

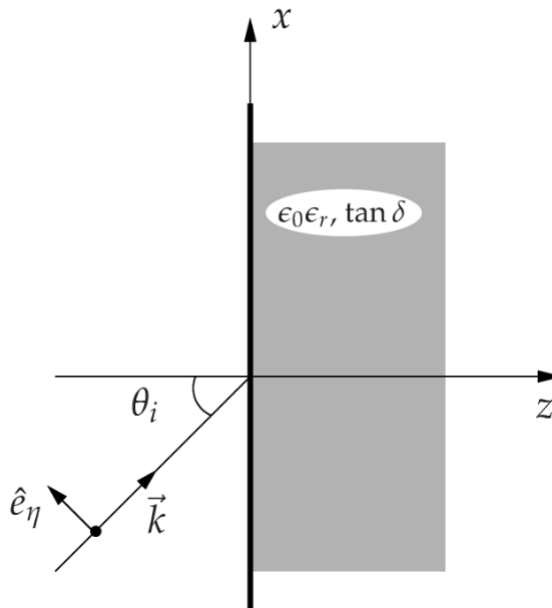
Prueba Unidad 1
Líneas de Transmisión

Nombre: _____

Problema 1

Se tiene una onda plana que incide desde el vacío a un medio dieléctrico ($\epsilon_r = 4$) de muy altas pérdidas ($\tan \delta = 100$). El ángulo de incidencia de la onda es ($\theta_i = 60^\circ$), tal y como muestra la Fig. Se sabe que su polarización es elíptica con relación axial ($AR = 9,5424$ dB), y la inclinación del eje mayor de la elipse respecto del eje ($\hat{y}$) es de 45° . El sentido de giro es a derechas para un observador que ve alejarse la onda, y la densidad de potencia es $(20/Z_0)$ (W/m^2) (Z_0 es la impedancia intrínseca del vacío). La frecuencia de la onda es ($f_0 = 10$ GHz). Se pide:

- Encontrar la expresión del campo eléctrico de la onda incidente, dando el vector de propagación.
- Descomponer la onda en dos ondas de polarización circular girando en sentidos contrarios. Densidad de potencia de cada una de la ondas.
- Descomponer la onda en sus componentes TE_z y TM_z , dando las densidades de potencia de cada onda.



Solución Problema 1

a) El vector unitario en la dirección de propagación será:

$$\hat{e}_k = \cos \theta_i \hat{e}_z + \sin \theta_i \hat{e}_x \quad \cos \theta_i = \frac{1}{2} ; \quad \sin \theta_i = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \hat{e}_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_x \quad (17.1)$$

Teniendo en cuenta (17.1) el vector perpendicular en el plano de incidencia será:

$$\hat{e}_\eta = -\hat{e}_z \frac{\sqrt{3}}{2} + \hat{e}_x \frac{1}{2} \quad (17.2)$$

Por otro lado el vector de propagación será:

$$\vec{k} = k_0 \hat{e}_k ; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ (rad/m)} \quad (17.3)$$

La longitud de onda en el medio por el que la onda incide será:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (17.4)$$

Teniendo en cuenta este último resultado, la constante de propagación en el medio será:

$$k_0 = \frac{2\pi}{3} 10^2 \text{ (rad/m)} \quad (17.5)$$

De esta manera, la expresión final del vector de propagación queda como:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{3} 10^2 \left(\frac{1}{2} \hat{e}_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_x \right) \text{ (rad/m)} \quad (17.6)$$

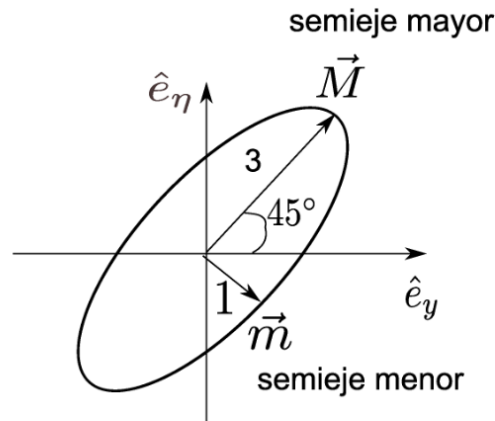


Figura 17.2: Onda plana con polarización elíptica.

Si dibujamos la polarización de la onda en el plano transversal tendremos el esquema representado en la Fig. 17.2. Asimismo, sabemos que la relación axial es:

$$AR = \frac{|\vec{E}_{\text{máx}}|}{|\vec{E}_{\text{mín}}|} \quad (17.7)$$

En unidades logarítmicas teniendo en cuenta el enunciado será:

$$20 \log_{10}(AR) = 20 \log_{10}(AR) = 9,5424 \text{ dB} ; AR = 10^{\frac{9,5424}{20}} = 3 \quad (17.8)$$

Luego, la relación entre eje mayor y menor es de 3. Teniendo en cuenta este resultado podemos encontrar la expresión del eje mayor de la elipse:

$$\vec{M} = 3 \cos(45^\circ) \hat{e}_y + 3 \sin(45^\circ) \hat{e}_\eta = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{e}_y + \hat{e}_\eta) \quad (17.9)$$

De la misma manera, el eje menor de la elipse será:

$$\vec{m} = 1 \cos(-45^\circ) \hat{e}_y + \sin(-45^\circ) \hat{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{e}_y - \hat{e}_\eta) \quad (17.10)$$

Como el eje mayor y menor de la elipse (polarización elíptica) están desfasados $(\pi/2)$ en el tiempo, podemos expresar la onda de campo eléctrico como:

$$\vec{E} = (\vec{M} - j\vec{m}) A e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (17.11)$$

La constante A sirve para ajustar la densidad de potencia de la onda. El signo $(-)$ es debido al sentido de giro de la polarización que tiene que ser a derechas para un observador que ve alejarse la onda. Sustituyendo en (17.11) la expresión de los ejes mayor (17.9) y menor de la elipse (17.10) tendremos:

$$\vec{E} = A \left[3 \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{e}_y + \hat{e}_\eta) - j \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{e}_y - \hat{e}_\eta) \right] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= A \frac{\sqrt{2}}{2} [(3-j)\hat{e}_y + (3+j)\hat{e}_\eta] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{V/m}) \quad (17.12)$$

Finalmente, el vector de campo eléctrico queda como:

$$\vec{E} = A'[(3-j)\hat{e}_y + (3+j)\hat{e}_\eta] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{V/m}) \quad (17.13)$$

A continuación determinaremos el valor de la constante $A' = A \frac{\sqrt{2}}{2}$ teniendo en cuenta la densidad de potencia de la onda incidente proporcionada en el enunciado del problema.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{Z_0} \hat{e}_k = \frac{1}{2} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{Z_0} \hat{e}_k \quad (\text{W/m}^2) \quad (17.14)$$

El campo eléctrico conjugado será:

$$\vec{E}^* = (A')^* [(3+j)\hat{e}_y + (3-j)\hat{e}_\eta] e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (17.15)$$

Teniendo en cuenta (17.13) y (17.15) resulta que:

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = |A'|^2 [(3-j)(3+j) + (3+j)(3-j)] = |A'|^2 [(9+1) + (9+1)] = |A'|^2 20 \quad (17.16)$$

Sustituyendo (17.16) en (17.14) tendremos:

Sustituyendo (17.16) en (17.14) tendremos:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} |A'|^2 \frac{20}{Z_0} \hat{e}_k = \frac{20}{Z_0} \hat{e}_k ; |A'|^2 = 2 ; |A'| = \sqrt{2} \quad (17.17)$$

Teniendo en cuenta el valor de la constante calculada previamente, la expresión final de la onda de campo eléctrico quedará como:

$$\boxed{\vec{E} = \sqrt{2}[(3-j)\hat{e}_y + (3+j)\hat{e}_\eta] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}} \quad (\text{V/m}) \quad (17.18)$$

Para encontrar la expresión del campo eléctrico en el dominio del tiempo emplearemos la fórmula estudiada en teoría.

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_r \cos(\omega t) - \vec{E}_i \sin(\omega t) \quad (17.19)$$

La parte real e imaginaria del campo eléctrico serán:

$$\vec{E}_r = \sqrt{2}(3\hat{e}_y + 3\hat{e}_\eta) = 3\sqrt{2}(\hat{e}_y + \hat{e}_\eta) \quad (17.20a)$$

$$\vec{E}_i = \sqrt{2}(\hat{e}_\eta - \hat{e}_y) \quad (17.20b)$$

Si sustituimos (17.20) en (17.19) tendremos:

$$\boxed{\vec{E}(t) = 3\sqrt{2}(\hat{e}_y + \hat{e}_\eta) \cos(\omega t) + \sqrt{2}(\hat{e}_y - \hat{e}_\eta) \sin(\omega t)} \quad (\text{V/m}) \quad (17.21)$$

En base a (17.21) podemos comprobar para distintos instantes de tiempo el sentido de giro de la polarización, tal y como se muestra en la Fig. 17.3.

En base a (17.21) podemos comprobar para distintos instantes de tiempo el sentido de giro de la polarización, tal y como se muestra en la Fig. 17.3.

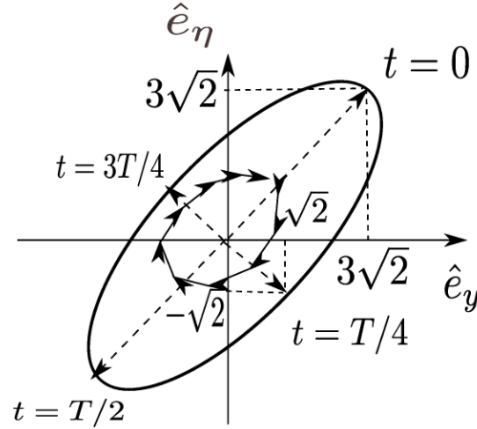


Figura 17.3: Giro de la polarización en el tiempo.

b) Tenemos como base una onda con polarización circular a izquierdas $\vec{E}_1$ y otra a derechas $\vec{E}_2$.

$$\vec{E}_1 = \hat{e}_\eta + j\hat{e}_y \quad (17.22a)$$

El campo original es igual a la suma ponderada de la onda polarizada a derechas y la polarizada a izquierdas.

$$\vec{E} = A\vec{E}_1 + B\vec{E}_2 = A(\hat{e}_\eta + j\hat{e}_y) + B(\hat{e}_\eta - j\hat{e}_y) = (A+B)\hat{e}_\eta + j(A-B)\hat{e}_y \quad (17.23)$$

Igualando (17.23) con (17.18) en el origen $\vec{r} = 0$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(3+j) &= A+B \\ \sqrt{2}(3-j) &= j(A-B); \frac{\sqrt{2}}{j}(3-j) = (A-B); -j\sqrt{2}(3-j) = A-B; -\sqrt{2}(1+3j) = A-B \end{aligned} \quad (17.24)$$

El sistema de ecuaciones queda finalmente tras las manipulaciones algebraicas como:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}(1+3j) &= A - B \\ \sqrt{2}(3+j) &= A + B \end{aligned} \quad (17.25)$$

Por reducción, sumando las dos ecuaciones queda como:

$$3\sqrt{2} + j\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3\sqrt{2}j = 2A ; (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}j) = 2A ; \boxed{A = \sqrt{2}(1-j)} \quad (17.26)$$

Si ahora restamos las dos ecuaciones del sistema tenemos:

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2}j + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}j = 2B ; 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}j = 2B ; \boxed{B = 2\sqrt{2}(1+j)} \quad (17.27)$$

Teniendo en cuenta el valor de los coeficientes (17.26) y (17.27) podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\boxed{\vec{E} = \sqrt{2}(1-j)(\hat{e}_\eta + j\hat{e}_\psi) + 2\sqrt{2}(1+j)(\hat{e}_\eta - j\hat{e}_\psi)} \quad (\text{V/m}) \quad (17.28)$$

La densidad de potencia de cada una de las ondas (circular a derechas y a izquierdas) será:

$$|\vec{S}_1| = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{2(1+1)(1+1)}{Z_0} = \frac{4}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (17.29)$$

$$|\vec{S}_2| = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{4 \cdot 2(1+1)(1+1)}{Z_0} = \frac{16}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (17.30)$$

Como vemos en (17.29) y (17.30) transporta más potencia la onda que gira en el mismo sentido que la original. La suma total de las potencias será:

$$|\vec{S}_{Total}| = |\vec{S}_1| + |\vec{S}_2| = \frac{4}{Z_0} + \frac{16}{Z_0} = \frac{20}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (17.31)$$

- c) Este apartado es directo, ya que la onda TE_z será la que esté orientada según $\hat{e}_\psi$, mientras que la TM_z será la que tenga dirección según $\hat{e}_\eta$. De esta manera tenemos:

$$\vec{E}_1 = \sqrt{2}(3-j)\hat{e}_\psi e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad TE_z \quad (17.32a)$$

$$\vec{E}_2 = \sqrt{2}(3+j)\hat{e}_\eta e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad TM_z \quad (17.32b)$$

La densidad de potencia correspondiente a las polarizaciones TE_z y TM_z será la siguiente:

La densidad de potencia correspondiente a las polarizaciones TE_z y TM_z será la siguiente:

$$|\vec{S}_1| = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{2(9+1)}{Z_0} = \frac{10}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad TE_z \quad (17.33a)$$

$$|\vec{S}_2| = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{2(9+1)}{Z_0} = \frac{10}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad TM_z \quad (17.33b)$$

Como la inclinación es de 45° vemos que las dos contribuciones anteriores llevan la misma densidad de potencia.

- d) Según la aproximación de altas pérdidas la constante de propagación en el medio 2 tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \\ &= \frac{2\pi f}{c_0} \sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \\ &= \frac{2\pi}{3} 10^2 \sqrt{4 \sqrt{100}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) = \frac{20\pi}{3} 10^2 \sqrt{2} (1+j) \end{aligned} \quad (17.34)$$

La impedancia intrínseca del medio 2 será para altas pérdidas:

$$\begin{aligned} Z_{0_2} &= \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_2} = \frac{j\omega\mu_0}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j)} \\ &= j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{2}{\sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \sqrt{2} (1+j)} = j \frac{2Z_0}{\sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \sqrt{2} (1+j)} \\ &= j \frac{2Z_0(1-j)}{\sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \sqrt{2} \cdot 2} = j \frac{Z_0(1-j)}{\sqrt{\epsilon_r \tan \delta} \sqrt{2}} \\ &= \frac{Z_0(1+j)}{\sqrt{2} \sqrt{\epsilon_r \tan \delta}} = \frac{Z_0(1+j)}{\sqrt{2} \sqrt{4 \sqrt{100}}} = \frac{Z_0(1+j)}{2\sqrt{2} \cdot 10} = \frac{Z_0}{2\sqrt{2}} (1+j) \quad (\Omega) \end{aligned} \quad (17.35)$$

Como vemos en (17.35) hemos dejado la impedancia intrínseca del medio 2 expresada en términos de la impedancia intrínseca del vacío.