Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Quinto Semestre

Unidad II: Línea de transmisión ideal en régimen permanente sinusoidal parte II

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Libres por la Ciencia y el Saber

Resumen

Si partimos de la expresión que nos proporciona la impedancia vista en cualquier punto de la línea, y la evaluamos en el punto $z=-l$ tenemos:

$$Z_{in} = Z(-l) = Z_c \left. \frac{U^+ e^{-j\beta z} + U^- e^{j\beta z}}{U^+ e^{-j\beta z} - U^- e^{j\beta z}} \right|_{z=-l} = Z_c \frac{e^{j\beta l} + \frac{U^-}{U^+} e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{U^-}{U^+} e^{-j\beta l}} = Z_c \frac{e^{j\beta l} + \rho_L e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \rho_L e^{-j\beta l}}$$

Introduciendo en la expresión del factor de reflexión ordenando términos:

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_c)\, e^{j\beta l} + (Z_L - Z_c)\, e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_c)\, e^{j\beta l} - (Z_L - Z_c)\, e^{-j\beta l}} = Z_c \frac{2Z_L \cos(\beta l) + 2jZ_c \operatorname{sen}(\beta l)}{2Z_c \cos(\beta l) + 2jZ_L \operatorname{sen}(\beta l)}$$

Tras dividir el numerador y el denominador por $2\cos(\beta l)$, llegamos a la expresión:

$$Z_{in} = Z(z=-l) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)}$$

que nos permite determinar de forma más sencilla el valor de la impedancia observada en cualquier punto de la línea a partir del conocimiento de la parámetros secundarios si Z es una cierta impedancia medida sobre una línea con una impedancia característica Z_c, su impedancia normalizada z (que representaremos en minúsculas) verificará:

$$z = \frac{Z}{Z_c} \Rightarrow Z = z Z_c$$

y las expresiones podrán escribirse en términos de impedancias normalizadas del siguiente modo:

$$z_L = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L}$$

$$\rho_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

$$z_{in} = z(-l) = \frac{z_L + j\tan(\beta l)}{1 + j z_L \tan(\beta l)} \quad , \quad \rho_{in} = \frac{z_{in} - 1}{z_{in} + 1}$$

Hasta ahora sólo se ha hablado de impedancias al operar con líneas de transmisión. Sin embargo, en aquellas situaciones donde aparezcan elementos conectados en paralelo resultará más sencillo trabajar con admitancias. Mientras que la impedancia proporciona la relación entre la tensión y la intensidad en un punto de la línea, la admitancia determina el cociente entre la intensidad y la tensión, de modo que siempre se puede obtener como la inversa de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = Y_c \frac{U^+ e^{-j\beta z} - U^- e^{j\beta z}}{U^+ e^{-j\beta z} + U^- e^{j\beta z}}$$

donde $Y_c = 1/Z_c$ representa la admitancia característica de la línea de transmisión.

Si conocemos el factor de reflexión ρ_L ante una determinada carga, para obtener el valor de la admitancia de carga Y_L podemos utilizar la relación inversa

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = Y_c \frac{1-\rho_L}{1+\rho_L}$$

y despejando obtenemos que el factor de reflexión ρ_L será igual a:

$$\rho_L = \frac{Y_c - Y_L}{Y_c + Y_L}$$

En cuanto a la admitancia que se observa a una distancia l del plano de carga, donde se encuentra una admitancia de carga de valor Y_L, podrá calcularse aplicando la siguiente relación:

$$Y_{in} = Y(z=-l) = \frac{1}{Z(z=-l)} = Y_c \frac{Y_L + jY_c \tan(\beta l)}{Y_c + jY_L \tan(\beta l)}$$

Admitancia normalizada

Al igual que sucede con las impedancias, en lugar de operar directamente con admitancias se suele emplear admitancias normalizadas con respecto a la admitancia característica de la línea de transmisión. Si trabajamos en términos de admitancias normalizadas, que representaremos con letras minúsculas, las expresiones se pueden escribir también de la siguiente forma:

$$y_L = \frac{1}{z_L} = \frac{1-\rho_L}{1+\rho_L}$$

$$\rho_L = \frac{1-y_L}{1+y_L}$$

$$y_{in} = y(-l) = \frac{1}{z(-l)} = \frac{y_L + \mathrm{j}\tan(\beta l)}{1+\mathrm{j}y_L \tan(\beta l)} \quad , \quad \rho_{in} = \frac{1-y_{in}}{1+y_{in}}$$

donde lógicamente desaparecen los términos asociados a la admitancia característica de la línea.

En esta sección nos centraremos en aplicar los conceptos de factor de reflexión e impedancia desarrollados en el apartado anterior a cuatro configuraciones simples pero importantes de una línea de transmisión, y que aparecen con bastante frecuencia en los circuitos de radiofrecuencia y microondas. Estos cuatro casos simples son:

a) Línea de transmisión terminada en carga adaptada.

b) Línea de transmisión terminada en cortocircuito.

c) Línea de transmisión terminada en circuito abierto.

d) Línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ terminada en cualquier carga.

Nuestro primer ejemplo de aplicación consiste en una línea de transmisión ideal con una impedancia característica Z_c que está terminada en una impedancia de carga de valor $Z_L = Z_c$, tal y como se muestra En este caso, ρ_L será igual a cero:

$$\rho_L = \left.\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}\right|_{Z_L = Z_c} = 0$$

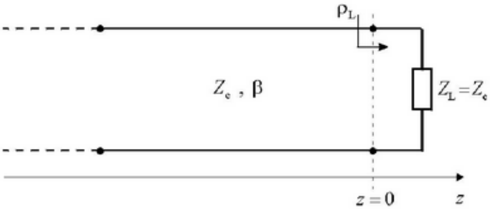


Figura Línea de transmisión terminada en una carga igual a su impedancia característica

A esta situación se la conoce como adaptación, e implica que no se genera la onda reflejada en el plano de carga ($U^- = \rho_L U^+ = 0$) al no existir discontinuidad en dicho plano.

Supongamos ahora que nuestra línea de transmisión esta terminada con un cortocircuito situado en su plano de carga, es decir, tenemos lo que se conoce como un “stub” en cortocircuito (ver Figura).

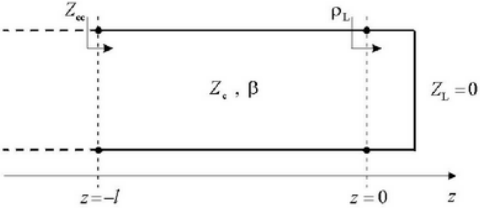


Figura Línea de transmisión terminada en cortocircuito

Empezamos calculando el factor de reflexión que presenta el cortocircuito en el plano de carga, cuyo valor resulta ser independiente de la impedancia característica de la línea de transmisión:

$$\rho_L = \left.\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}\right|_{Z_L=0} = -1$$

ya que la onda de tensión reflejada ha de contrarrestar a la onda de tensión incidente ($U^- = -U^+$) para que la tensión total en el cortocircuito sea cero.

Como resultado, el valor del factor de reflexión en un punto arbitrario z de la línea será igual a:

$$\rho(z) = \rho_L e^{2j\beta z} = -e^{2j\beta z}$$

lo que supone desplazarse en el plano complejo ($\mathrm{Re}(\rho), \mathrm{Im}(\rho)$) a lo largo de un círculo de radio unidad.

En este caso concreto el módulo del factor de reflexión es igual a uno (máximo valor posible), lo que corresponde a una situación de completa desadaptación entre la línea de transmisión y la carga conectada en su extremo (cortocircuito). Esta misma situación de total desadaptación también se produce si la línea se termina en circuito abierto (ver el siguiente caso) y cuando la carga es reactiva pura ($Z_L = j X_L$).

Para determinar la impedancia existente a una distancia l del plano de carga utilizaremos la expresión , de donde se obtiene:

$$Z_{cc} = Z_c \left. \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)} \right|_{Z_L=0} = jZ_c \tan(\beta l) = jX_{cc}$$

El siguiente ejemplo que vamos a tratar es la configuración de stub en circuito abierto (ver Figura). Dicha configuración consiste en una línea de transmisión terminada ahora en un circuito abierto.

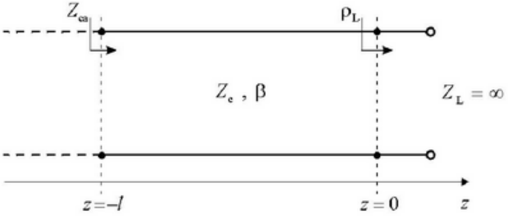


Figura ***Línea de transmisión terminada en circuito abierto***

En el plano de carga, el factor de reflexión para un circuito abierto ($Z_L = \infty$) será:

$$\rho_L = \left. \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \right|_{Z_L = \infty} = 1$$

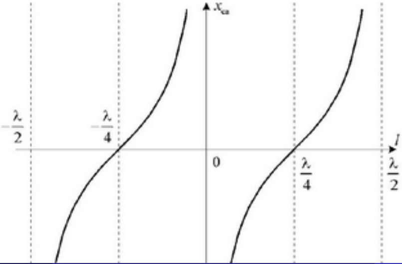
ya que $U^- = U^+$ para que la onda de intensidad reflejada contrarreste a la onda de intensidad incidente, logrando que la intensidad total que recorre la carga (circuito abierto) sea nula. Nuevamente, este resultado es independiente de la impedancia característica de la línea de transmisión.

La expresión anterior que determina la evolución del factor de reflexión a lo largo de la línea de transmisión supone, al igual que en el caso de cortocircuito, desplazarse en el plano complejo $(\mathrm{Re}(\rho), \mathrm{Im}(\rho))$ por un círculo de radio unidad.

Utilizando ahora la expresión podemos deducir que la impedancia observada a una distancia l del cortocircuito tendrá la siguiente forma:

$$Z_{ca} = Z_c \left. \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)} \right|_{Z_L = \infty} = \frac{Z_c}{j\tan(\beta l)} = -jZ_c \cot(\beta l) = jX_{ca}$$

que vuelve a ser reactiva pura y periódica de periodo $\lambda/2$, tal y como se deduce de la Figura



Nuestro último ejemplo de aplicación consiste en una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ a la frecuencia de trabajo, y en cuyo extremo conectamos una carga de impedancia arbitraria Z_L (ver Figura).

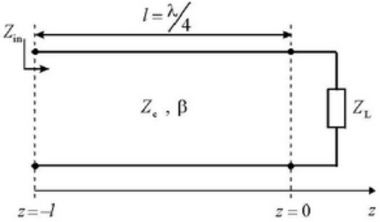


Figura Línea de transmisión de longitud $\lambda/4$

La propiedad más interesante que proporciona esta configuración particular de una línea de transmisión es el valor de la impedancia que se ve a la entrada de la línea. Si tenemos en cuenta que la longitud de la línea es $\lambda/4$, el valor de $\tan(\beta l)$ será:

$$\tan(\beta l)\Big|_{l=\frac{\lambda}{4}} = \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

de modo que la impedancia de entrada, calculada tomará el siguiente valor:

$$Z_{in} = Z_c \left. \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)} \right|_{l=\frac{\lambda}{4}} = \frac{jZ_c^{\,2}}{jZ_L} = \frac{Z_c^{\,2}}{Z_L}$$

y trabajando con impedancias normalizadas la expresión anterior quedará:

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_c} = \frac{Z_c}{Z_L} = \frac{1}{z_L}$$

De la última expresión se deduce que la impedancia normalizada a la entrada es la inversa de la impedancia normalizada de carga. Por dicha razón, a una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ se la conoce como un inversor de impedancias.

$$P_L = \frac{1}{2}\Re e\left\{VI^*\right\} = \Re e\left\{V_{ef}I_{ef}^*\right\} = \frac{1}{2}\Re e\left\{\left[V^+ + V^-\right]\frac{1}{Z_0}\left[V^{+*} + V^{-*}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2Z_0}\Re e\left\{\left|V^+\right|^2 - \left|V^-\right|^2 + V^{+*}V^- - V^+V^{-*}\right\}$$

Teniendo en cuenta que

$$\Re e\left\{V^{+*}V^- - V^+V^{-*}\right\} = 0$$

$$P_L = \frac{1}{2Z_0}\left(\left|V^+\right|^2 - \left|V^-\right|^2\right) = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left(1 - \frac{\left|V^-\right|^2}{\left|V^+\right|^2}\right) = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left(1 - \left|\rho_L\right|^2\right)$$

Por lo que se puede decir que la potencia total absorbida por la carga es la resta de la potencia incidente en la carga o potencia de la onda progresiva

$$P^+ = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}$$

y la potencia de la onda regresiva

$$P^- = P^+\left|\rho_L\right|^2$$

A partir de este resultado, podemos conocer el valor de dos importantes parámetros de cualquier dispositivo conectado a la línea de transmisión representado por la impedancia Z_L: las pérdidas de retorno y las pérdidas por reflexión.

Las pérdidas de retorno indican la atenuación de la potencia regresiva respecto a la progresiva:

$$RL\,(return\,loss) = 10\log\frac{P_{incidente}}{P_{reflejada}} = 10\log\frac{P^+}{P^-} =$$
$$= 10\log\frac{1}{|\rho_L|^2} = 20\log\frac{1}{|\rho_L|}$$

Las pérdidas por reflexión indican la reducción que se produce en la potencia absorbida por la carga debido al efecto de la reflexión:

$$10\log\frac{P_{incidente}}{P_{absorbida}} = 10\log\frac{1}{1-|\rho_L|^2}$$

Generalizando se puede calcular la potencia que fluye hacia la derecha (potencia neta progresiva) en cualquier punto z:

$$P(z) = \frac{1}{2}[V(z)\,I^*(z)] = \frac{1}{2Z_0}\left(\left|V^+(z)\right|^2 - \left|V^-(z)\right|^2\right) =$$
$$= \frac{\left|V^+(z)\right|^2}{2Z_0}\left(1-\left|\rho_L(z)\right|^2\right) = P^+ - P^-$$

El *coeficiente* o *relación de onda estacionaria* es el parámetro que cuantifica el patrón de onda estacionaria que se forma en la línea y se define como:

$$ROE = S = \frac{|V|_{máx}}{|V|_{mín}}$$

que podemos relacionar fácilmente con el coeficiente de reflexión en carga mediante

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

O, despejando $|\rho_L|$:

$$|\rho_L| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

La relación de onda estacionaria (ROE) se puede encontrar en la bibliografía también como SWR (*standing wave ratio*) o VSWR (*voltage standing wave ratio*). Si su valor se expresa en decibelios, dado que se trata de un cociente de tensiones, se obtiene como

$$S(dB) = 20 \log S$$

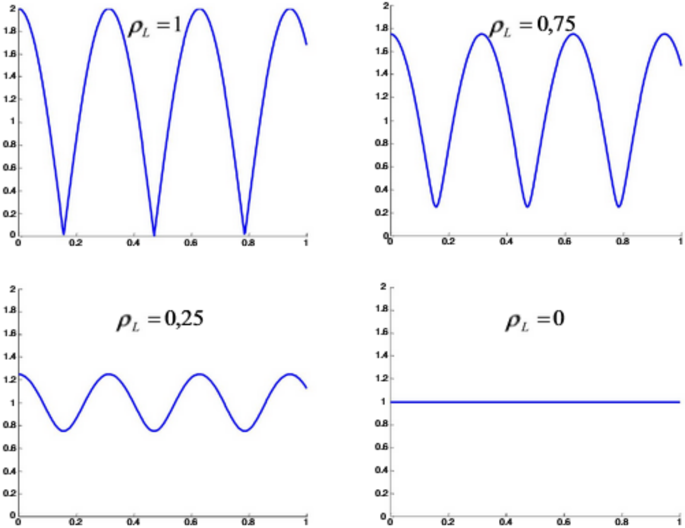


Figura Patrones de onda estacionaria

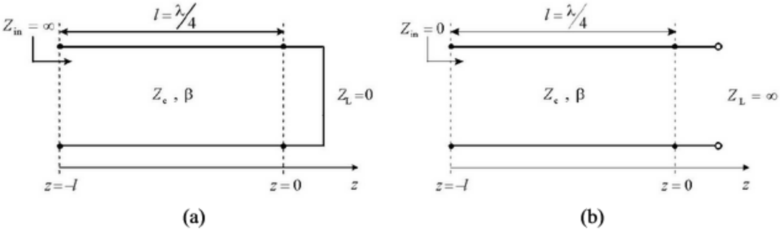


Figura ***Inversor de impedancias en $\lambda/4$ terminado en cortocircuito (a) y terminado en circuito abierto (b)***

Una primera aplicación práctica de un inversor de impedancias la podemos obtener de los dos ejemplos anteriores (casos b y c), donde se comentó que las impedancias que proporcionan sendos stubs terminados en cortocircuito y en circuito abierto son exactamente las mismas salvo por el desfase correspondiente a un tramo de línea de longitud $\lambda/4$, es decir, un inversor. De hecho, y tal y como se muestra en la Figura , si la carga conectada al inversor de impedancias es un cortocircuito, la impedancia de entrada será la de un circuito abierto. Mientras que para una carga de circuito abierto nos encontraremos a la entrada con la impedancia propia de un cortocircuito. Este resultado nos indica que es posible implementar uno de dichos elementos (cortocircuito o circuito abierto) mediante el otro elemento y un inversor de impedancias a la frecuencia de trabajo.

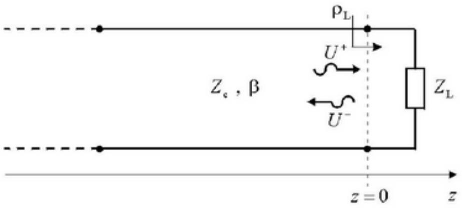


Figura ***Línea de transmisión terminada en una carga de valor*** Z_L

Analizar la relación de onda estacionaria del circuito de la Figura.

$$Z_{\text{in}} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)} \ , \ Y_{\text{in}} = \frac{1}{Z_{\text{in}}} = Y_c \frac{Y_L + jY_c \tan(\beta l)}{Y_c + jY_L \tan(\beta l)}$$

donde Z_L representa la impedancia conectada en el plano de carga.

Sin embargo, existe una forma más compacta para expresar las relaciones anteriores. En concreto, utilizando las siguientes propiedades de la tangente hiperbólica:

$$\tanh(jz) = j\tan(z) \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh(z_1) + \tanh(z_2)}{1 + \tanh(z_1) \cdot \tanh(z_2)} \ , \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

demostrar que la impedancia y la admitancia de entrada se pueden escribir como:

$$Z_{\text{in}} = Z_c \tanh(\delta + j\beta l) \ , \ \delta = \tanh^{-1}(Z_L/Z_c)$$

$$Y_{\text{in}} = Y_c \tanh(\delta + j\beta l) \ , \ \delta = \tanh^{-1}(Y_L/Y_c)$$

Consideremos el circuito mostrado en la Figura donde conectamos una línea de transmisión ideal de impedancia característica Z_{c1} y longitud infinita a otra línea de transmisión ideal de impedancia característica Z_{c0}.

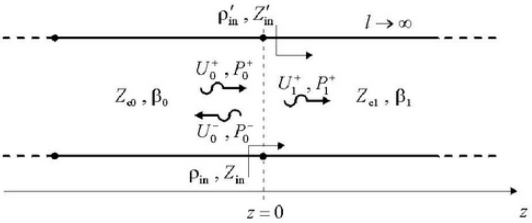


Figura Circuito considerado para el problema

a) Teniendo en cuenta que en una línea de transmisión de longitud infinita no existen reflexiones, calcular el factor de reflexión ρ'_{in} y la impedancia Z'_{in} que se observa a la entrada (en el plano $z = 0$) sobre dicha línea.

b) Calcular el factor de reflexión ρ_{in} y la impedancia Z_{in} que se mide en el plano de carga $z = 0$ de la línea de transmisión ideal de impedancia característica Z_{c0}.

Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones
Quinto Semestre
Unidad II: Línea de transmisión ideal en régimen permanente sinusoidal parte II
PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber