

Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Quinto Semestre

Unidad I: Impedancia de entrada

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro



1 ANTECEDENTES

2 Propagación en líneas de transmisión

3 Trabajos propuestos

1 ANTECEDENTES

2 Propagación en líneas de transmisión

3 Trabajos propuestos

Teoremas útiles

- Circuito con amplificador.
- Conversiones lineales a logarítmicas.

1. $40 \text{ mV @ } 50 \Omega = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dBm}$

2. $3 \text{ dBW @ } 75 \Omega = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$

3. $96 \text{ dB}\mu\text{V @ } 75 \Omega = \underline{\hspace{2cm}} \mu\text{W}$

4. $2,5 \text{ mW @ } 50\Omega = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dB}\mu\text{V}$

A $75\ \Omega$ coaxial line has a current $i(t, z) = 1.8 \cos(3.77 \times 10^9 t - 18.13z)$ mA. Determine (a) the frequency, (b) the phase velocity, (c) the wavelength, (d) the relative permittivity of the line, (e) the phasor form of the current, and (f) the time domain voltage on the line.

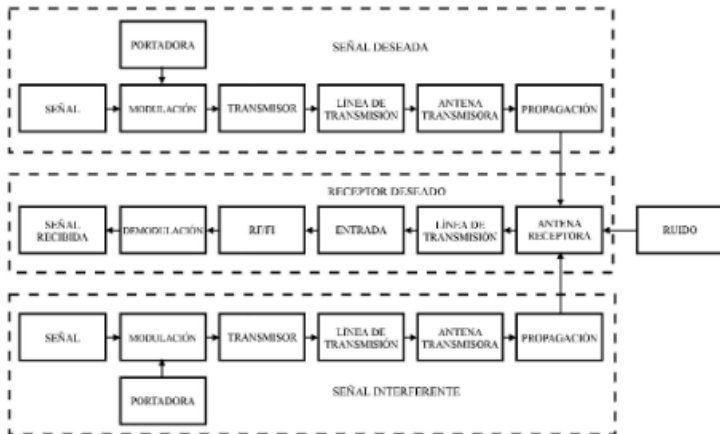
1 ANTECEDENTES

2 Propagación en líneas de transmisión

3 Trabajos propuestos

Una línea de transmisión constituye básicamente un sistema destinado a guiar, o dirigir, energía electromagnética. Las líneas de transmisión constituyen un elemento clave de cualquier sistema de Telecomunicación, en los que se ocupan de conducir (o transportar) la energía electromagnética entre otros bloques del sistema. La ubicación de una línea de transmisión en el diagrama de bloques general de por ejemplo un sistema de Radiocomunicaciones se muestra en la siguiente figura.

Los sistemas de Telecomunicación, y en particular de Radiocomunicaciones, utilizan diferentes tipos de líneas de transmisión según la banda de frecuencias en la que operan respectivamente.



La teoría electromagnética moderna comienza cuando en 1865 J. C. Maxwell formula sus famosas ecuaciones a partir únicamente de consideraciones matemáticas y llega a la conclusión de que la energía electromagnética se propaga en forma de onda en el espacio.

Esta hipótesis puramente matemática es demostrada experimentalmente en 1888 por Heinrich Hertz, quien demostró, además, el efecto resonante sintonizado tanto de un oscilador como de un detector. El experimento consistió en la carga de las dos mitades de un dipolo de media onda (60 MHz) de 5 metros de longitud con una diferencia de potencial muy elevada para provocar una chispa en la apertura (Fig. 1.1) con la que diera comienzo la oscilación y, de ese modo, producir la radiación de energía a la frecuencia de resonancia del dipolo. Como elemento receptor empleó una espira de longitud variable.

La teoría electromagnética moderna comienza cuando en 1865 J. C. Maxwell formula sus famosas ecuaciones a partir únicamente de consideraciones matemáticas y llega a la conclusión de que la energía electromagnética se propaga en forma de onda en el espacio.

Esta hipótesis puramente matemática es demostrada experimentalmente en 1888 por Heinrich Hertz, quien demostró, además, el efecto resonante sintonizado tanto de un oscilador como de un detector. El experimento consistió en la carga de las dos mitades de un dipolo de media onda (60 MHz) de 5 metros de longitud con una diferencia de potencial muy elevada para provocar una chispa en la apertura (Fig. 1.1) con la que diera comienzo la oscilación y, de ese modo, producir la radiación de energía a la frecuencia de resonancia del dipolo. Como elemento receptor empleó una espira de longitud variable.

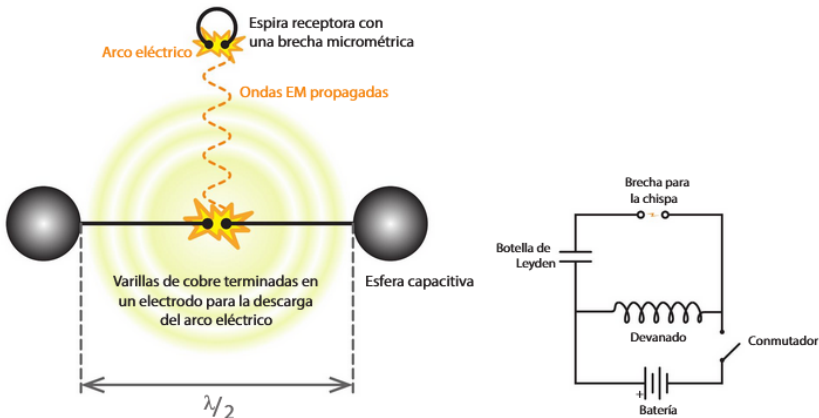


Figura Infografía del dipolo de media onda empleado en el experimento de Hertz y esquemático circuital conceptual del ensayo

Piénsese que la transmisión de telegrafía en banda base requeriría de antenas enormes (del orden de cientos de kilómetros), lo que lo hacía completamente inviable.

Banda	Designación	Línea de Transmisión	Aplicaciones
3-30 kHz 100-10 km	Very Low Frequency (VLF)	Par de hilos	Navegación Sonar
30-300 kHz 10-1 km	Low Frequency (LF)	Par de hilos	Radionavegación Radioayudas
300-3 000 kHz 1 000-100 m	Medium Frequency (MF)	Cable coaxial	Radiodifusión AM Radio Marítima
3-30 MHz 100-10 m	High Frequency (HF)	Cable coaxial	Teléfono, telégrafo, fax Onda corta internacional Radioaficionados Banda civil Comunicaciones entre barco-costa y barco-avión
30-300 MHz 10-1 m	Very High Frequency (VHF)	Cable coaxial	Radiodifusión de TV y FM Radionavegación Comunicaciones móviles de SP (Policía, Taxis)
300-3 000 MHz 100-10 cm	Ultra High Frequency (UHF)	Cable coaxial Guía de ondas	Radiodifusión de TV Telefonía móvil Radionavegación Comunicaciones por satélite

Tabla . Bandas de Microondas

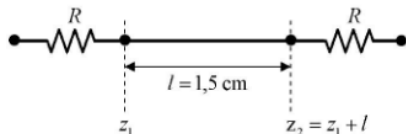
Banda	Frecuencias (GHz)
L	1-2
S	2-4
C	4-8
X	8-12,4
Ku	12,4-18
K	18-26,5
Ka	26,5-40

Esta designación de las bandas de microondas es bastante antigua, por lo que no debe extrañar si en alguna referencia bibliográfica se encuentra una denominación diferente.

Por su parte, la banda de frecuencias definida entre 40 y 300 GHz se denomina “ondas milimétricas”, debido a que las longitudes de onda de dicha banda están comprendidas entre 7,5 y 1 mm, respectivamente. Esta banda, debido a los mayores requisitos espectrales de algunas de las presentes y futuras aplicaciones de los sistemas de telecomunicación, es objeto de interés y estudio en los últimos tiempos (cada día surgen nuevos dispositivos diseñados para operar en dicha banda). Los sistemas de medida profesionales también se mejoran con el objeto de poder medir todos estos nuevos dispositivos que operan en la banda de milimétricas.

Las líneas de transmisión se encargan de conectar los diferentes elementos o subsistemas que integran los equipos de comunicaciones. Así por ejemplo, tal y como se comentó en el capítulo anterior, las líneas de transmisión se ocupan de unir los equipos transmisores y receptores con sus respectivas antenas en los sistemas de radiocomunicaciones.

Estas líneas de transmisión, a las frecuencias típicas de operación de los sistemas de radiocomunicaciones (bandas VHF a ondas milimétricas), presentan dimensiones que son comparables a la longitud de onda (λ). Esto supone, bajo excitación senoidal, que las magnitudes tensión (u) y corriente (i) presenten desfases importantes a lo largo de la línea de transmisión, efecto que no aparecía en los circuitos operando a bajas frecuencias. A modo de ejemplo, seguidamente (ver Figura 1.1) se muestra el desfase que se produce entre dos puntos de un cable (línea de transmisión) de longitud $l = 1,5$ cm que conecta dos resistencias de valor R a la frecuencia $f = 10$ GHz.



$$f = 10 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 3 \text{ cm}$$

$$u(z_1) \approx e^{-jkz_1}$$

$$u(z_2) \approx e^{-jkz_2} = e^{-jk(z_1+l)}$$

$$e^{-jk(z_1+l)} = e^{-jkz_1} \cdot e^{-jk\frac{2\pi\lambda}{\lambda}\frac{l}{2}} = -e^{-jkz_1} = -u(z_1)$$

Figura Efecto del desfase en líneas de transmisión a altas frecuencias

Por tanto, para analizar completamente las líneas de transmisión en alta frecuencia, será necesario estudiar la propagación de las magnitudes tensión (u) y corriente (i) a lo largo de su longitud. Es decir, se comprobará que dichas magnitudes no sólo dependerán de la variable temporal (como ocurre en baja frecuencia), sino que su valor también tendrá dependencia espacial ($u(z, t)$ e $i(z, t)$).

Una línea de transmisión se representa generalmente e indistintamente con los símbolos representados en la figura

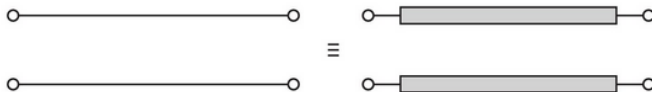
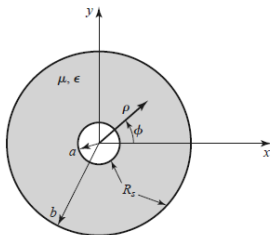


Figura 1.1 Representación de una línea de transmisión

Parámetros principales del cable coaxial



$$\vec{E} = \frac{V_0 \hat{\rho}}{\rho \ln b/a} e^{-\gamma z},$$

$$\vec{H} = \frac{I_0 \hat{\phi}}{2\pi \rho} e^{-\gamma z},$$

- Datos:

- $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$.

- $\mu = \mu_0 \mu_r$

- Solución

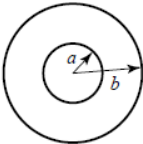
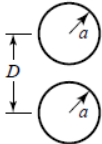
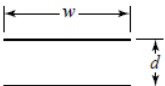
$$L = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\phi = \frac{\mu}{2\pi} \ln b/a \text{ H/m},$$

$$C = \frac{\epsilon'}{(\ln b/a)^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\phi = \frac{2\pi \epsilon'}{\ln b/a} \text{ F/m},$$

$$R = \frac{R_s}{(2\pi)^2} \left\{ \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{a^2} a d\phi + \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{b^2} b d\phi \right\} = \frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Omega/\text{m},$$

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{(\ln b/a)^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\phi = \frac{2\pi \omega \epsilon''}{\ln b/a} \text{ S/m}.$$

Principales Líneas de 2 conductores

	COAX	TWO-WIRE	PARALLEL PLATE
			
L	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{D}{2a} \right)$	$\frac{\mu d}{w}$
C	$\frac{2\pi \epsilon'}{\ln b/a}$	$\frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1} (D/2a)}$	$\frac{\epsilon' w}{d}$
R	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{w}$
G	$\frac{2\pi \omega \epsilon''}{\ln b/a}$	$\frac{\pi \omega \epsilon''}{\cosh^{-1} (D/2a)}$	$\frac{\omega \epsilon'' w}{d}$

Fuente: POZAR, David M. Microwave Engineering 3e. Wiley, 2006.

Ecuación general de una línea de transmisión

A partir de ahora vamos a intentar modelar mediante ecuaciones diferenciales las relaciones entre tensiones y corrientes que tienen lugar en una línea de transmisión a partir de una sección elemental de la misma y, para ello, asumiremos dos hipótesis de trabajo que simplifican el estudio:

1. Entre dos secciones diferentes de la línea de transmisión no existe acoplo de campo eléctrico. Es decir, no existen líneas de campo eléctrico que alcancen las dos secciones o, en otras palabras, el campo eléctrico está contenido en un plano transversal a la línea de transmisión ($E_z = 0$).
2. Entre dos secciones diferentes de la línea de transmisión no existe acoplo de campo magnético, es decir, $H_z = 0$.

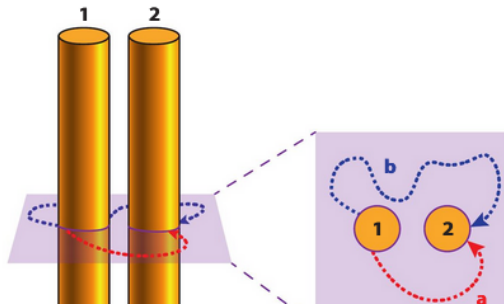
Estas dos características las cumplen los denominados modos transversales eléctrico-magnéticos (modos TEM) y son necesarias para que exista y, por tanto, se pueda definir el concepto de diferencia de potencial entre los dos conductores.

Recordemos que la diferencia de potencial entre dos puntos 1 y 2 se define como:

$$v_{12} = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ecuación general de una línea de transmisión

Para que la diferencia de potencial pueda ser definida en una sección de línea de transmisión, ésta debe ser única, es decir, no debe importar el camino que se siga en la integración de línea del campo eléctrico. Para comprobar esto vamos a integrar de un conductor a otro por un camino a y por otro distinto b , como indica la figura. Si, efectivamente, la integración no depende del camino tomado, estas integrales deben ser iguales, es decir, $v_{12}|_a = v_{12}|_b$.



Ecuación general de una línea de transmisión

$$v_{12}|_a - v_{12}|_b = - \int_{a1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{b1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_{a,b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \dots$$

$$\text{T. de Stokes} \leftrightarrow \quad = - \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \dots$$

$$1^{\text{a}} \text{ ec. de Maxwell} \leftrightarrow \quad = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds = \dots$$

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} \hat{n} = \hat{z} \\ H_z = 0 \end{array} \right\} = 0$$

Por tanto:

$$v_{12}|_a = v_{12}|_b$$

independientemente de los caminos a y b recorridos, con lo que se demuestra que la diferencia de potencial existe y es única.

Ecuación general de una línea de transmisión

Una vez demostrada la existencia y unicidad de la diferencia de potencial en cada punto de la línea de transmisión, vamos a caracterizar una sección elemental de la línea mediante un circuito equivalente que permita relacionar las variables tensión (diferencia de potencial) y corriente. El modelo equivalente de la sección elemental se muestra en la figura 1.1 donde L es la autoinducción por unidad de longitud, C la capacidad por unidad de longitud y donde no se han empleado elementos resistivos dado que una línea de transmisión ideal no presenta pérdidas.

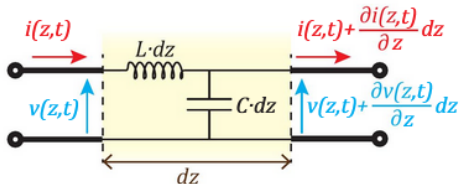


Figura *Equivalente circuital de una sección elemental de la línea de transmisión ideal*

Ecuación general de una línea de transmisión

Realizando el balance de tensiones y corrientes a la entrada y a la salida de la sección elemental de la línea y aplicando las relaciones tensión – corriente en bobina y condensador, se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = -L dz \frac{\partial i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \mathbf{2.5 \ a}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} dz = -C dz \frac{\partial v}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \mathbf{2.5 \ b}$$

Ecuación general de una línea de transmisión

Las ecuaciones (2.5a) y (2.5b) son conocidas como las ecuaciones del telegrafista y se encuentran acopladas. Para desacoplarlas seguimos los siguientes pasos:

- Derivación de (2.5a) respecto a z :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \quad (2.6a)$$

- Derivación de (2.5b) respecto a t :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.6b)$$

- Sustitución de (2.6b) en (2.6a):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.7a)$$

O, escrita en su forma más habitual:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7b)$$

conocida como *ecuación de onda unidimensional* y donde $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ es la velocidad de propagación de la onda.

La solución general de (2.7b), obtenida por D'Alembert, es:

$$v(z,t) = F_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + F_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) \quad (2.8)$$

Estas funciones se pueden interpretar como ondas que viajan a una velocidad c según $z(F_1)$ y según $-z(F_2)$. Por esta razón, a F_1 se le denomina *onda progresiva* o *positiva* y a F_2 *onda regresiva* o *negativa*.

Teniendo en cuenta (2.5a) se puede obtener la expresión de la corriente en la línea:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Lc} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

E integrando:

$$i(z,t) = \int \frac{\partial i}{\partial t} dt = \frac{1}{Lc} \int \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dt = \sqrt{\frac{C}{L}} (F_1 - F_2) + cte. \quad (2.10)$$

donde la constante de integración es independiente de t y z .

Ecuación general de una línea de transmisión

Para hacer más intuitiva la notación, red denominamos las ondas de tensión:

$$F_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \left(t - \frac{z}{c} \right) = v^+ \quad (2.11)$$

$$F_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) = v^- \left(t + \frac{z}{c} \right) = v^-$$

Además, ahora se puede definir el concepto de *impedancia característica de la línea*:

$$Z_0(\Omega) = \frac{v^+}{i^+} = -\frac{v^-}{i^-} = \left. \frac{v}{i} \right|_{v^- = 0} \quad (2.12)$$

que, teniendo en cuenta las relaciones tensión-corriente en las ondas progresivas y en las regresivas, resulta ser:

$$Z_0(\Omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.13)$$

Ecuación general de una línea de transmisión

De esta manera podemos reescribir (2.8) y (2.10) como:

$$v(z,t) = v^+ + v^- \quad (2.14)$$

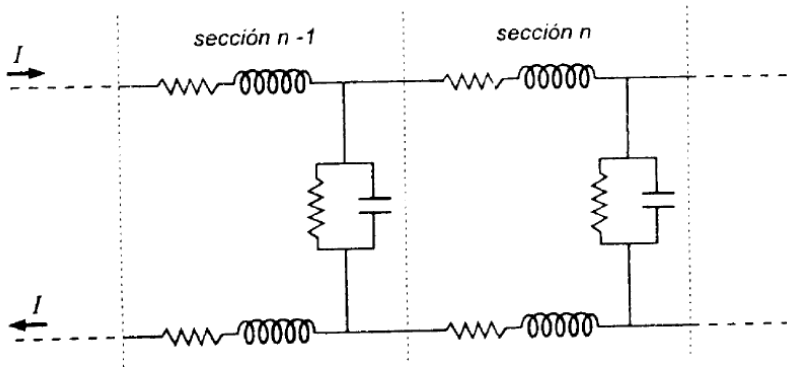
$$i(z,t) = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_0} (v^+ - v^-) \quad (2.15)$$

Una vez conocidas las expresiones de la tensión y la corriente, se puede obtener la potencia instantánea en un punto de la línea:

$$P(z,t) = vi = \frac{1}{Z_0} \left[(v^+)^2 - (v^-)^2 \right] = P^+ - P^- \quad (2.16)$$

Es decir, la potencia total en un punto y un instante será la diferencia entre las potencias asociadas a la ondas progresiva y regresiva.

Ecuación general de una línea de transmisión



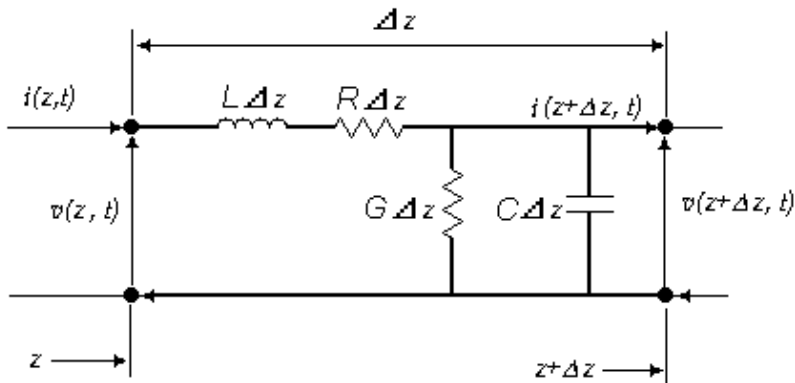
A transmission line has the following per-unit-length parameters: $L = 0.5 \mu\text{H/m}$, $C = 200 \text{ pF/m}$, $R = 4.0 \Omega/\text{m}$, and $G = 0.02 \text{ S/m}$. Calculate the propagation constant and characteristic impedance of this line at 800 MHz. If the line is 30 cm long, what is the attenuation in dB? Recalculate these quantities in the absence of loss ($R = G = 0$).

Impedancia en una Línea de transmisión

Clasificación principal

- Conocidos los 4 parámetros importantes de una línea de transmisión (R, L, G, C) es posible determinar la relación entre las ondas de voltaje y corriente que viajan a lo largo de ella, desde el generador hacia la carga.
- El método considera que dichos parámetros están distribuidos uniformemente a lo largo de toda la longitud de la línea y no concentrados.

Sección corta de una línea de transmisión



$$\underbrace{v - \left[v + \Delta z \frac{\partial v}{\partial z} \right]}_{\text{Voltaje inicial - Voltaje final}} = (R \Delta z)(i) + (L \Delta z) \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right)$$

$$i - \left[i + \Delta z \frac{\partial i}{\partial z} \right] = (G \Delta z)(v) + (C \Delta z) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \left(R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left(G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

- Paso1:
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \left(R \frac{\partial i}{\partial z} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \right)$$
- Paso 2:
$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = - \left(G \frac{\partial v}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)$$
- Ecuación del telegrafista

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (RG)v + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + (LC) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

- Paso3

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = R \left[G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \right] + L \left[G \frac{\partial v}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right]$$

$$\frac{dV}{dz} = - (R + j\omega L) I$$

$$\frac{dI}{dz} = - (G + j\omega C) V$$

- Paso1-3: $\frac{d^2V}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V$

- Constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

- Relaciones importantes

$$v(z,t) = \operatorname{Re}[V(z) e^{j\omega t}] \quad i(z,t) = \operatorname{Re}[I(z) e^{j\omega t}]$$

- Solución

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

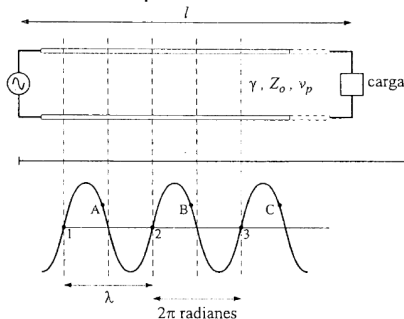
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

- α (Np/m): Indica la atenuación que sufre la onda conforme viaja o se propaga a lo largo de la línea.
- β (rad/m): Indica la rapidez del cambio de fase de la onda conforme se propaga.
- Atenuación:
(atenuación en dB/m) = (8.686) (atenuación α en Np/m)
ya que 1 neper es igual a 8.686 dB.
- Relaciones importantes

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}} \left[Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z} \right]$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad \Omega$$

- Cada línea de transmisión tendrá su propio valor particular de impedancia característica Z_o .
- Relaciones importantes:
- El parámetro Z_o es comunmente proporcionado por los fabricantes de cables en los catálogos de sus productos.

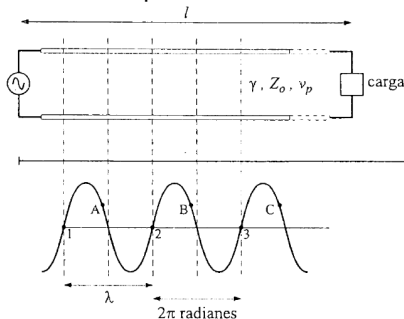


- Velocidad de fase $v_p = \frac{\omega}{\beta}$
- Velocidad de propagación $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$
- Longitud de onda medio $\lambda_{medio} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f}$

Propagación en líneas acopladas

$$Z_o = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad \Omega$$

- Cada línea de transmisión tendrá su propio valor particular de impedancia característica Z_o .
- Relaciones importantes:
- El parámetro Z_o es comúnmente proporcionado por los fabricantes de cables en los catálogos de sus productos.



- Velocidad de fase $v_p = \frac{\omega}{\beta}$
- Velocidad de propagación $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$
- Longitud de onda medio $\lambda_{medio} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f}$

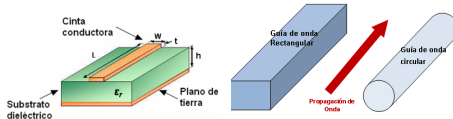
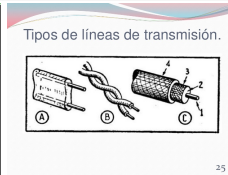
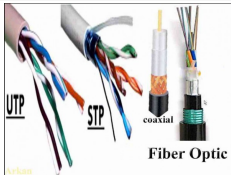
1 ANTECEDENTES

2 Propagación en líneas de transmisión

3 Trabajos propuestos

Información de impedancia característica

- Buscar información de la impedancia característica en catálogos de fabricantes de las líneas de transmisión indicadas en la figura.
- Resolver el problema 1, problema2, de esta presentación



Líneas de transmisión

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de ingeniería en Telecomunicaciones

Quinto Semestre

Unidad I: Impedancia de entrada

PhD. Daniel Antonio Santillán Haro

