Procesamiento digital de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad I: Convolución de señales discretas

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber

Resumen

1. Concepto de convolución
2. Proceso gráfico
3. Trabajos propuestos

Resumen

1. Concepto de convolución
2. Proceso gráfico
3. Trabajos propuestos

- Una vez descompuesta una señal de entrada arbitraria $x(n)$ en una suma ponderada de impulsos, estamos preparados para determinar la respuesta de cualquier sistema lineal en reposo a cualquier señal de entrada.
  1. Se designa la respuesta y(n,k) del sistema al impulso unitario de entrada en n = k mediante el símbolo especial h(n,k), $-\infty < k < \infty$. Se obtiene la siguiente ecuación:
  $$y(n,k) \equiv h(n,k)\tau(\delta(n,k)) \tag{1}$$
  donde n es el índice de tiempos y k es un parámetro que muestra la posición del impulso de entrada.
  2. Cambiar la escala del impulso que se encuentra a la entrada en una cantidad $c_k \equiv x(k)$. La escala de la respuesta del sistema cambiará en la misma magnitud; es decir:
  $$c_k h(n,k) = x(k) \cdot h(n,k) \tag{2}$$
  3. La respuesta del sistema será:
  $$\sum_{-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k). \tag{3}$$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo (sistemas LTI)

La ecuación (3) que proporciona la respuesta y(n) del sistema LTI como una función de la señal de entrada x(n) y de la respuesta al impulso h(n) se denomina suma de convolución.
El proceso para calcular la convolución entre x(k) y h(k) implica los siguientes pasos:

1. Reflexión. Se refleja h(k) respecto de k = 0 para obtener $h(-k)$.
2. Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener $h(n_0 - k)$.
3. Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.
4. Suma. Se suman todos los valores de la secuencia producto $v_{n0}(k)$ para obtener el valor de la salida en el instante $n = n_0$.
5. Repetir los pasos 2 hasta 4 para todos los posibles valores del desplazamiento temporal.

Fuente:PROAKIS, John G., et al. Tratamiento digital de señales,2007.

Resumen

1 Concepto de convolución

2 Proceso gráfico

3 Trabajos propuestos

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo es

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

Determine la respuesta del sistema a la siguiente señal de entrada

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

Solución: Vamos a calcular la convolución utilizando el procedimiento indicado en la diapositiva 5.

Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

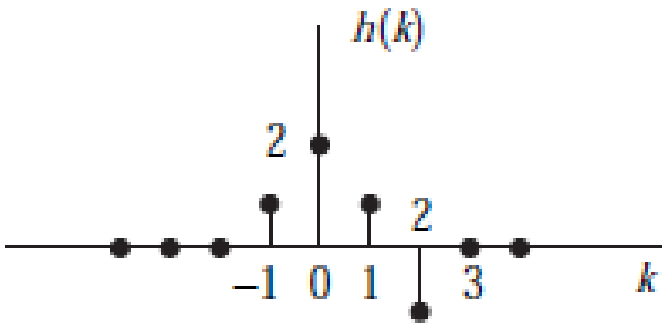
La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo es

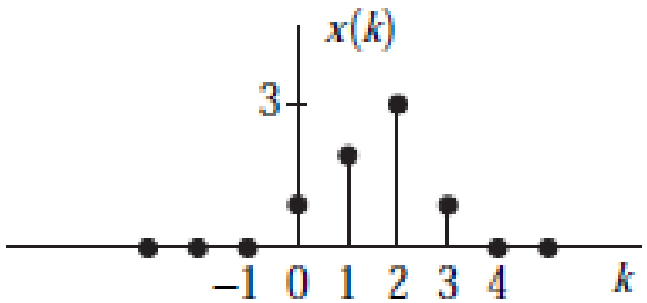
$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

Determine la respuesta del sistema a la siguiente señal de entrada

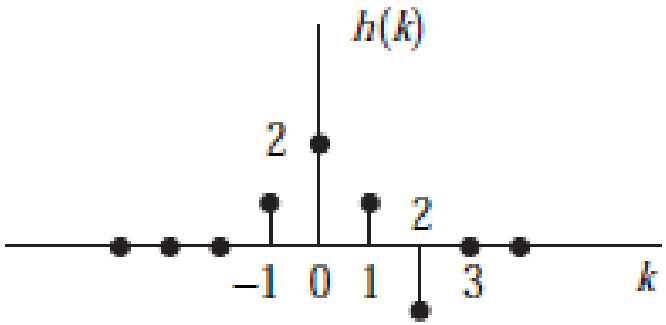
$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

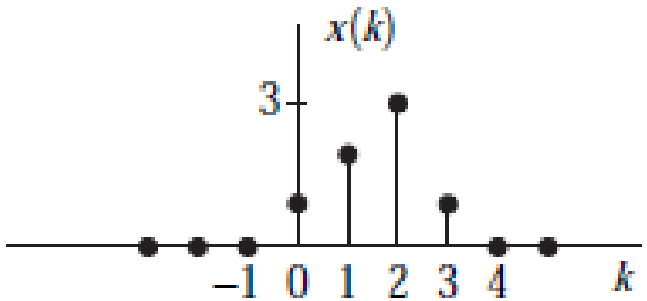
- calcular graficamente x(k) y h(k)



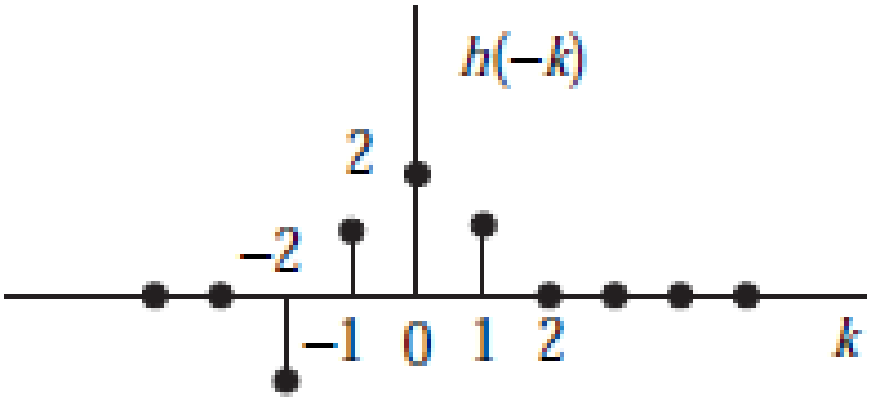


Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

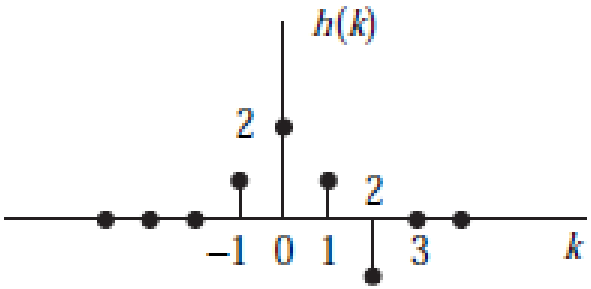


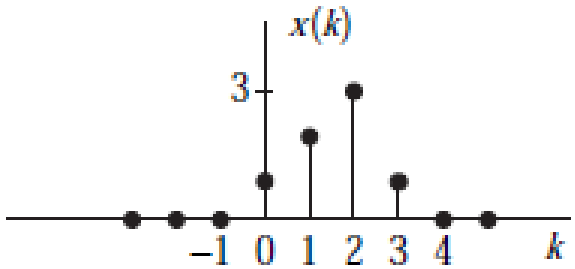


- Reflexión. Se refleja h(k) respecto de k = 0 para obtener $h(-k)$.

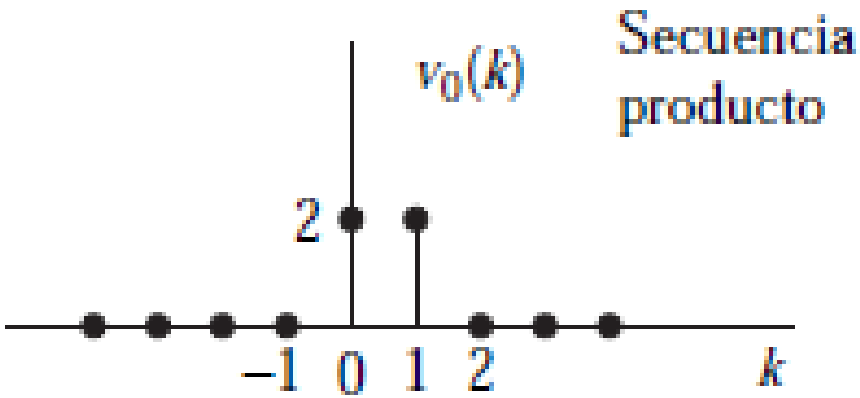


Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas



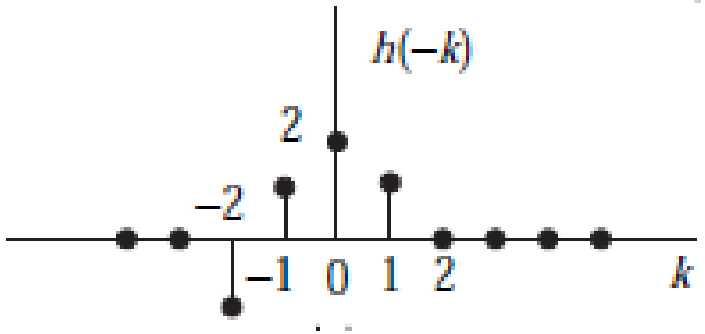


- Dado que n = 0, utilizamos $h(-k)$ directamente sin desplazarla.

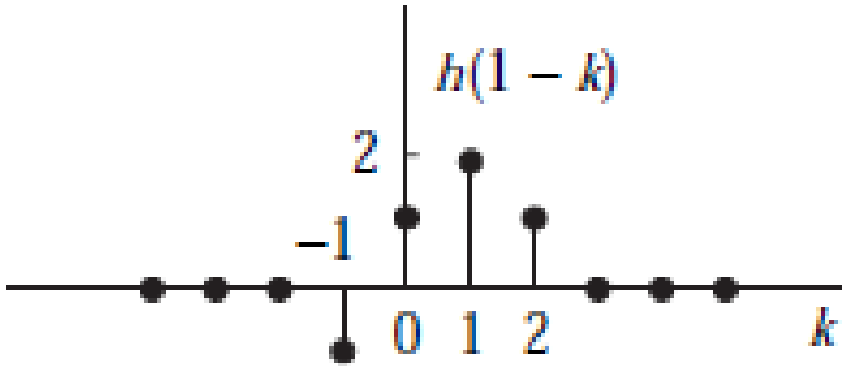


la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(0) = 4$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

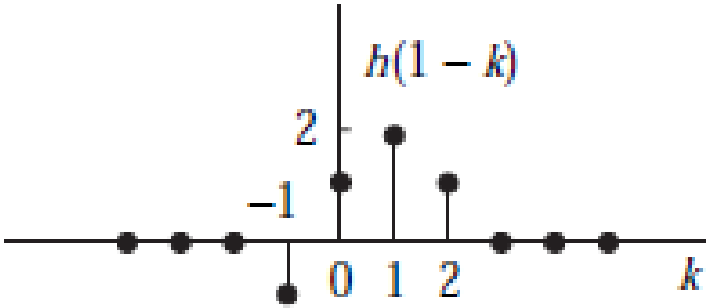


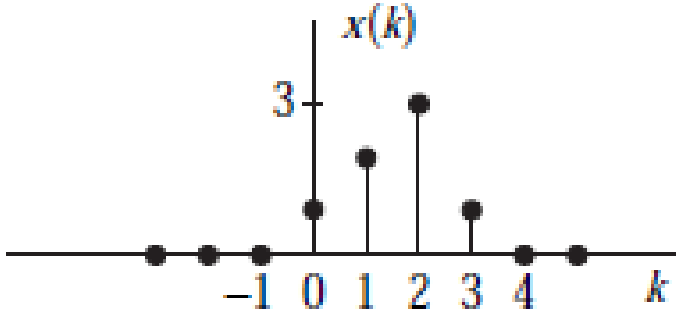
- $n_0 = 1$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



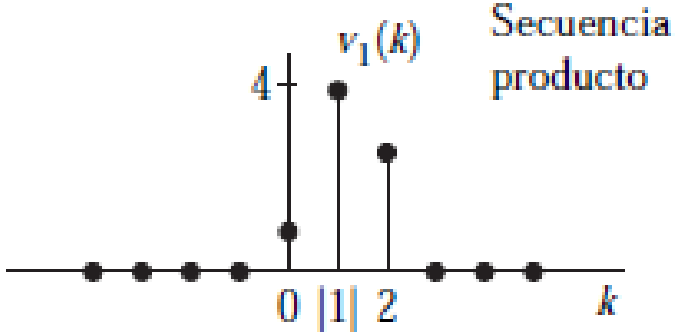
$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas



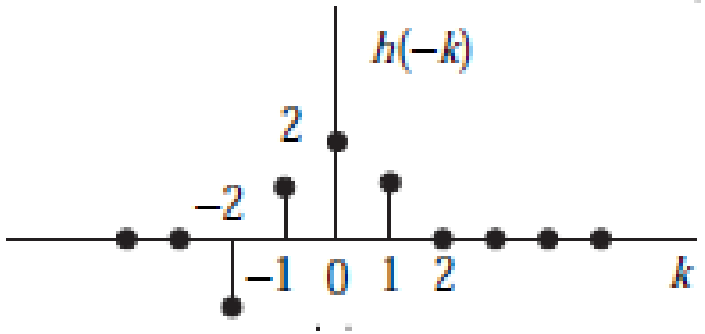


- $n_0 = 1$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.

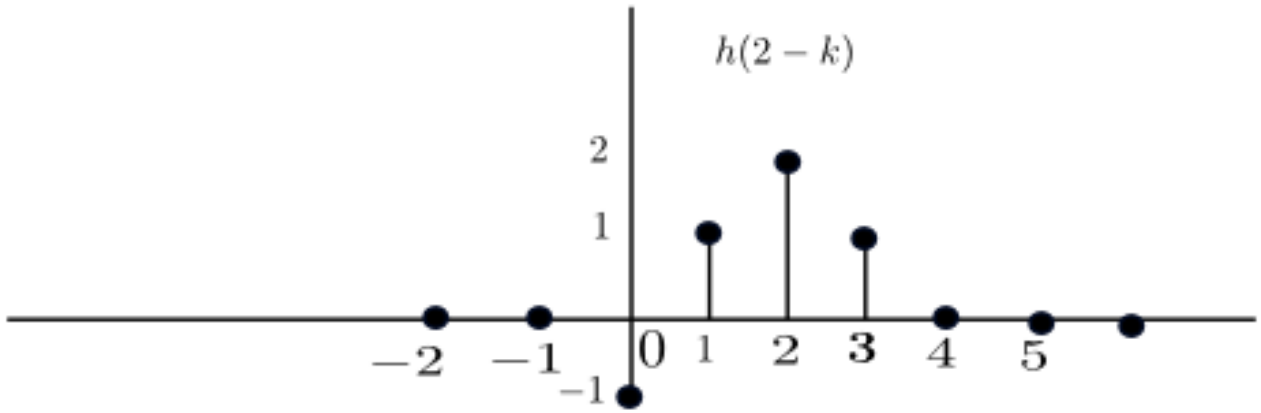


la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(1) = 8$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

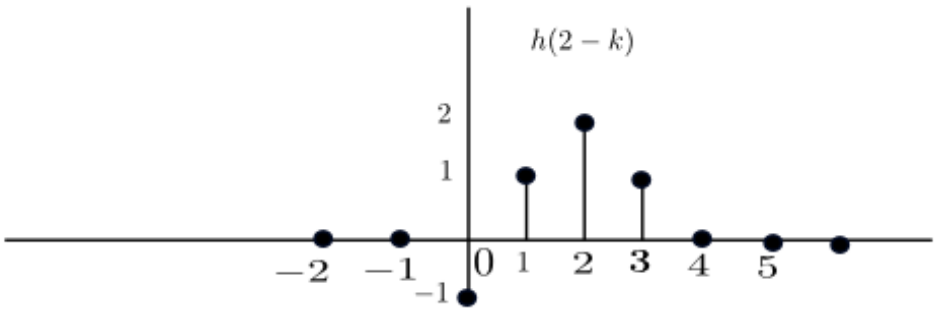


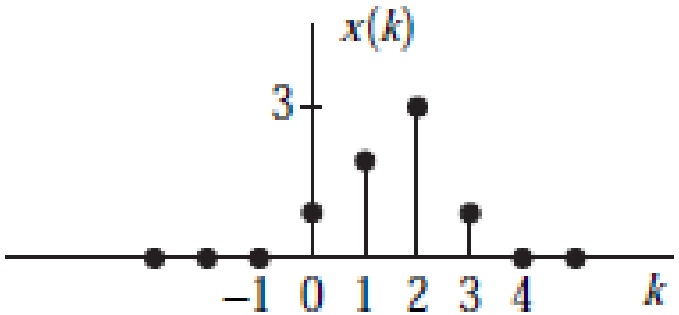
- $n_0 = 2$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

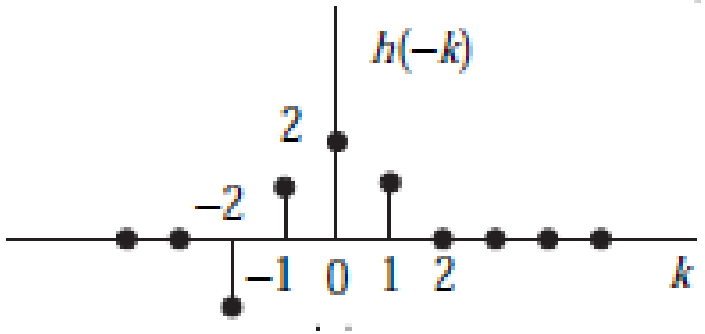




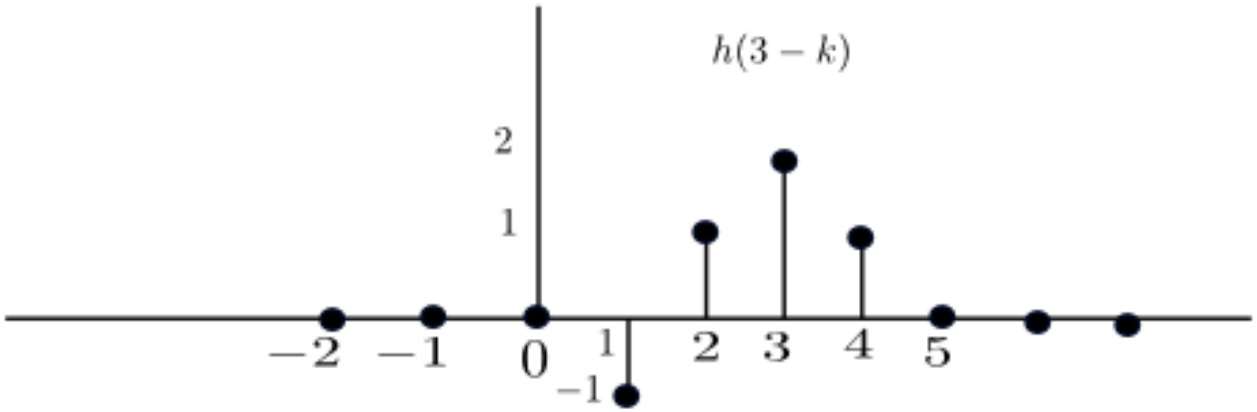
- $n_0 = 2$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.

la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(2) = 8$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

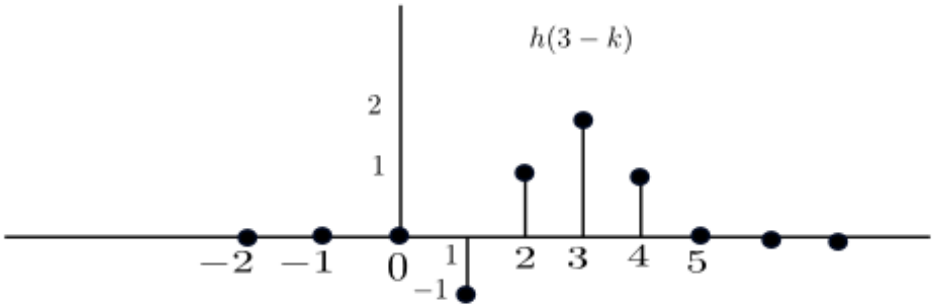


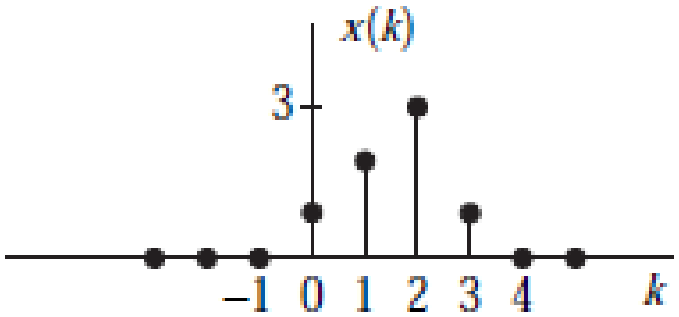
- $n_0 = 3$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

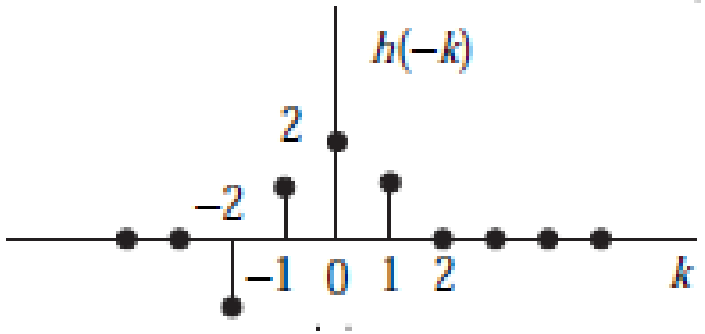




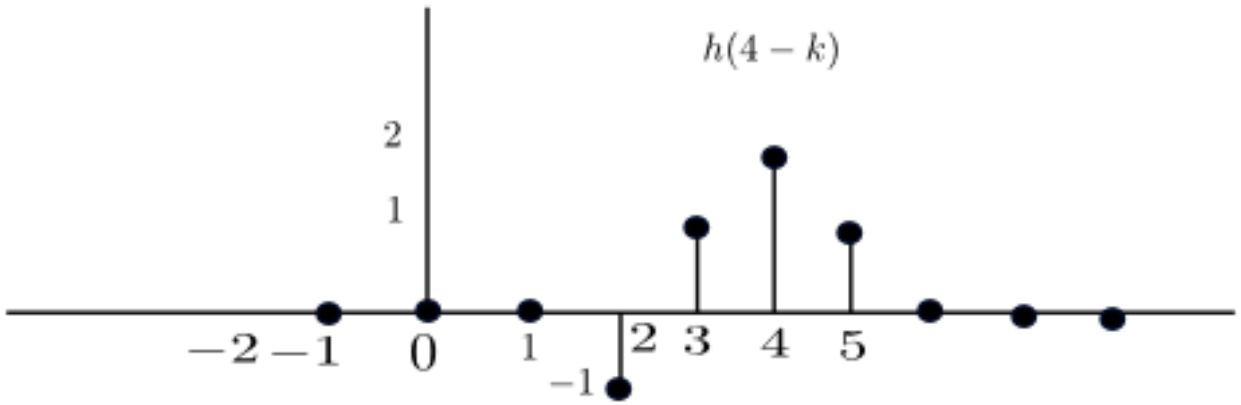
- $n_0 = 3$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.

la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(3) = 3$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

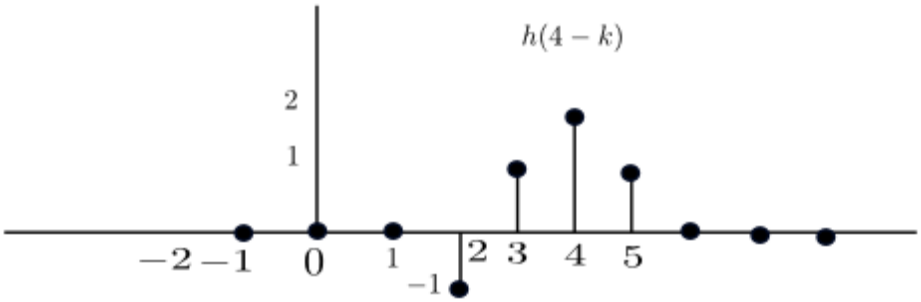


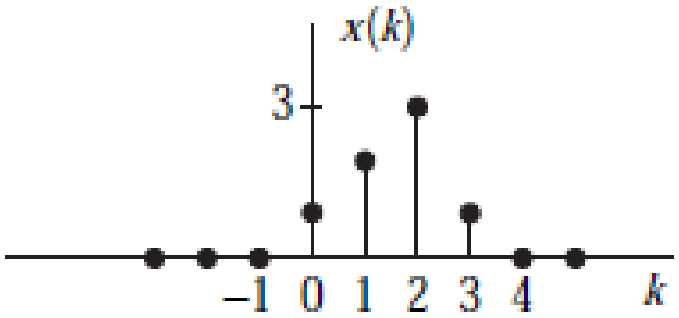
- $n_0 = 4$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

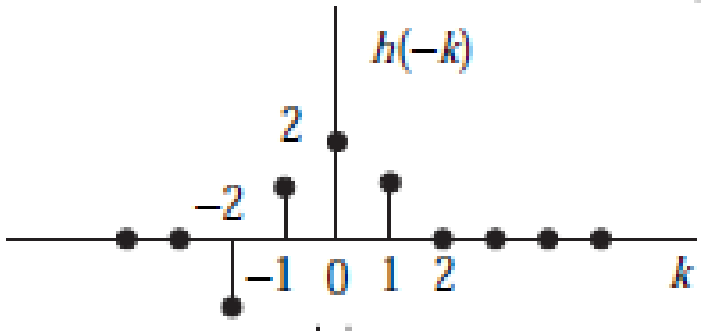




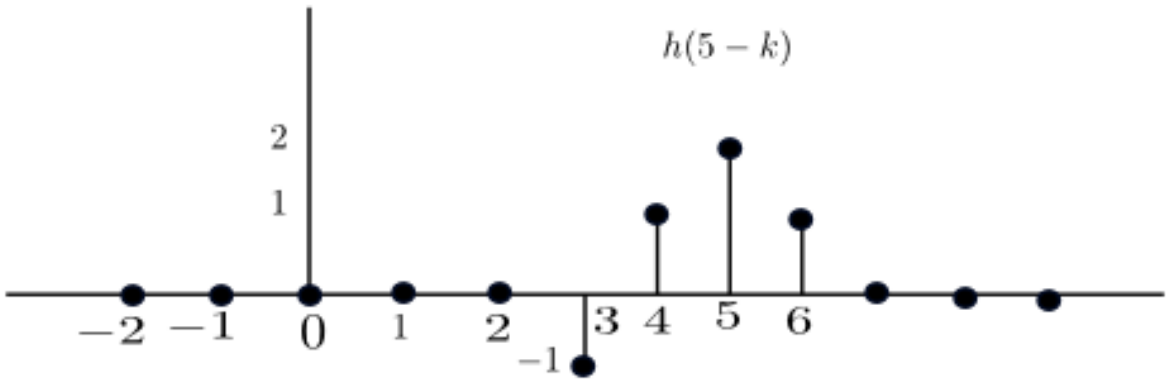
- $n_0 = 4$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.

la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(4) = -2$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

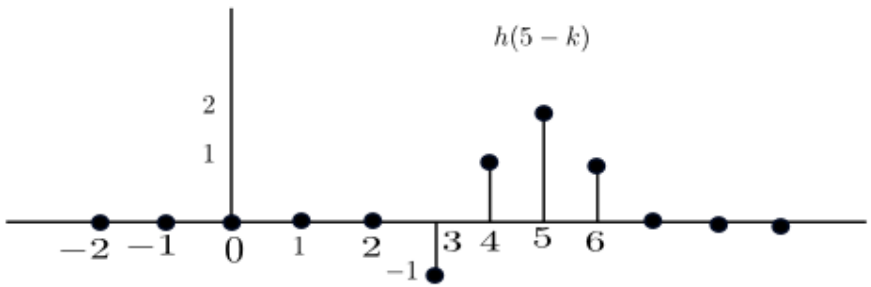


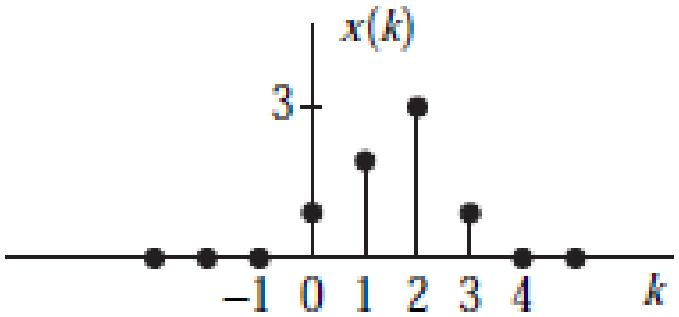
- $n_0 = 5$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

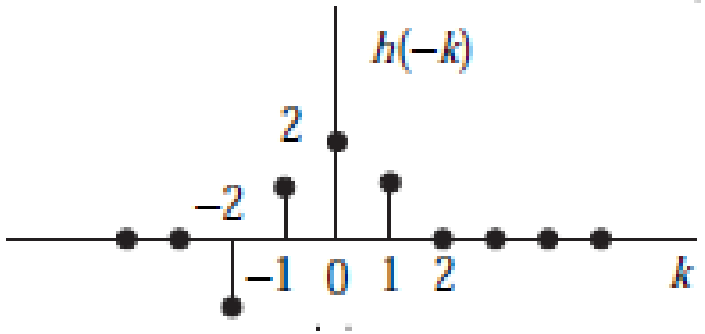




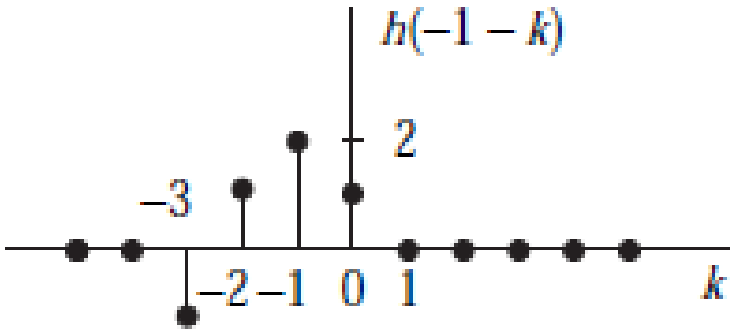
- $n_0 = 5$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$.

la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(5) = -1$
Para $n > 5$, tenemos que y(n) = 0 porque las secuencias producto contienen únicamente ceros. Por tanto, hemos obtenido la respuesta y(n) para $n > 0$.
A continuación deseamos evaluar y(n) para $n < 0$. Comenzamos con $n = -1$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

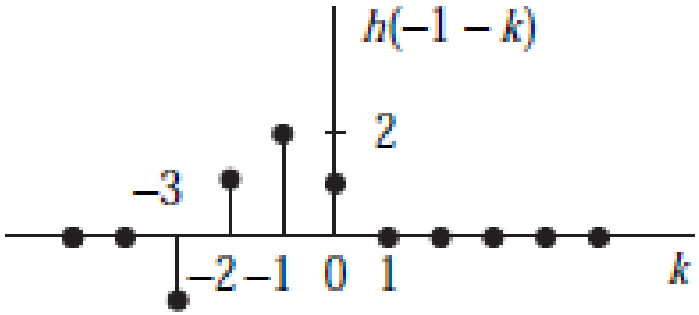


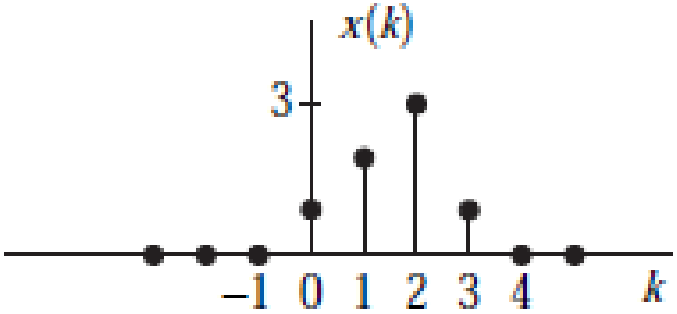
- $n_0 = -1$; Desplazamiento. Se desplaza $h(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener



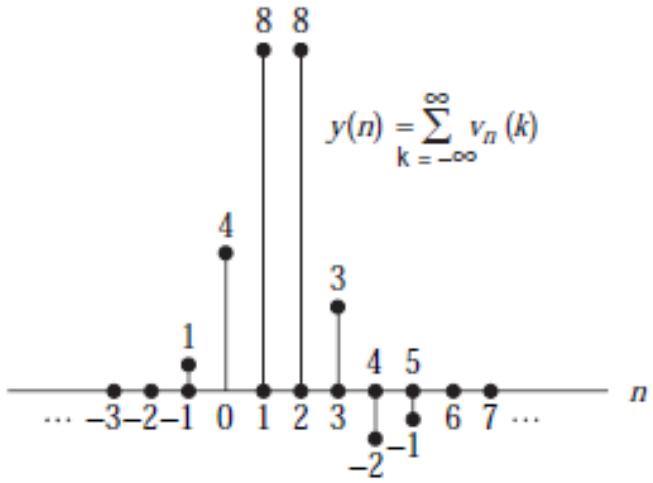
$h(n_0 - k)$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas





- $n_0 = -1$; Multiplicación. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto. La suma de todos los términos $y(-1) = 1$



Finalmente y(n)

Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas

Determine la salida $y(n)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo en reposo con una respuesta al impulso

$$h(n) = a^{nu}(n), |a|1$$

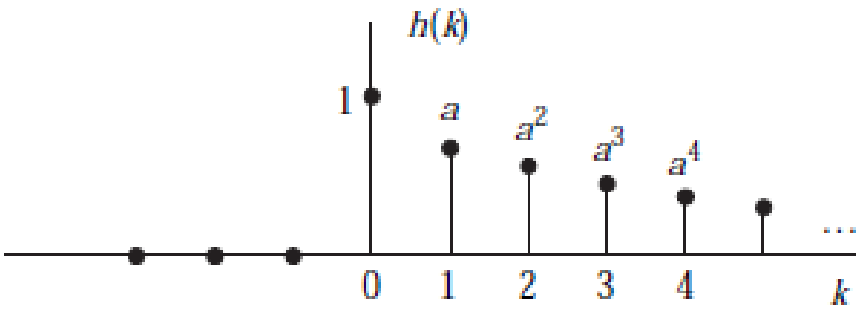
cuando la entrada es un escalón unidad, es decir

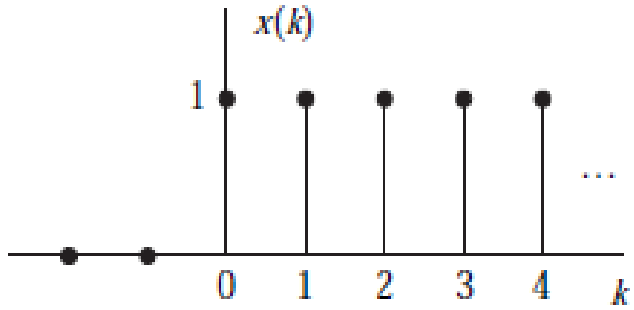
$$x(n) = u(n)$$

Considere el valor absoluto de a$<$ 1

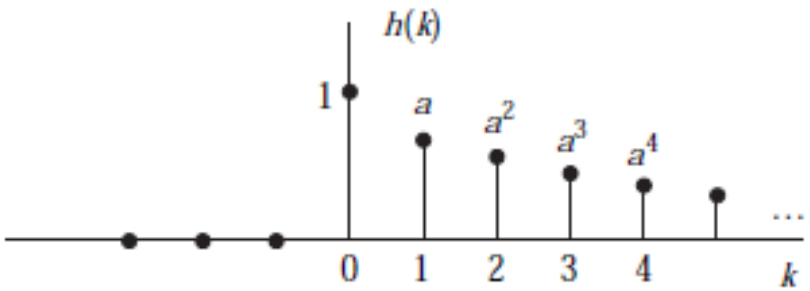
Solución

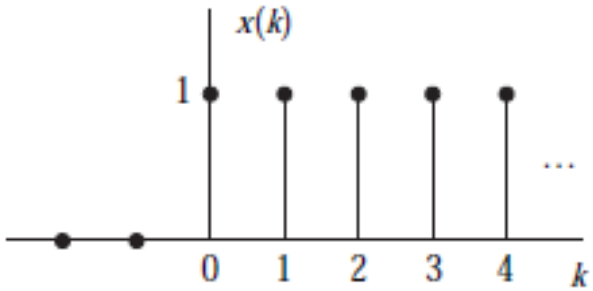
Se grafica la función h(k) y x(k)



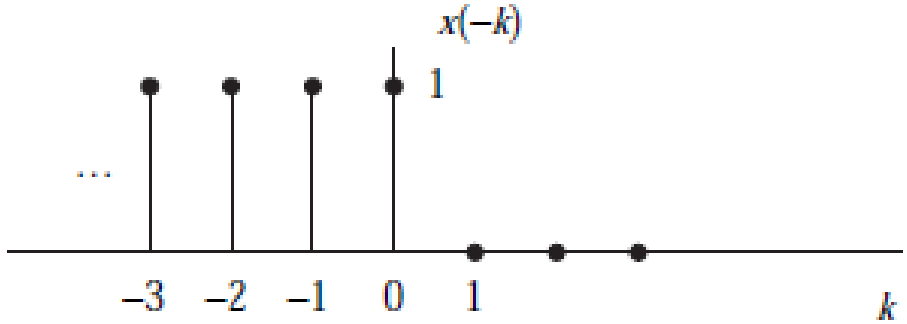


Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas

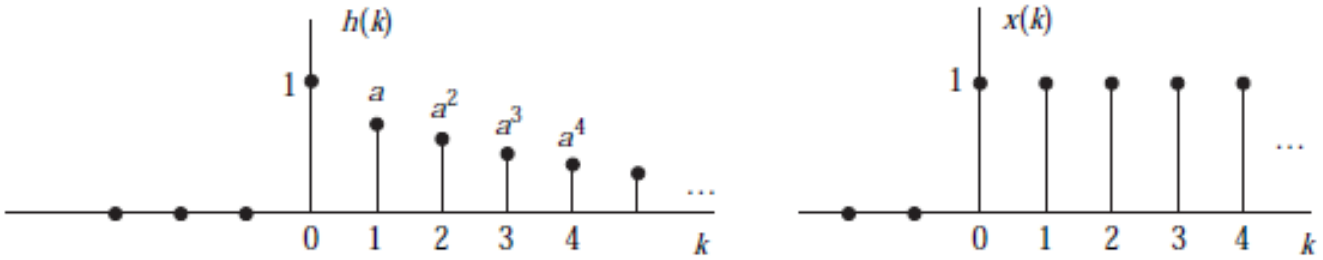




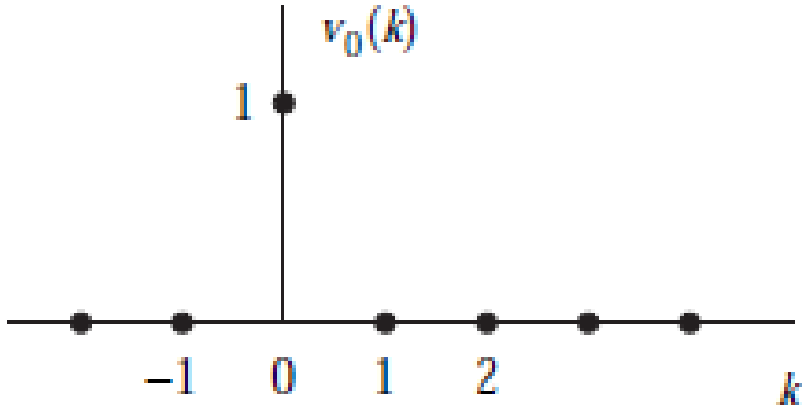
- Reflexión. Se refleja x(k) respecto de k = 0 para obtener $x(-k)$.



Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas

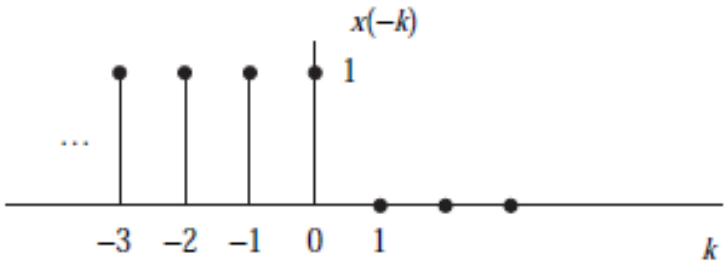


- Dado que n = 0, utilizamos $x(-k)$ directamente sin desplazarla.



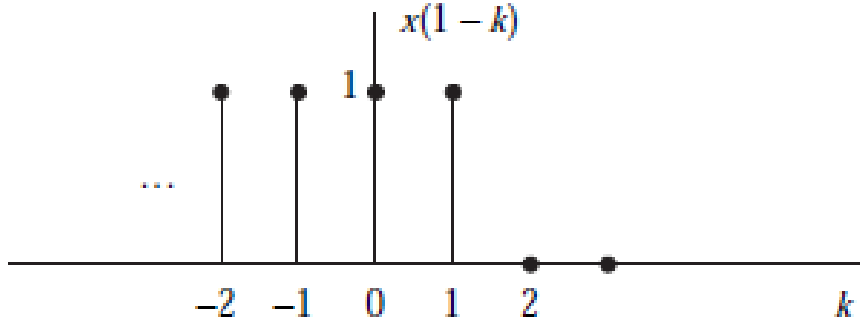
la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(0) = 1$

Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas

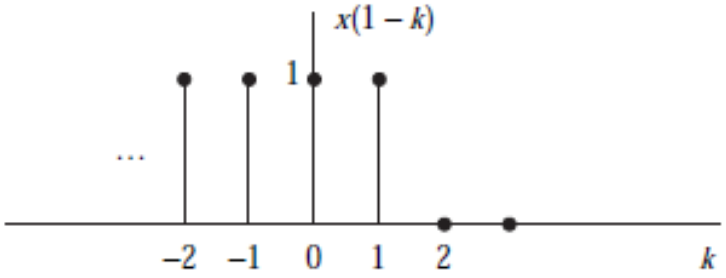


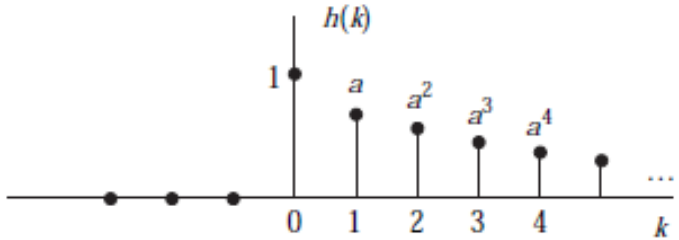
- $n_0 = 1$; Desplazamiento. Se desplaza $x(-k)$. una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener

$x(n_0 - k)$.

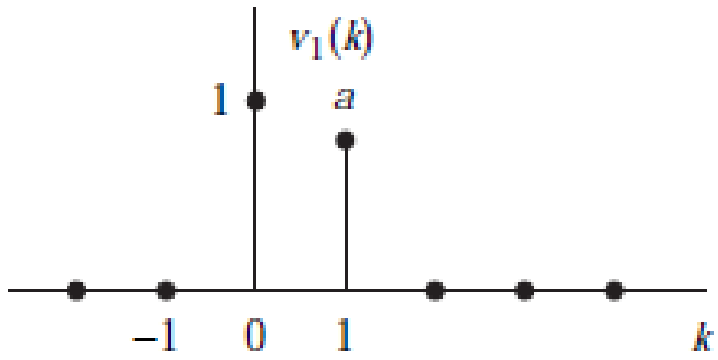


Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas



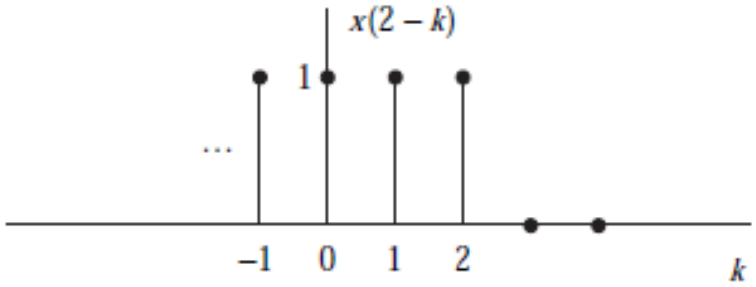


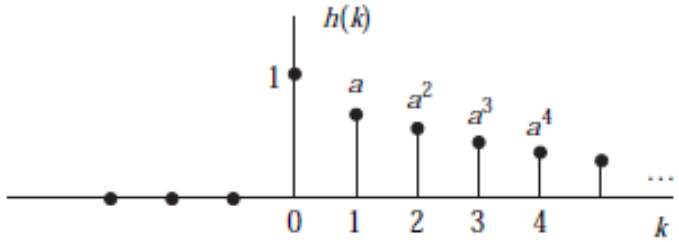
- $n_0 = 1$; Multiplicación. Se multiplica $h(k)$ por $x(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto.



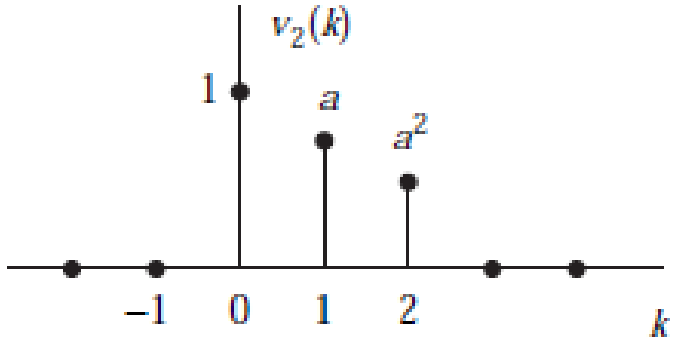
la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(1) = 1+a$

Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas



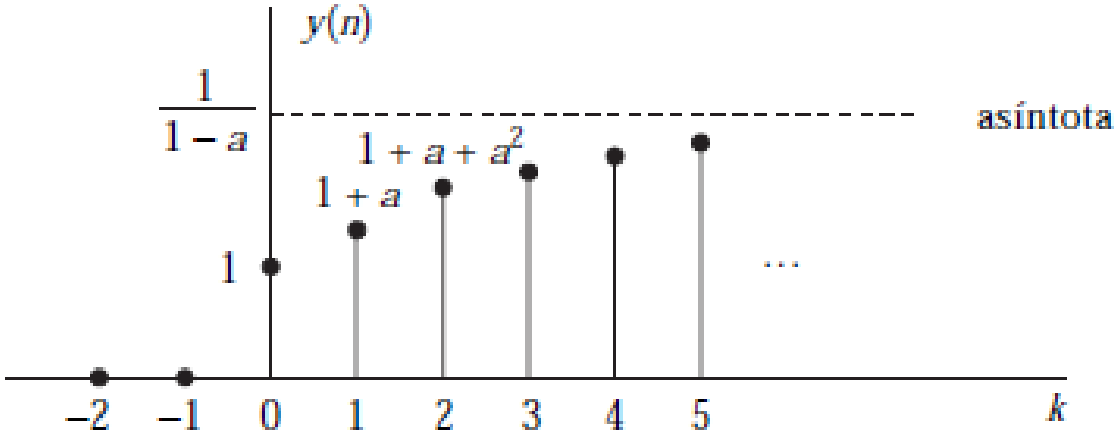


- $n_0 = 2$; Multiplicación. Se multiplica $h(k)$ por $x(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto.



la suma de todos los términos de la secuencia producto es $y(2) = 1 + a + a^2$.
Evidentemente $y(n) = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Continuación de solución Ejemplo 2: Manipulaciones de señales discretas



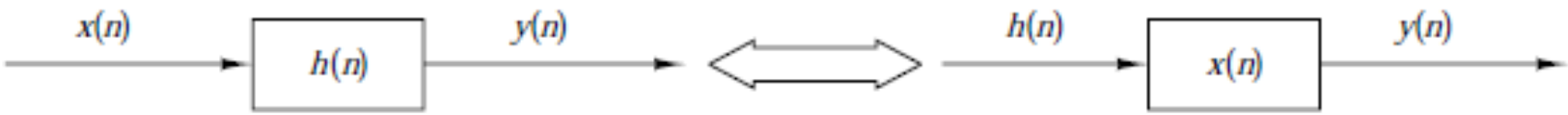
- Observe la subida exponencial en la salida, que es una función de n.

$$y(\infty) = \lim_{n \to \infty} y(n) = \frac{1}{1-a}$$

Resumiendo, la fórmula de la convolución nos proporciona un medio para calcular la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo en estado de reposo a cualquier señal de entrada arbitraria x(n).

Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI

- Conmutativa: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$



Interpretación de la propiedad conmutativa de la convolución.

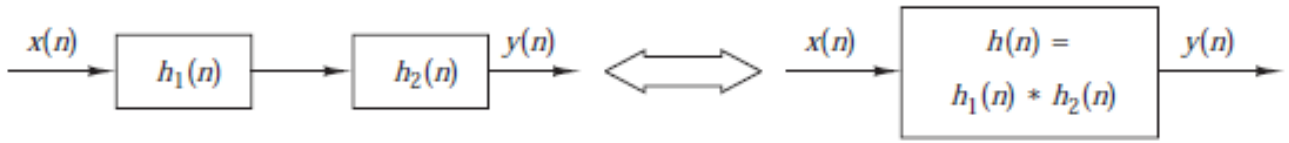
$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI

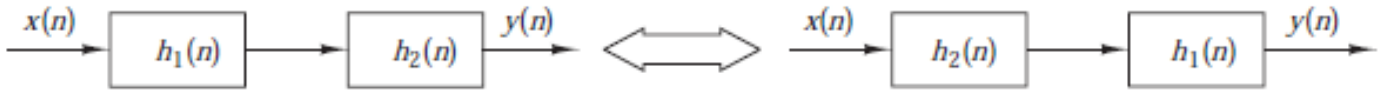
- Ley asociativa.

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

  - Asociativa y conmutativa.



(a)



(b)

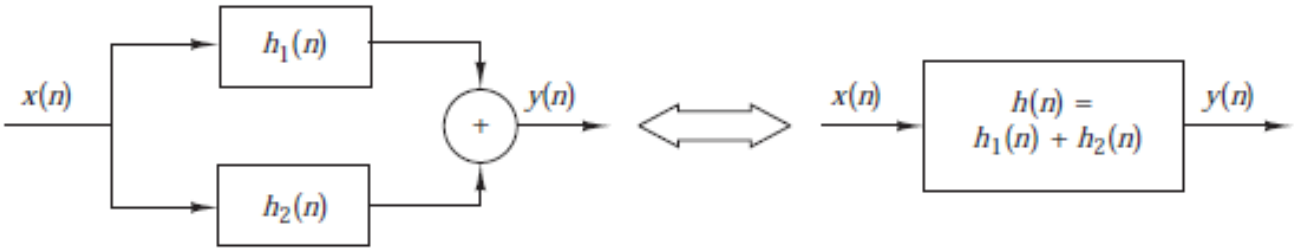
Implicaciones de las propiedades de la convolución (a) asociativa y (b) asociativa y commutativa.

Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI

- Distributiva.

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

  - Diagrama de bloques.



Interpretación de la propiedad distributiva de la convolución: dos sistemas LTI conectados en paralelo pueden reemplazarse por un único sistema con $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

- Sin embargo, también es conveniente subdividir la clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo en dos tipos: aquellos que tienen una repuesta al impulso de duración finita (FIR, finite−duration impulse response) y aquellos que tienen una respuesta al impulso de duración infinita (IIR, infinite−duration impulse response). Es decir, un sistema FIR tiene una respuesta al impulso que es cero fuera de un determinado intervalo finito.
  Por el contrario, un sistema lineal invariante en el tiempo IIR tiene una respuesta al impulso de duración infinita.

Resumen

1 Concepto de convolución

2 Proceso gráfico

3 Trabajos propuestos

Problemas propuestos semana 3

- Hoja de problemas propuestos

Calcule la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de las siguientes señales

1. $x(n) = \{1, 2, 4\}, h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$
2. $x(n) = \{1, 2, -1\}, h(n) = x(n)$
3. $x(n) = \{0, 1, -2, 3, -4\}, h(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$
4. $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, h(n) = \{1\}$
5. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$
6. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}, h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 3\}$
7. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, -3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, -1\}$
8. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}, h(n) = u(n)$

4ª edición
Tratamiento digital de señales
www.librosite.net/proakis
John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis
PEARSON
Prentice Hall

Procesamiento digital de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Cuarto Semestre

Unidad I: Convolución de señales discretas

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber