

$$\begin{aligned}
 V_{\text{total a la entrada}} &= V_i + V_r \Big|_{\text{principio de la línea}} = 1 + 0.137 \angle 25^\circ \\
 &= 1.1242 + j0.0579 = 1.125 \angle 3^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{total en la carga}} &= V_i \Big|_L + V_r \Big|_L = 0.707 \angle -180^\circ + 0.194 \angle -155^\circ \\
 &= -0.707 - 0.176 - j0.08198 = 0.887 \angle -175^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

La potencia promedio entregada a la carga es:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_L I_L^*] = \frac{1}{2} |I_L|^2 R_L = \frac{1}{2} \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 R_L$$

en donde R_L es la parte real de Z_L .

Sustituyendo valores:

$$P_L = \frac{1}{2} \left(\frac{0.887}{82.46} \right)^2 (80) = 4.63 \text{ mW}$$

Y la potencia promedio al principio de la línea es:

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_i I_i^*] = \frac{1}{2} \left| \frac{V_{i,\text{total}}}{Z_i} \right|^2 R_i$$

De la ec. (2-34):

$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 50 \left[\frac{1 + 0.274 \angle 25^\circ e^{-2(0.3453 + j\pi)}}{1 - 0.274 \angle 25^\circ e^{-2(0.3453 + j\pi)}} \right] \\
 &= 50 \left[\frac{1 + (0.274)(0.5) \angle 25^\circ}{1 - (0.274)(0.5) \angle 25^\circ} \right] = 50 \left[\frac{1.1242 + j0.05789}{0.8759 - j0.05789} \right] \\
 &= 63.67 + j7.5 \, \Omega = 64.12 \angle 6.7^\circ \, \Omega
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1.125}{64.12} \right)^2 (63.67) = 9.8 \, \text{mW}$$

y de la ec. (2-85), la eficiencia de la línea pedida en el inciso b) es:

$$\eta = \frac{4.63}{9.8} = 47\%$$

Ejercicio 2-25 Para la línea del ejercicio anterior, vuelva a calcular su eficiencia suponiendo que la línea está acoplada a la carga, es decir, que $Z_L = 50 \, \Omega$. Efectúe sus cálculos para: a) línea con pérdidas y b) línea sin pérdidas. Después suponga que la línea sigue desacoplada, pero que las pérdidas son muy pocas, y c) evalúe su eficiencia con $\alpha = 0$.

Solución

En los casos a) y b) no hay voltaje reflejado porque $\rho_L = 0$.

Caso a).- Línea con pérdidas.

El voltaje incidente en la carga es:

$$V_i \Big|_L = 0.707 \angle -180^\circ = V_{\text{total en la carga}}$$

El voltaje total a la entrada de la línea es:

$$V_{\text{total a la entrada}} = 1$$

La impedancia de entrada es igual a Z_0 . Por lo tanto:

$$P_{\text{carga}} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 R_L = \frac{1}{2} \left(\frac{0.707}{50} \right)^2 (50) = 5 \text{ mW}$$

$$P_{\text{entrada}} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_i}{Z_i} \right|^2 R_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{50} \right)^2 (50) = 10 \text{ mW}$$

$$\eta = \frac{5}{10} = 50\%$$

Se verifica que, al haber una atenuación de 3 dB, la potencia inicial se reduce a la mitad en la carga. Con relación a la línea desacoplada del ejercicio anterior, sólo hay una diferencia del 3% en eficiencia.

Caso b).- Línea sin pérdidas.

En este caso, al no haber atenuación, la potencia en la carga sería igual a la potencia de entrada, y la eficiencia sería del 100%, sin importar su longitud (caso ficticio).

Caso c).- Línea desacoplada con $\alpha = 0$.

En este caso se puede utilizar la ec. (2-88):

$$\eta = 1 - |\rho_L|^2 = 1 - \underbrace{(0.274)^2}_{\text{del ejercicio anterior}} = 1 - 0.075 = 92.5\%$$

El cuadro siguiente concentra, para fines comparativos, las eficiencias encontradas en este ejercicio y el anterior.

Eficiencia η

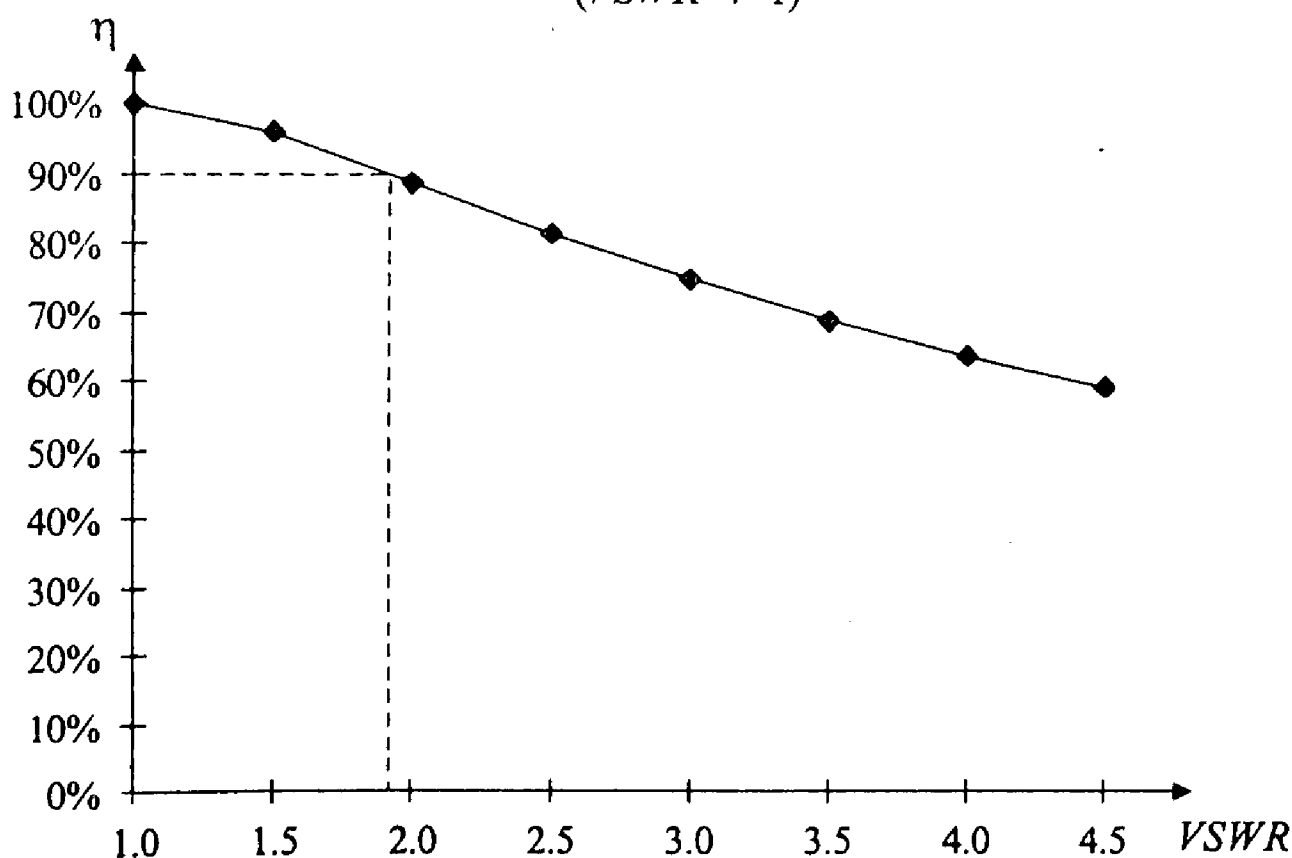
	con pérdidas ($\alpha l = 3$ dB)	sin pérdidas
Línea desacoplada $Z_L = 80 + j20 \Omega \quad Z_0 = 50 \Omega$	47 %	92.5 %
Línea acoplada $Z_L = Z_0 = 50 \Omega$	50 %	100 %

Ejercicio 2-26 El $VSWR$ de una línea sin pérdidas vale 2, bajo ciertas condiciones de trabajo. ¿Cuánto vale la eficiencia de la línea? Haga una gráfica de la eficiencia en función del $VSWR$ y comente sobre ella.

Solución

La función que se pide graficar está dada por la ec. (2-89):

$$\eta = \frac{4 (VSWR)}{(VSWR + 1)^2}$$



Cuando $VSWR = 2$, $\eta = 8/9 = 88.88\%$. La gráfica de la función es la mostrada en la página anterior.

Se observa que para obtener más del 90% de la potencia entregada a la carga, el $VSWR$ puede valer desde 1.0 hasta 1.92. Es decir que no es necesario luchar demasiado para que el $VSWR$ esté cerca de la unidad, pues aún un valor cercano a 2.0 dará valores satisfactorios, por lo que se refiere a máxima transferencia de potencia.

Desde luego, en el caso general práctico también habrá que considerar la longitud de la línea, cuando la atenuación total acumulada sea significativa, pues la eficiencia disminuirá al disminuir la potencia que realmente incide sobre la carga.

2.15 Uso de la carta de Smith para líneas con pérdidas

En la última sección quedó de manifiesto que cuando las pérdidas por atenuación de una línea son consideradas, la magnitud del coeficiente de reflexión de voltajes no es constante a lo largo de la línea (véanse la ec. (2-83) y la Fig. 2-35). Por lo tanto, si se desea utilizar el método de la carta de Smith para resolver algún problema determinado, hay que tomar esta diferencia de magnitud en consideración, con el fin de hacer los ajustes necesarios y obtener lecturas correctas. Partiendo nuevamente de la ec. (2-73), la impedancia normalizada, en general, es:

$$\hat{z} = \frac{1 + \rho_v(z)}{1 - \rho_v(z)} \quad = (2-73)$$

con

$$\rho_v(z) = \rho_L e^{j2\beta z} = |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} \quad = (2-61)$$

(para una línea sin pérdidas)

Si se añade el efecto de la atenuación $2\alpha z$ al avanzar cierta distancia z , las ecuaciones anteriores se modifican y toman la forma siguiente:

$$\hat{z} = \frac{1 + |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} (e^{2\alpha z})}{1 - |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} (e^{2\alpha z})} \quad (z \leq 0)$$

$$= \frac{1 + \{|\rho_L| e^{2\alpha z}\} e^{j(\theta+2\beta z)}}{1 - \{|\rho_L| e^{2\alpha z}\} e^{j(\theta+2\beta z)}} \quad (2-91)$$

$$\rho_v(z) = |\rho_L| e^{2\alpha z} e^{j(\theta+2\beta z)} \quad (2-83)$$

Las ecs. (2-74) y (2-75) siguen siendo válidas:

$$\hat{z}(z) = r + jx \quad (2-74)$$

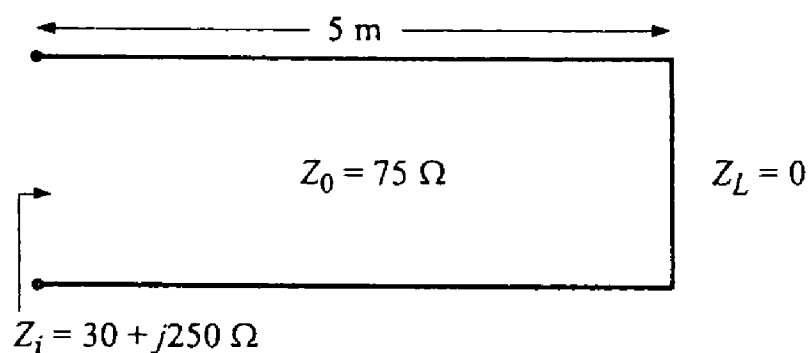
$$\rho_v(z) = u + jv \quad (2-75)$$

De allí que es posible trabajar sobre la misma carta de Smith diseñada para líneas sin pérdidas, haciendo los ajustes necesarios, aunque se requiere tener cierta práctica para no omitir ningún detalle. En realidad, este tema casi no es tratado en ningún libro de texto general para estudiantes de ingeniería, pero aquí lo mencionamos como una alternativa útil diferente a la solución analítica.

A continuación se presentarán dos ejemplos, indicando los pasos que deben seguirse para resolver gráficamente problemas sencillos de líneas con pérdidas.

Ejercicio 2-27 La impedancia de entrada de una línea terminada en corto circuito es de $30 + j250 \, \Omega$ (nótese que ya no es reactiva pura). La línea mide 5 metros y su impedancia característica es de $75 \, \Omega$. Calcule utilizando la carta de Smith: a) las constantes de atenuación y de fase (α y β), b) la impedancia de entrada que tendría la misma línea si estuviese terminada con una carga de $Z_L = 112.5 - j15 \, \Omega$.

Solución



a) Cálculo de α y β :

Normalizando primero las impedancias:

$$\hat{z}_L = 0$$

$$\hat{z}_i = \frac{30 + j250}{75} = 0.4 + j3.33$$

En la carta, la carga se ubica en el punto A. El punto B representa a la impedancia de entrada. Para encontrarlo, se tuvo que girar en la carta hacia el generador un total de 0.204λ . De allí que la longitud de la línea sea igual a:

$$l = 0.204 \lambda = 5 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 24.51 \text{ m}$$

y
$$\beta = 2\pi/\lambda = 0.081\pi \text{ rad/m}$$

Para encontrar α se utiliza una sencilla “regla de tres”. Nótese que si la línea no tuviese pérdidas, el punto B hubiese quedado en el mismo círculo que A, pues la resistencia de entrada valdría cero. Representemos este punto para el caso sin pérdidas como B', en donde la magnitud del coeficiente de reflexión sería igual a la unidad. De acuerdo con la ec. (2-83):

$$\frac{|\rho_L| e^{-2\alpha l}}{\overline{OB}} = \frac{\overbrace{|\rho_L|}^{=1}}{\overline{OB'}}$$

o bien:

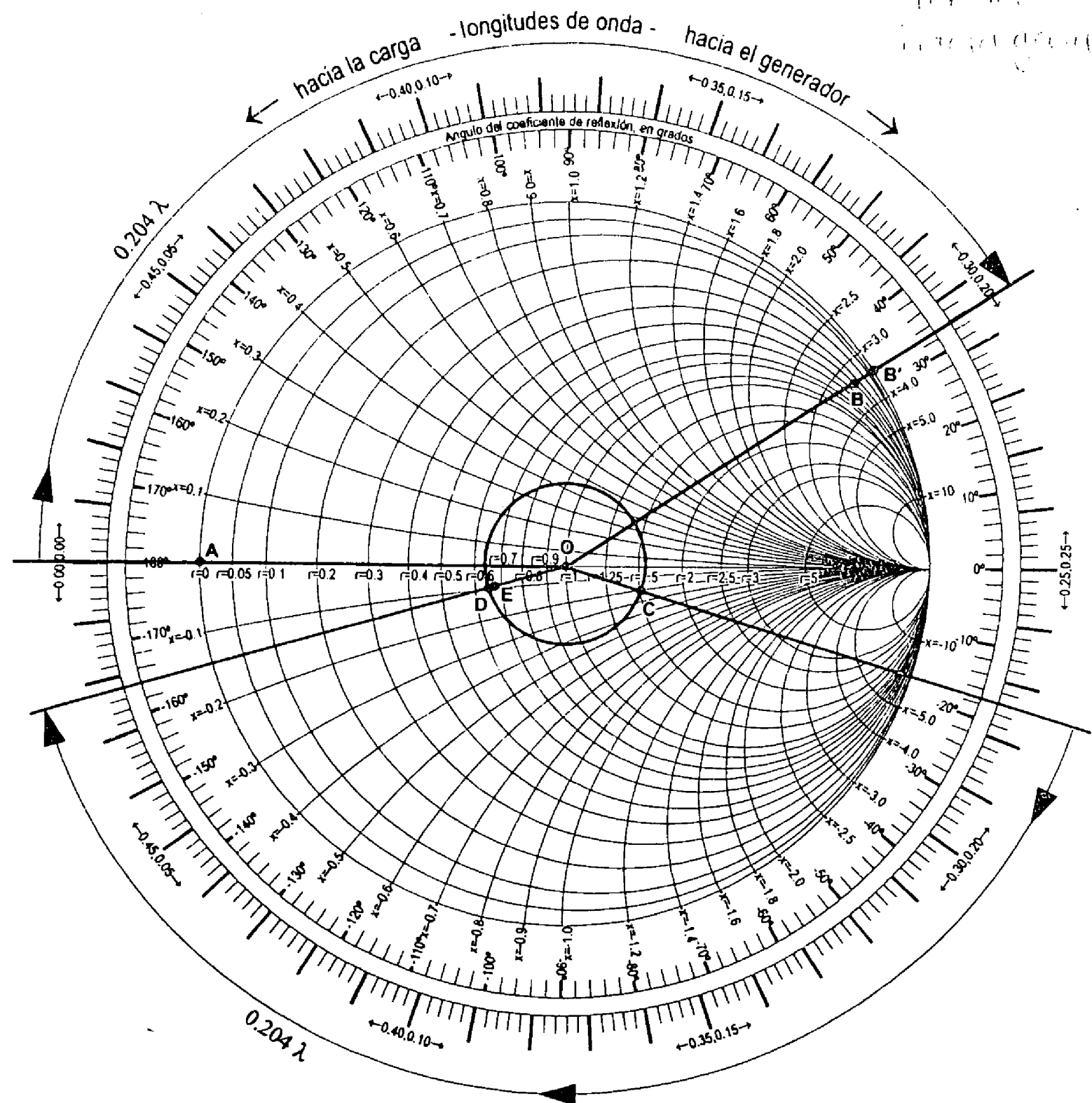
$$e^{-2\alpha l} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0.93$$

Como $l = 5$ m, se obtiene que α es igual a:

$$-2\alpha l = \ln 0.93 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\ln 0.93}{-10} = 0.00726 \text{ Np/m}$$

Por simple curiosidad, verifiquemos estos resultados empleando la ec. (2-34):

*Verificar
resultado*



Carta de Smith del Ejercicio 2-27

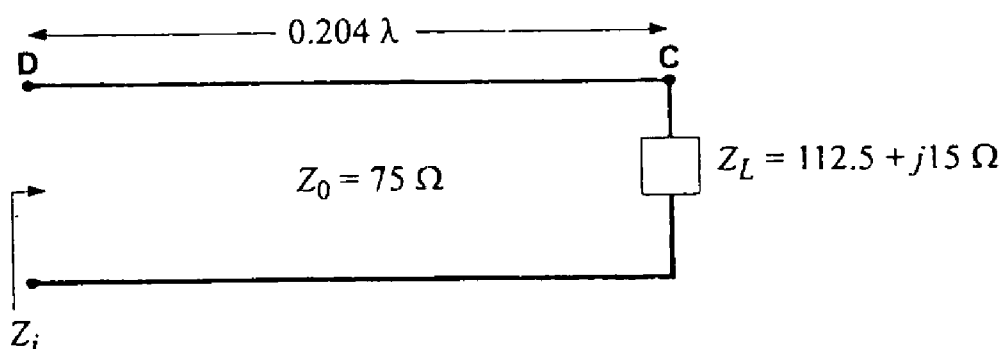
$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 75 \left[\frac{1 + \underbrace{(e^{j\pi})}_{\rho_L = 1 \angle 180^\circ \text{ (cortocircuito)}} e^{-2l(\alpha + j\beta)}}{1 - \underbrace{(e^{j\pi})}_{\rho_L = 1 \angle 180^\circ \text{ (cortocircuito)}} e^{-2l(\alpha + j\beta)}} \right] \\
 &= 75 \left[\frac{1 + e^{j\pi} e^{-10(0.00726 + j0.081\pi)}}{1 - e^{j\pi} e^{-10(0.00726 + j0.081\pi)}} \right] \\
 &= 75 \left[\frac{1 + (0.7692 + j0.5227)}{1 - (0.7692 + j0.5227)} \right] = 31 + j240 \quad \Omega
 \end{aligned}$$

Comparando este resultado con el dato inicial de $Z_i = 30 + j250 \Omega$, se observa que hay un pequeño margen de error, debido a las aproximaciones visuales en el método gráfico. Sin embargo, el resultado se puede considerar aceptable y la verificación como un hecho.

b) Si el corto circuito se sustituye por $Z_L = 112.5 - j15 \Omega$:

$$\hat{z}_L = \frac{112.5 - j15}{75} = 1.5 - j0.2 \quad (\text{punto C en la carta})$$

A continuación podemos trazar el círculo $|\rho_L|$ constante, suponiendo primero que la línea no tiene pérdidas, y avanzamos hacia el generador una distancia de 0.204λ , que es la longitud de la línea. De este modo, la impedancia de entrada sería el punto D.



Si consideramos ahora las pérdidas de la línea, su efecto será reducir la magnitud del coeficiente de reflexión, por lo que la verdadera impedancia

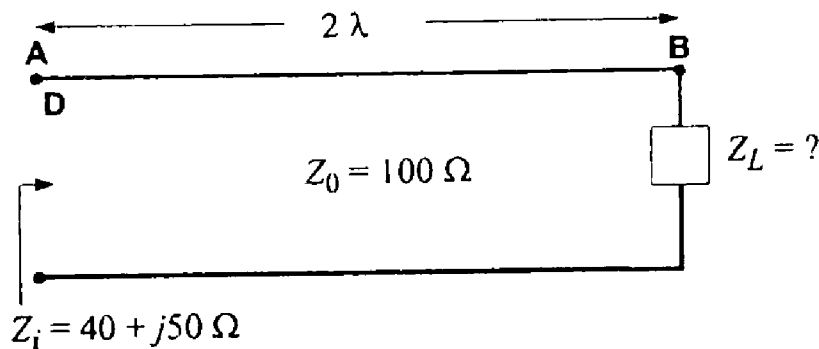
de entrada está en algún lugar sobre la recta $\overline{OD}$, digamos el punto E (aún por encontrarse). Nuevamente, se debe de cumplir la siguiente regla de tres, tomando en cuenta que la magnitud máxima de ρ sería ahora equivalente a $\overline{OD}$:

$$e^{-2\alpha l} = 0.93 = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$$

Midiendo la distancia $\overline{OD}$ con una regla y haciendo que se cumpla la relación anterior, se encuentra la posición que debe tener E, punto que se indica en la figura.

Ejercicio 2-28 Una línea con pérdidas mide 2λ . Su impedancia de entrada vale $40 + j50 \Omega$ y su impedancia característica es de 100Ω . ¿Cuánto vale la impedancia de la carga? Considere $\alpha = 0.001$ Np/m y una frecuencia de trabajo de 300 MHz.

Solución



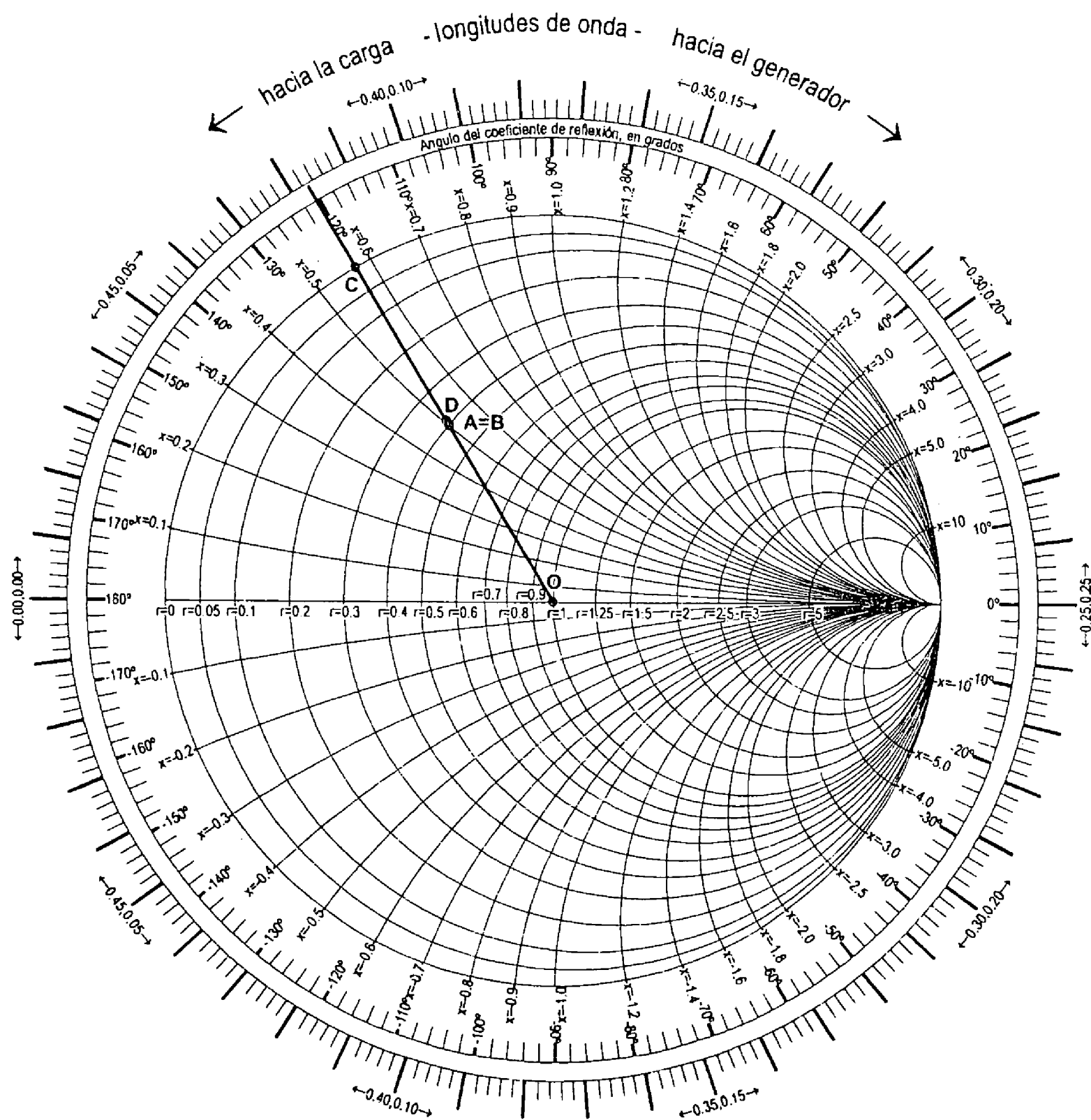
Si la línea no tuviese pérdidas, Z_L sería igual a Z_i (punto A en la carta).

$$\hat{z}_i = \frac{40 + j50}{100} = 0.4 - j0.5$$

Para la situación sin pérdidas, la magnitud de ρ sería constante e igual a $\overline{OA}$ en proporción al radio unitario de la carta, o sea:

$$\frac{|\rho|}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OC}} \Rightarrow |\rho| = 0.52$$

Si consideramos las pérdidas, al partir desde la carga y desplazarnos hacia el generador, la magnitud de ρ debe ir decreciendo (véase la Fig. 2-35). En el sentido opuesto, al partir desde el generador hacia la carga, la magnitud de ρ debe crecer paulatinamente. De manera que, para este ejercicio, el punto correspondiente a Z_L debe estar en algún lugar sobre la recta $\overline{AC}$.



Carta de Smith del Ejercicio 2-28

Bauticemos este punto, aún desconocido, como D. Ahora debe cumplirse la siguiente relación:

$$\overline{OA} = e^{-2\alpha l} \overline{OD} = e^{-2(0.001)(2)} \overline{OD}$$

o sea:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = 0.996$$

Realmente, los dos puntos A y D se confunden en la carta, lo cual conlleva a un resultado casi idéntico para Z_i , tanto considerando pérdidas como ignorándolas. Con esto se demuestra que cuando una línea tiene muy poca atenuación, como la de este ejercicio, en donde $\alpha l = 0.002 \text{ Np} = 0.017 \text{ dB}$, es válido y suficiente analizarla como si no tuviese pérdidas. Verifiquemos esta conclusión analíticamente, con las ecs. (2-33) y (2-34), suponiendo $Z_L = 40 + j50 \Omega$:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{40 - 100 + j50}{140 + j50} = -0.2669 + j0.4525$$

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 100 \left[\frac{1 + (-0.2669 + j0.4525) e^{-0.004} e^{-j8\pi}}{1 - (-0.2669 + j0.4525) e^{-0.004} e^{-j8\pi}} \right]$$

$$= 100(0.4022 + j0.4992) = 40.22 + j49.92 \Omega$$

2.16 Acoplamiento de impedancias

Como se ha estudiado en las últimas secciones, en muchos casos prácticos a altas frecuencias, la atenuación de la línea y su corta longitud son tales que permiten analizarla como si no tuviese pérdidas. Bajo esta consideración, el factor que influye sobre la eficiencia de transmisión de potencia a la carga es el grado de desacoplamiento que haya entre ésta y la impedancia característica de la línea. El reto consiste en dejar la carga como está y

emplear algún truco (matemáticamente bien fundado) para que la línea esté acoplada en la cercanía a la carga, aun cuando $Z_0 \neq Z_L$. En esta sección veremos cómo hacerlo.

A través de la teoría y los diversos ejercicios que se han visto, es claro que una línea de transmisión actúa como un “transformador de impedancias”, pues entre el generador y la carga se pueden ver muchas impedancias diferentes, según el punto intermedio elegido. La ec. (2-35) establece esta relación compleja de transformación de impedancias, que escribiremos ahora en función de z como la ec. (2-92):

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(-\gamma z)}{Z_0 + Z_L \tanh(-\gamma z)} \quad (z \leq 0) \quad (2-92)$$

Por su parte, la ec. (2-34) establece la misma relación, que en función de z queda de la siguiente forma:

$$Z = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{2\gamma z}} \quad (z \leq 0) \quad (2-93)$$

Como recordatorio, véase la Fig. 2-19, misma que, por conveniencia, se repite parcialmente aquí como la Fig. 2-36.

El acoplamiento de impedancias que se busca debe garantizar que el coeficiente de reflexión de voltajes sea cero y que, en consecuencia, el $VSWR$ sea igual a la unidad cerca de la carga. Este acoplamiento se puede realizar

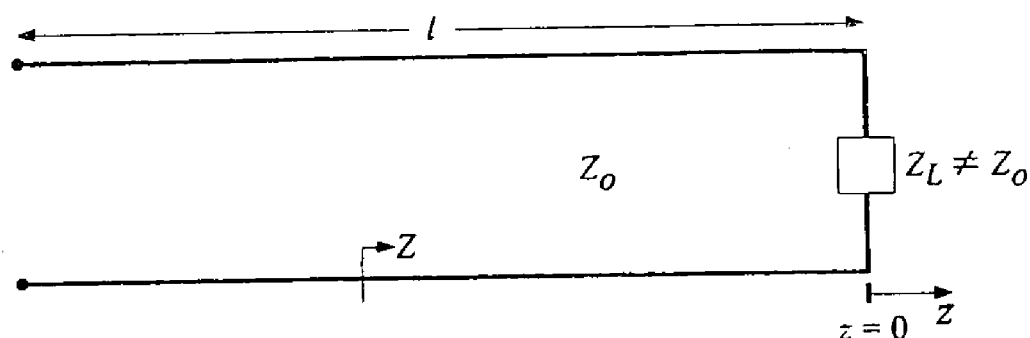


Fig. 2-36 Línea desacoplada de longitud l .

usando un “transformador de $\lambda/4$ ” en serie con la línea (Fig. 2-37a), o bien, conectando en paralelo a la línea principal uno o más segmentos de línea cortocircuitados (Figs. 2-37 b, c y d).

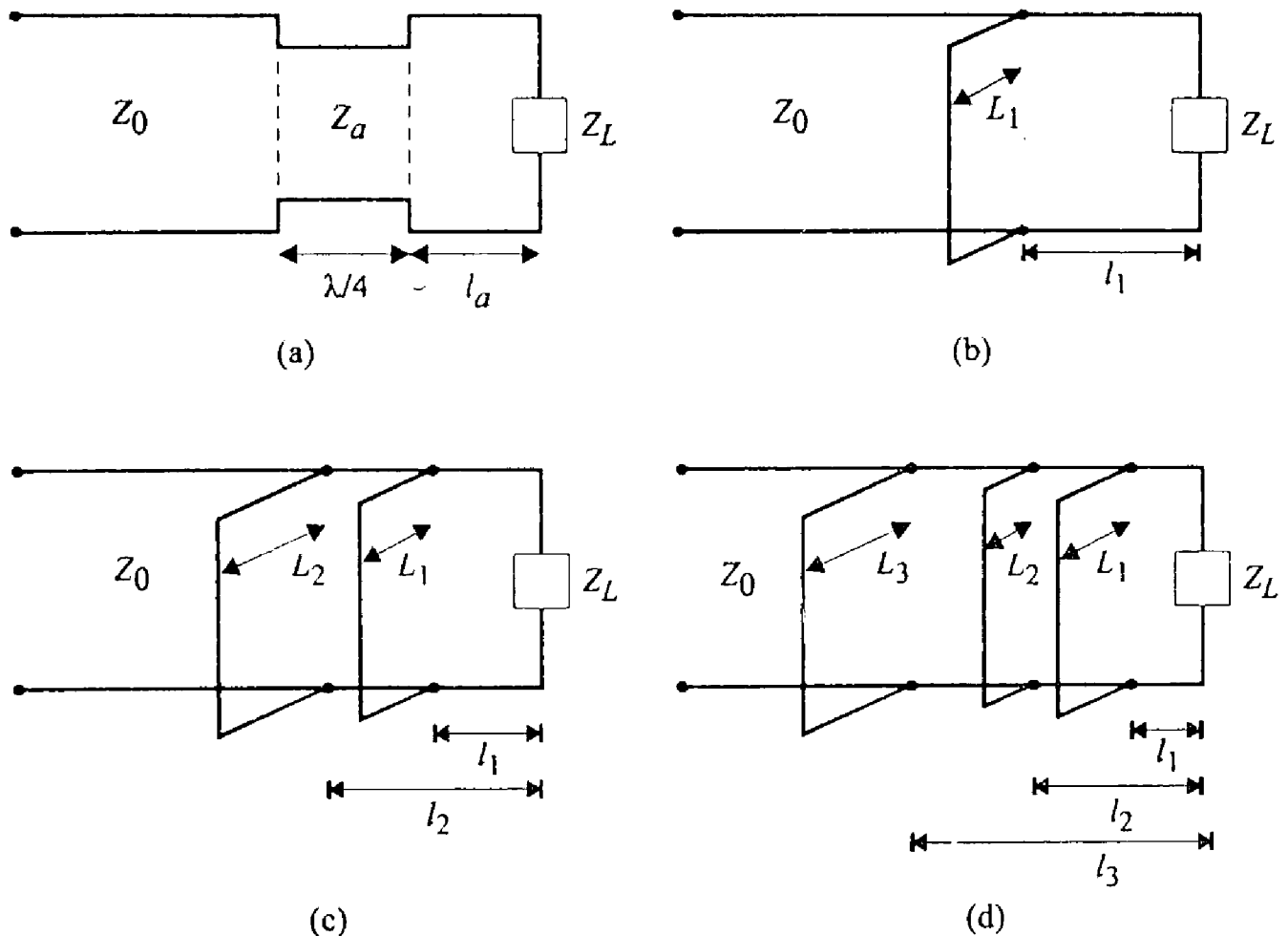


Fig. 2-37 Para acoplar una línea hay varias opciones: a) intercalando en serie un tramo de $\lambda/4$ de impedancia característica Z_a , a una distancia l_a de la carga; b) conectando en paralelo un “stub” de longitud L_1 a una distancia l_1 de la carga; c) conectando dos “stubs” en paralelo; d) empleando tres “stubs”.

A los segmentos de línea cortocircuitados de las Figs. 2-37 b, c y d se les llama “stubs” comúnmente*. Por su función, en castellano se les puede llamar “equilibradores de impedancias”; o bien, como se usan tramos pequeños de línea que pueden ser considerados como sin pérdidas, cuya impedancia de entrada es puramente reactiva, también se les puede designar como “equilibradores reactivos”. Algunos prefieren llamarlos “espolones”.

* En inglés, *stub* significa fragmento o porción pequeña de algo (por ejemplo, el talón de una chequera, la colilla de un cigarro, o un “pedacito” de línea).

En general, cualquier dispositivo empleado para acoplar una línea o adaptar su impedancia, como también se dice, es simplemente llamado “acoplador” o “adaptador”. Con él no sólo se logra obtener óptima transferencia de potencia a la carga, sino que, al eliminarse las reflexiones (o casi, dentro de cierto ancho de banda de frecuencias), la transmisión de señales digitales también se beneficia y los ecos en sistemas analógicos se reducen o desaparecen. Otra razón por la que se busca el mejor acoplamiento posible es que, por ejemplo, en sistemas radiotransmisores de alta potencia existe el riesgo de rompimiento eléctrico del dieléctrico entre los conductores, o de sobrecalentamiento, si se emplean voltajes y corrientes demasiado elevados; un sistema acoplado requeriría niveles inferiores de transmisión para tener el mismo alcance o resultados, y sería más seguro. La preferencia de uno u otro tipo de acoplador sobre otros dependerá de ciertas condiciones, como se verá a continuación.

2.16.1 Acoplamiento con una sección de $\lambda/4$

Suponiendo que la línea tenga muy pocas pérdidas, y aproximando $\alpha = 0$, la ec. (2-92) se reduce a:

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan(-\beta z)}{Z_0 + j Z_L \tan(-\beta z)} \quad (z \leq 0) \quad (2-94)$$

ecuación similar a la ec. (2-50), en función de z . Si la longitud de la línea es $\lambda/4$, entonces $-\beta z = -(2\pi/\lambda)(-\lambda/4) = \pi/2$. La función tangente tiende a infinito cuando su argumento vale $\pi/2 = 90^\circ$. Por lo tanto, la impedancia de entrada de esta línea de longitud $\lambda/4$ sería, de acuerdo con la ec. (2-94):

$$Z \Big|_{z=-\lambda/4} = Z_i = Z_0 \frac{\frac{Z_L}{\tan(-\beta z)} + j Z_0}{\frac{Z_0}{\tan(-\beta z)} + j Z_L} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (2-95)$$

Como Z_0 es real, de la ec. (2-95) se observa que una línea que mida $\lambda/4$ se comporta como un *inversor de impedancias*, pues a la entrada se ve el inverso

de Z_L multiplicado por un factor real, o bien, en la carga se tiene el inverso de la impedancia de entrada Z_i , también multiplicada por un factor real.

Así, por ejemplo, si la línea termina en corto circuito, en su entrada se obtiene el equivalente a un circuito abierto. Sin embargo, en la práctica, debido a las pérdidas de la línea (aunque sean muy pocas), no se logra obtener el circuito abierto perfecto, sino una gran impedancia resistiva a la entrada de la línea, dada por $Z_i \doteq Z_0/\alpha l$, donde αl es la atenuación total acumulada en el tramo de $\lambda/4$. La demostración de este resultado se obtiene fácilmente:

$$\tanh \gamma l = \tanh(\alpha l + j\beta l) = \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j(\tanh \alpha l)(\tan \beta l)}$$

Si αl es muy pequeño, $\tanh \alpha l \rightarrow \alpha l$, por lo que:

$$\tanh \gamma l = \frac{\alpha l + j \tan \beta l}{1 + j\alpha l \tan \beta l}$$

Y si $l = \lambda/4$, entonces $\tan \beta l = \tan 90^\circ \rightarrow \infty$, obteniéndose:

$$\tanh \gamma l = \frac{0 + j1}{0 + j\alpha l} = \frac{1}{\alpha l}$$

Sustituyendo este resultado y $Z_L = 0$ en la ec. (2-92) se tiene:

$$Z_i = Z \Big|_{z=-\lambda/4} = Z_0 \frac{0 + Z_0 \left(\frac{1}{\alpha l} \right)}{Z_0 + 0} = \frac{Z_0}{\alpha l} \quad (2-96)$$

Y como αl es muy pequeño y real, Z_i en la ec. (2-96) es resistiva y muy grande, en lugar del equivalente a un circuito abierto perfecto con impedancia infinita.

Pero veamos ahora cómo se puede aprovechar una línea de $\lambda/4$ como adaptador o acoplador de impedancias. Este método es sencillo y se puede emplear especialmente cuando la carga es resistiva. Sin embargo, una vez instalado el adaptador, si la frecuencia cambia, su longitud ya no será

exactamente de $\lambda/4$. Por lo tanto, el método es sensible a los cambios de frecuencia, así como también lo son todos los demás métodos que se verán más adelante con “stubs” en paralelo.

Con referencia a las Figs. 2-37 a y 2-38, y en base a la ec. (2-95) se tiene que:

$$Z_i = \frac{Z_a^2}{Z_B} \quad (2-97)$$

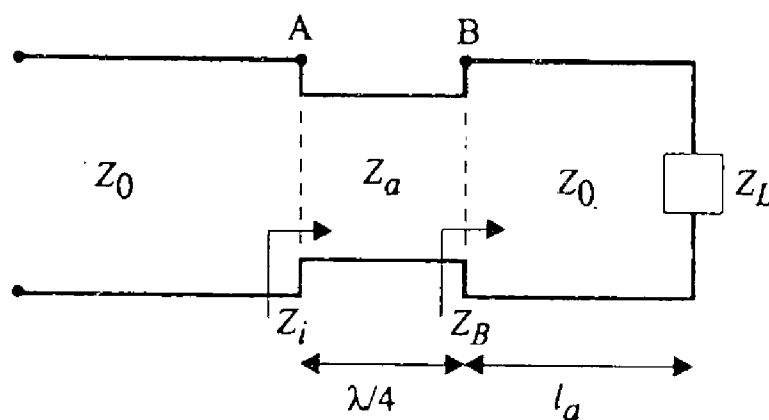


Fig. 2-38 La línea estará acoplada si en el punto A se ve una impedancia igual a Z_0 .

en donde Z_a es la impedancia característica del cable adaptador y Z_B es la impedancia que este adaptador vería como su carga. Si Z_L es real, el acoplador se puede instalar inmediatamente antes de la carga, como se muestra en la Fig. 2-39, en cuyo caso Z_B sería igual a Z_L , y la ec. (2-97) se convertiría en:

$$Z_i = \frac{Z_a^2}{Z_L} \quad (2-98)$$

Como se desea que la línea “vea” Z_0 en Z_i , para que esté acoplada, entonces se concluye que:

$$Z_0 = \frac{Z_a^2}{Z_L} \Rightarrow Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} \quad (2-99)$$

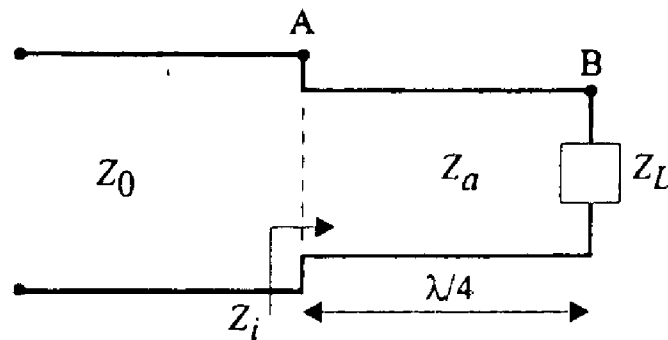


Fig. 2-39 Acoplamiento cuando la carga es resistiva.

La ec. (2-99) nos indica que el acoplador debe tener una impedancia característica igual a la media geométrica de la impedancia característica de la línea principal y la impedancia de la carga.

Si Z_L fuese compleja, la ec. (2-99) no podría ser satisfecha directamente porque, en general, como ya se vio con anterioridad, las impedancias características son reales a altas frecuencias. Por lo tanto, el acoplador tendría que colocarse en un lugar donde a su salida viese una impedancia real como carga. La Fig. 2-38 nos muestra que esto se logra colocando el extremo final del acoplador a una distancia l_a de la carga, obligando a que la ec. (2-94) dé un resultado real, evaluado en el punto B; es decir:

$$Z_B = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_a)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_a)} = \text{real} \quad (2-100)$$

Ahora bien, el tramo de $\lambda/4$ es un inversor de impedancias, y de acuerdo con la ec. (2-95), si se desea que $Z_i = Z_0$ en la Fig. 2-38, entonces:

$$Z_0 = \frac{Z_a^2}{Z_B} \Rightarrow Z_B = \frac{Z_a^2}{Z_0} \quad (2-101)$$

Recuérdese que la impedancia característica de una línea depende del dieléctrico entre sus dos conductores. De manera que, por ejemplo, si se tiene un cable coaxial, no es necesario usar un tramo de $\lambda/4$ con diámetros

interiores diferentes a los de la línea principal. La inserción de un dieléctrico distinto podría ser la solución, dependiendo de la situación en la realidad. En la Fig. 2-40 se muestra esta opción, que emplea “tapones” dieléctricos cilíndricos entre los dos conductores del cable.

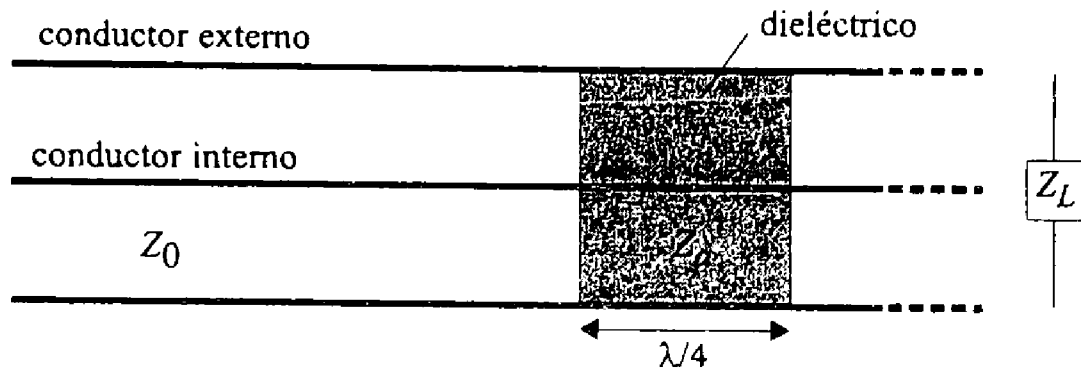
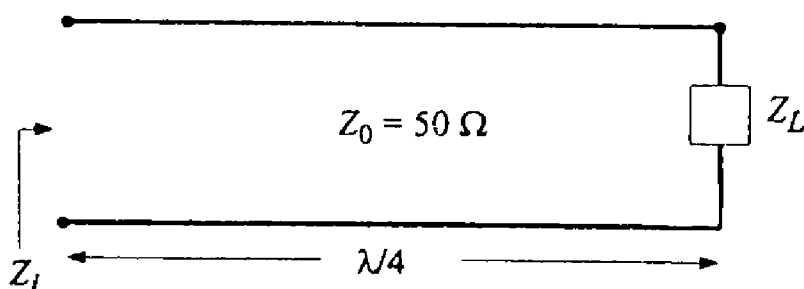


Fig. 2-40 Para obtener un tramo de $\lambda/4$ con impedancia característica Z_a se puede insertar un tapón o relleno dieléctrico cilíndrico en el interior del cable coaxial.

A continuación se realizarán algunos ejercicios y se mostrará cómo se puede emplear la carta de Smith para simplificar el trabajo.

Ejercicio 2-29 Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de 50Ω , está terminada en una carga cuya impedancia vale Z_L . Si la línea mide $\lambda/4$, obtenga la impedancia de entrada para: a) $Z_L = 80 \Omega$, b) $Z_L = 50 + j20 \Omega$, y c) $Z_L = -j20 \Omega$.

Solución



La ec. (2-95) permite responder a las tres preguntas.

a) $Z_L = 80 \Omega$:

$$Z_i = \frac{2500}{80} = 31.25 \Omega$$

b) $Z_L = 50 + j20 \Omega$:

$$Z_i = \frac{2500}{50 + j20} = 43.1 - j17.24 \Omega$$

c) $Z_L = -j20 \Omega$:

$$Z_i = \frac{2500}{-j20} = j125 \Omega$$

Los resultados de los incisos b) y c) confirman que el inversor de impedancias de $\lambda/4$ hace que una impedancia de carga inductiva se vea capacitiva en la entrada, y viceversa.

Veamos rápidamente la solución gráfica. El desplazarse desde la carga hasta el generador equivale a girar medio círculo en la carta, es decir, $\lambda/4$.

a) $Z_L = 80 \Omega$:

$$\hat{z}_L = \frac{80}{50} = 1.6 \quad (\text{punto A en la carta})$$

$$\hat{z}_i = 0.625 \quad (\text{punto B leído en la carta})$$

$$\Rightarrow Z_i = (0.625)(50) = 31.25 \Omega$$

b) $Z_L = 50 + j20 \Omega$:

$$\hat{z}_L = \frac{50 + j20}{50} = 1 + j0.4 \quad (\text{punto C en la carta})$$

$$\hat{z}_i = 0.86 - j0.35 \quad (\text{punto D leído en la carta})$$

$$\Rightarrow Z_i = (0.86 - j0.35)(50) = 43 - j17.5 \Omega$$

c) $Z_L = -j20 \Omega$:

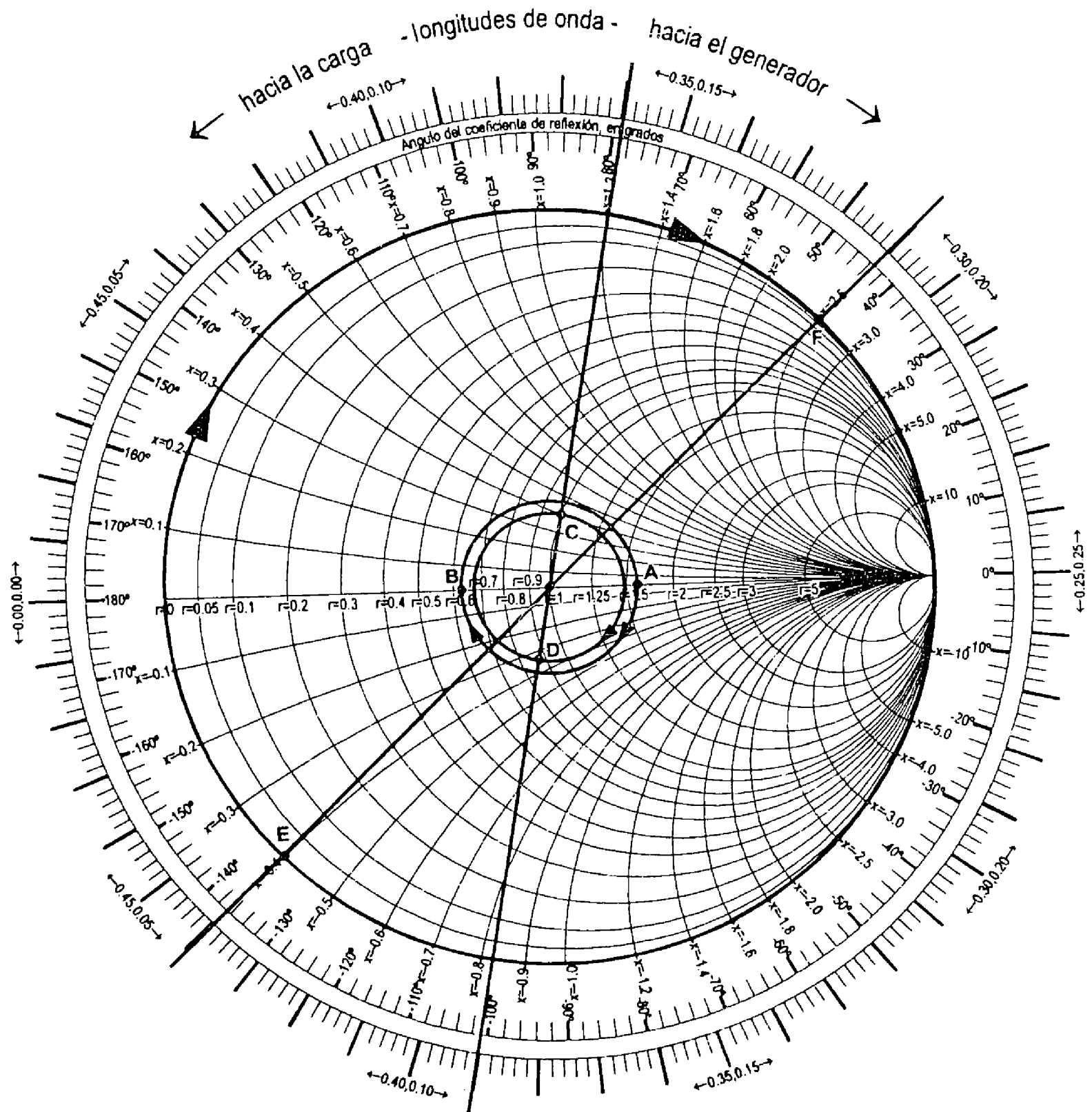
$$\hat{z}_L = \frac{-j20}{50} = -j0.4$$

(punto E en la carta)

$$\hat{z}_i = j2.5$$

(punto F leído en la carta)

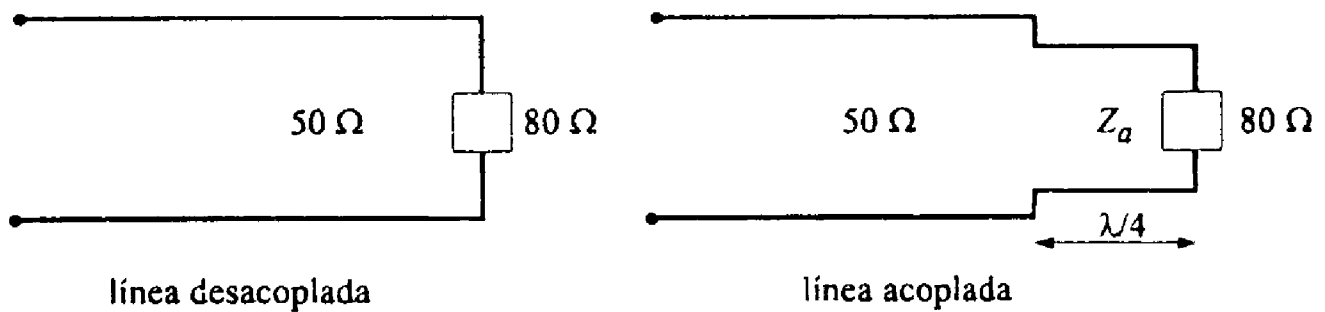
$$\Rightarrow Z_i = (j2.5)(50) = j125 \Omega$$



Carta de Smith del Ejercicio 2-29.

Ejercicio 2-30 Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de $50\ \Omega$, termina en una carga de $80\ \Omega$. ¿Cómo podría acoplarse la línea usando un adaptador de $\lambda/4$?

Solución



Como la carga es real, el acoplador puede ir inmediatamente a un lado de ella. El valor de Z_a se calcula con la ec. (2-99):

$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{(50)(80)} = 63.25\ \Omega$$

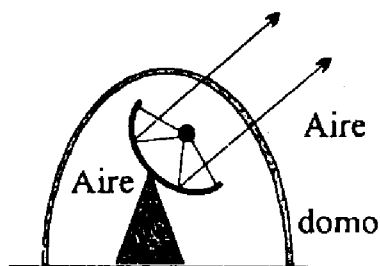
Ejercicio 2-31 Un buque petrolero tiene sobre cubierta una antena parabólica para comunicarse por satélite con otros puntos de la Tierra. Debido a las condiciones ambientales, conviene protegerla con un domo de material dieléctrico que sea transparente al paso de las ondas electromagnéticas. Calcule el grosor del domo para que no haya reflexiones al transmitir a $1.64\ \text{GHz}$, suponiendo que su material tiene una $\epsilon_r = 2.6$.

Solución

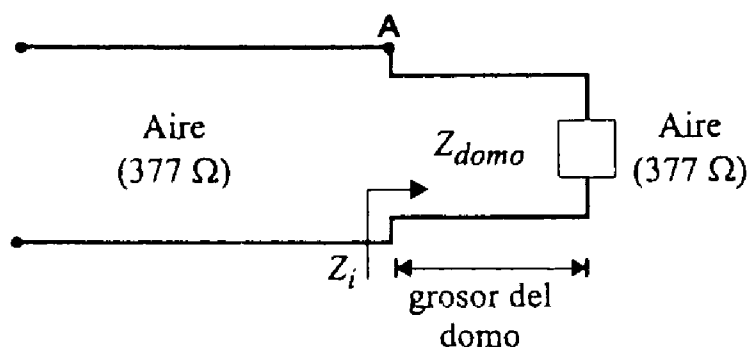
Aunque en realidad se está en el campo cercano de la antena, por simplicidad se puede considerar que la antena transmite una onda plana (véase la sección 4.2). Una onda plana es una onda TEM, por lo que se puede hacer una analogía con una línea de transmisión corta, cuya impedancia característica sea la del dieléctrico del domo y la carga tenga una impedancia igual a la del aire o el “espacio libre” ($377\ \Omega$).

A $1.64\ \text{GHz}$, la longitud de onda es:

$$\lambda_{\text{aire}} = \frac{c}{1.64 \times 10^9} = 18.29\ \text{cm}$$



Situación real



Analogía con una línea

$$\lambda_{\text{domo}} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 11.34 \text{ cm}$$

Se requiere que $Z_i = 377 \Omega$ para que no haya reflexiones. Como en este caso $Z_L = Z_0$, y de acuerdo con toda la teoría que se ha desarrollado hasta ahora, en el punto A se verá una impedancia $Z_i = Z_L$ cada vez que se avance $\lambda/2$ desde la carga hacia el principio de la línea equivalente. Esto se puede verificar por observación de la *ec* (2-94), haciendo $z = -n(\lambda/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, para lo cual la función tangente se vuelve cero y $Z_i = Z_L$. De manera que hay muchas soluciones para el grosor del domo: $\lambda/2$, λ , $3\lambda/2$, etc. El grosor elegido dependería de la resistencia a los golpes o al viento y de la rigidez que se deseara tener. Las primeras opciones serían entonces:

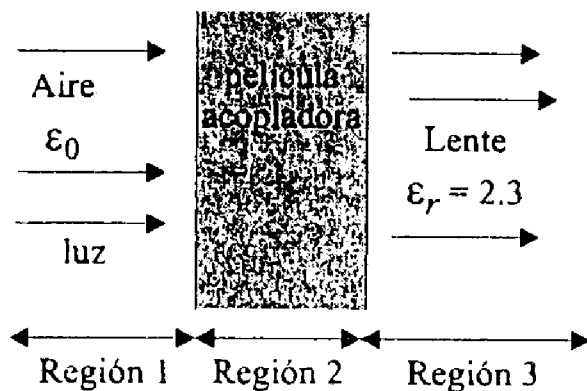
$$\left. \begin{array}{l} \text{grosor del domo} \\ \text{opción 1} \end{array} \right| = \frac{\lambda_{\text{domo}}}{2} = 5.67 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grosor del domo} \\ \text{opción 2} \end{array} \right| = \lambda_{\text{domo}} = 11.34 \text{ cm}$$

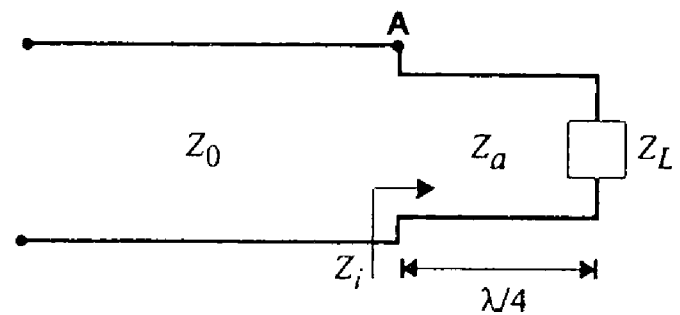
A frecuencias más altas, por ejemplo un radar que opere a 10 GHz en las regiones polares de la Tierra, el grosor del domo sería menor, pues la longitud de onda sería más corta.

Ejercicio 2-32 Se tiene una cámara con una lente cuya $\epsilon_r = 2.3$ y se desea captar la máxima cantidad de luz posible, evitando las reflexiones con una delgada película de otro material sobre la lente. Calcule el grosor necesario de este acabado o “barniz” pelicular que debe colocarse sobre la lente y la ϵ_r del material.

Solución



Situación real



Analogía con una línea

Nuevamente se puede hacer una analogía con una línea de transmisión, ya que:

$$Z_{\text{aire}} = 377 \, \Omega = Z_0$$

$$Z_{\text{lente}} = \frac{Z_{\text{aire}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{2.3}} = 248.6 \, \Omega = Z_L$$

Como ambas impedancias son reales, la solución del problema sería una capa de $\lambda/4$ junto a Z_L (la lente). Estrictamente, el grosor de esta capa pelicular podría ser cualquier múltiplo impar de $\lambda/4$, pero quedémonos con la primera opción (grosor = $\lambda/4$). De la ec. (2-99):

$$Z_a = \sqrt{(377)(248.6)} = 306.14 \, \Omega$$

por lo que $\epsilon_r|_{\text{película}} = 1.5165$.

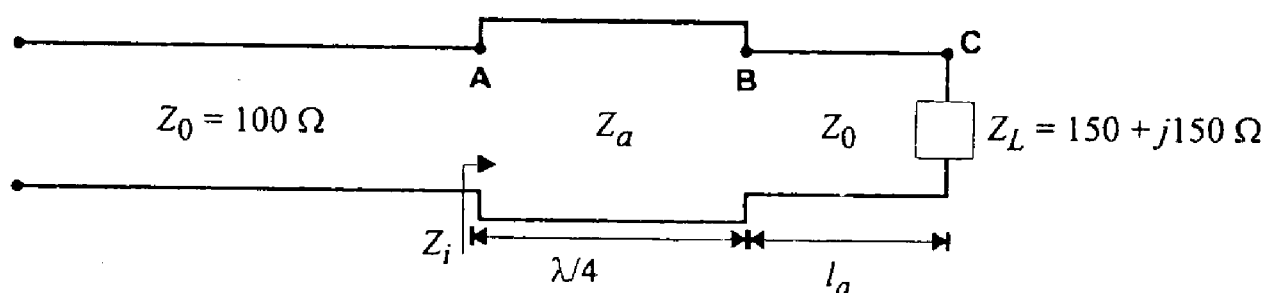
Si se considera una frecuencia dentro del espectro de la luz visible, digamos la correspondiente a una longitud de onda de 500 nm en el aire:

$$\lambda_{\text{película}} = \frac{500 \, \text{nm}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 406 \, \text{nm}$$

y su grosor debe ser $\lambda/4 = 0.101 \, \mu\text{m}$.

Ejercicio 2-33 Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de 100Ω , está terminada en una carga cuya impedancia vale $150 + j150 \Omega$. Se desea acoplarla por medio de un adaptador de $\lambda/4$, colocado a cierta distancia l_a de la carga. Calcule la impedancia característica del adaptador y la distancia l_a a la que debe colocarse con relación a la carga.

Solución



La distancia l_a podría encontrarse resolviendo la ec. (2-100). El resultado real sería Z_B , y con la ec. (2-101) se calcularía Z_a . Sin embargo, es más fácil resolver este problema usando la carta de Smith:

$$\hat{z}_L = \frac{150 + j150}{100} = 1.5 + j1.5 \quad (\text{punto C en la carta})$$

Al girar sobre el círculo de radio $\overline{OC}$ una distancia equivalente de 0.056λ hacia el generador, se encuentra la primera impedancia real (punto B), igual a:

$$\hat{z}_B = 3.35 \Rightarrow Z_B = 335 \Omega$$

Finalmente, usando la ec. (2-101):

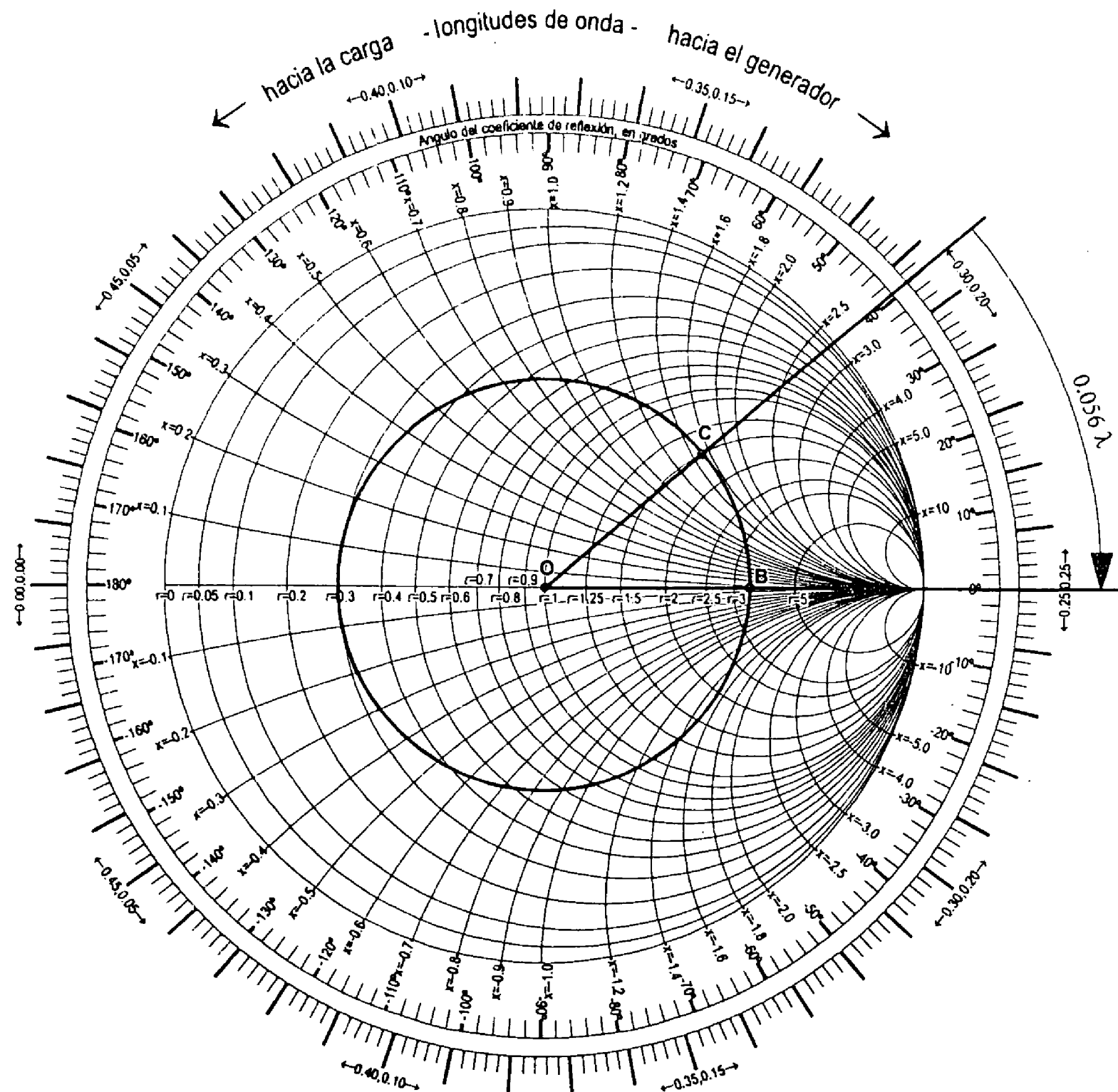
$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z_B} = \sqrt{33500} = 183 \Omega$$

Una verificación rápida para checar a $l_a = 0.056 \lambda$ se logra sustituyendo su valor en la ec. (2-100):

$$Z_B = 100 \left[\frac{150 + j150 + j100 \tan 20.16^\circ}{100 + j(150 + j150) \tan 20.16^\circ} \right]$$

$$= 100 \left[\frac{150 + j186.71}{44.93 + j55.07} \right] = 337 + j2.5 \Omega$$

Como se ve, el margen de error es muy pequeño, pues Z_B resulta casi totalmente real y similar al valor leído en la carta ($Z_B = 335 \Omega$).



Carta de Smith del Ejercicio 2-33.

2.16.2 Uso de la carta de Smith en su forma de admitancias

En las Figs. 2-37 b, c y d se mostraron varias alternativas para acoplar una línea usando “stubs” o equilibradores reactivos. Como éstos se conectan en paralelo con la línea principal, resulta más fácil trabajar con admitancias en lugar de impedancias. En las secciones 2.16.3 y 2.16.4 se verá también que los problemas de acoplamiento se resuelven con más rapidez usando la carta de Smith que con el método analítico. Por estas razones, conviene detenemos un momento y estudiar cómo se puede emplear dicha carta en su forma de admitancias.

Sea la admitancia $Y(z)$ el inverso de la impedancia $Z(z)$ y Y_0 la admitancia característica de la línea. $Y(z)$ se puede normalizar dividiéndola entre Y_0 :

$$\hat{y} = \frac{Y(z)}{Y_0} = \frac{1/Z(z)}{1/Z_0} = \frac{1}{\hat{z}} \quad (2-102)$$

donde $\hat{z}$ está dada por la ec. (2-73). Sustituyendo ésta en la ec. (2-102):

$$\hat{y} = \frac{1 - \rho_v(z)}{1 + \rho_v(z)} \quad (2-103)$$

El coeficiente ρ_v se definió en términos de los voltajes incidente y reflejado. De igual forma, se puede definir un coeficiente de reflexión de corrientes $\rho_i(z)$:

$$\rho_i(z) = \frac{I_r(z)}{I_i(z)} = -\frac{V_r(z)}{V_i(z)} = -\rho_v(z) \quad (2-104)$$

Al sustituir la ec. (2-104) en la ec. (2-103) se observa algo muy interesante:

$$\hat{y} = \frac{1 + \rho_i(z)}{1 - \rho_i(z)} = g + jb \quad (2-105)$$

Es decir, que las expresiones normalizadas de $\hat{z}$ y de $\hat{y}$ son idénticas, con sus respectivos coeficientes de reflexión. Como $\rho_i(z)$ se puede expresar nuevamente como una cantidad compleja igual a $u + jv$, resulta que los mismos círculos encontrados para la carta de Smith en su forma de

impedancias también se pueden usar en su forma de admitancias, siempre y cuando se haga la interpretación correcta, en base a la regla siguiente: En el plano complejo $u-jv$ se representa ahora la variación del coeficiente de reflexión de corrientes, cuya magnitud máxima es la unidad, e igual al radio del círculo para el cual $g = 0$; en los círculos de r se lee ahora el valor de g , y en los círculos de x se lee b . Compárese la Fig. 2-33 con la Fig. 2-41. En realidad, es más común usar la carta en su forma de impedancias, aun cuando

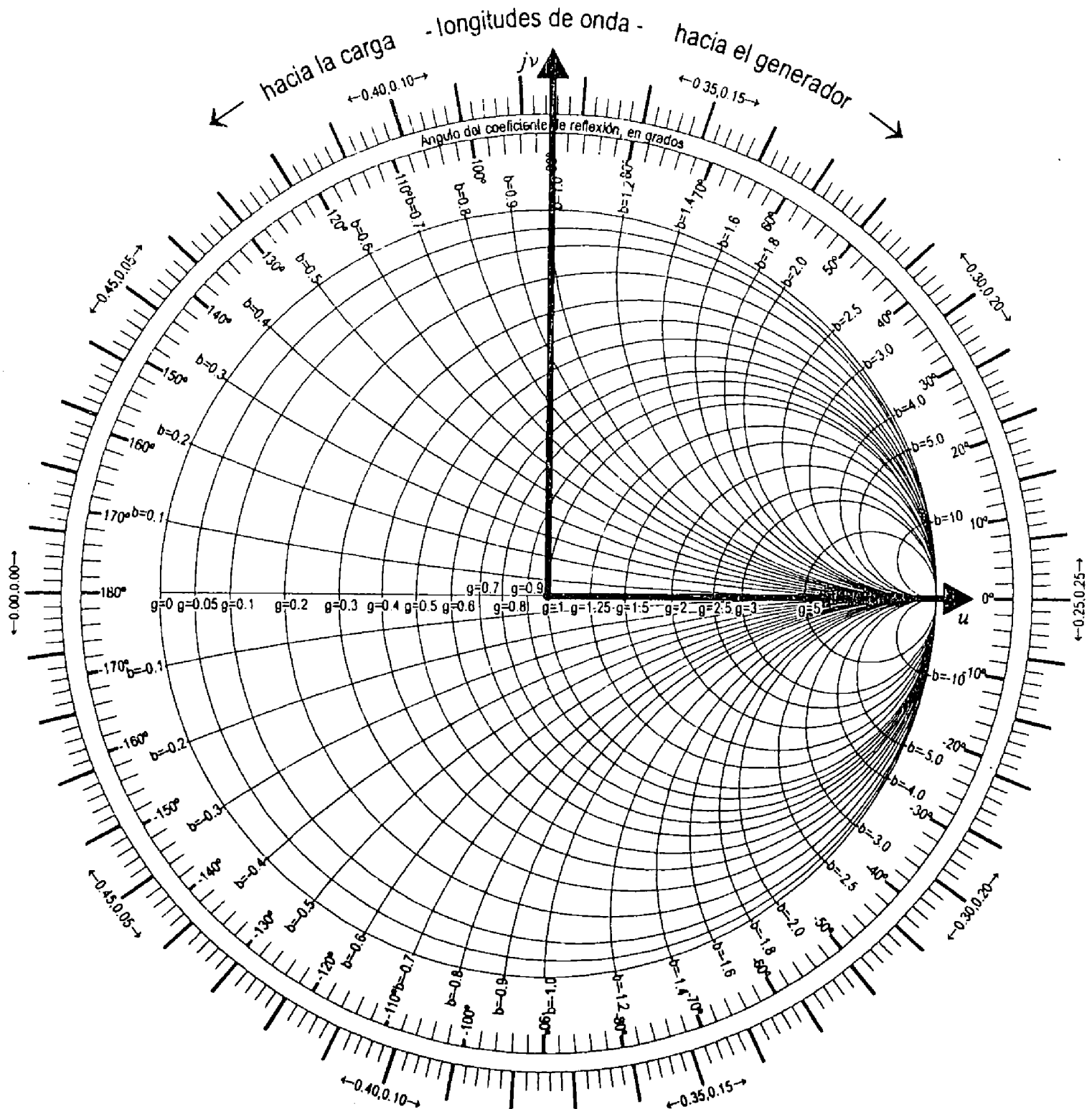
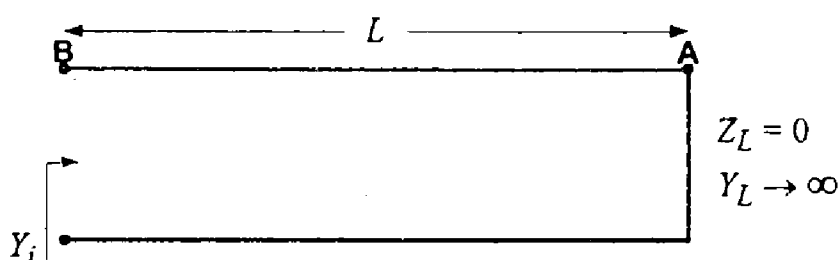


Fig. 2-41 La carta de Smith en su forma de admitancias. $\rho_i = u + jv$, $\hat{y} = g + jb$.

se sepa que se esté trabajando con admitancias; con un poco de orden y concentración se puede evitar cualquier error de interpretación. Hagamos algunos ejercicios antes de atacar el problema de los “stubs” en paralelo.

Ejercicio 2-34 Se necesita conocer la longitud de un equilibrador reactivo terminado en corto circuito que presente a la entrada una admitancia normalizada de $-j4$. Considere que el cable que se va a utilizar no tiene pérdidas. Después repita el ejercicio para que la admitancia normalizada valga $j1$.

Solución



Caso 1) $\hat{y}_i = -j4$

La carga es un corto circuito, que corresponde a una admitancia normalizada infinita. Por lo tanto, trabajando con admitancias, la carga corresponde al punto A en la carta ($g = \infty$). Para conocer la admitancia normalizada de entrada de este tramo de línea hay que girar nuevamente en el sentido de las manecillas del reloj. Se nos dice que $\hat{y}_i$ debe valer $-j4$; por lo tanto, hay que girar hasta encontrar el círculo correspondiente a $b = -4$ (punto B). El desplazamiento total fue de 0.039λ , de allí que el “stub” tiene esa longitud ($L = 0.039 \lambda$).

El resultado se puede verificar trabajando con impedancias. Ahora el corto circuito estaría en el lado opuesto de la carta (punto C). La impedancia de entrada normalizada sería:

$$\hat{z}_i = \frac{1}{\hat{y}_i} = \frac{1}{-j4} = j0.25 \quad (\text{punto D})$$

Esta impedancia normalizada se encuentra girando en el sentido de las manecillas del reloj una distancia equivalente a 0.039λ , con lo cual queda verificado el resultado obtenido anteriormente.

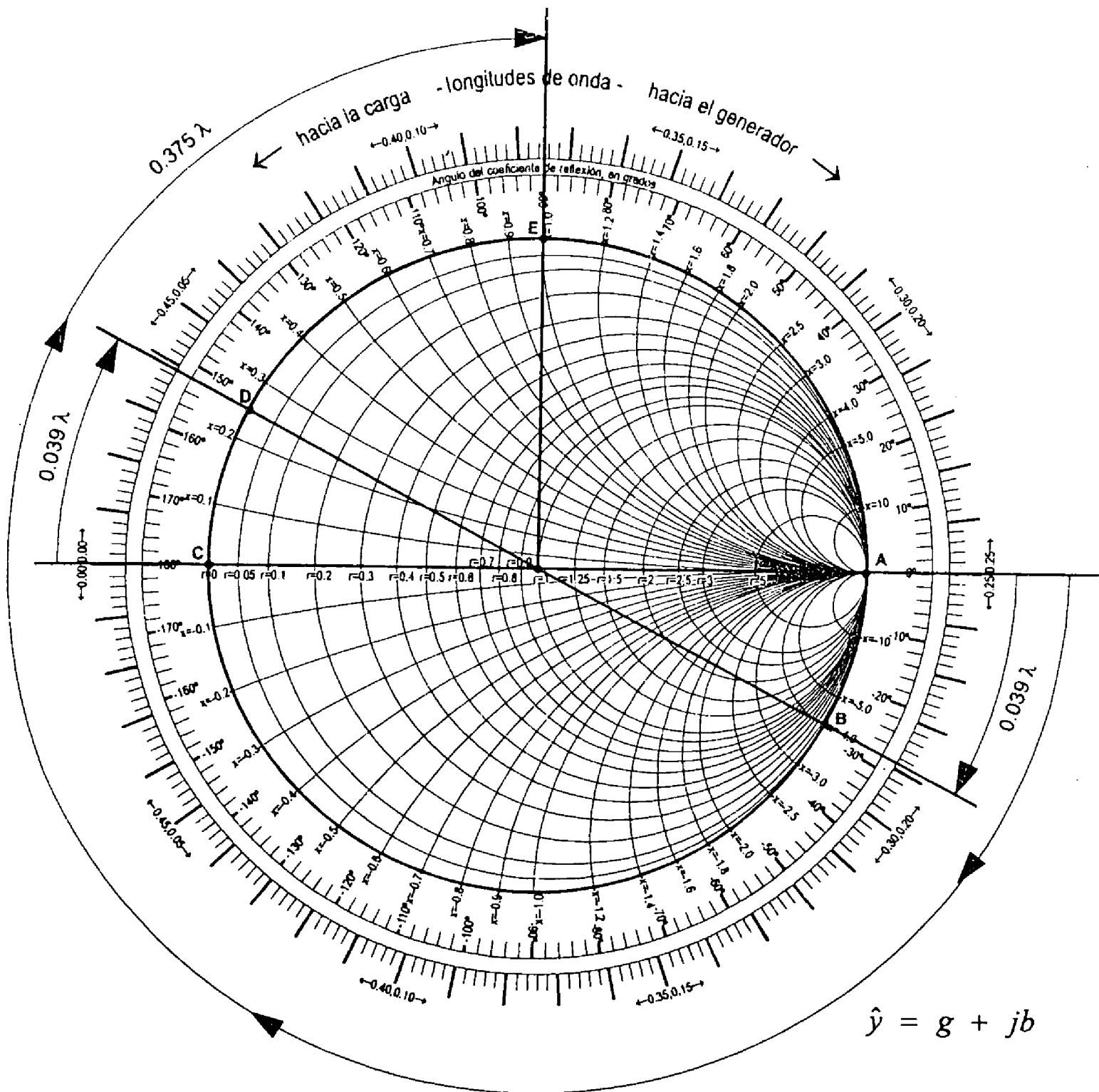
Es útil notar que si se conoce la posición del punto correspondiente a

cierta impedancia normalizada, entonces el punto que representa a su inverso, es decir, la admitancia normalizada, se encuentra diametralmente opuesto en la carta, pasando por el centro de la misma.

Caso 2) $\hat{y}_i = j1$

Nuevamente, la carga es el punto A (admitancia infinita). Girando en el sentido de las manecillas del reloj hasta encontrar el círculo de $b = 1$ (punto E), se determina que la longitud de este "stub" tendría que ser $L = 0.375 \lambda$.

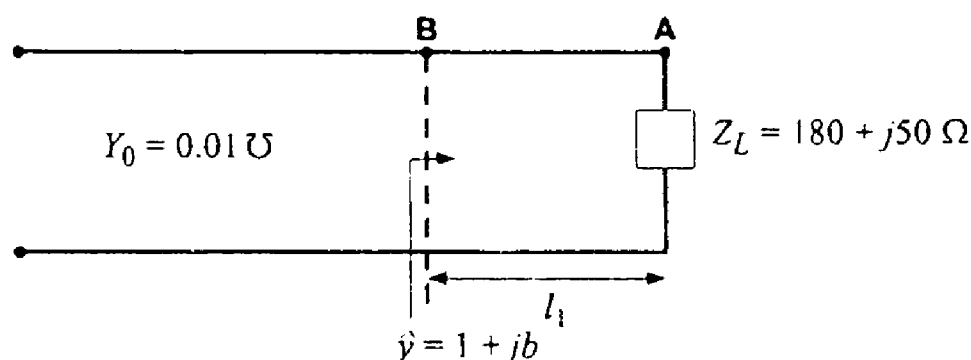
Hacer ejercicio 2-34



Carta de Smith del Ejercicio 2-34.

Ejercicio 2-35 Una línea de transmisión sin pérdidas termina en una carga con impedancia de $180 + j50 \Omega$. Si la admitancia característica de la línea es de 0.01 S , ¿a qué distancia de la carga se tiene una admitancia normalizada $\hat{y} = 1 + jb$?

Solución



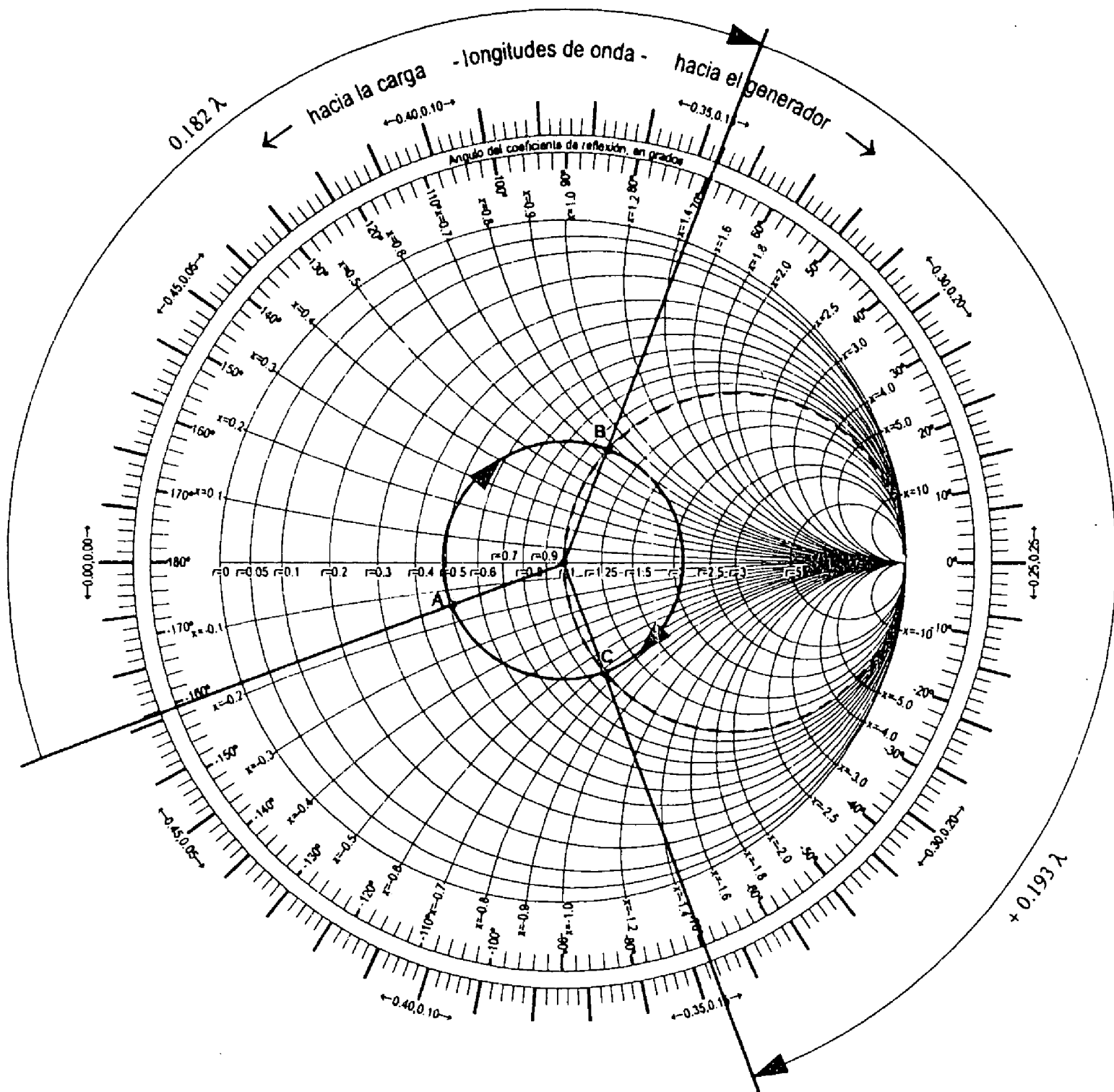
La carga tiene una admitancia normalizada de

$$\hat{y}_L = \frac{1}{\hat{z}_L} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} = \frac{1}{Y_0 Z_L} = \frac{1}{(0.01)(180 + j50)} = 0.51 - j0.14 \quad (\text{punto A})$$

Girando en el sentido de las manecillas del reloj (hacia el generador), hasta encontrar el círculo de $g = 1$, se determina que $l_1 = 0.182 \lambda$, con $b = j0.75$. Si uno continuase girando, se encontraría otra vez al círculo de $g = 1$ cuando $b = -j0.75$; ésta sería otra solución posible (punto C), con $l_1 = 0.182 \lambda + 0.193 \lambda = 0.375 \lambda$. En realidad, habría más soluciones posibles, que se encontrarían conforme girásemos más y más en la carta y se volviese a cruzar el círculo de $g = 1$, hasta que propiamente se acabase la línea. La susceptancia b iría cambiando de signo alternadamente.

2.16.3 Acoplamiento con un equilibrador reactivo (“stub”)

Los dos ejercicios anteriores nos van a servir para comprender rápidamente este tipo de acoplamiento con un equilibrador reactivo. Se puede decir que el problema ya está resuelto en gran medida, pues sólo falta juntar los resultados de ambos ejercicios. Con referencia a la Fig. 2-42 (véase también la Fig. 2-37 b), se desean eliminar las reflexiones a la izquierda de la unión



Carta de Smith del Ejercicio 2-35.

AA'. Para que esto se logre, se necesita que la línea principal vea en dicha unión una admitancia igual a su admitancia característica. El equilibrador reactivo debe compensar o equilibrar la susceptancia de la carga transferida al punto A con su propia susceptancia de entrada. Nótese que para el "stub", su entrada o inicio corresponde a la unión AA'. Este tramo de línea se

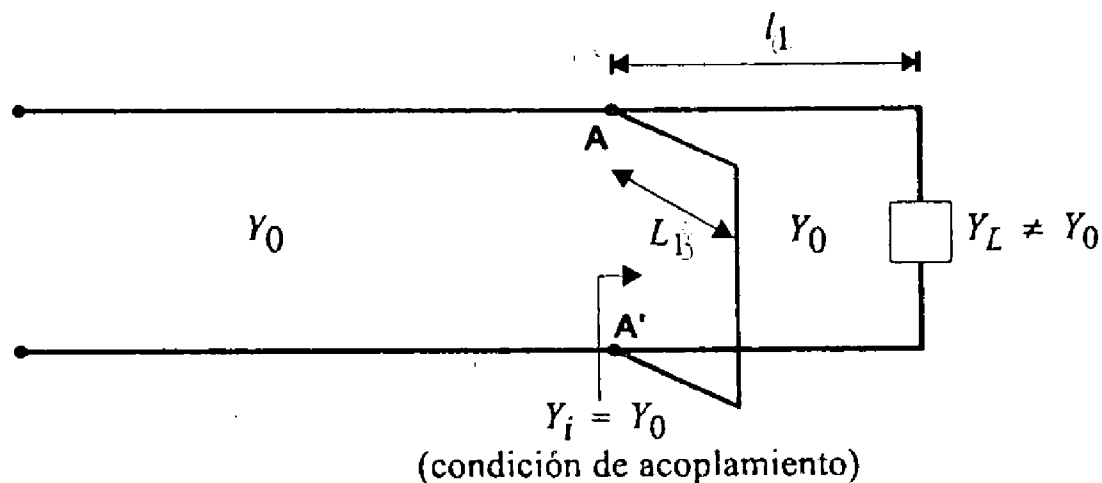


Fig. 2-42 Acoplamiento de una línea con un equilibrador reactivo o "stub".

considera sin pérdidas, al igual que la línea principal, y su admitancia característica también vale Y_0 .

De acuerdo con toda la teoría vista hasta ahora, la impedancia (o la admitancia) de la carga se puede "transferir" a otros puntos de la línea, en donde se ven impedancias (o admitancias) diferentes, según la distancia l_1 que se elija. Conforme uno avanza desde la carga hacia el generador, habrá una l_1 para la cual $Y = Y_0 + jS$. Si en ese lugar (AA') se une un "stub" en paralelo, cuya admitancia de entrada valga $Y_s = -jS$, la admitancia de entrada total será:

$$Y_i = Y + Y_s = Y_0 + jS - jS = Y_0$$

y la línea estará acoplada.

Desde luego, el mismo problema se puede simplificar si se utilizan admitancias normalizadas y la carta de Smith, en cuyo caso se requiere que:

$$\hat{y} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Y_0 + jS}{Y_0} = 1 + jb \quad (2-106)$$

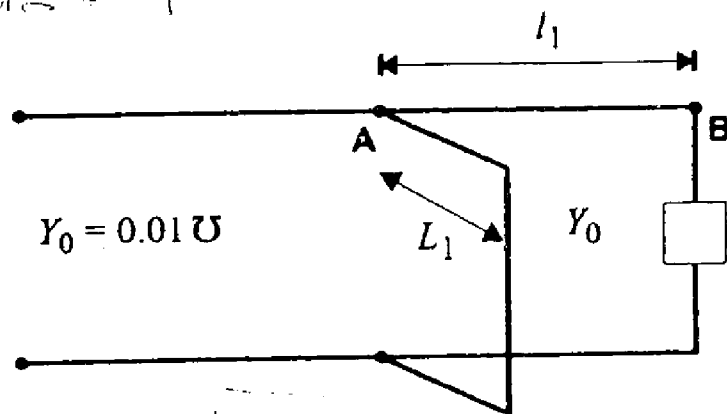
$$\hat{y}_s = \frac{-jS}{Y_0} = -jb \quad (2-107)$$

$$\hat{y}_i = \hat{y} + \hat{y}_s = 1 + jb - jb = 1 \quad (2-108)$$

El problema entonces consiste en determinar dos variables: a) la distancia l_1 a la que se debe colocar el equilibrador, y b) la longitud L_1 del mismo. Hagamos un ejercicio.

Ejercicio 2-36 Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una impedancia característica de 100Ω y está terminada con una carga compleja de $120 + j80 \Omega$. Se desean evitar las reflexiones hacia el generador, acoplando la línea con un equilibrador reactivo. Encuentre la posición más cercana a la carga sobre la línea principal donde debe unirse el equilibrador o "stub", y obtenga la longitud del mismo.

Solución



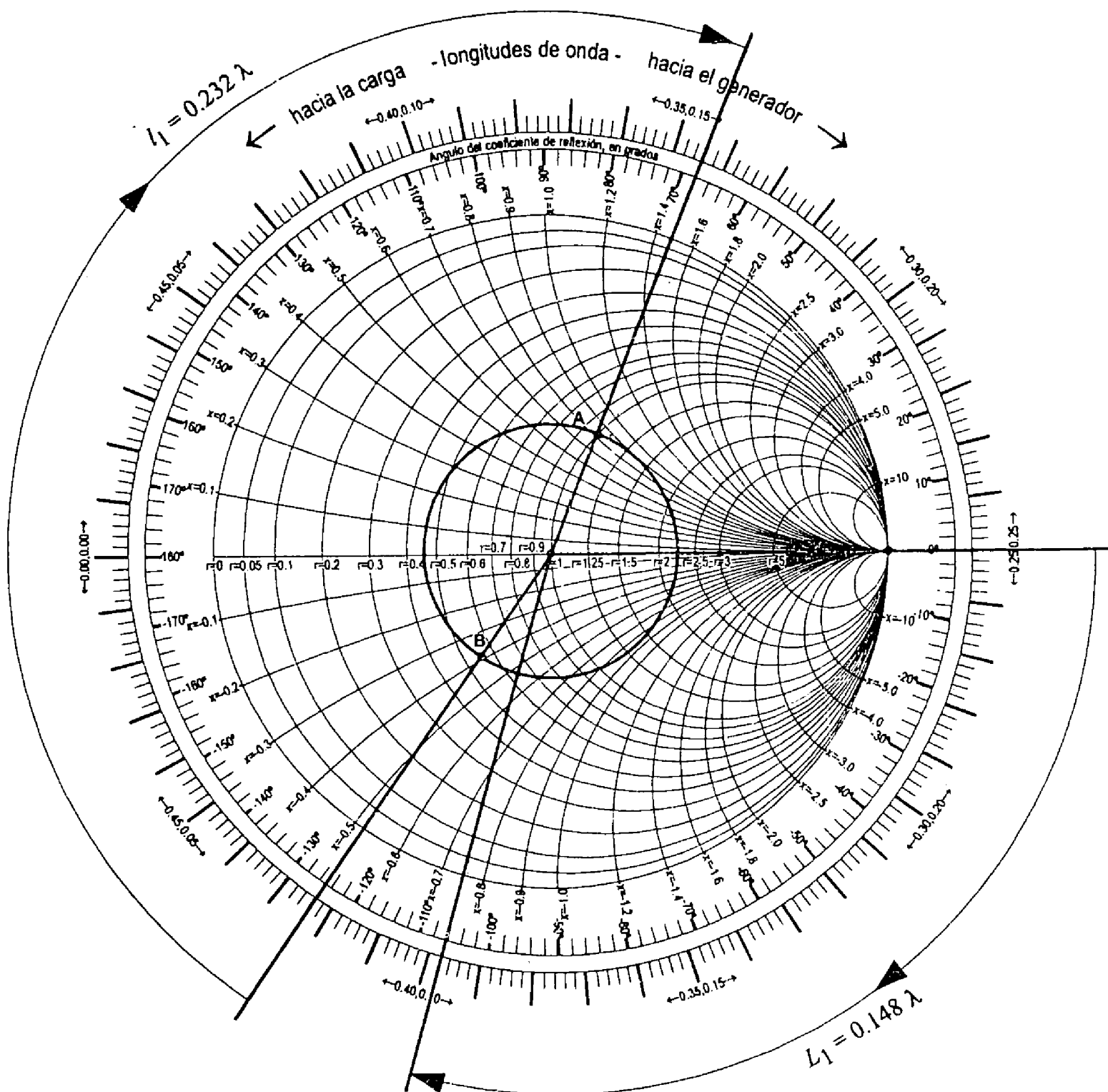
$$Y_L = (5.77 - j3.84) \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$\hat{Y}_L = \frac{Y_L}{Y_0} = 0.577 - j0.385$$

Si en la carta se identifica a $\hat{Y}_L$ como el punto B, hay que avanzar hacia el generador una distancia $l_1 = 0.232 \lambda$, posición en donde la parte real de $\hat{Y}$ es igual a la unidad (punto A). O sea que en A, la línea principal presenta una admitancia de:

$$\hat{Y} = 1 + j0.75$$

Comparando este resultado con la ec. (2-106), se tiene que $b = 0.75$. La ec. (2-107) indica que, por lo tanto, el "stub" debe tener una admitancia normalizada de entrada igual a $-j0.75$. Entonces, la longitud L_1 del stub debe ser tal que cumpla con dicho requisito a su entrada. Siguiendo un procedimiento similar al del Ejercicio 2-34, sobre la misma carta se demuestra que $L_1 = 0.148 \lambda$.



Carta de Smith del Ejercicio 2-36.

2.16.4 Acoplamiento con dos equilibradores reactivos (dos "stubs")

El método visto en la sección anterior brinda el acoplamiento buscado a una determinada frecuencia y para cierta impedancia de la carga. La técnica es interesante, porque **cualquier** carga finita diferente de cero se puede acoplar a la línea con un "stub". Sin embargo, si la frecuencia o la carga

cambian sustancialmente después de hecho el acoplamiento, habrá que modificar la longitud del “stub”, y también su posición a lo largo de la línea. Lo primero no es mayor problema, pues existen dispositivos deslizables que permiten acercar o alejar al corto circuito, según la reactancia de entrada que se desee (Fig. 2-43 a). En cambio, intentar modificar la posición del “stub” sí puede resultar muy inconveniente, en particular en un cable coaxial. La solución a esta dificultad es emplear dos equilibradores reactivos, en lugar de uno solo. De esta manera, las posiciones de los dos “stubs” se conservan fijas, y sus reactancias de entrada respectivas se pueden variar deslizando el corto circuito (Fig. 2-43 b), lográndose así la sintoni-

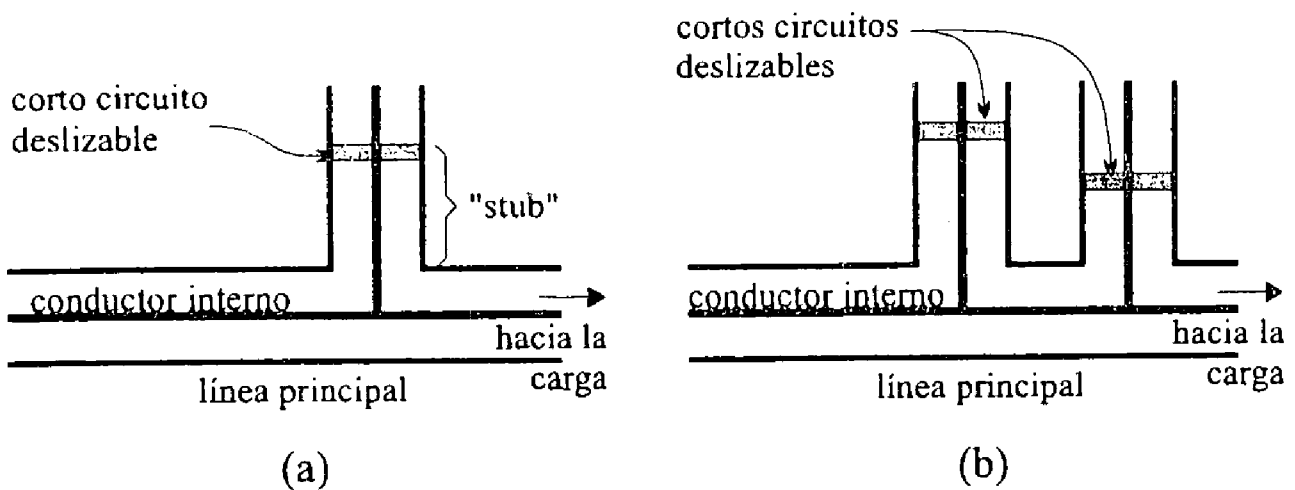


Fig. 2-43 a) Acoplamiento de impedancias con un equilibrador reactivo o “stub”.
b) Acoplamiento con dos “stubs”.

zación* o el acoplamiento óptimo en un rango más amplio de frecuencias. Sin duda, esta alternativa de acoplamiento es mejor que la que utiliza un solo “stub”, pero tiene el defecto de que no hay solución posible para todo tipo de carga, sino solamente para un cierto rango de valores de Z_L . Cuando este problema se presenta, la solución inmediata es emplear tres “stubs” (Fig. 2-37 d); con ellos, cualquier carga puede acoplarse a la línea.

El criterio y el procedimiento gráfico a seguir para adaptar o acoplar una línea con su carga empleando dos equilibradores reactivos de posición fija se describen a continuación.

* Debido a su función, los “stubs” también son denominados “sintonizadores de corto circuito móvil”.

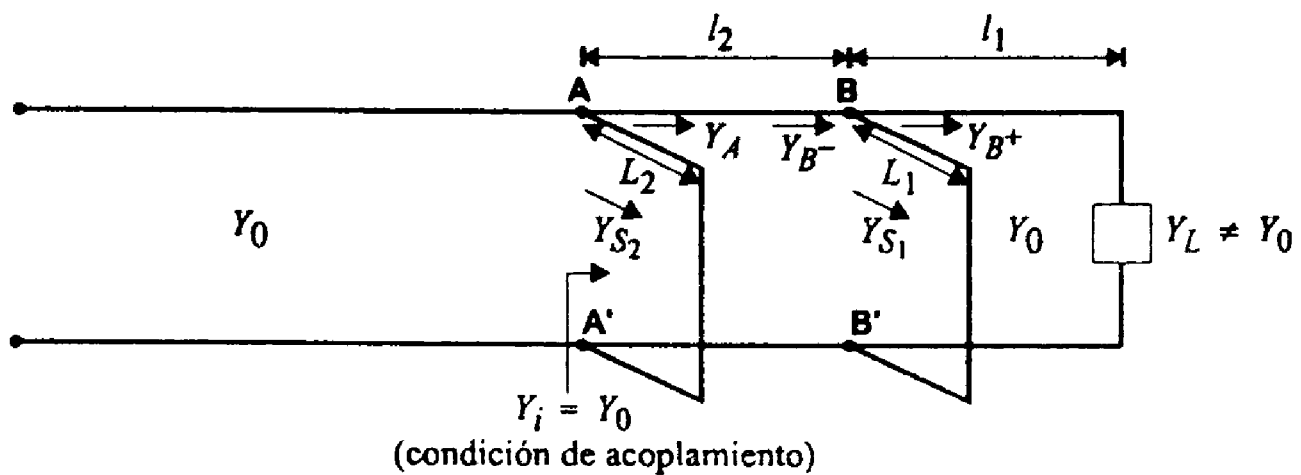


Fig. 2-44 Acoplamiento de una línea con dos equilibradores reactivos o "stubs".

Con referencia a la Fig. 2-44 (véase también la Fig. 2-37 c), la condición de acoplamiento en las terminales AA' es la misma que en el caso del acoplamiento con un "stub" (véase la Fig. 2-42, como comparación). Es decir, a la derecha de AA', la línea debe ver una admitancia de entrada Y_0 , igual a su admitancia característica. La distancia l_2 entre las dos ramas cortocircuitadas debe fijarse, y por lo general se hace igual a $\lambda/8$, aunque también pueden emplearse otros valores. Después se fija l_1 , y el problema entonces se reduce a encontrar las longitudes L_1 y L_2 . Si la situación lo permite, l_1 puede inclusive ser igual a cero, es decir, que el "stub" L_1 se puede conectar junto a la carga.

Trabajando con admitancias normalizadas, en AA' debe tenerse que:

$$\hat{y}_i = 1$$

Para que lo anterior se cumpla, se requiere que:

$$\hat{y}_i = \hat{y}_A + \hat{y}_{S_2} = (1 + jb_A) + \underbrace{jb_{S_2}}_{\text{admitancia normalizada del "stub" 2}} = 1 \quad (2-109)$$

o sea:

$$b_{S_2} = -b_A \quad (2-110)$$

En la carta de Smith, la admitancia $\hat{y}_A = 1 + jb_A$ debe estar en "algún lugar" sobre el círculo correspondiente a $g = 1$. Por lo tanto, esta admitancia, transferida al punto B donde está conectado el "stub" 1, es decir, desplazada una distancia l_2 hacia la carga, debe estar en "algún lugar" sobre otro círculo que equivale al círculo $g = 1$ movido un ángulo igual al equivalente a moverse l_2 hacia la carga (en el sentido contrario a las manecillas del reloj). Es decir, todas las admitancias posibles sobre el círculo $g = 1$ se transfieren al punto B y quedan ahora en el círculo B (Fig. 2-45). En esta figura, se ha supuesto que $l_2 = \lambda/8$, y se muestran, a manera de ejemplo, tres posibles ubicaciones de $\hat{y}_A$ y su transferencia correspondiente al círculo B. Esta transferencia se efectúa trazando círculos con centro en la carta.

Ahora bien, supóngase que la admitancia normalizada $\hat{y}_L$ de la carga queda ubicada como se muestra en la misma Fig. 2-45. Esta admitancia puede ser transferida al punto B de la Fig. 2-44 desplazándola l_1 hacia el generador, en el sentido de las manecillas del reloj. En la carta, quedaría sobre su círculo $|\rho| = \text{constante}$ (círculo 1), en el punto indicado por $\hat{y}_{B^+}$.

En B están conectados en paralelo el "stub" 1 y la línea. De modo que la admitancia total vista desde la izquierda de B sería:

$$\hat{y}_{B^-} = \hat{y}_{B^+} + \hat{y}_{S_1} \quad (2-111)$$

Pero $\hat{y}_{B^-}$ es igual a $\hat{y}_A$ después de ser transferida al círculo B. Y como $\hat{y}_{S_1}$ no tiene parte real, toda la parte real de $\hat{y}_{B^-}$ debe ser igual a la de $\hat{y}_{B^+}$. Es decir, que la admitancia transferida de la carga, $\hat{y}_{B^+}$, debe estar sobre el círculo con la misma g que $\hat{y}_{B^-}$. En la Fig. 2-45 se muestra una sección de este círculo con $g = \text{constante}$ (círculo 2) y la ubicación encontrada para $\hat{y}_{B^-}$. Conocida $\hat{y}_{B^-}$, su susceptancia se sustituye en la ec. (2-111) para encontrar la susceptancia con la que debe contribuir el "stub" 1:

$$\hat{y}_{S_1} = \hat{y}_{B^-} - \hat{y}_{B^+}$$

e igualando partes imaginarias:

$$b|_{\text{"stub" 1}} = b|_{B^-} - \underbrace{b|_{B^+}}_{\text{susceptancia de la carga transferida al punto B}} \quad (2-112)$$

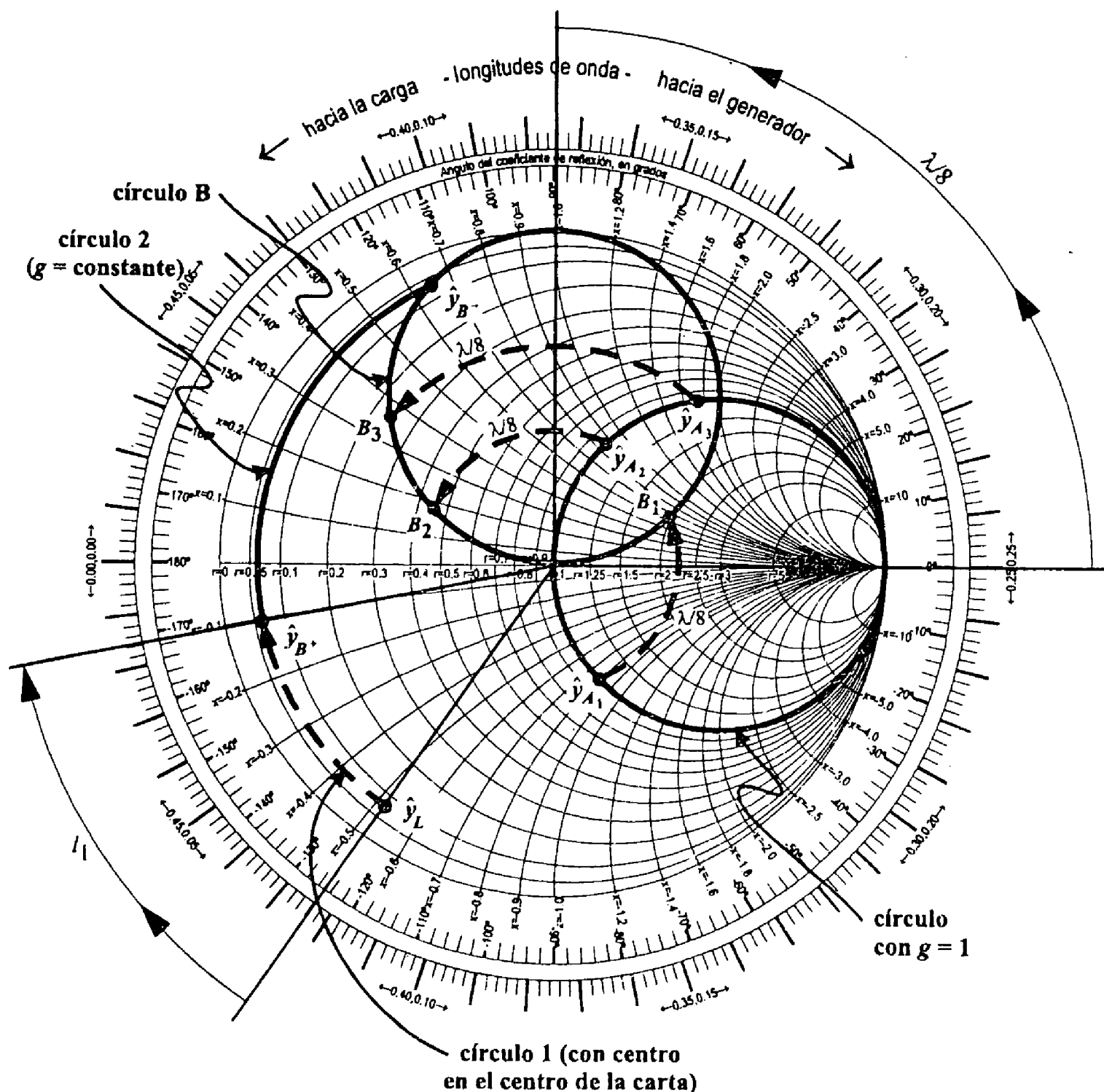
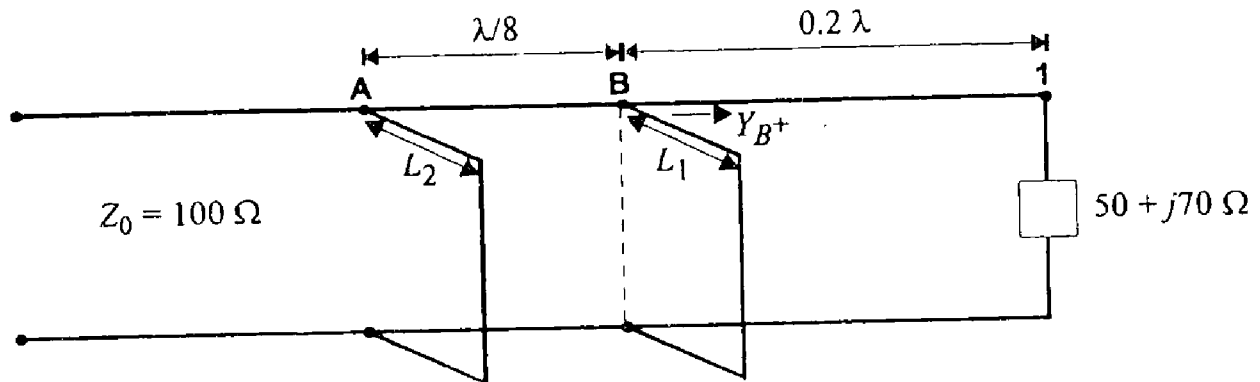


Fig. 2-45 Acoplamiento con dos "stubs". Aunque la carta de Smith está impresa en su forma de impedancias, hay que trabajar sobre ella pensando en su forma de admitancias.

Como ya se sabe dónde está $\hat{y}_{B-}$, se transfiere al círculo $g = 1$, en donde se lee la admitancia normalizada $\hat{y}_A$. La susceptancia de ésta debe ser el negativo de la susceptancia del "stub" 2, para que la admitancia total sea igual a 1, de acuerdo con la ec. (2-110). Con esto, ya se pueden calcular las longitudes de los "stubs" y el problema de acoplamiento ha quedado resuelto.

Ejercicio 2-37 Una línea cuya impedancia característica es de 100Ω termina en una carga de $50 + j70 \Omega$. Se desea acoplar la línea por medio de dos “stubs”, situados respectivamente a una distancia de 0.2λ y $0.2 \lambda + \lambda/8$ con relación a la carga. Encuentre la longitud de los dos acopladores cortocircuitados utilizando la carta de Smith.

Solución

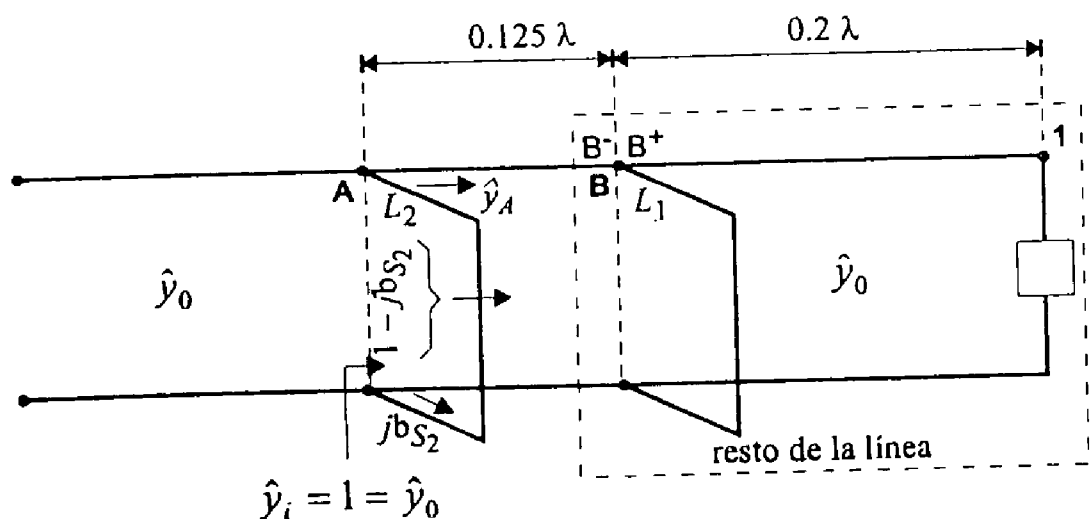


La admitancia normalizada de la carga es igual a:

$$\begin{aligned}\hat{y}_L &= \frac{Y_L}{Y_0} = 100 Y_L = 100 (0.00675 - j0.00946) \\ &= 0.675 - j0.946 \quad (\text{punto 1 en la carta})\end{aligned}$$

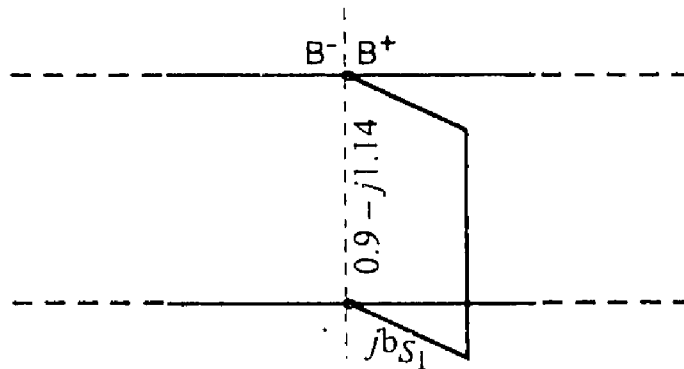
A una distancia de 0.2λ hacia el generador, la admitancia de la línea se mueve del punto 1 al punto B^+ en la carta ($0.9 - j1.14$), que equivaldría a $\hat{y}_{B^+}$ en la ec. (2-111).

Por otra parte, a la izquierda del punto de conexión del “stub” 2 se desea tener una admitancia normalizada igual a la unidad (punto A):



Como el “stub” 2 proporcionará la susceptancia b_{S_2} , inmediatamente después del punto de conexión la admitancia puede valer $1 - jb_{S_2}$ ($\hat{y}_A$). Todos los puntos posibles $\hat{y}_A$ se encuentran en el círculo C_1 de la carta ($g = 1$). Al transferir todos estos puntos posibles $\hat{y}_A$ hasta el siguiente “stub” (hacia la carga), en la carta equivale a mover todo el círculo C_1 en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El nuevo círculo que resulta (C_2) contiene todos los puntos posibles B^- ($\hat{y}_A$ transferida $\lambda/8$ hacia la derecha de la línea).

Ahora bien, para que todo encaje correctamente en el punto de conexión del “stub” más cercano a la carga, se debe cumplir que la suma de las admitancias a la izquierda y a la derecha del punto de conexión sea la misma:



Como el “stub” 1 no contribuirá con una parte real, en B^- la parte real deberá valer lo mismo que en B^+ , o sea $g = 0.9$. Por lo tanto, los puntos B^- que cumplen con esta condición se encuentran desplazando al punto B^+ sobre el círculo de g constante igual a 0.9 hasta cruzar el círculo C_2 . Ambas posibilidades están marcadas en la carta como los puntos $\hat{y}_{B_1^-}$ y $\hat{y}_{B_2^-}$. De la ec. (2-111):

$$\hat{y}_{B_1^-} = 0.9 + j0.005 = 0.9 - j1.14 + jb_{S_1} \Rightarrow b_{S_1} = 1.145$$

(primera opción)

$$\hat{y}_{B_2^-} = 0.9 + j1.96 = 0.9 - j1.14 + jb_{S_1} \Rightarrow b_{S_1} = 3.1$$

(segunda opción)

Regresando ahora al “stub” 2, los puntos $\hat{y}_{A_1}$ y $\hat{y}_{A_2}$ se encuentran fácilmente transfiriendo a $\hat{y}_{B_1^-}$ y $\hat{y}_{B_2^-}$, respectivamente, $\lambda/8$ hacia el generador (obviamente, quedarán sobre el círculo C_1). Sus admitancias se leen directamente en la carta: