

Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones
Quinto Semestre

Unidad IV: Estudio introductorio a la fibra óptica
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



1 Línea con dos dieléctricos

2 Fibra óptica

3 Trabajos propuestos

1 Línea con dos dieléctricos

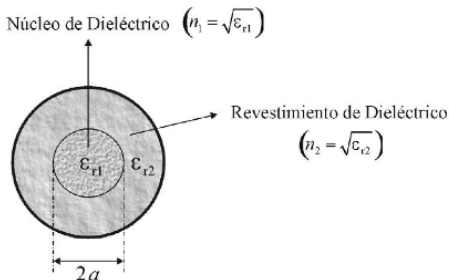
2 Fibra óptica

3 Trabajos propuestos

Fibra óptica

- Fibra óptica de salto de índice.

La configuración más aceptada de una fibra óptica es la formada por un cilindro dieléctrico sólido (núcleo) de radio a e índice de refracción n_1 ($n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$), que está protegido o cubierto por un revestimiento sólido también de material dieléctrico con índice de refracción n_2 ($n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$) que debe ser menor que n_1 ($n_2 < n_1$). Esta configuración geométrica se muestra en la siguiente figura.



Esta configuración recién descrita también se conoce por fibra óptica de salto de índice, pues existe un salto abrupto en el valor del índice de refracción en la interfaz entre el núcleo y el revestimiento. En la Figura 1.1 se muestra el perfil del índice de refracción en este tipo de fibras ópticas.

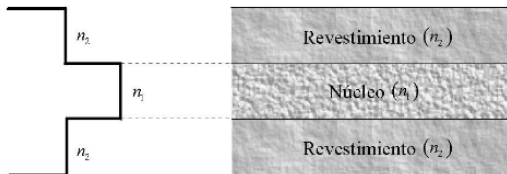


Figura Perfil del índice de refracción en una fibra óptica de salto de índice

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.

Otro tipo de fibra óptica es la denominada de índice graduado, en la cual el índice de refracción varía en el núcleo según una determinada función matemática que toma el valor n_1 en el centro del núcleo y el valor de n_2 en la interfaz del núcleo con el revestimiento.

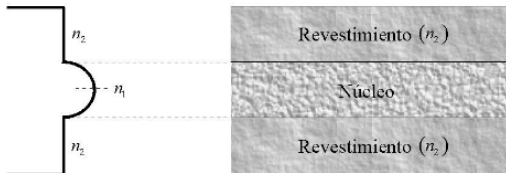


Figura Perfil del índice de refracción en una fibra óptica de índice graduado

Las fibras ópticas de índice graduado suelen presentar menor distorsión que las de salto de índice, por lo que se prefieren en aplicaciones de mayor ancho de banda.

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.

Estas líneas de transmisión pueden operar a frecuencias próximas a 10^{14} Hz (10^5 GHz). En dicha banda del espectro electromagnético es habitual hablar de longitudes de ondas en lugar de frecuencias. Por tanto, la fibra óptica suele operar en la banda comprendida entre los 800 nm y las 2,55 μm , concretamente en las siguientes tres ventanas de transmisión:

- 1ª ventana de transmisión: comprendida entre 800 nm y 900 nm .
- 2ª ventana de transmisión: centrada en 1300 nm .
- 3ª ventana de transmisión: centrada en 1550 nm .

Estas ventanas se determinan por las bajas pérdidas (baja atenuación) que presentan las fibras ópticas a dichas longitudes de onda (frecuencias de operación).

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.

1 Línea con dos dieléctricos

2 Fibra óptica

3 Trabajos propuestos

- a) Enorme ancho de banda y bajas pérdidas de transmisión. La fibra óptica presenta menores pérdidas de transmisión, y permite transmitir señales de mayor ancho de banda que las tradicionales líneas de transmisión formadas por conductores de cobre. La fibra óptica facilita la implementación de sistemas de comunicación a grandes distancias, reduciendo la necesidad de equipamiento y componentes adicionales (repetidores), lo que también supone reducir el coste y la complejidad de dichos sistemas.
- b) Reducido tamaño y peso. El tamaño y peso de las fibras ópticas es mucho menor que el de los tradicionales cables. Esta es una ventaja frente a la congestión de cables en las ciudades, así como en instalaciones en aviones, satélites, barcos o sistemas militares.

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politecnica de Valencia.

- c) Aislamiento eléctrico. Las fibras ópticas, al estar hechas de vidrio (cristal) o plásticos, que son materiales aislantes, no presentan los problemas típicos de los conductores, tales como las conexiones a masa (cortocircuitos), los arcos voltaicos o las chispas.
- d) Inmunidad frente a interferencias y diafonía. La fibra óptica, al estar constituida únicamente por materiales dieléctricos, resulta inmune frente a la interferencia electromagnética (EMI), interferencias y acoplo de RF (RFI) o generación de pulsos electromagnéticos (efecto EMP). En conclusión, la fibra óptica no se ve afectada por un entorno ruidoso eléctricamente, y no requiere por tanto mallado o protección

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002).
Líneas de transmisión. Universidad Politecnica de Valencia.

frente a fenómenos EMI. No se producen además interferencias ópticas entre fibras contiguas, no existiendo pues diafonía.

- e) Seguridad de la información. Como la señal óptica viaja bien confinada dentro de la fibra (apenas se radia señal), dicha señal se transmite con mucha seguridad (es imposible que sea interceptada). Esta es una propiedad interesante en aplicaciones que requieren la transmisión de información con seguridad.
- f) Entre otras ventajas de las fibras ópticas destacan su robustez y flexibilidad (se pueden curvar fácilmente), su fiabilidad y facilidad de mantenimiento, y el bajo coste que supone su fabricación debido a la gran abundancia de la materia prima de la que están hechas (silicio, que es básicamente arena).

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politecnica de Valencia.

Una visión intuitiva de cómo tiene lugar la propagación en el interior de la fibra óptica se obtiene aplicando teoría de rayos (óptica geométrica) en un sistema constituido por dos materiales dieléctricos con índices de refracción diferentes (n_1 y n_2 con $n_2 < n_1$).

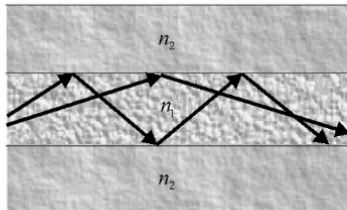


Figura 1.1 Propagación en el interior de una fibra óptica

Como puede observarse en la Figura 1.1 los rayos se propagan en la fibra óptica mediante un fenómeno de reflexión interna total (no hay refracción) que se produce en la interfaz entre los dos medios dieléctricos.

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.

De manera más rigurosa, la propagación en el interior de la fibra óptica se sustenta en un conjunto de soluciones electromagnéticas simples (denominadas también modos) de las ecuaciones de Maxwell. Cada uno de estos modos, que viajan en la dirección axial de la fibra, se caracteriza por un coeficiente de fase β , cuyo valor se deduce de la aplicación de las condiciones de contorno que impone la geometría de la fibra. Las soluciones modales en la fibra óptica tienen acopladas las componentes axiales E_z y H_z (es decir $E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$), por lo que a estos modos se les llama híbridos, y su análisis riguroso resulta mucho más complejo que en el caso de las guías rectangulares y circulares.

Al igual que en la guía rectangular y circular, la fibra óptica introduce una atenuación en la señal así como un efecto de distorsión (se trata también de una línea dispersiva). La atenuación en la fibra está causada por diversos mecanismos o factores, tales como impurezas debidas a átomos y moléculas del material de la fibra, imperfecciones en la fabricación de la fibra, o incluso curvaturas de la propia fibra (bien sean macroscópicas como las esquinas o microscópicas).

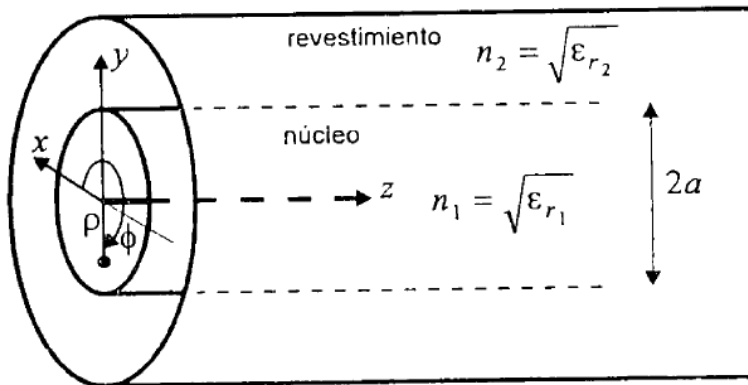
Por su parte, la distorsión supone que los pulsos de señal óptica se van ensanchando a medida que viajan por la línea, llegando a provocar que no se puedan distinguir unos pulsos de otros. La distorsión puede ser:

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002).

Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.

- Intramodal. Este tipo de distorsión ocurre dentro de cada modo, y está causada por la variación del índice de refracción n con la longitud de onda λ .
- Intermodal. Este segundo tipo de distorsión se debe a que cada modo tiene una velocidad de grupo diferente.

Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002).
Líneas de transmisión. Universidad Politécnica de Valencia.



Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + h^2 \Psi = 0$$

en donde

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

La variable Ψ puede representar a E_z o a H_z , de acuerdo con las condiciones de frontera que se empleen al resolver la *ec*. La solución en el caso de las guías circulares metálicas es más sencilla que la que se busca ahora, pues solamente podía haber modos TE y TM. Pero como se verá más adelante, en una fibra óptica, salvo en un caso particular, ninguna de las dos componentes E_z o H_z puede valer cero. Esto da origen a los modos de propagación llamados *híbridos*, designados como HE y EH*, en donde ambas componentes axiales existen.

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$\Psi = J_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho < a)$$

en donde, a partir de la ec.

$$h_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \quad (\mu_r = 1, \epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r_1})$$

Para puntos de campo dentro del revestimiento, una solución similar a la ec. no es válida, porque la función $J_m(h\rho)$ es proporcional apenas a $1/\sqrt{h\rho}$ cuando m es muy grande, y se necesita una disminución mucho más rápida en la dirección ρ , de tipo exponencial, para que la mayor parte de la potencia sea transmitida a lo largo del núcleo. Para esto, es preciso que la constante h^2 sea negativa:

$$h_2^2 = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2) \quad (\mu_r = 1, \epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r_2})$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

y entonces, la solución en el revestimiento queda como:

$$\Psi = K_m(h_2 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho > a)$$

en donde $K_m(h\rho)$ es un función Bessel modificada de segunda clase, que decrece exponencialmente hacia cero conforme $h\rho$ aumenta. También es posible utilizar funciones Hankel de orden m , de primera o segunda clase, cuyos argumentos son imaginarios ($j h\rho$ o $-j h\rho$, respectivamente). Estas funciones son empleadas en algunos textos y están relacionadas proporcionalmente con las funciones Bessel modificadas por medio de un coeficiente real o imaginario, según el valor de m .

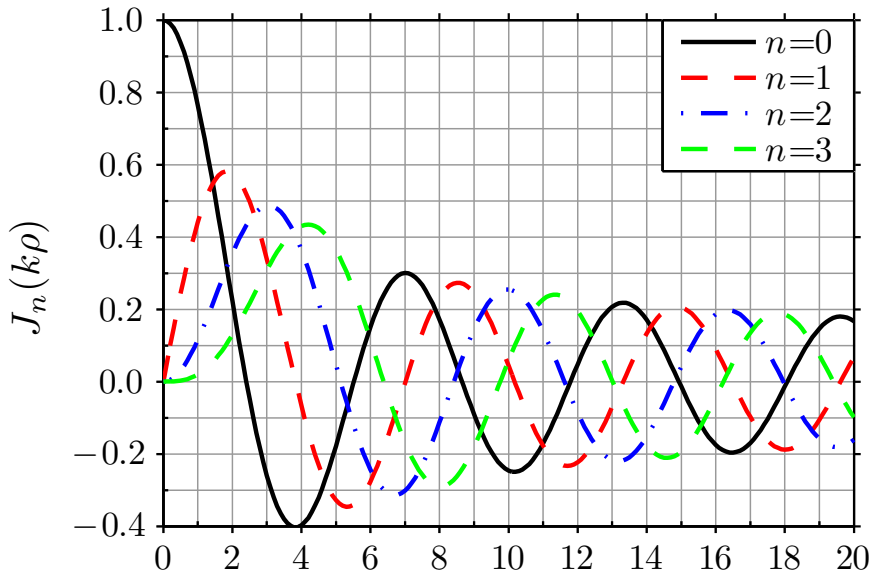
Fuente: Boria, V., Martín, C. B., Peñarrocha, V. M. R., Oltra, A. S. B., and Pacheco, P. S. (2002). Líneas de transmisión. Universidad Politecnica de Valencia.

- ① $Z_n^{(1)}(k\rho) = J_n(k\rho)$, the Bessel function of first kind
- ② $Z_n^{(2)}(k\rho) = N_n(k\rho)$, the Bessel function of second kind or Neumann function
- ③ $Z_n^{(3)}(k\rho) = H_n^{(1)}(k\rho)$, the Hankel function of first kind
- ④ $Z_n^{(4)}(k\rho) = H_n^{(2)}(k\rho)$, the Hankel function of second kind

The Hankel functions can be easily computed from the Bessel functions of first and second kind as follows:

$$H_n^{(1)}(k\rho) = J_n(k\rho) + iN_n(k\rho) \quad (1)$$

$$H_n^{(2)}(k\rho) = J_n(k\rho) - iN_n(k\rho). \quad (2)$$



The Bessel functions for several orders can be easily computed with the following recurrent relation:

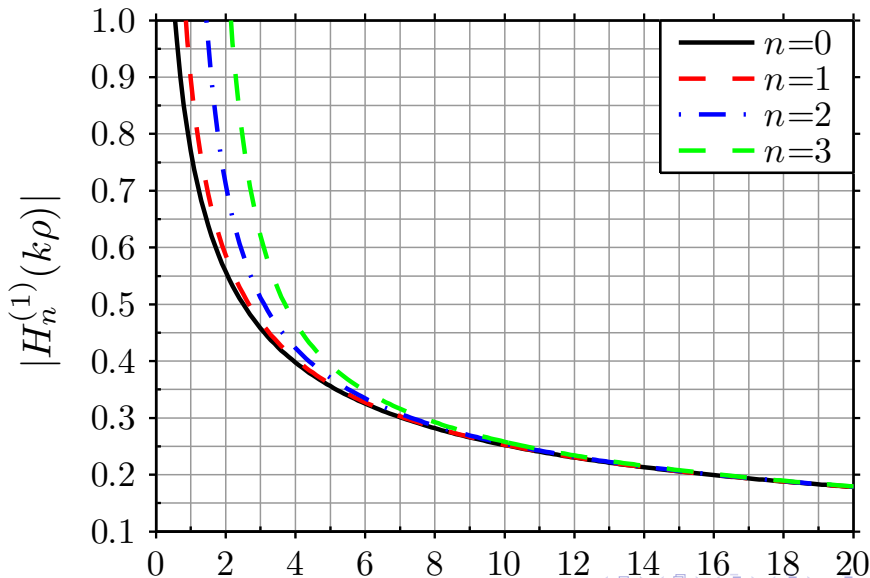
$$Z_{n-1}^{(c)}(k\rho) + Z_{n+1}^{(c)}(k\rho) = \frac{2n}{k\rho} Z_n^{(c)}(k\rho). \quad (3)$$

In addition, the derivatives of the Bessel functions can be obtained with one of the following recurrent expressions:

$$\frac{dZ_n^{(c)}(k\rho)}{d(k\rho)} = \frac{1}{2}(Z_{n-1}^{(c)}(k\rho) - Z_{n+1}^{(c)}(k\rho)) \quad (4a)$$

$$= Z_{n-1}^{(c)}(k\rho) - \frac{n}{k\rho} Z_n^{(c)}(k\rho) \quad (4b)$$

$$= -Z_{n+1}^{(c)}(k\rho) + \frac{n}{k\rho} Z_n^{(c)}(k\rho). \quad (4c)$$



Siguiendo un criterio similar al que se planteó al estudiar las guías metálicas habrá propagación en la fibra a partir de una cierta frecuencia de corte, cuando γ se vuelva imaginaria pura ($\gamma = j\beta$). Para esta condición, de la ec. se obtiene, con h_1^2 positiva, que:

$$\beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$$

y de la ec. con h_2^2 negativa, se obtiene:

$$\beta^2 > \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$$

Por lo tanto, juntando ambos resultados anteriores:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 < \beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Este rango para β^2 también se puede expresar en términos de los índices de refracción del núcleo (n_1) y del revestimiento (n_2), recordando que

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon = n^2 \epsilon_0$$

quedando la ec. (7-7) como:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n_2^2 < \beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n_1^2$$

y dado que la velocidad de la luz en el vacío es igual a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

el rango para la constante de fase β está dado finalmente por:

$$\frac{\omega n_2}{c} < \beta < \frac{\omega n_1}{c}$$

Nótese que en el presente análisis la solución dada por la ec. (1) supone que el revestimiento se extiende muchísimo en la dirección ρ (en teoría, hasta el infinito), para garantizar que los campos de los modos de propagación en la guía decrezcan exponencialmente hasta alcanzar valores despreciables al final del revestimiento. En la práctica, dicho revestimiento es lo suficientemente grueso, de tal manera que los campos no llegan a salir del mismo y, por lo tanto, la suposición anterior es válida.

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

En la frontera núcleo-revestimiento, al tratarse de dos materiales dieléctricos, debe haber continuidad para toda z en la componente tangencial axial y en la componente tangencial en la dirección ϕ de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ (pues no hay corriente en la frontera), es decir:

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= E_{z_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ H_{z_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= H_{z_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ E_{\phi_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= E_{\phi_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ H_{\phi_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= H_{\phi_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \end{aligned} \right\}$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

cuando $\rho = a$:

$$H_z = \left[\frac{A}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \leq a)$$

$$H_z = \left[\frac{A}{K_m(h_2 a)} \right] K_m(h_2 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \geq a)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

En cuanto a las soluciones generales para E_z , también pueden deducirse, con sus coeficientes respectivos para las regiones del núcleo y el revestimiento, a partir de las *ecs.* pero eligiendo la función $\sin m\phi$ en lugar de $\cos m\phi$. Esto es necesario para satisfacer las demás condiciones de continuidad del problema. Así que:

$$E_z = \left[\frac{B}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \leq a)$$

$$E_z = \left[\frac{B}{K_m(h_2 a)} \right] K_m(h_2 \rho) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \geq a)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$E_{\phi} = \left(\frac{j\omega\mu}{h_1^2} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left(\frac{j\beta}{h_1^2 \rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (\rho \leq a)$$

$$E_{\phi} = - \left(\frac{j\omega\mu}{h_2^2} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \left(\frac{j\beta}{h_2^2 \rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (\rho \geq a)$$

$$H_{\phi} = - \left(\frac{j\beta}{h_1^2 \rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \left(\frac{j\omega\epsilon_1}{h_1^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (\rho \leq a)$$

$$H_{\phi} = \left(\frac{j\beta}{h_2^2 \rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \left(\frac{j\omega\epsilon_2}{h_2^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (\rho \geq a)$$

$$E_{\rho} = \left(-\frac{j}{h_1^2} \right) \left[\left(\frac{\omega\mu}{\rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + (\beta) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] \quad (\rho \leq a)$$

$$E_{\rho} = \left(\frac{j}{h_2^2} \right) \left[\left(\frac{\omega\mu}{\rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + (\beta) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] \quad (\rho \geq a)$$

$$H_{\rho} = \left(-\frac{j}{h_1^2} \right) \left[(\beta) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (\rho \leq a)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999. ▶ ☰ 🔍 ↺

$$H_\rho = \left(\frac{j}{h_2^2} \right) \left[(\beta) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left(\frac{\omega \epsilon_2}{\rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (\rho \geq a)$$

En la ec. se indicó el rango de valores para la constante de fase β , pero aún falta calcularla para cada modo de propagación. Para ello, a continuación se planteará la ecuación característica que hay que resolver para encontrarla, satisfaciendo las condiciones de continuidad restantes dadas es decir, que E_ϕ y H_ϕ deben ser iguales en ambos dieléctricos para $\rho = a$. Pero antes de establecer estas ecuaciones de continuidad, conviene adoptar la notación siguiente para simplificar la escritura de las expresiones finales:

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$\left[\frac{1}{J_m(h_1 a)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \rho} J_m(h_1 \rho) \right]_{\rho=a} = h_1 \left[\frac{J'_m(h_1 a)}{J_m(h_1 a)} \right] = h_1 f_m(h_1 a)$$

$$\left[\frac{1}{K_m(h_2 a)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \rho} K_m(h_2 \rho) \right]_{\rho=a} = h_2 \left[\frac{K'_m(h_2 a)}{K_m(h_2 a)} \right] = h_2 g_m(h_2 a)$$

$$h_1 a = p$$

$$h_2 a = q$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

para encontrar el valor de β de cada uno de los modos de propagación. Recordando que $\mu = \mu_0$ para los dos dieléctricos, dicha ecuación adopta la forma:

$$\omega^2 \mu_0 \left[\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] \left[\frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} \right]$$

$$= m^2 \beta^2 \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Para entender cómo se designan los modos de propagación de acuerdo con sus subíndices mn , conviene analizar nuevamente las funciones Bessel graficadas. Debido a su comportamiento oscilatorio, la función J_m pasará n veces por el eje de ordenada igual a cero, y por lo tanto habrá n raíces para cada valor de m . Cada combinación posible de m y n corresponde a un modo de propagación diferente, y su constante de fase se puede designar como β_{mn} . Y por lo que se refiere a la designación de los modos, éstos pueden ser TE_{mn} , TM_{mn} , EH_{mn} o HE_{mn} .

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Tabla . Ecuación característica de β para una fibra óptica de índice escalonado.

m	modos	ecuación
0	TE_{0n}	$\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} = 0$
0	TM_{0n}	$\frac{\epsilon_1}{p} f_m(p) + \frac{\epsilon_2}{q} g_m(q) = 0$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

0	TM_{0n}	$\frac{\epsilon_1}{p} f_m(p) + \frac{\epsilon_2}{q} g_m(q) = 0$
≥ 1	EH_{mn} y HE_{mn}	$\omega^2 \mu_0 \left[\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] \left[\frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} \right]$ $= m^2 \beta^2 \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2$
$p = h_1 a \quad q = h_2 a \quad h_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2 \quad h_2^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$		

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$V = \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) [n_1^2 - n_2^2]^{1/2}$$

A la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los índices de refracción en la *ec.* se le da el nombre de *apertura numérica* y se designa como NA^* :

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

la apertura numérica está relacionada con el *ángulo de aceptación* θ_a de la fibra, a través de la ecuación siguiente:

$$NA = \text{sen } \theta_a$$

revestimiento (n_2) son casi iguales ($n_1 - n_2 \ll 1$). Bajo estas condiciones, $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ y $\beta^2 \approx \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$. Al sustituir tales aproximaciones directamente ésta toma la forma siguiente:

$$\left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \right) \left[\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right]^2 = m^2 \left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \right) \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2$$

El factor dentro del paréntesis rectangular en el primer miembro de la ecuación anterior se puede representar por F_m , de modo que dicha ecuación queda como:

$$F_m = \pm m \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$F_m = \frac{1}{p} f_m(p) + \frac{1}{q} g_m(q) = \frac{1}{p} \left[\frac{J'_m(p)}{J_m(p)} \right] + \frac{1}{q} \left[\frac{K'_m(q)}{K_m(q)} \right]$$

Para encontrar las raíces, es necesario utilizar algunas identidades. Se puede demostrar que las funciones Bessel cumplen con las siguientes relaciones:

$$J'_m(p) = \frac{m}{p} J_m(p) - J_{m+1}(p)$$

$$J'_m(p) = -\frac{m}{p} J_m(p) + J_{m-1}(p)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$K'_m(q) = \frac{m}{q} K_m(q) - K_{m+1}(q)$$

$$K'_m(q) = -\frac{m}{q} K_m(q) - K_{m-1}(q)$$

De manera que la solución de la ecuación característica aproximada se obtiene, en el caso del signo positivo, empleando las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{p J_m(p)} \left[\frac{m}{p} J_m(p) - J_{m+1}(p) \right] + \frac{1}{q K_m(q)} \left[\frac{m}{q} K_m(q) - K_{m+1}(q) \right] \\ = m \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{m}{p^2} - \frac{J_{m+1}(p)}{p J_m(p)} + \frac{m}{q^2} - \frac{K_{m+1}(q)}{q K_m(q)} = \frac{m}{p^2} + \frac{m}{q^2}$$

Y finalmente, la condición que debe satisfacerse es:

$$\frac{1}{p} \left[\frac{J_{m+1}(p)}{J_m(p)} \right] = - \frac{1}{q} \left[\frac{K_{m+1}(q)}{K_m(q)} \right]$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$\frac{m}{p^2} - \frac{J_{m+1}(p)}{p J_m(p)} + \frac{m}{q^2} - \frac{K_{m+1}(q)}{q K_m(q)} = \frac{m}{p^2} + \frac{m}{q^2}$$

Y finalmente, la condición que debe satisfacerse es:

$$\frac{1}{p} \left[\frac{J_{m+1}(p)}{J_m(p)} \right] = - \frac{1}{q} \left[\frac{K_{m+1}(q)}{K_m(q)} \right]$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Para resolver el caso del signo negativo se utilizan las relaciones llegándose así a la segunda solución de la ecuación característica:

$$\frac{1}{p J_m(p)} \left[-\frac{m}{p} J_m(p) + J_{m-1}(p) \right] + \frac{1}{q K_m(q)} \left[-\frac{m}{q} K_m(q) - K_{m-1}(q) \right]$$

$$= -m \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$-\frac{m}{p^2} + \frac{J_{m-1}(p)}{p J_m(p)} - \frac{m}{q^2} - \frac{K_{m-1}(q)}{q K_m(q)} = -\frac{m}{p^2} - \frac{m}{q^2}$$

Y finalmente:

$$\frac{1}{p} \left[\frac{J_{m-1}(p)}{J_m(p)} \right] = \frac{1}{q} \left[\frac{K_{m-1}(q)}{K_m(q)} \right]$$

Las ecuaciones simplificadas las soluciones para β de los modos EH y HE, y deben resolverse satisfaciendo también la *ec.*

$$p^2 + q^2 = V^2$$

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

la frecuencia normalizada V a una cierta frecuencia f por medio de la *ec.*

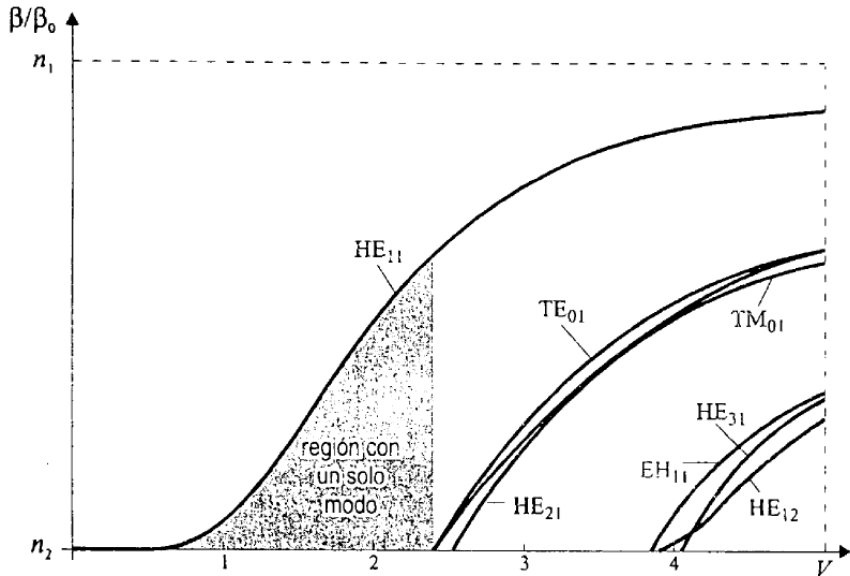
$$V = \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \left[n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2}$$

Asimismo, la *ec.* restringe a la constante β de cada modo de propagación a tomar valores exclusivamente dentro del rango

$$\beta_0 n_2 < \beta < \beta_0 n_1$$

en donde β_0 sería la constante de fase en el espacio libre a la misma frecuencia de operación

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.



Fuente: VELA, Rodolfo Nori. Líneas de transmisión. McGraw Hill, 1999.

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \left[n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2} < 2.405$$

condición para la
fibra monomodo

La desigualdad anterior demuestra que la única forma de que el modo dominante HE_{11} deje de existir en la fibra (o sea, que “se corte”), es haciendo el radio a del núcleo igual a cero, lo cual sería evidentemente ilógico. Sin embargo, en la práctica, conforme el radio se va reduciendo más y más, los campos en el revestimiento aumentan, y esto impone un límite práctico en la frecuencia más baja que puede usarse en la fibra monomodo.

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

$$f_c \Big|_{\text{EH}_{mn}} = \frac{p_{mn} c}{(2\pi a)(NA)}$$

Los valores de p_{mn} para las primeras combinaciones de m y n son los mismos concentrados anteriormente en la Tabla cuando se estudiaron las guías circulares metálicas. Por comodidad, estos valores se repiten a continuación:

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Tabla Raíces p_{mn} para las cuales $J_m(p) = 0$ y se cumple la condición de corte para los modos EH_{mn} ($p \neq 0$)*.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$m = 0$	2.405	5.520	8.654	...
$m = 1$	3.832	7.016	10.173	...
$m = 2$	5.136	8.417	11.620	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla Raíces p_{mn} para las cuales $J_1(p) = 0$ y se cumple la condición de corte para los modos HE_{1n} .

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	...
$m = 1$	0	3.832	7.016	10.173	...

Cuando $m = 0$, las condiciones de corte para los modos HE_{0n} son idénticas a las de los EH_{0n} .

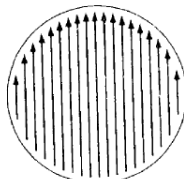
Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Tabla Condiciones para la frecuencia de corte normalizada ($V_c = p$) de los modos de propagación en una fibra de índice escalonado.

m	modos	condición	primeras raíces (V_c)			
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	
0	TE_{0n} TM_{0n}	$J_0(V_c) = 0$	2.405	5.520	8.654	
1	HE_{1n}	$J_1(V_c) = 0$	0	3.832	7.016	
1	EH_{1n}	$J_1(V_c) = 0$	3.832	7.016	10.173	
≥ 2	HE_{mn}	$J_{m-2}(V_c) = 0$	2.405	5.520	8.654	$(m = 2)$
			3.832	7.016	10.173	$(m = 3)$
			5.136	8.417	11.620	$(m = 4)$
≥ 2	EH_{mn}	$J_m(V_c) = 0$	5.136	8.417	11.620	$(m = 2)$
			:	:	:	:

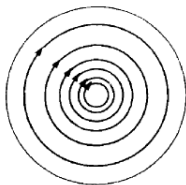
Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

Modo dominante

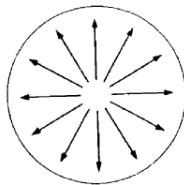


HE_{11}

Modos superiores



TE_{01}



TM_{01}



HE_{21}

Fuente: VELA, Rodolfo Neri. Líneas de transmisión. McGraw-Hill, 1999.

1 Línea con dos dieléctricos

2 Fibra óptica

3 Trabajos propuestos

Problema 1

Ejercicio 1 Una fibra óptica de índice escalonado tiene índices de refracción de 1.470 y 1.460 en el núcleo y el revestimiento, respectivamente. El radio del núcleo es de 8 μm . Encuentre la apertura numérica de la fibra, la frecuencia de corte normalizada V_c y la frecuencia de corte real (Hz) para los primeros doce modos que se propagan en ella.

Ejercicio De acuerdo con los conceptos básicos de teoría electromagnética, el lector debe recordar que la permitividad de los materiales es función de la frecuencia de operación. Por tal razón, es de esperarse que el índice de refracción ($n = \sqrt{\epsilon_r}$) tenga ligeras variaciones al cambiar la longitud de onda de transmisión en una fibra óptica. Por ejemplo, para el silicio se ha encontrado una relación muy aproximada como la siguiente:

$$n^2 - 1 = \frac{0.696166 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.068404)^2} + \frac{0.407943 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.116241)^2} + \frac{0.897479 \lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161)^2}$$

Calcule el índice de refracción de este material para las tres ventanas de operación en longitudes de onda de 0.85 μm , 1.3 μm y 1.55 μm .

Explique los modos linealmente polarizados en la fibra óptica.

Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones
Quinto Semestre

Unidad IV: Estudio introductorio a la fibra óptica
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber