

Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad II: Transformada Z

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach

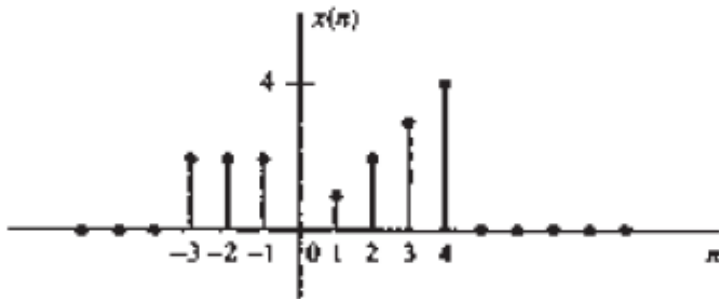
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber

- 1 Introducción
- 2 Manipulaciones simples de señales discretas en el tiempo
- 3 Trabajos propuestos

- 1 Introducción
- 2 Manipulaciones simples de señales discretas en el tiempo
- 3 Trabajos propuestos

Las técnicas de transformación constituyen una herramienta importante en el análisis de las señales y sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). La transformada Z desempeña el mismo papel en el análisis de las señales discretas en el tiempo y los sistemas LTI que la transformada de Laplace en el análisis de las señales continuas en el tiempo y los sistemas LTI.



Nota: Recuerde que la señal $x[n]$ no está definida para valores no enteros de n .

La transformada z de una señal discreta en el tiempo $x[n]$ se define como una serie de potencias $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$.
donde z es una variable compleja.

Por comodidad, la transformada z de una señal $x(n)$ se designa como

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\}$$

mientras que la relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se indica como

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

Dado que la transformada z es una serie infinita de potencias, sólo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge. La región de convergencia (ROC, region of convergence) de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ toma un valor finito. Por tanto, siempre que hablemos de una transformada z deberemos indicar también su ROC.

- Cálculo de la transformada z

Determine la transformada z de las siguientes señales de *duración finita*.

$$(a) \quad x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

↑

$$(b) \quad x_2(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

↑

$$(c) \quad x_3(n) = \{0, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

↑

$$(d) \quad x_4(n) = \{2, 4, 5, 7, 0, 1\}$$

↑

$$(e) \quad x_5(n) = \delta(n)$$

$$(f) \quad x_6(n) = \delta(n-k), k > 0$$

$$(g) \quad x_7(n) = \delta(n+k), k > 0$$

- Cálculo de la transformada z

(a) $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(b) $X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$ y $z = \infty$

(c) $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(d) $X_4(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$ y $z = \infty$

(e) $X_5(z) = 1$ [es decir, $\delta(n) \xleftrightarrow{z} 1$], ROC: plano z completo

(f) $X_6(z) = z^{-k}$ [es decir, $\delta(n-k) \xleftrightarrow{z} z^{-k}$], $k > 0$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(g) $X_7(z) = z^k$ [es decir, $\delta(n+k) \xleftrightarrow{z} z^k$], $k > 0$, ROC: plano z completo excepto $z = \infty$

Desde el punto de vista matemático, la transformada z es simplemente una representación alternativa de una señal.

El exponente de z contiene la información temporal que necesitamos para identificar las muestras de la señal.

Transformada z

ejemplos de cálculo

Ejercicio

- Determine the transformada z de la señal .

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Solución

- La señal $x(n)$ está formada por un número infinito de valores.

$$x(n) = \{1, (\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \dots, (\frac{1}{2})^n, \dots\}$$

La transformada z de $x(n)$ es la serie infinita de potencias

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + (\frac{1}{2})^2 z^{-2} + (\frac{1}{2})^n z^{-n} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2}z^{-1})^n \end{aligned}$$

Se trata de una serie geométrica infinita. Recordemos que

$$1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{1-A} \quad \text{si } |A| < 1$$

En consecuencia, para $|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1$, o lo que es lo mismo, para $|z| > \frac{1}{2}$, $X(z)$ converge a

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

Claves

- Podemos expresar la variable compleja z en forma polar como sigue:
 $z = re^{j\theta}$

donde $r = |z|$ and $\theta = \angle z$. Luego $X(z)$ puede expresarse como

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}$$

En la ROC de $X(z)$, $|X(z)| < \infty$. Pero

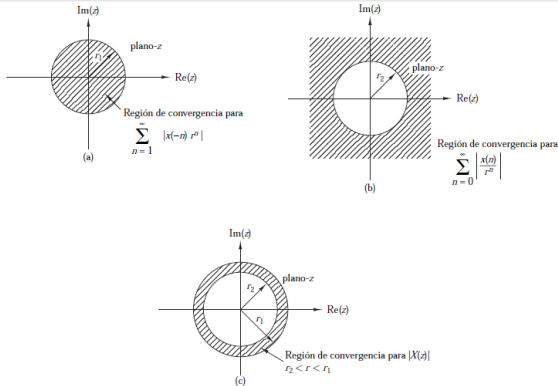
$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \end{aligned}$$

Puesto que $|X(z)|$ es finito si la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable.

El problema de hallar la ROC de $X(z)$ es equivalente a determinar el rango de valores de r para el que la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable.

ROC

- El problema de hallar la ROC de $X(z)$ es equivalente a determinar el rango de valores de r para el que la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable



Región de convergencia para $X(z)$ y sus correspondientes componentes causal y anticausal.

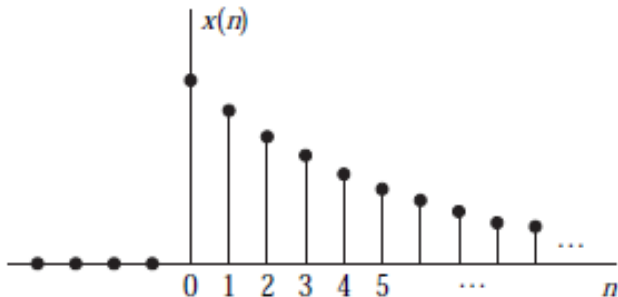
1 Introducción

2 Manipulaciones simples de señales discretas en el tiempo

3 Trabajos propuestos

Determine the transformada z de la señal

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

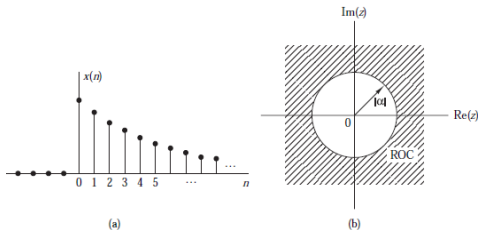
Si $|\alpha z^{-1}| < 1$ o, lo que es lo mismo, $|z| > |\alpha|$, esta serie de potencias converge a $1/(1 - \alpha z^{-1})$. Por tanto, tenemos la pareja de transformadas z

$$x(n) = \alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

La ROC es la parte exterior de un círculo que tiene un radio $|\alpha|$. La Figura muestra una gráfica de la señal $x(n)$ y su correspondiente región de convergencia. Observe que, en general, α no tiene que ser real.

Si hacemos $\alpha = 1$ en (3.1.7), obtenemos la transformada z de la señal escalón unidad.

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$



Figura

(a) La señal exponencial $x(n) = \alpha^n u(n)$. (b) La ROC de su transformada z .

Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas

Determine la transformada z de la señal

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\alpha^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\alpha^n) z^{-n} = - \sum_{l=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^l$$

donde $l = -n$. Utilizando la fórmula

$$A + A^2 + A^3 + \cdots = A(1 + A + A^2 + \cdots) = \frac{A}{1-A}$$

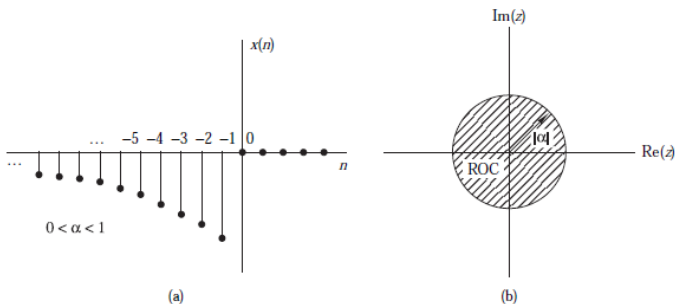
cuando $|A| < 1$, se obtiene

$$X(z) = -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

siempre que $|\alpha^{-1} z| < 1$ o, lo que es lo mismo, $|z| < |\alpha|$. Por tanto,

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} X(z) = -\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| < |\alpha|$$

Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas



(a) Señal anticausal $x[n] = -\alpha^n u(-n-1)$ y (b) la región de convergencia de su transformada z .

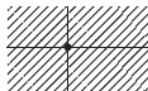
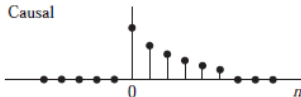
Resumiendo, una señal discreta en el tiempo $x[n]$ queda determinada de forma unívoca por su transformada z $X(z)$ y por la región de convergencia de $X(z)$

Señal

ROC

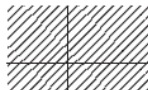
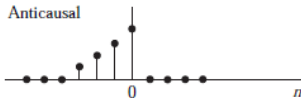
Señales de duración finita

Causal



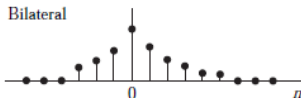
Plano z completo
excepto $z = 0$

Anticausal



Plano z completo
excepto $z = \infty$

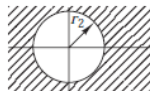
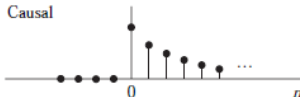
Bilateral



Plano z completo
excepto $z = 0$
y $z = \infty$

Señales de duración infinita

Causal



$|z| > r_2$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC: $r_2 < z < r_1$ ROC ₁ ROC ₂
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	Al menos la intersección de ROC ₁ y ROC ₂
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	La de $X(z)$, excepto $z=0$ si $k > 0$ y $z=\infty$ si $k < 0$
Cambio de escala en el dominio z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a r_2 < z < a r_1$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte real	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye la ROC
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye la ROC
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < z < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos, la intersección de ROC ₁ y ROC ₂
Correlación	$r_{x_1x_2}(f) =$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2^*(z^{-1})$	Al menos, la intersección

	Señal, $x(n)$	Transformada z , $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$(\cos \omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$(\sin \omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$

Propiedad 1: La región de convergencia en el plano z puede ser un anillo o un disco centrados en el origen. Es decir, $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Propiedad 2: La transformada de Fourier de $x[n]$ converge si y sólo si la región de convergencia de la transformada Z de $x[n]$ contiene a la circunferencia unidad.

Propiedad 3: La región de convergencia no contiene ningún polo.

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una *secuencia de duración finita*, es decir, una secuencia que es cero excepto en un intervalo finito $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, la región de convergencia es el plano z completo, pudiendo exceptuarse los valores $z = 0$ o $z = \infty$.

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la izquierda*, es decir, una secuencia que es cero para $n < N_1 < \infty$, la región de convergencia se extiende hacia fuera desde el polo finito *más exterior* (el de mayor módulo) de $X(z)$ hasta (y pudiendo incluir) el valor $z = \infty$.

Al utilizar la transformada Z para el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto, hay que moverse en un sentido y en otro entre las representaciones en el dominio del tiempo y en el dominio Z . Muchas veces, al realizar este análisis, es necesario calcular la transformada Z de las secuencias y, tras realizar diversas modificaciones en las expresiones algebraicas, obtener la transformada Z inversa. La transformada Z inversa se define mediante la siguiente integral compleja de contorno:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

siendo C un contorno cerrado dentro de la región de convergencia de la transformada Z . Esta expresión se puede obtener utilizando el teorema de la integral de Cauchy, de la teoría de variable compleja

- 1 Introducción
- 2 Manipulaciones simples de señales discretas en el tiempo
- 3 Trabajos propuestos**

Problemas propuestos semana 5

- Hoja de problemas propuestos. Desarrollar todos los problemas.
- Realizar un resumen de la transformada z presentada en el Video: [▶ Link](#)

Determine la transformada z de las siguientes señales.

$$(a) \ x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, 6, 1, -4\}$$

$$(b) \ x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$$

Determine la transformada z de las siguientes señales y dibuje los patrones de polos y ceros correspondientes.

$$(a) \ x(n) = (1 + n)u(n)$$

$$(b) \ x(n) = (a^n + a^{-n})u(n), \ a \text{ real}$$

$$(c) \ x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$$

$$(d) \ x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n)$$

$$(e) \ x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$$

$$(f) \ x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n), 0 < r < 1$$

$$(g) \ x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1}u(n-1)$$

$$(h) \ x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-10)]$$



Procesamiento de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad II: Transformada Z

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber