

Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre

Unidad II: Transformada Discreta de Fourier
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber

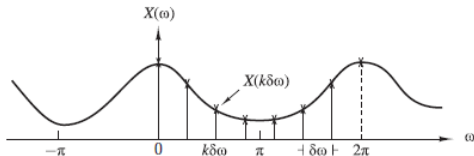
- 1 Introducción
- 2 LA DFT como una transformación lineal
- 3 Trabajos propuestos

1 Introducción

2 LA DFT como una transformación lineal

3 Trabajos propuestos

El análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo suele realizarse donde es más adecuado, en un procesador digital de señales, que puede ser una computadora digital de propósito general o sobre un hardware digital especialmente diseñado. Para realizar el análisis en frecuencia de una señal discreta en el tiempo $x(n)$, convertimos la secuencia en el dominio del tiempo en una representación equivalente en el dominio de la frecuencia. Sabemos que tal representación está dada por la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la secuencia $x[n]$. Sin embargo, $X(\omega)$ es una función continua de la frecuencia y, por tanto, no es una representación adecuada computacionalmente de la secuencia $x[n]$.



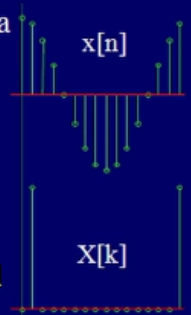
Fuente: PROAKIS, John G., et al. Tratamiento digital de señales, 2007.

La transformada discreta de Fourier.

La transformada discreta de Fourier (TDF) permite transformar una secuencia $x[n]$ de longitud $L \leq N$ en una secuencia de muestras en frecuencia $X[k]$ de longitud N . Donde las muestras de frecuencia se obtienen evaluando la transformada de Fourier $X(\omega)$ en un conjunto de N frecuencias discretas (igualmente espaciadas).

- TF: secuencia $\Rightarrow$ fth compleja de variable real
- TDF (DFT): secuencia $\Rightarrow$ secuencia
- TDF de **N puntos**:
 - Condición:
 $x[n] = 0 \quad n < 0 \quad n > N - 1$
 - Definición:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



Relación con la transformada de Fourier.

- La DFT es un muestreo de la transformada de Fourier (FT)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

FT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFT

$k = 0, 1, \dots, N-1$

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

- Cálculo de la transformada y su inversa

– TRANSFORMADA

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

– TRANSFORMADA INVERSA

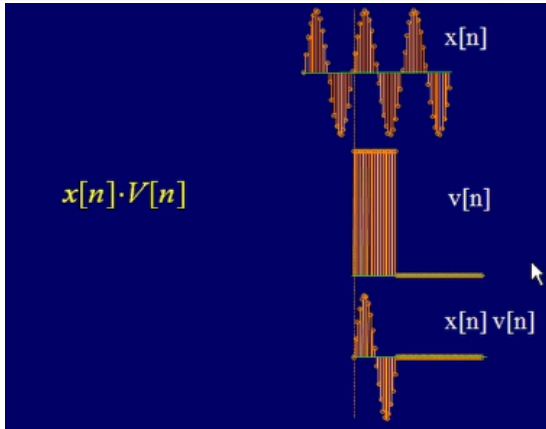
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformada Discreta de Fourier

ejemplos de cálculo

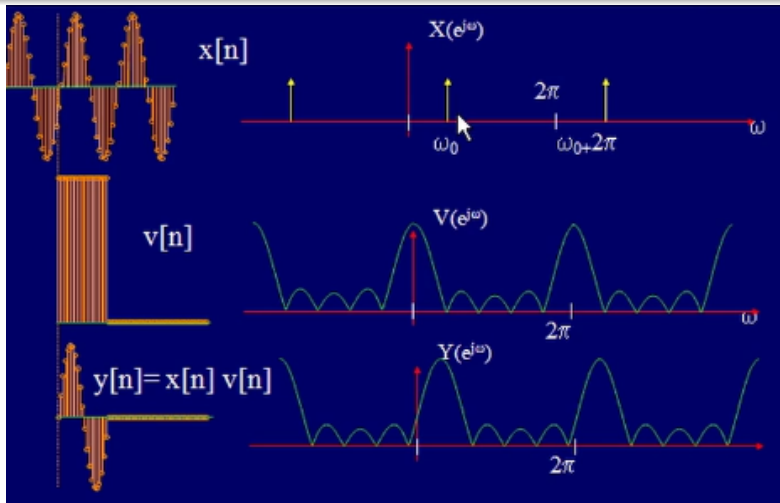
Enventanado

- Recortar la señal para que cumpla con el requisito de cálculo de DFT.



Efecto del ententado

- Se indica el efecto del ententado en la DFT.



Secuencia $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (parte simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4. $jIm\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (parte antisimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (parte simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (parte antisimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = jIm\{X(e^{j\omega})\}$
<i>Las siguientes propiedades sólo se cumplen si $x[n]$ es real:</i>	
7. Cualquier $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (la transformada de Fourier es simétrica conjugada)
8. Cualquier $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (la parte real es par)
9. Cualquier $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (la parte imaginaria es impar)
10. Cualquier $x[n]$ real	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (el módulo es par)
11. Cualquier $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (la fase es impar)
12. $x_e[n]$ (parte par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (parte impar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Secuencia	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d un entero)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$

Teorema de Parseval:

$$8. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$9. \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

Secuencia	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \text{sen } \omega_p (n+1)}{\text{sen } \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\frac{\text{sen}[\omega(M+1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$

Ejercicios

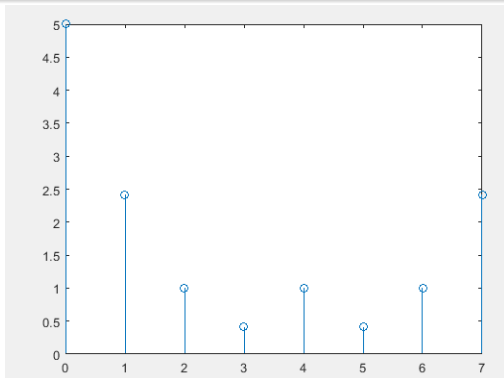
- Calcular la transformada de Fourier de la secuencia $a^5\mu(n-5)$
- Calcular la transformada de Fourier de $x = [11111000]$

Ejercicios

- Calcular la transformada de Fourier de la función $x = [11111000]$
- $x = [11111000]; XX = \text{fft}(x); k = 0 : 7; \text{stem}(k, \text{abs}(XX))$

Claves

- $x = [11111000]$; $XX = \text{fft}(x)$; $k = 0 : 7$; $\text{stem}(k, \text{abs}(XX))$ TDF es un muestreo en N puntos de la TF.



Ejercicio

- Calcular la transformada inversa de Fourier de $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$
- Calcular la transformada de Fourier de $x = [11111000]$

1 Introducción

2 LA DFT como una transformación lineal

3 Trabajos propuestos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

donde, por definición,

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

que es la raíz N -ésima de valor unidad.

Es interesante ver la DFT y la IDFT como transformaciones lineales de las secuencias $\{x(n)\}$ y $\{X(k)\}$, respectivamente. Definamos un vector de N puntos $\mathbf{x}_N$ de la secuencia $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, un vector de N puntos $\mathbf{X}_N$ de muestras en frecuencia y una matriz $N \times N$ $\mathbf{W}_N$ como sigue

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N$$

Pero ésta es sólo una expresión para la IDFT.

De hecho, la IDFT se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N$$

donde $\mathbf{W}_N^*$ designa el conjugado complejo de la matriz $\mathbf{W}_N$. Comparando

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

lo que a su vez implica que

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N$$

donde $\mathbf{I}_N$ es una matriz identidad $N \times N$. Por tanto, la matriz $\mathbf{W}_N$ de la transformación es una matriz ortogonal (unitaria). Además, existe su inversa y está dada por $\mathbf{W}_N^*/N$. Por supuesto, la existencia de la inversa de $\mathbf{W}_N$ se ha establecido anteriormente a partir de la deducción de la IDFT.

Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas TDF

Calcular la TDF de la secuencia de 4 puntos $x = [0 \ 1 \ 2 \ 3]$.

Solución. El primer paso consiste en determinar la matriz W_4 . Aplicando la propiedad de periodicidad de W_4 y la propiedad de simetría

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

la matriz W_4 se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} W_4 &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X_4 = W_4 x_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



Periodicidad. Si $x(n)$ y $X(k)$ son una pareja de transformada DFT de N puntos, entonces

$$\begin{aligned} x(n+N) &= x(n) && \text{para todo } n \\ X(k+N) &= X(k) && \text{para todo } k \end{aligned}$$

Linealidad. Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_2(k)$$

entonces para cualesquiera constantes reales o complejas a_1 y a_2 ,

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$$

Simetría circular de una secuencia. Como hemos visto, la DFT de N puntos de una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a la DFT de N puntos de una secuencia periódica $x_p(n)$ de período N , la cual se obtiene expandiendo periódicamente $x(n)$, es decir,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

Suponga ahora que desplazamos k unidades hacia la derecha la secuencia periódica $x_p(n)$. Así obtenemos otra secuencia periódica

$$x'_p(n) = x_p(n - k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - k - lN)$$

La secuencia de duración finita

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

está relacionada con la secuencia original $x(n)$ por un desplazamiento circular.

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

Calcule la convolución circular de las dos secuencias siguientes:

$$x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$$

↑

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$$

↑

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

Calcule la convolución circular de las dos secuencias siguientes:

$$x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Solución: Cada secuencia consta de cuatro puntos distintos de cero. Con el fin de ilustrar las operaciones implicadas en la convolución circular, es aconsejable representar gráficamente cada secuencia como puntos sobre una circunferencia. Por ello, las secuencias se indican a continuación.

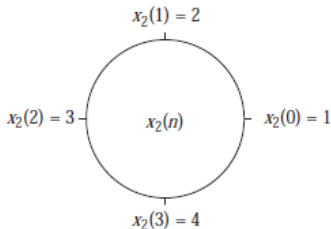
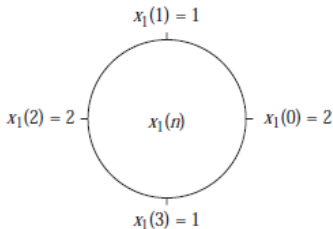
Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

Calcule la convolución circular de las dos secuencias siguientes:

$$x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$$

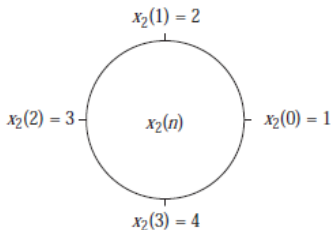
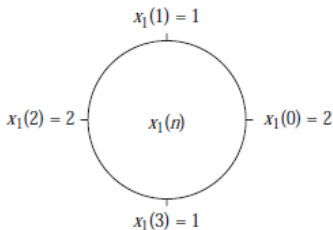
$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Solución:



Observe que las secuencias se han representado sobre la circunferencia en sentido antihorario, lo que establece la dirección de referencia para girar una secuencia respecto de la otra.

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

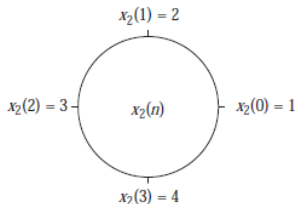
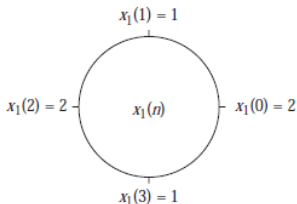


Solución: Aplicamos la ecuación:

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

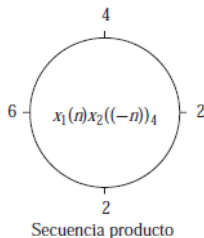
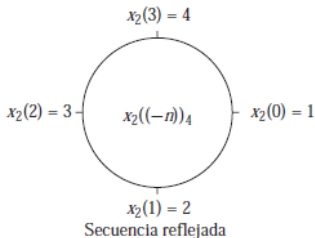
Comenzando por $m = 0$, tenemos:

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

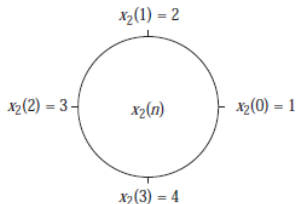
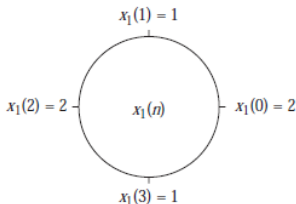


$$x_3(0) = \sum_{n=0}^3 x_1(n)x_2((-n))N$$

Solución: Comenzando por $m = 0$, tenemos:

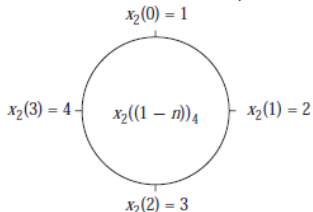


Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

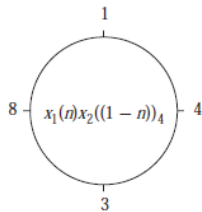


$$x_3(1) = \sum_{n=0}^3 x_1(n) x_2((1-n))_4$$

Solución: Para $m = 1$, tenemos:

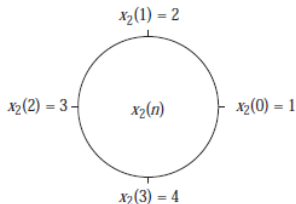
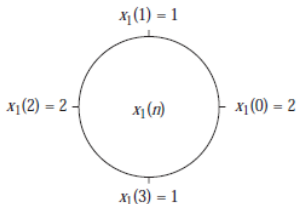


Secuencia reflejada girada una unidad de tiempo



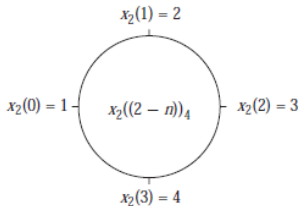
Secuencia producto

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

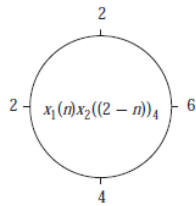


$$x_3(2) = \sum_{n=0}^3 x_1(n)x_2((2-n))_4$$

Solución: Para $m = 2$, tenemos:

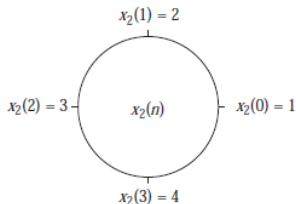
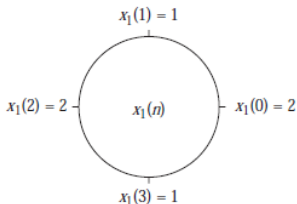


Secuencia reflejada girada dos unidades de tiempo



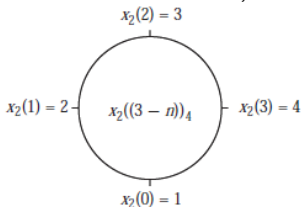
Secuencia producto

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias

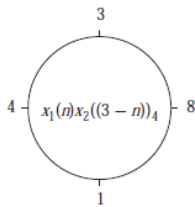


$$x_3(3) = \sum_{n=0}^3 x_1(n)x_2((3-n))_4$$

Solución: Para $m = 3$, tenemos:

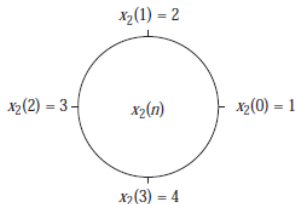
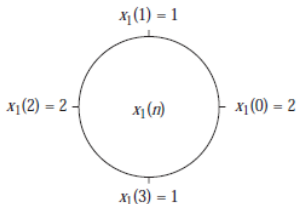


Secuencia reflejada girada tres unidades de tiempo



Secuencia producto

Ejemplo de convolución circular de dos secuencias



Solución: Observe que si se continúan realizando estos cálculos más allá de $m = 3$, simplemente se repite la secuencia de los cuatro valores que hemos obtenido. Por tanto, la convolución circular de las dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ da como resultado la secuencia:

$$x_3(n) = \{14, 16, 14, 16\}$$

Transformada Discreta Fourier de la convolución circular de dos secuencias

Convolución circular. Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_2(k)$$

entonces

$$x_1(n) \circledast x_2(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k)X_2(k)$$

donde $x_1(n) \circledast x_2(n)$ designa la convolución circular de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n + N)$	$X(k) = X(k + N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Inversión temporal	$x(N - n)$	$X(N - k)$
Desplazamiento temporal circular	$x((n - l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en frecuencia circular	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k - l))_N$
Conjugación compleja	$x^*(n)$	$X^*(N - k)$

- 1 Introducción
- 2 LA DFT como una transformación lineal
- 3 Trabajos propuestos**

Problemas propuestos semana 6

- Realizar los ejercicios propuestos en la hoja de problemas de la siguiente diapositiva.

Los cinco primeros puntos de la DFT de ocho puntos de una secuencia real son $\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 + j0.3018, 0\}$. Determine los tres puntos restantes.

Calcule la convolución circular de ocho puntos para las siguientes secuencias.

(a) $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$

$$x_2(n) = \sin \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

(b) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 0 \leq n \leq 7$

$$x_2(n) = \cos \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

(c) Calcule la DFT de las dos convoluciones circulares utilizando las DFT de $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

Sea $X(k)$, $0 \leq k \leq N-1$, la DFT de N puntos de la secuencia $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$. Definimos

$$\hat{X}(k) = \begin{cases} X(k), & 0 \leq k \leq k_c, N - k_c \leq k \leq N - 1 \\ 0, & k_c < k < N - k_c \end{cases}$$

y calculamos la DFT inversa de N puntos de $\hat{X}(k)$, $0 \leq k \leq N-1$. ¿Cuál es el efecto de este proceso sobre la secuencia $x(n)$? Explique su respuesta.



Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre

Unidad II: Transformada Discreta de Fourier
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber