

Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre

Unidad III: ESTRUCTURAS PARA SISTEMAS DISCRETOS
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber

- 1 Estructuras para sistemas FIR
- 2 Estructuras para sistemas IIR
- 3 Evaluación propuesta

1 Estructuras para sistemas FIR

2 Estructuras para sistemas IIR

3 Evaluación propuesta

Un sistema FIR se describe mediante la siguiente ecuación:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

O lo que es equivalente mediante la función de transferencia:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}$$

La respuesta al impulso unitario del sistema FIR es:

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

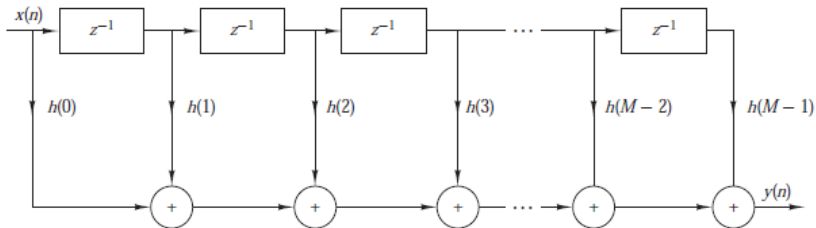
Métodos para implementar sistemas FIR:

- Forma directa.
- Realización en cascada.
- Realización basada en el muestreo en frecuencia.
- Estructura en celosía

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson Presntice—Hall, 2007.

Se obtiene mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

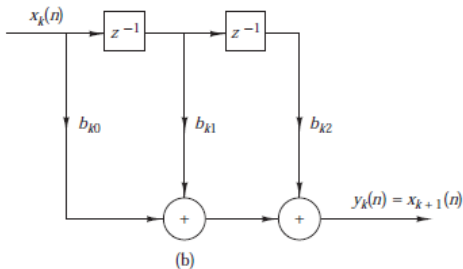
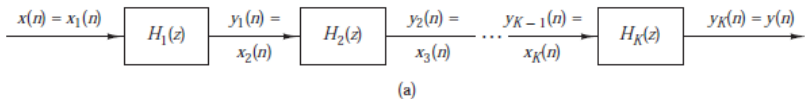
$$y(n] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k]$$



Se obtiene mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z)$$

$$\text{donde } H_k(z) = b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, k = 1, 2, \dots, K$$



Estructura FIR basada en el muestreo en frecuencia

En la realización basada en el muestreo en frecuencia de un filtro FIR, los parámetros que caracterizan el filtro son los valores de la respuesta en frecuencia deseada en lugar de la respuesta al impulso $h(n)$. Para obtener la estructura basada en el muestreo en frecuencia, especificamos la respuesta en frecuencia deseada en un conjunto de frecuencias igualmente espaciadas, a saber

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ & \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{ par} \\ \alpha &= 0 \text{ o } \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y resolvemos para obtener la respuesta al impulso $h(n)$ a partir de esta especificación de frecuencias igualmente espaciadas. Por tanto, podemos escribir la respuesta en frecuencia como

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

y los valores de $H(\omega)$ en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/M)(k + \alpha)$ son

$$\begin{aligned}H(k + \alpha) &= H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1\end{aligned}$$

Estructura FIR basada en el muestreo en frecuencia

El conjunto de valores $\{H(k+\alpha)\}$ son las muestras en frecuencia de $H(\omega)$. En el caso en que $\alpha = 0$, $\{H(k)\}$ se corresponde con la DFT de M puntos de $\{h(n)\}$.

Si invertimos y expresamos $h(n)$ en función de las muestras en frecuencia, el resultado es

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.2.10)$$

Si $\alpha = 0$, (9.2.10) es simplemente la IDFT de $\{H(k)\}$. Si ahora utilizamos (9.2.10) sustituyendo $h(n)$ en la expresión de la transformada $zH(z)$, tenemos

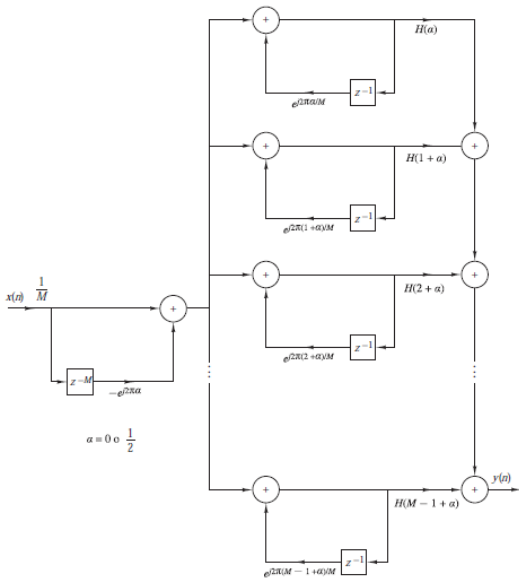
$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \right] z^{-n} \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

Intercambiando el orden de los dos sumatorios en la Ecuación (9.2.11) y calculando el sumatorio para el índice n , obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1})^n \right] \\ &= \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+\alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}} \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

Por tanto, la función del sistema $H(z)$ queda caracterizada por el conjunto de muestras en frecuencia $\{H(k+\alpha)\}$

Estructura FIR basada en el muestreo en frecuencia



Estructura FIR basada en estructura en celosía

En esta sección presentamos otra estructura de filtro FIR, denominada realización en celosía o filtro en celosía. El uso de los filtros en celosía está muy extendido en las aplicaciones de tratamiento de voz y en la implementación de filtros adaptativos.

Comencemos con el desarrollo considerando una secuencia de filtros FIR cuyas funciones de sistema son

$$H_m(z) = A_m(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

donde, por definición, $A_m(z)$ es el polinomio

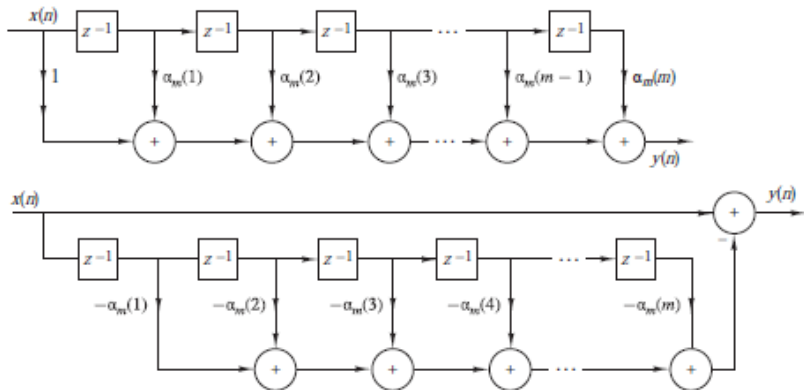
$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k) z^{-k}, \quad m \geq 1$$

y $A_0(z) = 1$. La respuesta al impulso unitario del filtro m es $h_m(0) = 1$ y $h_m(k) = \alpha_m(k)$, $k = 1, 2, \dots, m$. El subíndice m del polinomio $A_m(z)$ indica el grado del polinomio. Por conveniencia matemática, definimos $\alpha_m(0) = 1$.

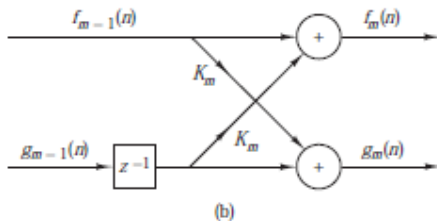
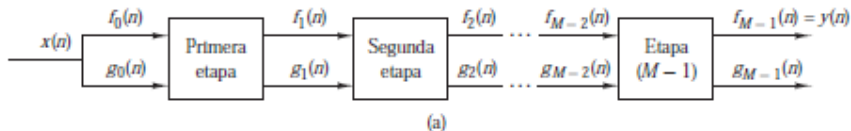
Si $\{x(n)\}$ es la secuencia de entrada al filtro $A_m(z)$ y $\{y(n)\}$ es la secuencia de salida, tenemos

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k) x(n-k)$$

Estructura FIR basada en estructura en celosía



Estructura FIR basada en estructura en celosía



Estructura FIR basada en estructura en celosía

Conversión de los coeficientes de la estructura en celosía en los coeficientes del filtro en forma directa.

Los coeficientes del filtro FIR en forma directa $\{\alpha_m(k)\}$ se pueden obtener a partir de los coeficientes en celosía $\{K_I\}$ utilizando las siguientes relaciones:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

Dado un filtro en celosía de tres etapas con coeficientes $K_1 = \frac{1}{4}$, $K_2 = \frac{1}{4}$, $K_3 = \frac{1}{3}$, determine los coeficientes del filtro FIR para la estructura en forma directa.

Estructura FIR basada en estructura en celosía

$$\begin{aligned}A_1(z) &= A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) \\ &= 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}\end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de un filtro FIR correspondientes al filtro en celosía de una sola etapa son $\alpha_1(0) = 1$, $\alpha_1(1) = K_1 = \frac{1}{4}$. Dado que $B_m(z)$ es el polinomio inverso de $A_m(z)$, tenemos

$$B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$$

A continuación, sumamos la segunda etapa a la celosía. Para $m=2$, (9.2.48) queda

$$\begin{aligned}A_2(z) &= A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) \\ &= 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}\end{aligned}$$

Por tanto, los parámetros FIR correspondientes al filtro en celosía de dos etapas son $\alpha_2(0) = 1$, $\alpha_2(1) = \frac{3}{8}$, $\alpha_2(2) = \frac{1}{2}$. También,

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

Por último, la adición de la tercera etapa a la celosía da lugar al polinomio

$$\begin{aligned}A_3(z) &= A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) \\ &= 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}\end{aligned}$$

En consecuencia, la realización de la forma directa del filtro FIR deseado queda caracterizada por los coeficientes

$$\alpha_3(0) = 1, \quad \alpha_3(1) = \frac{13}{24}, \quad \alpha_3(2) = \frac{5}{8}, \quad \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$$

1 Estructuras para sistemas FIR

2 Estructuras para sistemas IIR

3 Evaluación propuesta

Son sistemas lineales invariantes en el tiempo que tienen una respuesta al impulso de duración infinita (IIR, infinite-duration impulse response). Su salida, basada en la fórmula de la convolución, es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Su implementación práctica basada en la convolución será imposible, ya que requiere un número infinito de posiciones de memoria, multiplicaciones y sumas. Una cuestión que naturalmente surge es si es o no posible implementar sistemas IIR de otra manera de la sugerida por la convolución. Afortunadamente, la respuesta es afirmativa, ya que existen medios prácticos y de cálculo eficientes que permiten implementar una familia de sistemas IIR. Esta familia de sistemas discretos en el tiempo se describe mejor mediante ecuaciones en diferencias.

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson
Presntice — Hall, 2007.

- Son sistemas recursivos, es decir la salida en un instante dado, depende de la salida en instantes anteriores.

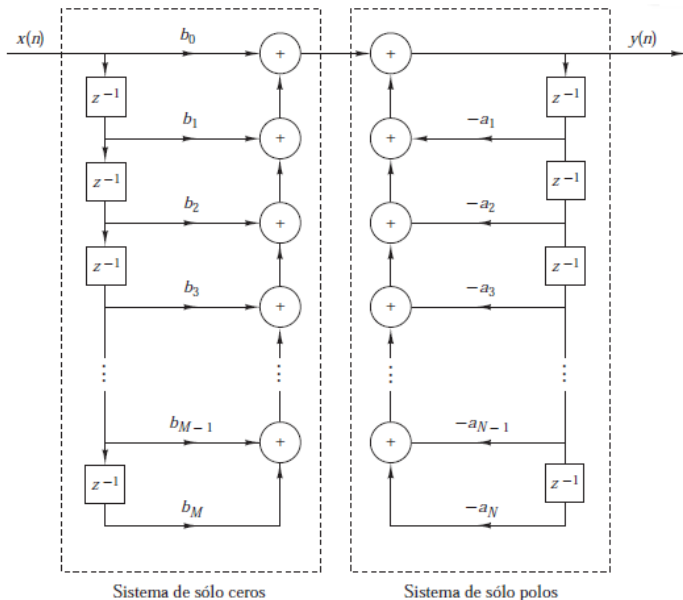
$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Fuente: Proakis, Jhon G, Manolakis Dimitris G., Tratamiento digital de señales, Pearson Presntice–Hall, 2007.

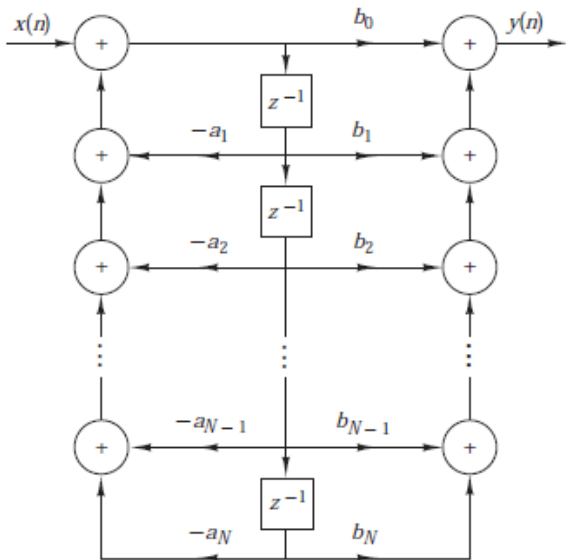
Los sistemas discretos en el tiempo lineales e invariantes en el tiempo de esta clase también se caracterizan por la función del sistema racional.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

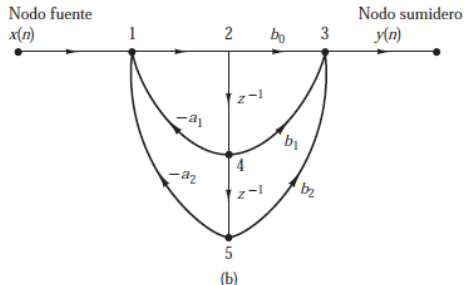
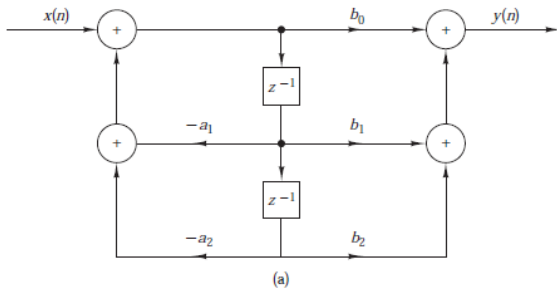
Sistema IIR Forma directa



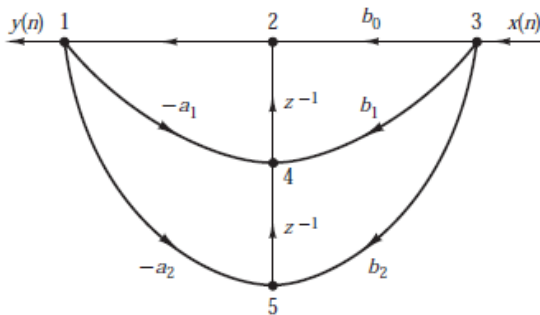
Sistema IIR Forma directa II



Sistema IIR Diagrama de flujo

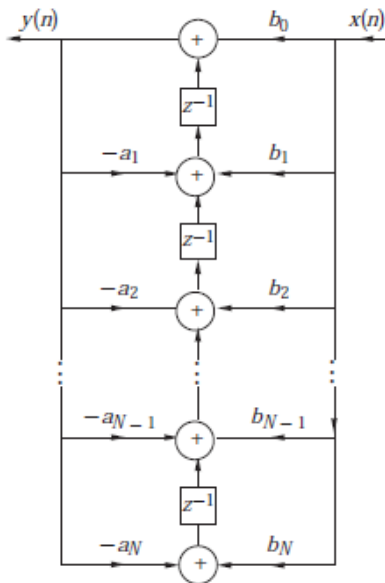


Sistema IIR Diagrama de flujo EJEMPLO 2

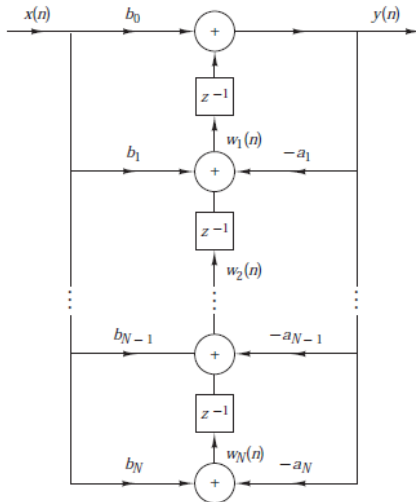


Hallar el diagrama de bloques del sistema

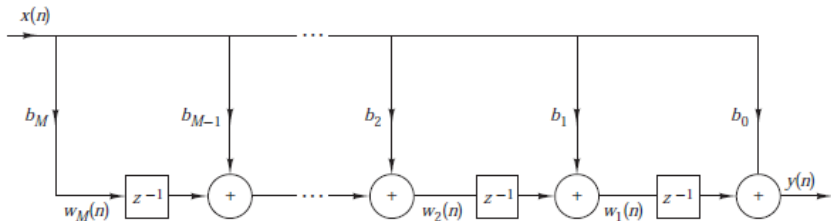
Sistema IIR Estructura transpuesta



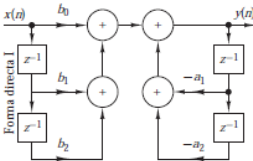
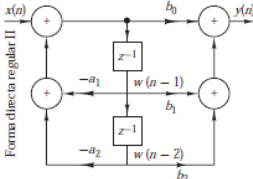
Sistema IIR Estructura transpuesta



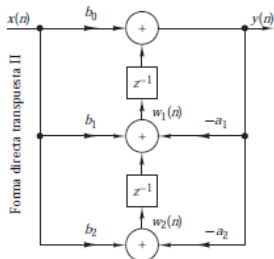
Sistema IIR Estructura transpuesta



Sistema IIR Estructura transpuesta

Estructura	Ecuaciones de implementación	Función del sistema
Forma directa I 	$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Forma directa regular II 	$w(n) = -a_1w(n-1) - a_2w(n-2) + x(n)$ $y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + b_2w(n-2)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

Sistema IIR Estructura transpuesta



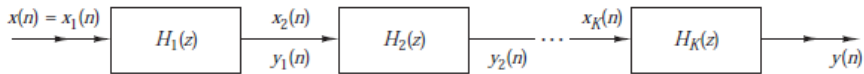
$$y(n) = b_0x(n) + w_1(n-1)$$

$$w_1(n) = b_1x(n) - a_1y(n) + w_2(n-1)$$

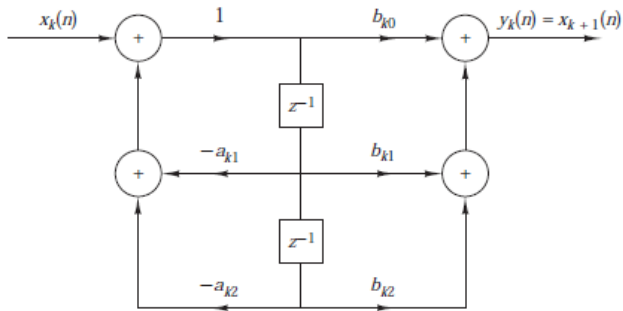
$$w_2(n) = b_2x(n) - a_2y(n)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Sistema IIR Estructura en cascada



(a)



Sistema IIR Estructura en paralelo

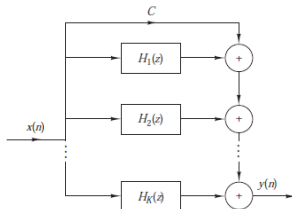
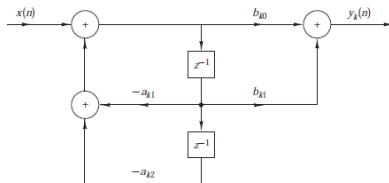


Figura Estructura paralelo de un sistema IIR.



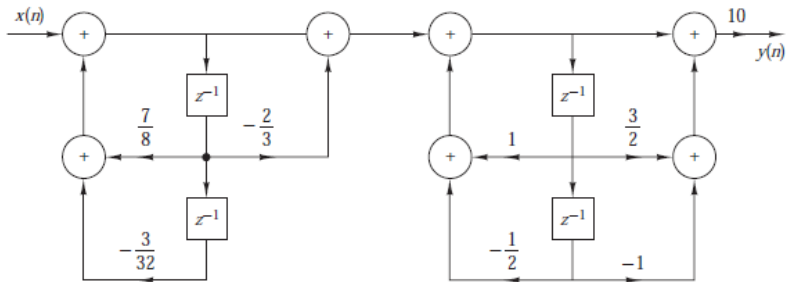
Estructura de una sección de segundo orden de una realización en paralelo de un sistema IIR.

Determine las realizaciones en cascada y en paralelo para el sistema descrito por la función de sistema

$$H(z) = \frac{10(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{8}z^{-1})[1 - (\frac{1}{2} + j\frac{1}{2})z^{-1}][1 - (\frac{1}{2} - j\frac{1}{2})z^{-1}]}$$

Sistema IIR Estructura en CASCADA POSIBLE SOLUCIÓN

EJEMPLO 3



Sistema IIR Estructura en paralelo POSIBLE SOLUCIÓN

EJEMPLO 3

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - (\frac{1}{2} + j\frac{1}{2})z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1 - (\frac{1}{2} - j\frac{1}{2})z^{-1}}$$

donde hay que determinar los coeficientes A_1 , A_2 , A_3 y A_3^* . Efectuando algunos cálculos aritméticos, obtenemos

$$A_1 = 2.93, \quad A_2 = -17.68, \quad A_3 = 12.25 - j14.57, \quad A_3^* = 12.25 + j14.57$$

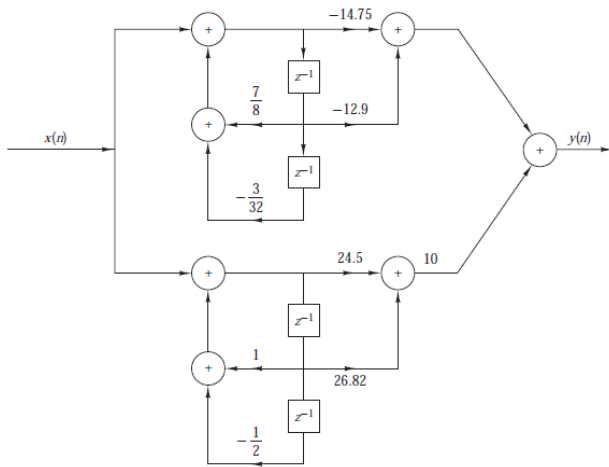
Recombinando parejas de polos, tenemos

$$H(z) = \frac{-14.75 - 12.90z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24.50 + 26.82z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

La realización en paralelo se ilustra en la Figura

Sistema IIR Estructura en paralelo POSIBLE SOLUCIÓN

EJEMPLO 3



Sistema IIR Estructura en CELOSIÁ

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)}$$

La realización en la forma directa de este sistema se ilustra en la Figura

La ecuación en diferencias para este sistema IIR es

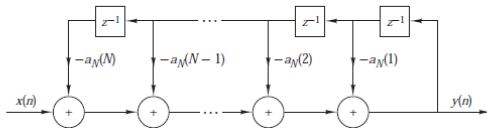
$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_N(k)y(n-k) + x(n) \quad (9.3.27)$$

Es interesante destacar que si intercambiamos los papeles de la entrada y de la salida [es decir, intercambiamos $x(n)$ e $y(n)$ en la Ecuación (9.3.27)], obtenemos

$$x(n) = - \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) + y(n)$$

o, lo que es equivalente,

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k)$$



1 Estructuras para sistemas FIR

2 Estructuras para sistemas IIR

3 Evaluación propuesta

- Realizar un resumen de los filtro FIR para aplicaciones de tratamiento de señales de audio, presentada en el Video: [▶ Link](#)
- Enumere las ventajas e inconvenientes de los filtros FIR, (ver el Video: [▶ Link](#))
- Resumen de aplicación en el procesado de audio con filtro FIR, (ver el Video: [▶ Link](#))
- Realizar un resumen de los filtro IIR para aplicaciones de tratamiento de señales de audio, presentada en el Video: [▶ Link](#)
- Enumere las ventajas e inconvenientes de los filtros IIR (ver el Video: [▶ Link](#))
- Filtros IIR basados en prototipos analógicos (ver el video Video: [▶ Link](#))
- Estudio de estabilidad de filtro IIR (ver el video Video: [▶ Link](#))
- Diseño de filtro IIR con una respuesta arbitraria Video: [▶ Link](#))



Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre

Unidad III: ESTRUCTURAS PARA SISTEMAS DISCRETOS
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber