $N = 15$  que tenga una frecuencia de corte de  $\Omega_c = \pi/2$ . Utilice la ventana rectangular.

- (a) Grafique la respuesta al impulso del filtro.
- (b) Grafique la magnitud de la curva de respuesta en frecuencia, y determine el rizo de la banda de paso.
- (c) Repita el diseño para una longitud  $N = 31$ , y compare los dos filtros en términos del rizo y la región de transición.
- (d) Calcule y grafique la respuesta de cada filtro a una entrada de  $x[n] = 2 + 2 \cos(\pi n/3) + 2 \cos(2\pi n/3)$ . Compare los filtros en términos de sus efectos sobre las diversas componentes de  $x[n]$ .

Diseñe un filtro pasa bajas FIR de longitud  $N = 10$  que tenga una frecuencia de corte de  $\Omega_c = \pi/3$ . Realice su diseño utilizando (i) una ventana rectangular, (ii) una ventana Hamming, y (iii) una ventana Hanning.

- (a) Grafique las respuestas al impulso de los filtros.
- (b) Grafique la magnitud de la respuesta en frecuencia de cada filtro, y compare los filtros en términos de la banda de rechazo y del rizo de la banda de paso.
- (c) Calcule y grafique la respuesta de cada filtro a una entrada de  $x[n] = 2 + 2 \cos(\pi n/4) + 2 \cos(2\pi n/2)$ . Compare los filtros en términos de sus efectos sobre las diversas componentes de  $x[n]$ .

Design a length-21 highpass FIR filter with a cutoff frequency of  $\Omega_c = 0.5\pi$  using fixed windows, and plot the respective frequency responses.

Design a bandpass FIR filter with passband edges at  $\Omega_1 = 0.4\pi$ ,  $\Omega_2 = 0.6\pi$ , transition width  $\Delta\Omega = 0.1\pi$ , and a minimum stopband attenuation of 30 dB. Use Kaiser window.

**Audio Filtering Using Simulink** In this example we will use MATLAB's Simulink to simulate filtering an audio signal with an FIR filter. We call it a simulation because we start with sampling an analog audio signal, then converting it to a digital signal, and then filtering it with an FIR filter, and finally dumping both the input and output signals in the workspace. The whole processing steps will be based on a block diagram. Each block can be configured to perform a specified task with the options for choosing the right parameters.



# Procesamiento de señales

## FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad III: DISEÑO DE FILTROS FIR

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

