Procesamiento digital de señales

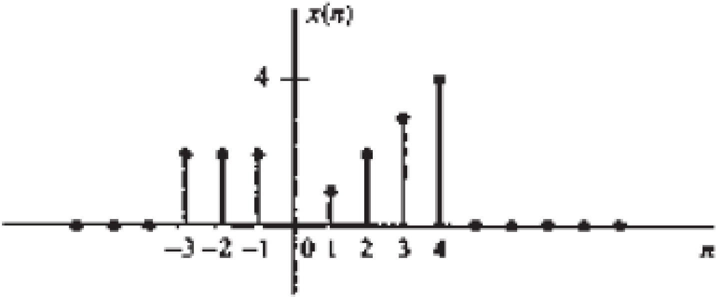
FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre
Unidad I: Introducción a sistemas discretos en el tiempo

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber

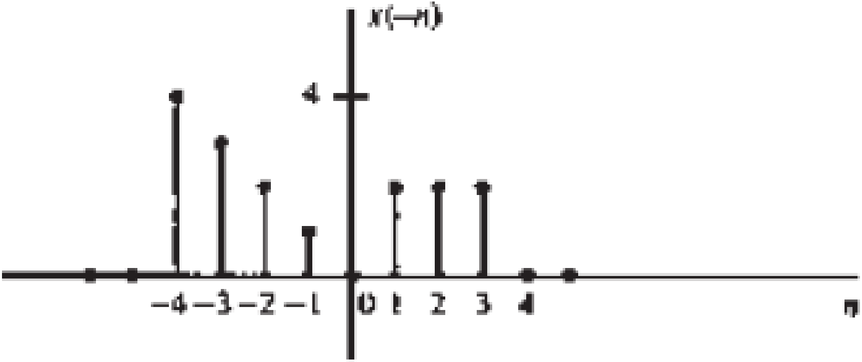
Representa gráficamente la señal discreta $x[-n]$, $x[2-n]$. Donde $x[n]$ es la señal mostrada en la figura.



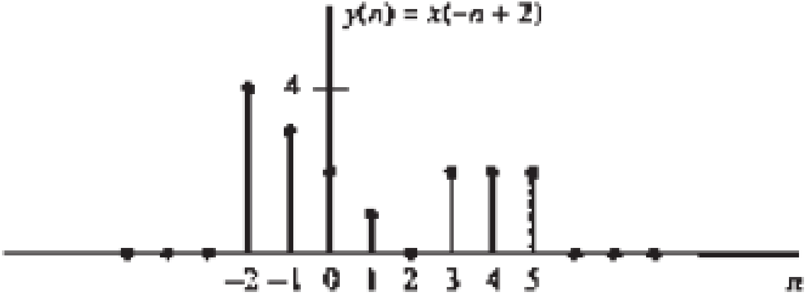
Nota: La señal $x[n]$ no está definida para valores no enteros de n.

Fuente:PROAKIS, John G., et al. Tratamiento digital de señales,2007.

Solución $x[-n]$.



- $x[2-n]$



Sistemas
discretos en el tiempo

CONCEPTO BÁSICO

- Un sistema discreto en el tiempo es un dispositivo o algoritmo que opera sobre una señal discreta en el tiempo, que es la entrada o excitación, de acuerdo con una determinada regla bien definida, para producir una señal discreta en el tiempo, que es la salida o respuesta del sistema.

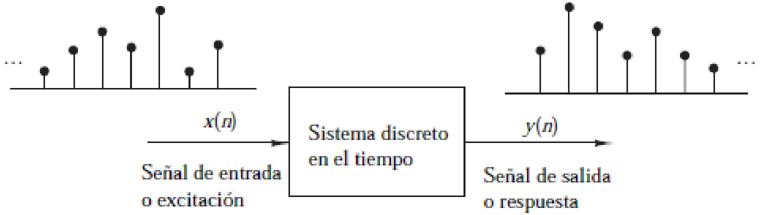


Diagrama de bloques de un sistema discreto en el tiempo.

Entrada-salida de los sistemas

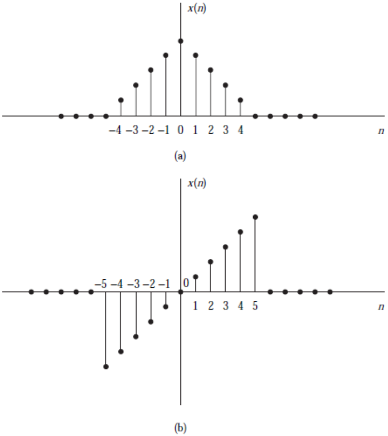
Punto Importante

- La descripción entrada−salida de un sistema discreto en el tiempo consta de una expresión matemática o una regla, que define explícitamente la relación entre las señales de entrada y de salida (relación entrada−salida). La estructura interna exacta del sistema puede desconocerse o ignorarse por completo. Por tanto, la única manera de interactuar con el sistema es empleando sus terminales de entrada y de salida (es decir, el sistema es una **caja negra** para el usuario

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$$

Claves

- Una señal es simétrica (par) si $x[-n] = x[n]$, y es asimétrica (impar) si $x[-n] = -x[n]$



(a) $y(n) = x(n)$ (sistema identidad)

(b) $y(n) = x(n-1)$ (sistema de retardo unidad)

(c) $y(n) = x(n+1)$ (sistema de adelanto unidad)

(d) $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ (filtro del valor medio)

(e) $y(n) = \text{mediana}\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$ (filtro de la mediana)

(f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots$ (acumulador)

Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

Determine la respuesta de los sistemas descritos en la diapositiva anterior para la siguiente señal de entrada:

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución: Se determina en forma explícita los valores de la señal de entrada:

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

Acontinuación se determina la salida de cada uno de los sistemas utilizando su relación entrada$-$salida:

- Sistema Identidad: En este caso, la salida es exactamente igual a la entrada, $y[n] = x[n]$.

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

- Sistema de retardo unidad: Este sistema simplemente retarda la entrada una muestra. En este caso, la salida es $y[n] = x[n-1]$.

$$: \{\ldots, 0, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

- Sistema adelanto unidad: En este caso, el sistema **adelanta** la entrada una muestra en un instante futuro.

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0, \ldots\}$$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

- Filtro de valor medio: La salida de este sistema en cualquier instante es el valor medio de las muestras actual, inmediatamente anterior e inmediatamente posterior.

$$y(0) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(0) + x(1)] = \frac{1}{3}[1 + 0 + 1] = \frac{2}{3}$$

Repitiendo este cálculo para todos los valores de n, obtenemos la señal de salida

$$y(n) = \{\ldots, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \underset{\uparrow}{\frac{2}{3}}, 1, 2, \frac{5}{3}, 1, 0, \ldots\}$$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

- Mediana: Este sistema selecciona como su salida en el instante n la mediana de las tres muestras de entrada: actual, inmediatamente anterior e inmediatamente posterior.

$$y(n) = \{0, 2, 2, 1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 0, 0, 0, \ldots\}$$

Continuación de solución Ejemplo 1: Manipulaciones de señales discretas

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

- Acumulador: Calcula la suma de todos los valores de la entrada pasados hasta el instante actual..

$$y(n) = \{\ldots, 0, 3, 5, 6, \underset{\uparrow}{6}, 7, 9, 12, 0, \ldots\}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \\ &= y(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo

- Sumador: Observe que no es necesario almacenar ninguna de las secuencias para llevar a cabo la suma. En otras palabras, la operación de suma es una operación sin memoria.

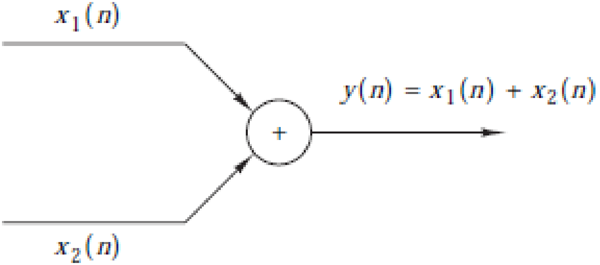


Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo

- Multiplicador por una constante: La operación del multiplicador es simplemente aplicar un factor de escala a la entrada . Observe que esta operación también es una operación sin memoria.

- Multiplicador de señales: Como en los dos casos anteriores, se trata de una operación sin memoria.

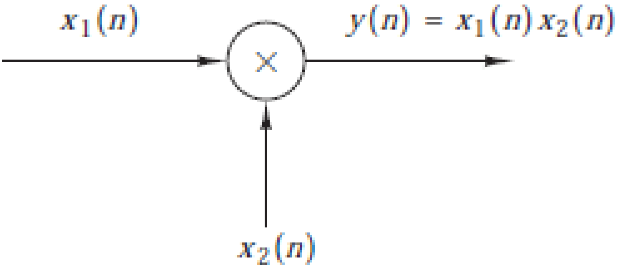
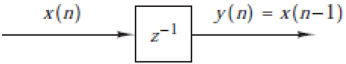
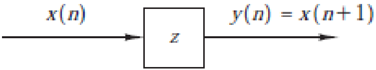


Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo

- Elemento de retardo unitario: El sistema de retardo unitario es un sistema especial que simplemente retarda en una muestra la señal que pasa a su través. La señal se almacena en memoria en el instante $n-1$ y se la extrae de memoria en el instante n para formar $y[n] = x[n-1]$. Por tanto, este bloque requiere memoria.

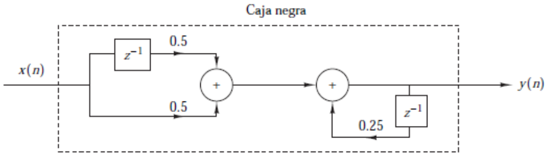


- Elemento de adelanto unitario: En contraste con el retardador unitario, un sistema de adelanto unitario desplaza la entrada x(n) una muestra hacia adelante en el instante que alcanza x(n+1).

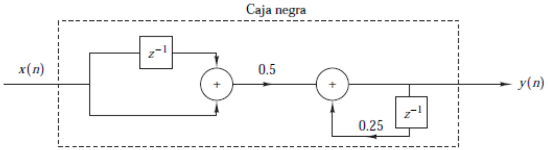


Ejemplo 2: Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo

- Utilizando los bloques básicos que se ha presentado, dibuje el diagrama de bloques del sistema discreto en el tiempo descrito por la relación de entrada–salida $y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$.



(a)



(b)

- Sistemas estáticos y dinámicos: Se dice que un sistema discreto en el tiempo es estático o sin memoria si su salida en cualquier instante n depende a lo sumo de la muestra de entrada en dicho instante, pero no de muestras pasadas o futuras de la entrada. En cualquier otro caso, se dice que el sistema es dinámico o que tiene memoria.

Si la salida de un sistema en el instante n está completamente determinada por las muestras de entrada en el intervalo de $n-N$ hasta n $(N \geq 0)$, se dice que el sistema tiene *memoria* de duración N. Si $N = 0$, el sistema es estático. Si $0 < N < \infty$, se dice que el sistema tiene *memoria finita*, mientras que si $N = \infty$, se dice que el sistema tiene *memoria infinita*.

Los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones de entrada–salida

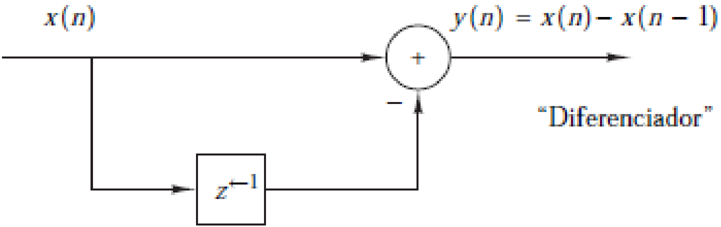
$$y(n) = ax(n)$$
$$y(n) = nx(n) + bx^3(n)$$

son estáticos y sin memoria. Observe que no hay necesidad de almacenar ninguna de las entradas o salidas anteriores para poder calcular la salida actual. Por el contrario, los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada–salida

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1)$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k)$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$$

son sistemas dinámicos o sistemas con memoria.

- Determine si el sistema que se indica en la figura es invariante o variante en el tiempo.



Definición. Un sistema en reposo $\mathcal{T}$ es *invariante en el tiempo* o *invariante a desplazamientos* si y sólo si

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$$

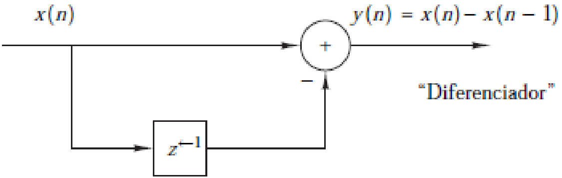
lo que implica que

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n-k)$$

para cualquier señal de entrada $x(n)$ y cualquier desplazamiento temporal k.

Para determinar si cualquier sistema dado es invariante en el tiempo, hay que llevar a cabo la prueba especificada en la definición anterior. Básicamente consiste en excitar el sistema con cualquier secuencia de entrada arbitraria $x(n)$, que genere una salida $y(n)$. A continuación, tendremos que retardar la secuencia de entrada cierta cantidad k y volver a generar la salida.

- Determine si el sistema que se indica en la figura es invariante o variante en el tiempo.



Este sistema se describe mediante las ecuaciones de entrada–salida

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = x(n) - x(n-1)$$

Si ahora retrasamos la entrada k unidades en el tiempo y la aplicamos al sistema, está claro a partir del diagrama de bloques que la salida será

$$y(n,k) = x(n-k) - x(n-k-1)$$

Por otro lado, vemos que si retrasamos $y(n)$ en k unidades de tiempo, obtenemos

$$y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1)$$

Puesto que los lados de la derecha de las expresiones (2.2.16) y (2.2.17) son idénticos, se deduce que $y(n,k) = y(n-k)$. Por tanto, el sistema es invariante en el tiempo.

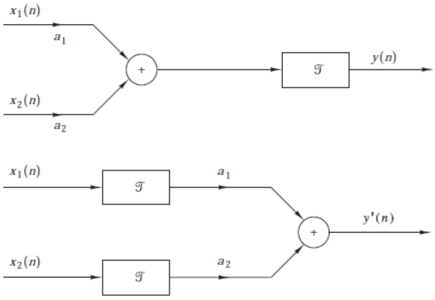
- Sistema lineal: .

Definición. Un sistema es lineal si y sólo si

$$\mathscr{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] = a_1\mathscr{T}[x_1(n)]+a_2\mathscr{T}[x_2(n)]$$

para cualesquiera secuencias de entrada arbitrarias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a

$$x(n)=\sum_{k=1}^{M-1} a_kx_k(n) \xrightarrow{\mathscr{T}} y(n)=\sum_{k=1}^{M-1} a_ky_k(n)$$



Representación gráfica del principio de superposición. $\mathscr{T}$ es lineal si y sólo si $y(n)=y'(n)$.

- Sistema Causal: Se dice que un sistema es causal si la salida del mismo en cualquier instante n [es decir, $y[n]$] sólo depende de las entradas actuales y pasadas $x[n], x[n-1], x[n-2]$, pero no depende de las entradas futuras.
- Si un sistema no satisface esta definición, se dice que es no causal. Un sistema así tiene una salida que depende no sólo de las entradas actual y pasada, sino también de las entradas futuras.

Es evidente que en las aplicaciones de tratamiento de señales en tiempo real no es posible observar los valores futuros de la señal, por lo que un sistema no causal es físicamente irrealizable (es decir, no se puede implementar). Por el contrario, si la señal se registra de modo que el procesamiento se lleva a cabo fuera de línea (no en tiempo real), es posible implementar un sistema no causal, dado que todos los valores de la señal están disponibles en el momento del procesamiento. A menudo, ésta es la situación que se da en el tratamiento de señales geofísicas e imágenes.

- **Sistemas estables e inestables**: La estabilidad es una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en cualquier aplicación práctica de un sistema. Los sistemas inestables normalmente presentan un comportamiento errático y extremo, y producen desbordamiento en cualquier implementación práctica.
- Se dice que un sistema en reposo es un sistema estable BIBO (bounded input$-$bounded output, de entrada y salida acotadas) si y sólo si toda entrada acotada genera una salida acotada.

Es evidente que en las aplicaciones de tratamiento de señales en tiempo real no es posible observar los valores futuros de la señal, por lo que un sistema no causal es físicamente irrealizable (es decir, no se puede implementar). Por el contrario, si la señal se registra de modo que el procesamiento se lleva a cabo fuera de línea (no en tiempo real), es posible implementar un sistema no causal, dado que todos los valores de la señal están disponibles en el momento del procesamiento. A menudo, ésta es la situación que se da en el tratamiento de señales geofísicas e imágenes.

- Hoja de problemas propuestos.

HOJA DE PROBLEMAS

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$$

Is it (a) linear? (b) Is it time-invariant? (c) Is it causal?

Draw a signal flow diagram to compute the response of the 2nd-order LTI discrete-time system described by the following recursive equation:

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

Determine la secuencia de correlación cruzada $r_{xy}(l)$ de las secuencias

$$x(n) = \{\ldots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \underset{\uparrow}{1}, 2, -3, 0, 0, \ldots\}$$

$$y(n) = \{\ldots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \underset{\uparrow}{4}, 1, -2, 5, 0, 0, \ldots\}$$


4ª edición
Tratamiento digital de señales
www.librosite.net/proakis
John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis
PEARSON
Prentice Hall

Procesamiento digital de señales

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Cuarto Semestre
Unidad I: Introducción a sistemas discretos en el tiempo

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber