Procesamiento digital de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad II: Sistema Discreto en el tiempo

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber

Resumen

1. Transformada Z y la transformada de Fourier
2. Estructuras sistemas FIR
3. Trabajos propuestos

Resumen

1. Transformada Z y la transformada de Fourier
2. Estructuras sistemas FIR
3. Trabajos propuestos

Ejemplo

Considere el sistema LTI discreto dado por:
$h(n) = (n - n_0) \cdot 0{,}5^{n-n_0} \cdot \mu(n - n_0)$

- Utilice la propiedad de derivación, así como otras propiedades para calcular la respuesta en frecuencia del sistema $H(\Omega)$
- Obtenga a partir de $H(\Omega)$ la función de transferencia $H(z)$

Fuente:PROAKIS, John G., et al. Tratamiento digital de señales,2007.

EJEMPLO 1.

Calcular la muestra $x[n]$ dada la trasnformada de la función $X(z) = \frac{z^3+1}{z^3-z^2-z-1}$

Solución: Considerando el denominador

$D(z) = z^3 - z^2 - z - 1$

Primer paso se procede a calcular las raíces de la ecuación. Un método es utilizar el Matlab aplicando el comando roots.

- Cálculo de la transformada z

Al utilizar el comando `roots` de MATLAB se revela que las raíces de $A(z)$ son

$$p_1 = -0.5 - j0.866$$
$$p_2 = -0.5 + j0.866$$
$$p_3 = 2$$

Entonces, si expandimos $X(z)/z$ tenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z + 0.5 + j0.866} + \frac{\bar{c}_1}{z + 0.5 - j0.866} + \frac{c_3}{z - 2}$$

donde

$$c_0 = X(0) = \frac{1}{-2} = -0.5$$

$$c_1 = \left[(z + 0.5 + j0.866)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-0.5-j0.866} = 0.429 + j0.0825$$

$$c_3 = \left[(z - 2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2} = 0.643$$

Principales propiedades II

	Señal, $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8	$(\operatorname{sen} \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$

- Cálculo de la transformada z

$$x[n] = -0.5\delta[n] + c_1(-0.5 - j0.866)^n + \bar{c}_1(-0.5 + j0.866)^n + 0.643(2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Podemos escribir el segundo y tercer términos en $x[n]$ de forma real utilizando la forma
Aquí, la magnitud y el ángulo de p_1 están dados por

$$|p_1| = \sqrt{(0.5)^2 + (0.866)^2} = 1$$

$$\angle p_1 = \pi + \tan^{-1}\frac{0.866}{0.5} = \frac{4\pi}{3}\text{rad}$$

y la magnitud y el ángulo de c_1 están dados por

$$|c_1| = \sqrt{(0.429)^2 + (0.0825)^2} = 0.437$$

$$\angle c_1 = \tan^{-1}\frac{0.0825}{0.429} = 10.89°$$

Entonces, al rescribir $x[n]$ en la forma (7.69), tenemos

$$x[n] = -0.5\delta[n] + 0.874\cos\left(\frac{4\pi}{3}n + 10.89°\right) + 0.643(2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Polos repetidos

- Determine the transformada z de la señal .

$$X(z) = \frac{6z^3 + 2z^2 - z}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

Solución Analítica

- Solución.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{(z-1)^2(z+1)}$$

Observe que el factor común de z en el numerador y denominador de $X(z)/z$ se canceló. Para eliminar cálculos innecesarios, cualquier factor común en $X(z)/z$ debe cancelarse antes de realizar la expansión en fracciones parciales.

Ahora los polos de $X(z)/z$ son $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = -1$, y por lo tanto la expansión tiene la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2} + \frac{c_3}{z+1}$$

donde

$$c_2 = \left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{6 + 2 - 1}{2} = 3.5$$

$$c_1 = \left[\frac{d}{dz}(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[\frac{d}{dz}\frac{6z^2 + 2z - 1}{z+1}\right]_{z=1}$$

$$= \left.\frac{(z+1)(12z+2) - (6z^2 + 2z - 1)(1)}{(z+1)^2}\right|_{z=1}$$

$$= \frac{2(14) - 7}{4} = 5.25$$

y

$$c_3 = \left[(z+1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-1} = \frac{6 - 2 - 1}{(-2)^2} = 0.75$$

Solución

- La muesra buscada es:

Así,

$$X(z) = \frac{5.25z}{z-1} + \frac{3.5z}{(z-1)^2} + \frac{0.75z}{z+1}$$

Por medio del par de transformadas obtenemos la siguiente transformada inversa

$$x[n] = 5.25(1)^n + 3.5n(1)^{n-1} + 0.75(-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 5.25 + 3.5n + 0.75(-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1 Transformada Z y la transformada de Fourier

2 Estructuras sistemas FIR

3 Trabajos propuestos

En general, un sistema FIR se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

o, lo que es equivalente, mediante la función del sistema

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}$$

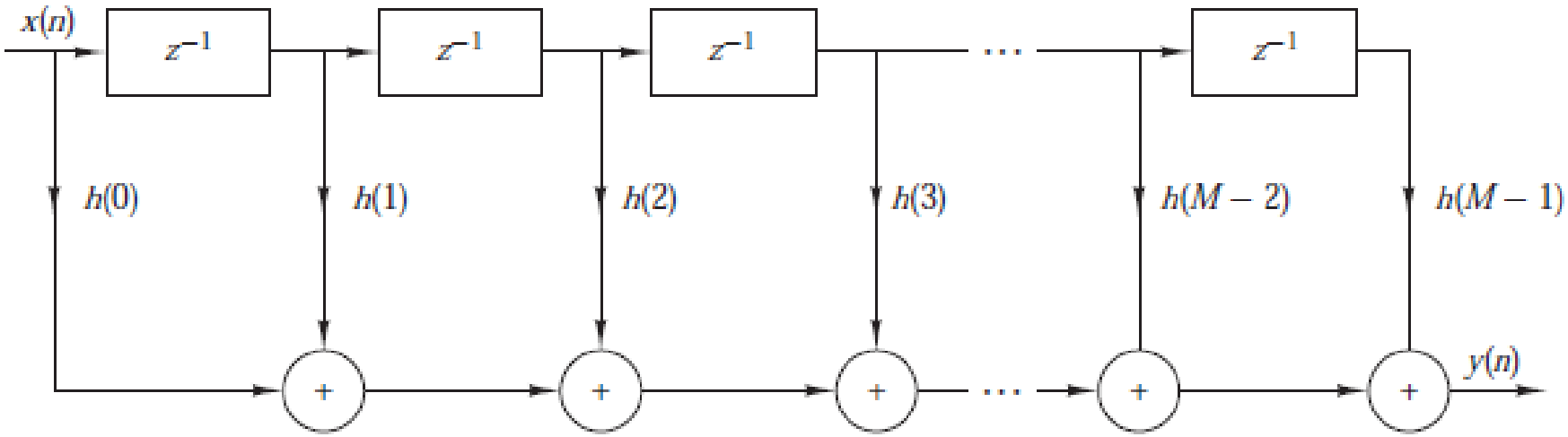
Además, la respuesta al impulso unitario del sistema FIR es idéntica a los coeficientes $\{b_k\}$, es decir,

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La longitud del filtro FIR se selecciona como M de acuerdo con la notación establecida en la literatura técnica.

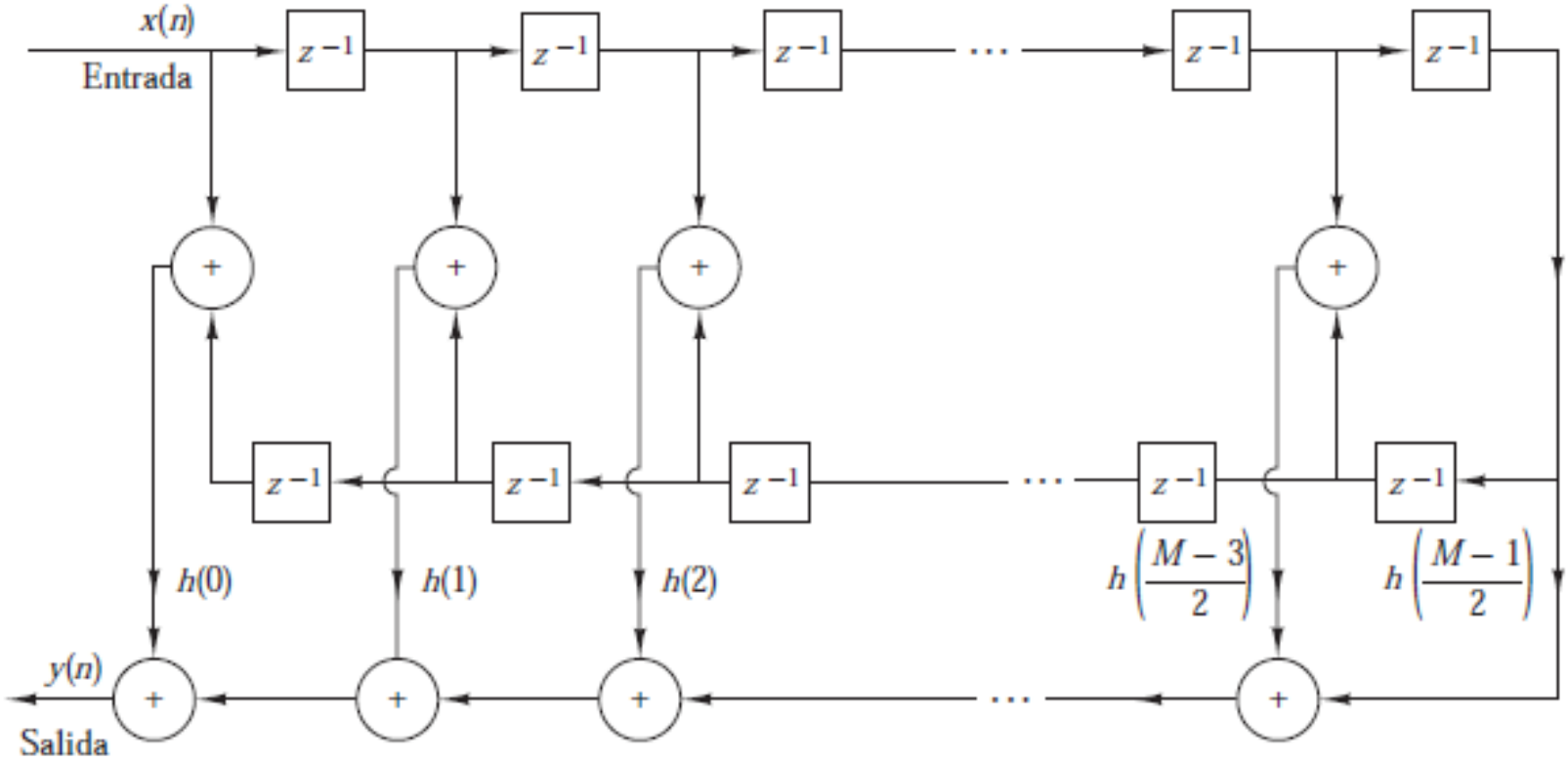
Ejemplo 1: Estructura de forma directa FIR

La realización de la forma directa se obtiene inmediatamente de la ecuación en diferencias no recursiva dada por $y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$, o, lo que es equivalente, por la suma de convolución $y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$



Observe que esta estructura requiere M−1 posiciones de memoria para almacenar las $M-1$ entradas anteriores y tiene una complejidad de M multiplicaciones y $M-1$ sumas por punto de salida.

Ejemplo 2: ESTRUCTURAS EN CASCADA



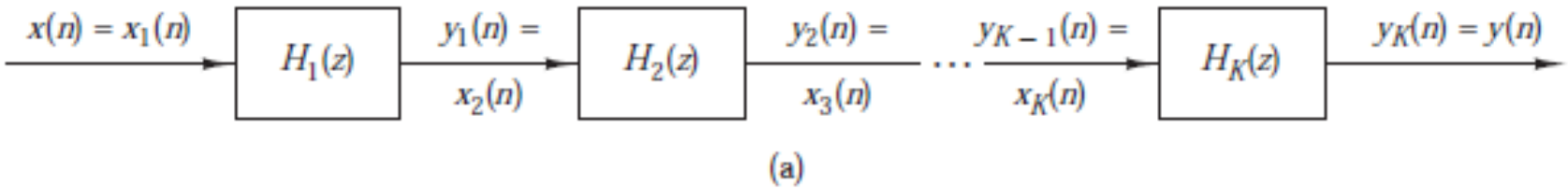
La realización en cascada se obtiene por $H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}$. Es simple factorizar H(z) en los sistemas FIR de segundo orden de modo que:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z)$$

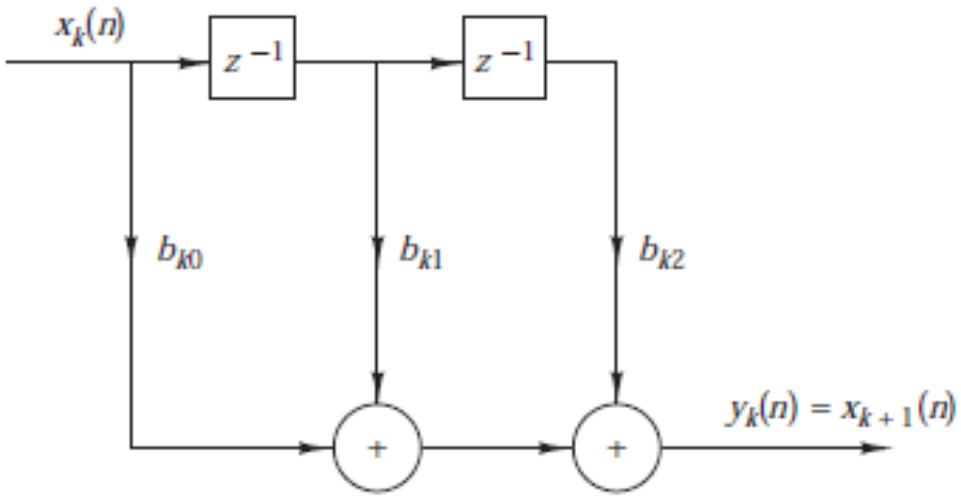
donde

$$H_k(z) = b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

Continuación de solución Ejemplo 2: SISTEMA FIR



(a)



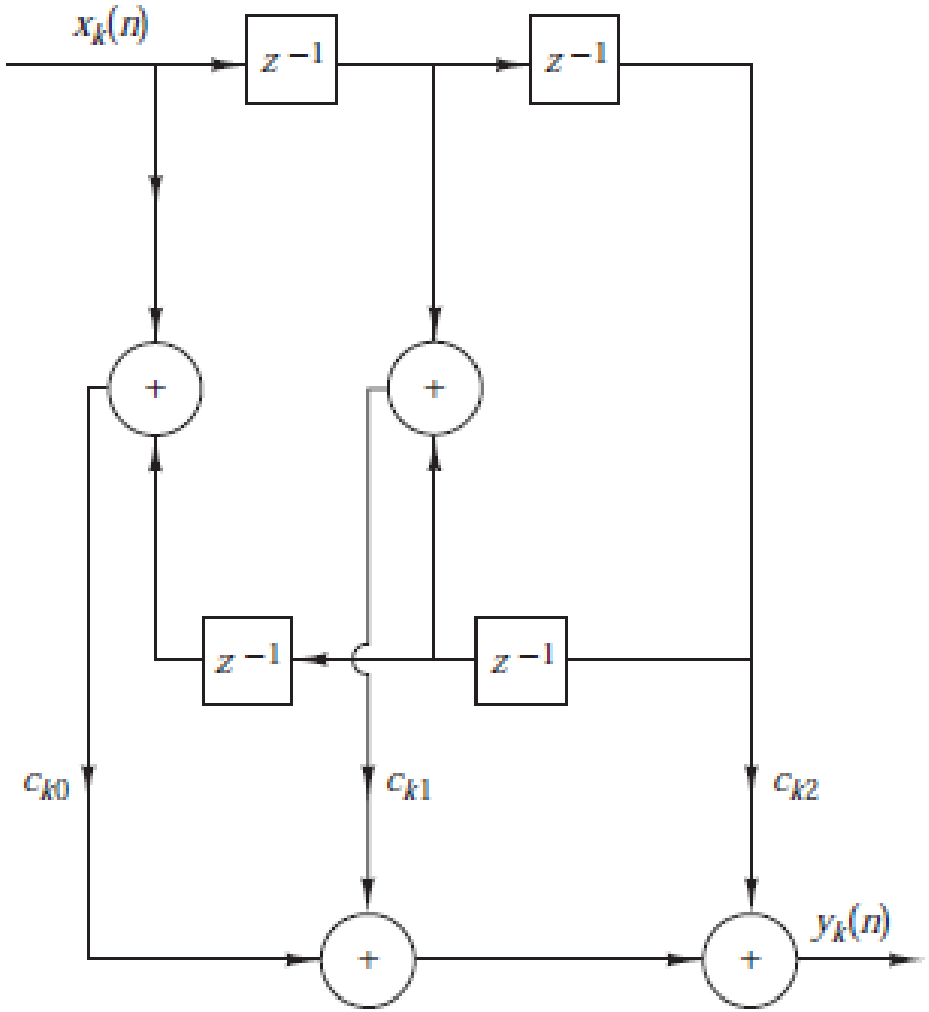
Realización en cascada junto con la sección básica de segundo orden

En el caso de filtros FIR de fase lineal, la simetría de $h(n)$ implica que los ceros de $H(z)$ también exhiben una forma de simetría. En particular, si z_k y z_k^* son una pareja de ceros complejos conjugados, entonces $1/z_k$ y $1/z_k^*$ también son una pareja de ceros complejos conjugados En consecuencia, conseguimos cierta simplificación definiendo secciones de cuarto orden del sistema FIR de la manera siguiente:

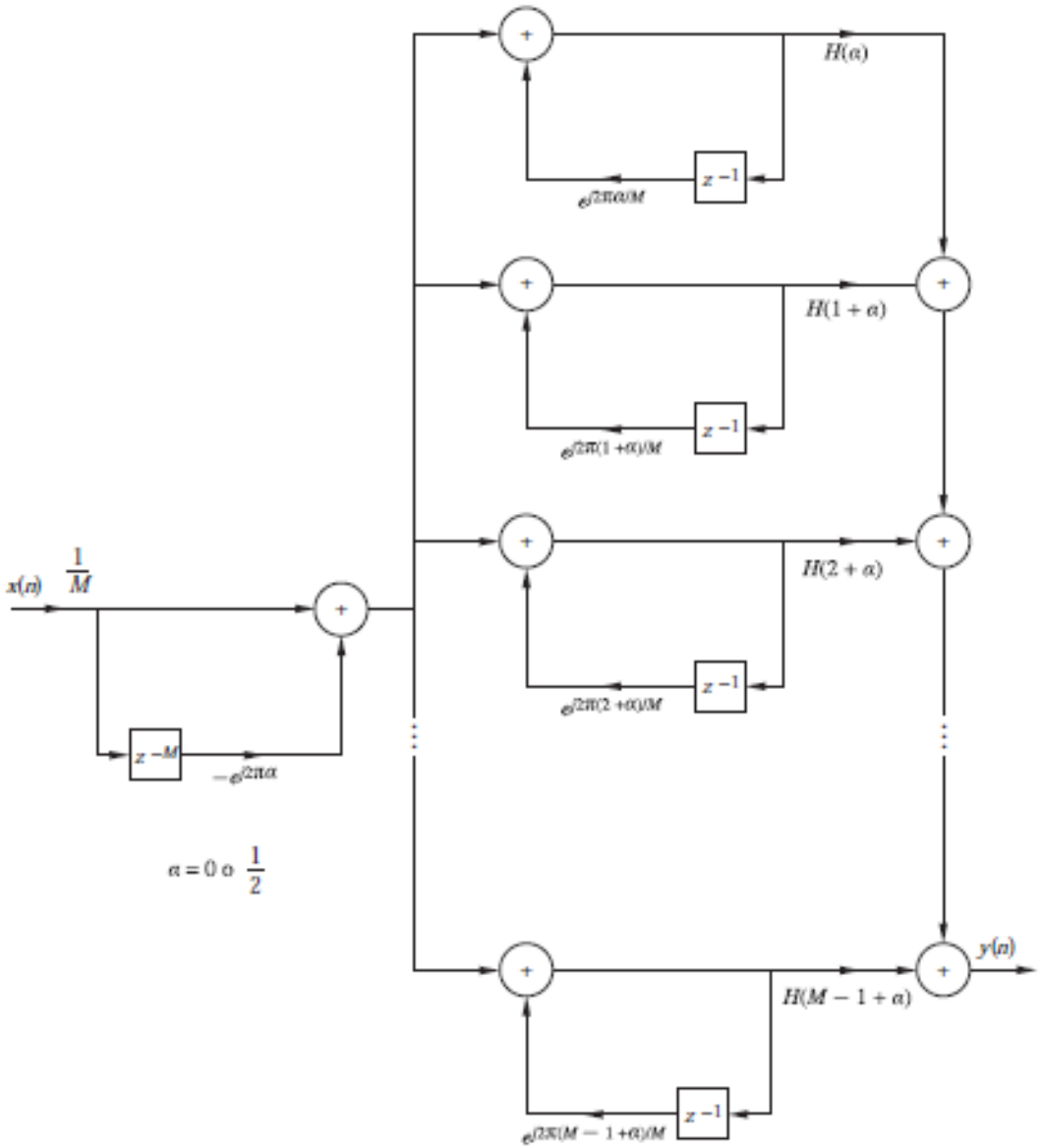
$$\begin{aligned} H_k(z) &= c_{k0}(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z^{-1}/z_k)(1 - z^{-1}/z_k^*) \\ &= c_{k0} + c_{k1} z^{-1} + c_{k2} z^{-2} + c_{k1} z^{-3} + c_{k0} z^{-4} \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\{c_{k1}\}$ y $\{c_{k2}\}$ son funciones de z_k. Luego combinando las dos parejas de polos para formar una sección del filtro de cuarto orden, hemos reducido el número de multiplicaciones de seis a tres (es decir, en un factor del 50 %).

SISTEMA FIR DE CUARTO ORDEN



SISTEMA FIR MUESTREO EN FRECUENCIA



Cuantificación: La cuantificación es un proceso no lineal y no invertible que asigna una amplitud determinada x(n)$\equiv$ x(nT) en el instante t = nT a una amplitud x_k, tomada de un conjunto finito de valores.
Codificación: El proceso de codificación en un convertidor A/D asigna un número binario unívoco a cada nivel de cuantificación. Si tenemos L niveles, necesitamos al menos L números binarios diferentes.
Errores de cuantificación: Para determinar los efectos de la cuantificación sobre el funcionamiento de un convertidor A/D, adoptamos un método estadístico. La dependencia del error de cuantificación de las características de la señal de entrada y la naturaleza no lineal del cuantificador hace el análisis determinista muy complejo, excepto en casos muy simples. En el método estadístico, suponemos que el error de cuantificación es aleatorio. Modelamos este error como ruido que se ha añadido a la señal original (no cuantificada). Si la señal de entrada analógica está dentro del rango del cuantificador, el error de cuantificación $e_q(n)$ está limitado en módulo [es decir, $|e_q(n))| < \frac{\Delta}{2}$], y el error resultante se denomina ruido granular.

Estructuras sistemas discretos

ejemplos de cálculo exámen

A partir del sistema continuo ($H_a(\omega)$), compuesto por un sistema discreto($H(z)$) intercalado entre dos conversores A/D y D/A. Se pide:

1. Diagrama de bloques del sistema.
2. Si la entrada del sistema continuo es: $x_a(t) = 4sen(2\pi 300t) - 2cos(2\pi 600t)$. Obtenga la expresión del espectro $X_a(\omega)$ de la señal continua de entrada y dibuje su módulo.
3. Si la función de transferencia del sistema discreto causal es: $H(z) = \frac{1+\frac{1}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{25}z^{-2}}$.
   - Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H(z)$, indicando la región de convergencia y la estabilidad del sistema. Nota: tenga en cuenta las posibles cancelaciones entre los polos y los ceros.
   - Calcule la respuesta en frecuencia ($H(\Omega)$) y la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema discreto

Resumen

1. Transformada Z y la transformada de Fourier
2. Estructuras sistemas FIR
3. Trabajos propuestos

- Dibuje el diagrama de bloques para las realizaciones en forma directa y basada en el muestreo en frecuencia del filtro FIR de fase lineal (simétrico) con $M = 32$, $\alpha = 0$ que tiene las frecuencias siguientes:

$$H(\tfrac{2\pi k}{32}) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2 \\ 1/2 & k = 3 \\ 0 & k = 4, 5, \ldots, 15 \end{cases}$$

- Realizar un resumen de los filtro FIR para aplicaciones de tratamiento de señales de audio, presentada en el Video: ▸ Link
  - Enumere las ventajas e inconvenientes de los filtros FIR, (ver el Video: ▸ Link)
  - Resumen de aplicación en el procesado de audio con filtro FIR, (ver el Video: ▸ Link)

Bibliografía

Procesamiento digital de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad II: Sistema Discreto en el tiempo

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber