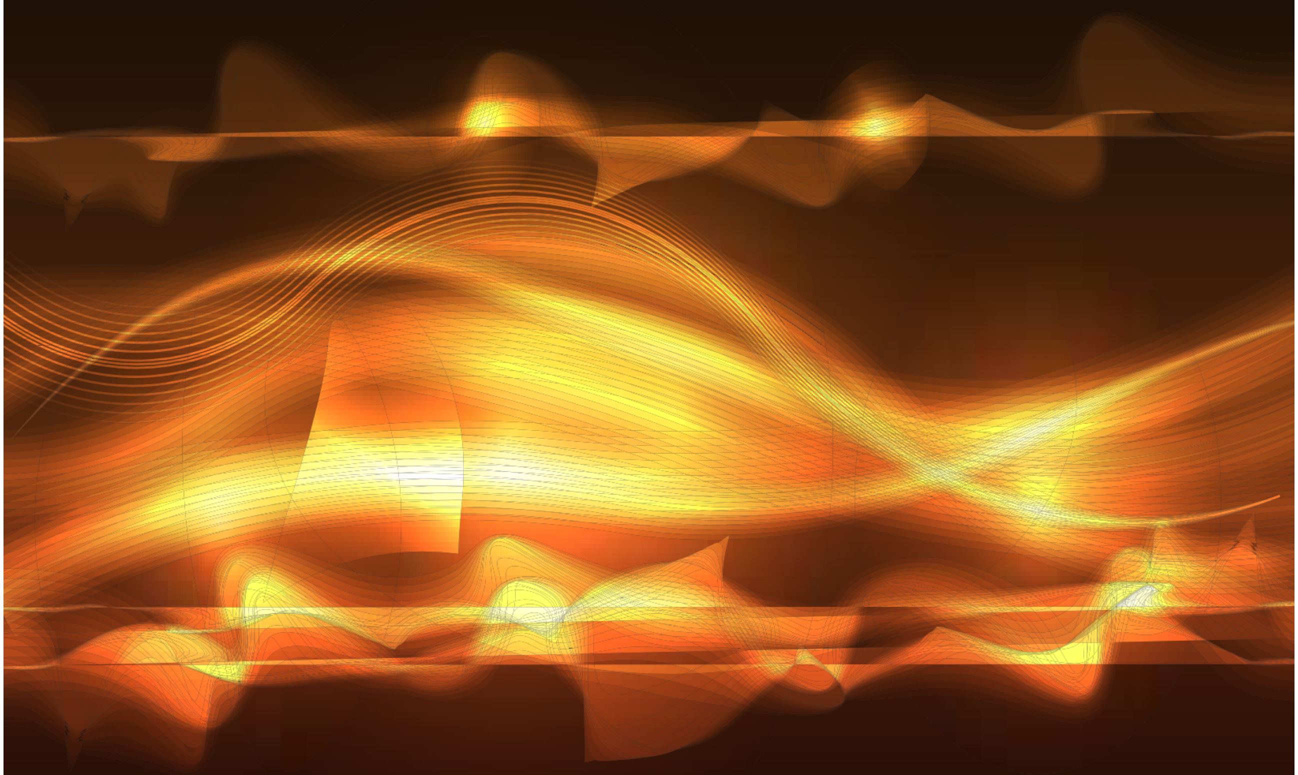
Apuntes de Trigonometría y Geometría Analítica



Lic. Fausto Mauricio Lagos Suárez

Apuntes de Trigonometría y Geometría Analítica

Fausto Mauricio Lagos Suárez
Licenciado en Matemáticas y Estadística
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Capítulo 1

Ángulos

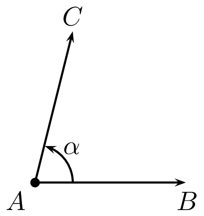


Figura 1.1: Ángulo.

$\boxed{\textbf{DEFINICIÓN 1.1}}$ Un *ángulo* es la unión entre 2 rayos o semirectas que comparten el mismo origen.

Partes de un ángulo: Un ángulo esta conformado por:

- *Vértice:* El punto de unión de las dos semirectas (A).
- *Lado inicial:* Segmento desde el cual se toma la medición de la magnitud de la rotación, $\overline{AB}$.
- *Lado final:* Segmento en el cual termina la medición de la rotación, $\overline{AC}$.

Notación: Los ángulos pueden notarse de acuerdo al área sobre la cual se estén estudiando, geométricamente se notan utilizando los nombres de sus puntos,

$$\sphericalangle BAC$$

en esta notación siembre el punto que se escribe en medio corresponde al vértice del ángulo, sin embargo en la trigonometría es más común notar los ángulos utilizando el alfabeto griego,

$$\sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle BAC.^{1}$$

Ángulos en el plano: Por lo general en geometría no importa el orden en el que se nombre a los puntos extremos de un ángulo, sin embargo cuando el ángulo se lleva a un plano coordenado es importante tener presente la posición relativa al origen y el eje de abscisas.

Es importante mencionar que un ángulo sobre un plano coordenado se lee respecto al cuadrante sobre el cual se encuentre su lado final, así un ángudo en posición normal estará en el segundo cuadrante si su lado final esta en el segundo cuadrante.

Ángulos en posición normal: Un ángulo se encuentra en posición normal cuando su vértice coincide con el origen del plano coordenado y su lado inicial se encuentra sobre el semieje positivo de abscisas.

Ángulos orientados: Dependiendo del sentido de la rotación del ángulo, se habla de ángulos positivos y ángulo negativos.

Si la rotación es en sentido horario el ángulo es orientado negativo y si la rotación es en sentido antihorario el ángulo es orientado positivo.

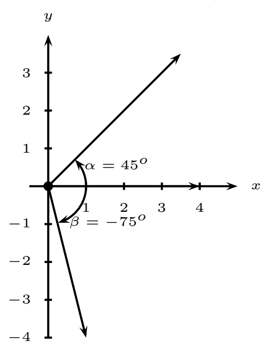


Figura 1.2: Ángulo orientados.

[1] El símbolo $\cong$ (congruencia) es utilizado para indicar que dos objetos geométricos tienen igual magnitud.

1.1. Medición de Ángulos

1.1.1. Sistema Sexagesimal

La unidad de medida del sistema sexagesimal de medición de ángulos es el grado (^{o}). Un grado se define como $\frac{1}{360}$ de revolución.

Una importante aplicación del sistema sexagesimal es el geoposicionamiento o coordenadas geográficas.

Las coordenadas geográficas determinan con presición un punto sobre el globo, estas coordenadas miden la distancia entre un punto dado y una línea de referencia base, la latitud se mide utilizando como línea base el ecuador terrestres y la lóngitud utiliza como línea base el meridinado de Greenwich.

Los paralelos son la circunferencias paralelas al ecuador terrestres y para éstos 1^o equivale a $113,3\ km$; los meridianos son las circunferencias que pasan por los polos terrestres y para éstos $1^o = 111{,}11\ km$.

Escritura del sistema sexagesimal

E1) Escritura Decimal: Representa el valor de la magnitud del ángulo a través de un valor decimal, por ejemplo $\angle\omega = 3{,}26^o$.

E2) Escritura GMS: Representa la magnitud de un ángulo a través de tres (3) particiones fundamentales, Grado (^{o}), Minuto (’) y Segundo (”), de acuerdo a las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
1^o &= \frac{1}{360} rev \\
1^o &= 60' \\
1' &= 60''.
\end{aligned}
$$

Conversión decimal a GMS

1. Se toma la parte entera como el valor de grados.

2. Multiplicar la parte decimal por 60 y del resultado, la parte entera corresponde al valor de minutos.

3. Si el resultado anterior tiene parte decimal, se tomo esta y se multiplica por 60 nuevamente para conseguir el valor de segundos.

Ejemplo 1.1 Convertir $21{,}256^o$ a escritura GMS.
Solución:

$$\begin{aligned} 21{,}256^o &= 21^o(0{,}256 \times 60)' \\ &= 21^o15'(0{,}36 \times 60)'' \\ &= 21^o15'22''. \end{aligned}$$

Conversión de GMS a escritura decimal

1. El valor de grados corresponde a la parte entera.
2. El valor de minutos se divide por 60 y se suma a la parte entera.
3. El valor de segundos se divide por 3600 y se suma al valor obtenido en el segundo paso.

Ejemplo 1.2 Convertir $50^o6'2''$ a escritura decimal
Solución:

$$50 + \frac{6}{60} + \frac{2}{3600} = 50{,}105833^o.$$

1.1.2. Sistema Cíclico

DEFINICIÓN 1.2 Si en una circunferencia de radio r se construye un ángulo con vértice en el centro de la circunferencian y que este subtendido por un arco de igual longitud al radio de la circunferencia, entonces el ángulo tiene una magnitud de un *radián.*

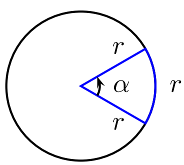


Figura 1.3: Radian.

Prueba: Dada una circunferencia de radio r, su perímetro esta dado por $p = 2\pi r$. Si se toma la circunferencia unitaria $r = 1$ sobre la cual el perímetro $p = 2\pi$, se tiene que la mitad del perímetro (media circunferencia) es $p = \pi$ y la cuarta parte es $\frac{\pi}{2}$, la octava parta $p = \frac{\pi}{4}$ y sucesivamente. $\square$

OBSERVACIÓN 1.1: Según su magnitud los ángulos se clasifican en:

1. Ángulo agudo si su magnitud se encuentra entre $0 < \alpha < 90^o$ o $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} rad$.
2. Ángulo obtuso si su magnitud esta entre $90^o < \alpha < 180^o$ o $\frac{\pi}{2} rad < \alpha < \pi rad$.
3. Ángulo recto si su magnitud es igual a $\alpha = 90^o$ o $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$.
4. Ángulo llano si su magnitud es igual a $\alpha = 180^o$ o $\alpha = \pi rad$.
5. Ángulo nulo si su magnitud es $\alpha = 0^o$ o $\alpha = 0 rad$.
6. Ángulo cuadrantal si su lado terminal se encuentra sobre cualquiera de sus ejes coordenados del plano. Hay cuatro ángulos cuadrantales: $\alpha = 2\pi \quad \alpha = \pi \quad \alpha = \frac{\pi}{2} rad \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} rad$.
7. Ángulo estandar si su magnitud es igual a, o es un múltiplo de $\alpha = \frac{\pi}{3} rad$ o $\alpha = \frac{\pi}{4} rad$ o $\alpha = \frac{\pi}{6} rad$.

1.1.3. Conversión entre sistemas de medición de ángulos

Por definición

$$\begin{aligned} 1 rad &= \frac{180^o}{\pi rad} \\ 1^o &= \frac{\pi rad}{180^o}. \end{aligned}$$

Conversión de Sexagesimal a cíclico

Multiplicar el valor de la magnitud del ángulo dado en grados por $\frac{\pi rad}{180^o}$ y simplificar convenientemente.

Ejemplo 1.3 Expresar en radianes los ángulos $\theta = 160^o$ y $\beta = 112^o 40'$.

Solución:

$$\begin{aligned} \theta &= 160^o \times \frac{\pi}{180} rad \\ &= \frac{8\pi}{9} rad. \\ \beta &= 112{,}66^o \times \frac{\pi}{180} rad \\ &= \frac{169\pi}{270} rad \\ &= 1{,}9664 rad. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 Exprese en grados los ángulos $\alpha = \frac{5\pi}{6} rad$ y $\gamma = \frac{7}{5} rad$.
Solución:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{5\pi}{6} rad \times \frac{180^o}{\pi} \\ &= 150^o. \\ \gamma &= \frac{7}{5} rad \times \frac{180^o}{\pi} \\ &= 80^o 12' 51''. \end{aligned}$$

1.1.4. Aplicaciones en la física

Teorema 1. *Longitud de Arco*

Si r es el radio de una circunferencia y θ un ángulo central medido en radianes que intercepta a la circunferencia en un arco de longitud S, entonces

$$S = r\theta; \ \ \theta \text{ en radianes.} \tag{1.1}$$

Demostración. Trazando dos (2) circunferencia concéntricas una de radio $r = 1$ y otra de radio r

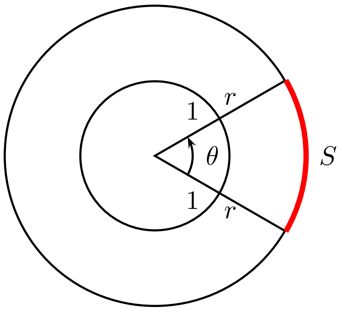


Figura 1.4: Longitud de Arco.

por proporcionalidad se tiene que

$$\frac{\theta}{S} = \frac{1}{r}$$

luego

$$S = r\theta.$$

□

Ejemplo 1.5 Un péndulo oscila un ángulo de 20^o cada segundo. Si el péndulo tiene 40 pulgadas de longitud, ¿Cuánto se desplazará su punta cada segundo?.

Solución: Se inicia pasando la magnitud del ángulo a radianes

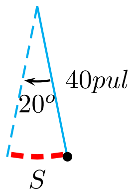


Figura 1.5: Ejemplo de longitud de arco.

$$20^o = \frac{\pi}{9} rad.$$

De acuerdo al planteamiendo, el radio del arco de circunferencia que describe el péndulo es $r = 40pul$, con lo cual, aplicando (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} S &= 40 \times \frac{\pi}{9} \\ &\approx 13{,}9626 pul. \end{aligned}$$

Teorema 2. *Área del Sector Circular*

Un sector circular es una región delimitada por un arco de circunferencia y un ángulo central.

El área de un sector circular esta dada por la expresión

$$K = \frac{1}{2} r^2 \theta; \ \ \theta \textit{ en radianes.} \tag{1.2}$$

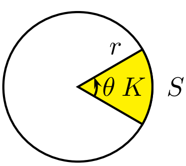


Figura 1.6: Área del sector circular.

Demostración. "La razón del área del sector y el área total del círculo es igual a la razón de la longitud del arco y el perímetro total de la circunferencia".

Se tiene entonces

$$\frac{K}{\pi r^2} = \frac{S}{2\pi r},$$

luego

$$K = \frac{Sr}{2},$$

finalmente, utilizando (1.1)

$$K = \frac{\theta r^2}{2}.$$

□

Ejemplo 1.6 Un sector se círculo tiene un ángulo central de 50^o y una área de $605cm^2$. Encuentre el radio del círculo.

Solución:

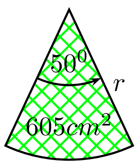


Figura 1.7: Ejemplo de área del sector circular.

De (1.2) se tiene que $r = \sqrt{\frac{2K}{\theta}}$, siempre que θ este dado en radianes, entonces

$$50^o = \frac{5\pi}{18} rad,$$

con lo cual

$$r \approx 37{,}23cm.$$

DEFINICIÓN 1.3 Si sobre una circunferencia un punto P recorre un arco de lontigud S en un tiempo t se dice de P que su velocidad lineal es:

$$V = \frac{S}{t}.$$

DEFINICIÓN 1.4 Si un objeto gira ángulos iguales en tiempos igual se dice que su velocidad angular ω esta expresada por:

$$\omega = \frac{\theta}{t}; \quad \theta \text{ en radianes.}$$

Teorema 3. *Movimiento Circular Uniforme La velocidad de un objeto que se desplaza sobre un arco de circunferencia se define como:*

$$V = r\omega. \tag{1.3}$$

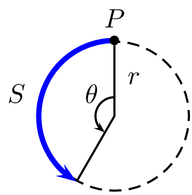


Figura 1.8: Movimiento circular uniforme.

Demostración. De la definición (1.3) y la ecuación (1.1), se tiene que

$$V = \frac{r\theta}{t}, \quad \theta \text{ en radianes.}$$

aplicando la definición (1.4)

$$V = r\omega.$$

□

Ejemplo 1.7 Una polea de $36cm$ de diámetro gira por medio de una banda de transmisión que se mueve a una velocidad de $5\frac{m}{s}$. ¿Cuántas revoluciones por segundo corresponden a la rotación de la polea?.

Solución:

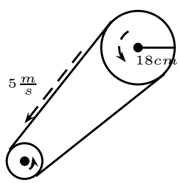


Figura 1.9: Ejemplo de movimiento circular uniforme.

Del planteamiento se tiene que la velocidad lineal de la polea $V = 500\frac{cm}{s}$, y de (1.3) se deduce $\omega = \frac{V}{r}$, con lo cual la velocidad angular de la polea corresponde a:

$$\omega \approx 27{,}77\frac{rad}{s}$$

como $1rev = 2\pi rad$, entonces

$$\omega \approx 4{,}42\frac{rev}{s}.$$

Ejercicios 1

En los ejercicios 1 y 2 obtenga la medida equivalente en radianes de los ángulos dados.

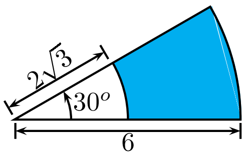
1) (a) $35^o22'12"$ (b) $102^o31'27"$

2) (a) $68^o53'48"$ (b) $251^o8'14"$

3) Encuentre la medida en GMS correspondiente al ángulo dado.

(a) $\frac{1}{4}\pi\ rad$	(b) 0,23 rad
(c) $-5\pi\ rad$	(d) $\frac{4}{2}\pi\ rad$
(e) 4,78 rad	(f) $-2,75\ rad$

4) Determine el valor del área sombreada en la figura.



5) Un péndulo oscila un ángulo de 40^o cada segundo. Si el péndulo tiene $20in$ de longitud, ¿cuánto se desplazará su punta cada segundo?.

6) Para estimar la velocidad de un río se introduce una rueda de paletas de $4f$ de radio en el agua. Si la corriente hace que la rueda gire a una velocidad de $10\frac{rev}{min}$, ¿cuál será la velocidad de la corriente?. Exprese la respuesta en metros por hora.

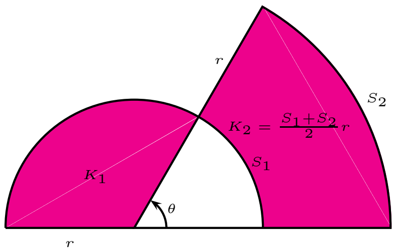
7) Una ángulo central θ intercepta un arco de $3f$ de largo en una circunferencia de $20in$ de radio. Aproxime la medida de θ en radianes y grados.

8) Un ciclista experto puede alcanzar una velocidad de $40\frac{mi}{h}$. Si la rueda de la bicicleta tiene un diámetro de $28in$, calcule la velocidad angular necesaria para alcanzar dicha velocidad lineal. (*Recuerde que* $1mi = 5280f = 63360in$).

9) Dos puntos A y B de la superficie de la Tierra están sobre el mismo meridiano. Si A tiene una latitud de $10^o N$ y la latitud de B es $4{,}6^o S$, ¿Cuál es la distancia que separa a los dos puntos?.

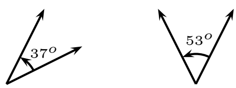
10) Dos poleas, una con radio de $2in$ y la otra con radio de $8in$, están conectadas por una banda, Si la polea de $2in$ gira a $3tfracrevmin$, determine las revoluciones por minuto de la polea de $8in$. (*Sugerencia:* $1ml = 5280ft = 63360in$)

11) Si los valores de las áreas sombreadas son iguales, determine el valor del ángulo θ.

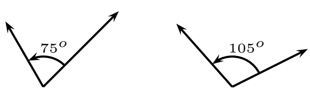


OBSERVACIÓN 1.2: Otras definiciones de ángulos:

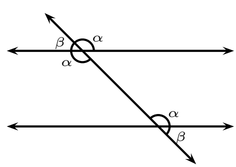
1. *Ángulo complementario* es aquél cuya magnitud sumada a la de otro ángulo da como resultado un ángulo recto.



2. *Ángulo suplementario* es aquél cuya magnitud sumada a la de otro ángulo da como resultado un ángulo llano.



3. *Ángulos alternos internos* son dos ángulos internos con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal. *Ángulos alternos externos* son dos ángulos externos con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal, *Ángulos correspondientes* son ángulos que están en el mismo lados de la transversal. Uno de los ángulos es una ángulos externo y el otro es un ángulo interno, *Ángulos opuestos por el vértice* son ángulos que tienen el mismo vértice y estan en lados opuestos de la transversal. Uno de los ángulos es externo y el otro interno. Todos los ángulos mencionados antes son ángulos congruentes.



Capítulo 2

Triángulos Rectángulos

$\boxed{\textbf{DEFINICIÓN 2.1}}$ La etimología de la palabra *trigonometría* es del griego $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o$ = triángulo y $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ = medida, que la define como el estudio analítico de los triángulos y sus componentes.

$\boxed{\textbf{DEFINICIÓN 2.2}}$ Un *triángulo rectángulo* es aquél cuyos dos de sus lados son perpendiculares entre sí y por tanto uno de sus ángulos es recto, es decir de magnitud $\frac{\pi}{2} rad$.

En un triángulo rectángulo se definen dos ángulos agudos y uno recto, de acuerdo a esto se determinan los catétos, que son los lados opuestos a los ángulos agudos, y la hipotenuso, el lado apuesto al ángulo recto del triángulo.

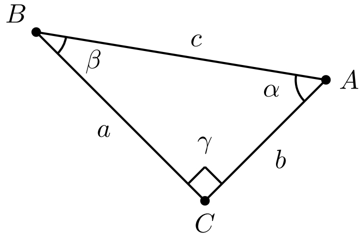


Figura 2.1: Triángulo Rectángulo.

Teorema 4. *Teorema de Pitágoras*

La suma de los cuadrados (áreas) construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado (área) construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Demostración. [1]

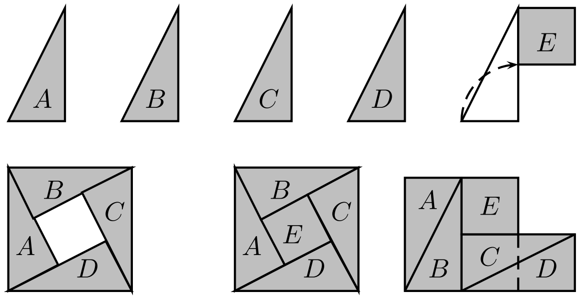


Figura 2.2: Demostración teorema de Pitágoras.

Se ha elegido la más sencilla: la del *ensolado.*

“En ella hemos tomado un triángulo rectángulo completamente arbitrario. Le pedimos a un carpintero cinco tablitas: cuatro de ellas de la forma de nuestro triángulo rectángulo, y la quinta, de la forma de un cuadrado cuyo lado sea igual a la diferencia entre ambos catetos. Estas cinco tablas se pueden agrupar componiendo un cuadrado grande, como aquí lo hemos hecho. La simple vista comprueba que la composición se ha logrado sin dejar huecos, pero, sin embargo, hay que tener cuidado, puesto que la vista es un matemático bastante malo. A pesar de ello, por esta vez no nos engaña. Como fácilmente se reconoce, los ángulos de la figura que resulta son rectos, ya que todos son iguales a la suma de los dos ángulos agudos del triángulo. Y como la suma de los ángulos de un triángulo vale siembre dos rectos, y ahora el triángulo cuenta ya con un ángulo recto, la suma de los otros dos, de los ángulos agudos, tendrá que ser igual a un ángulo recto. Además de esto, los lados de la figura son todos de igual longitud, justamente, iguales a la hipotenusa de nuestro triángulo, con todo lo cual, la figura será efectivamente un cuadrado, ya que constará de cuatro lados iguales y de cuatro ángulos rectos. Exactamente lo mismo se podría comprobar que el hueco interior es también un cuadrado, que precisamente se podría rellenar con la tablita E. Consta, evidentemente, de cuatro ángulos rectos, puesto que los cuatro ángulos rectos de los triángulos coinciden con sus vértices; también son iguales a la diferencia entre ambos catetos, como se desprende de la figura. Por consiguiente, también el hueco será un cuadrado, igual a la tabla E. El cuadrado todal resultante no es otra cosa que el cuadrado construído sobre la hipotenusa de nuestr triángulo. Una vez visto lo anterior, descompongamos la figura, y ordenemos de nuevo las tablas, como si se tratase de un “puzle”. Después de algunas vacilaciones y tanteos, llegamos

[1]Transcripción de LA MAGIA DE LOS NÚMEROS, Paul Karlson, Ed. Labor S.A - 1960 pág. 122, 123.

a una figura angular, que, si bien no se pasa de bonita, es en cambio de mucha utilidad. El lector puede explicarse por sí mismo por qué todos los ángulos resultantes ahora son también rectos, y por qué las tablas se adaptan unas a otras sin huevos, dando lugar a una figura resultante completamente compacta. Si a continuación trazamos la línea de puntos, la figura quedará descompuesta en dos cuadrados, una más grande y otro más pequeño. Que el mayor es un cuadrado, es evidente; y en cuantro al pequeño, se puede comprobar con un mínimo esfuerzo. Pero los lados de estos dos cuadrados son, precisamente, iguales a los catetos de nuestro triángulo. Con las mismas tablas, pues, hemos formado primero el cuadrado sobre la hipotenusa, y después, los dos cuadrados sobre los catetos. Con ello, las dos figuras no tendrán más remedio que tener la misma área, y habremos conseguido, con la máxima generalidad, la proposición: en todo triángulo rectángulo, independientemente de su forma, y de la disposición casual de sus lados, ya sean éstos grandes o pequeños, el cuadrado construído sobre la hipotenusa será siempre igual a la suma de los construídos sobre los catetos. Que es lo que queríamos demostrar.” □

DEFINICIÓN 2.3 El círculo goniométrico es una circunferencia de centro el origen y radio uno que fue utilizado inicialmente por Hiparco de Nicea para definir sus tablas de cuerdas, de la versión de Hiparco no se tiene claro cual era el valor de r, sin embargo dicho círculo fue retomado por Tolomeo quien definio $r = 60$ y luego por los árabes quienes le dieron el valor final de $r = 1$ para la construcción de las tablas trigonométricas que se conocen actualmente.

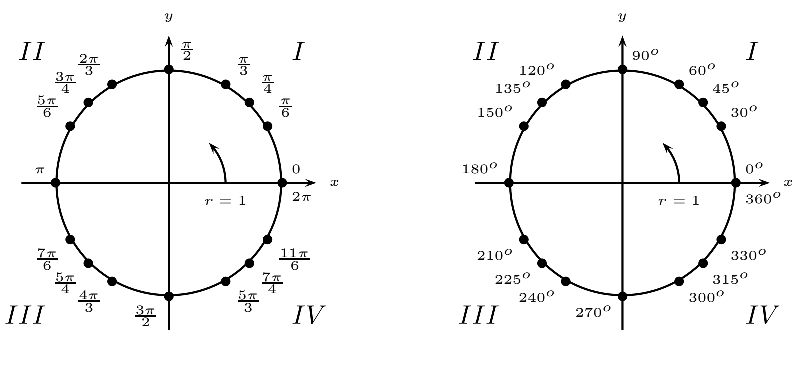


Figura 2.3: Círculo Goniométrico.

2.1. Razones Trigonométricas

A partír de un triángulo recángulo puesto sobre el círculo goniométrico se definen las razones trigonométricas para un ángulo agudo.

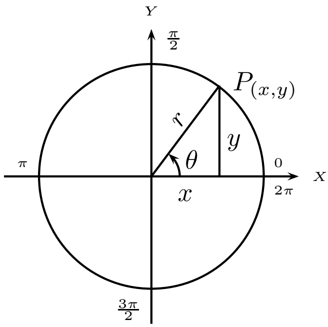


Figura 2.4: Razones Trigonométricas.

En la sección 1.2.2 del presente capítulo se estudiará la implicación de $r = 1$, en las razones trigonométricas.

$$\sin\theta = \frac{y}{r}; \quad \cos\theta = \frac{x}{r}; \quad \tan\theta = \frac{y}{x};$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}; \quad \sec\theta = \frac{r}{x}; \quad \csc\theta = \frac{r}{y}.$$

En general, y como método de fácil recordación pueden utilizarse los acrónimos recursivos ca = cateto adyacente; co = cateto opuesto y h =hipotenusa, para construir la frase:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{co}{h}; & \frac{ca}{h}; & \frac{co}{ca}; & \frac{ca}{co}; & \frac{h}{ca}; & \frac{h}{co} \\ \sin A; & \cos A; & \tan A: & \cot A; & \sec A; & \csc A \end{array}$$

2.1.1. Signos de las razones trigonométricas

Un ángulo en posición normal se encuentra en el cuadrante en el que esté su lado final, así, en la figura (2.1.1), α es un ángulo en el primer cuadrante ya que su lado final se encuentra dentro del primer cuadrante, ϕ, de manera análoga es un ángulo en el segundo cuadrante, mientras que β esta en el tercer cuadrante y θ esta en el cuarto cuadrante ya que su lado final esta en dicho cuadrante.

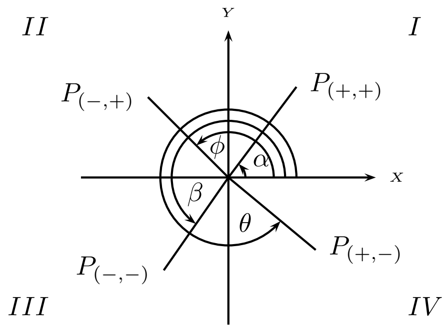


Figura 2.5: Sígnos de las razones trigonométricas.

La ubicación de ángulos en posición normal dentro de alguno de los cuadrantes del plano coordenado determina el signo que toman las razones trigonométricas de determinado ángulo.

Tomando la definición de las razones trigonométricas hecha en esta sección inmediatamente anterior y la figura (2.4), los signos de las razones trigonométricas, de acuerdo a en que cuadrante se encuentre el ángulo son los que muestra la tabla siguiente, cabe notar que en cualquier caso y de acuerdo a la figura (2.3) el lado final del ángulo se toma como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y por tanto su signo siempre es positivo.

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
I	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
II	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
III	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
IV	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Tabla 2.1: Signos de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 2.1 Sea θ un ángulo en posición normal cuyo lado final contiene a P. Utilizando la definición de las razones trigonométricas evalúe las seis razones trigonométricas de θ si $P\left(-3\sqrt{3},-3\right)$

Solución: Ubicando el punto P en un plano coordenado se tiene que el cateto adyacente tiene una longitud de apróximadamente 5,2 unidades a la izquierda, mientras el cateto opuesto tiene una longitud de 3 unidades hacia abajo, por tanto θ es un ángulo en el tercer cuadrante.

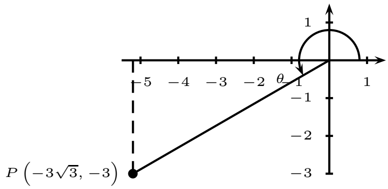


Figura 2.6: Ejemplo razones trigonométricas.

Calculando la longitud de la hipotenusa a través del teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \sqrt{(-5{,}2)^2 + (-3)^2}\\ &\approx 6,\end{aligned}$$

entonces, utilizando las coordenadas del punto P, los valores de las funciones trigonométricas de θ son:

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\theta = \sqrt{3} \qquad \sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc\theta = -2$$

2.2. Funciones Trigonométricas

Si en un ángulo en posición normal se trazan rectas perpendiculares al lado inicial, se garantiza que las razones trigonométricas se conservan ya que los triángulos formados son semejantes, luego el valor de las razones trigonométricas dependen de la magnitud del ángulo no de la longitud de sus lados; de ahí que las razónes trigonométricas queden definidas como funciones del ángulo.

Por el teorema fundamental de proporcionalidad, en la figura (2.7) se tiene que

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{OT}}$$

luego

$$\sin\theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{OT}},$$

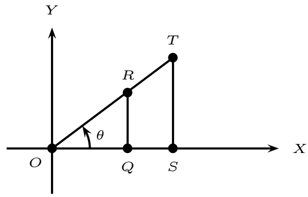


Figura 2.7: Funciones Trigonométricas.

de igual manera para las cinco (5) funciones restantes, lo que comprueba que el valor de las funciones trigonométricas depende de la magnitud del ángulo no de la longitud de sus lados, como se había mencionado antes.

2.2.1. Funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$

Considere el triángulo rectángulo

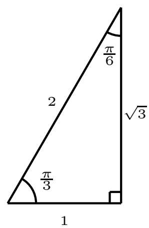


Figura 2.8: Funciones Trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.

las funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ son[2]:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right); \qquad \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 = \csc\left(\frac{\pi}{6}\right); \qquad \csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

[2] *Cofunciones:* Si dos ángulos α y β son complementarios, entonces $\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$; $\tan\alpha = \cot\beta$; $\cot\alpha = \tan\beta$; $\sec\alpha = \csc\beta$ y $\csc\alpha = \sec\beta$.

Para las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ se recurre a un triángulo isosceles con ángulos agudos de $\frac{\pi}{4}$ y lados congruentes de longitud 1.

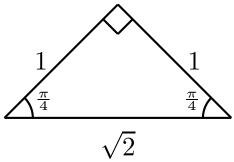


Figura 2.9: Funciones Trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right); \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} = \csc\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

2.2.2. Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Se llama ángulo cuadrantal a todo ángulo en posición normal cuyo lado final se encuentre sobre uno de los eje coordenados; son cuatro (4) los ángulos cuadrantales: 0 o 2π; $\frac{\pi}{2}$; π y $\frac{3\pi}{2}$.

De las razones trigonométricas, definidas en la sección 1.1 del presente capítulo, se tiene que, al ser $r = 1$, los valores de las funciones trigonométricas seno y coseno de un ángulo están determinados por la longitud del cateto opuesto para el caso del seno y del cateto adyacente para el caso del coseno, entonces:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = y; \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = x; \quad \text{con } r = 1,$$

es decir, del círculo goniométrico se tiene que el valor de la función seno corresponde a la longitud del cateto opuesto y el valor de la función coseno a la longitud del cateto adyacente, así y de acuerdo con la definición de las razones trigonométricas se tiene que:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}; \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}; \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que cuando el ángulo es cuadrantal, uno de los catetos tiene longitud cero y el otro la misma longitud que la hipotenusa y que el círculo goniométrico tiene centro el origen, los valores de las funciones trigonométricas de ángulos cuadranles son:

	0 o 2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	1	0	-1
$\cos\theta$	1	0	-1	0
$\tan\theta$	0	∞	0	$-\infty$
$\cot\theta$	∞	0	$-\infty$	0
$\sec\theta$	1	∞	-1	$-\infty$
$\csc\theta$	∞	1	$-\infty$	-1

Tabla 2.2: funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Ejemplo 2.2 Determine el valor exacto[3] de la expresión:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)}+1+\frac{\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)}+1+\frac{\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}+1+\frac{2}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+5\\ &= \frac{\sqrt{3}+20}{4}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) requerido para que un bloque resbale sobre un plano inclinado, está dado por la ecuación

$$t=\sqrt{\frac{2a}{g\sin\theta\cos\theta}}$$

donde a es la longitud de la base y $g=32\frac{ft}{s^2}$ es la aceleración de la

[3]Valor exacto se le llama a la expresión que contiene todos los decimales mientras que el valor aproximado es la expresión que contiene únicamente los decimales significativos.

gravedad. ¿Qué tiempo le toma al bloque resbalar por un plano inclinado de base $a = 10ft$ cuando *(a)* $\theta = \frac{\pi}{6}$?, *(b)* $\theta = \frac{\pi}{4}$? y *(c)* $\theta = \frac{\pi}{3}$?.

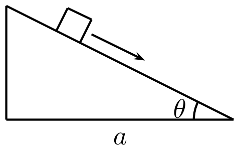


Figura 2.10: Ejemplo valores de las funciones trigonométricas.

Solución:
(a) Sustituyendo en la ecuación del tiempo $a = 10$; $g = 32$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{5}{2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6}. \end{aligned}$$

(b) con $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{20}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

(c) y para $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{5}{2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6}. \end{aligned}$$

En conclusión cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$ el bloque cae en $t \approx 1{,}20s$, mientras que para $\theta = \frac{\pi}{4}$ el tiempo que tarda en resbalar es $t \approx 1{,}118s$.

2.2.3. Funciones trigonométricas de ángulos mayores de $\frac{\pi}{2}$.

DEFINICIÓN 2.4 Si θ es un ángulo no cuadrantal, se llama *ángulo de referencia* al ángulo agudo θ_r formado por el lado final de θ y el semieje de abscisas más cercano.

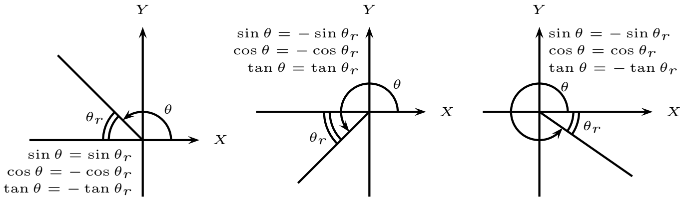


Figura 2.11: Ángulo de referencia.

De la Figura (2.11) se tiene que para un ángulo θ en el segundo cuadránte la magnitud de su ángulo de referencia θ_r se determina haciendo

$$\theta_r = \pi - \theta,$$

de manera análoga, para un ángulo θ en el tercer cuadrante, su ángulo de referencia θ_r se determina con

$$\theta_r = \theta - \pi,$$

finalmente, para un ángulo θ en el cuarto cuadrante, su ángulo de referencia θ_r esta dado por

$$\theta_r = 2\pi - \theta.$$

Ejemplo 2.4 Determine el ángulo de referencia y las seis funciones trigonométricas del ángulo *(a)* $\omega = \frac{11\pi}{6}$ y *(b)* $\alpha = 240^o$.

Solución:

(a) $\omega = \frac{11\pi}{6}$ es un ángulo en el cuarto cuadrante, luego su ángulo de referencia se forma con el lado final de ω y el semieje positivo de abscisas

$$\begin{aligned}\omega_r &= 2\pi - \omega\\ &= 2\pi - \frac{11\pi}{6}\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Los valores de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ están expresados en la página 18 en el presente capítulo.

(b) De igual manera, al analizar $\alpha = 240^o$, se tiene que es un ángulo en el tercer cuadrante, luego su ángulo de referencia α_r se forma con el lado final de α y el semieje negativo de abscisas

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \alpha - 180^o \\ &= 240^o - 180^o \\ &= 60^o. \end{aligned}$$

Igualmente los valores de las funciones trigonométricas de 60^o se encuentra en la página 18 en el presente capítulo.

DEFINICIÓN 2.5 Dos ángulo α y β son coterminales si su lado final es el mismo, de otra forma, dos ángulo son coterminales si uno es mayor a 2π o negativo, su coterminal tiene una magnitud entre 0 y 2π.

Ejemplo 2.5 Determine los valores de las funciones trigonométrcias de $\frac{43\pi}{4}$.

Solución: Siempre que sea dado un ángulo en radianes, se estará trabajando con π como la unidad base, luego lo aconsejable es revisar la escritura mixta del fraccionario $\frac{43\pi}{4}$ que corresponde a:

$$\frac{43\pi}{4} = 10\frac{3\pi}{4},$$

así, el ángulo coterminal positivo a $\frac{43\pi}{4}$ es $\frac{3\pi}{4}$, su ángulo de referencia será $\frac{\pi}{4}$ y los valores de las funciones trigonométricas correspondientes aparecen en la página 19 en el presente capítulo.

2.2.4. Funciones trigonométricas inversas.

DEFINICIÓN 2.6 Si f es una función sobreyectiva con dominio D y rango R y si $\forall u \in D \;\; \exists v \in R \;\mid\; f(u) = v \Longrightarrow f^{-1}(v) = u$. y se lee función inversa de f.

Normalmente tiende a confundirsen los conceptos de inverso y recíproco, así, las propiedades de los números reales definen los recíprocos aditivos y multiplicativos de un número real; el concepto de inverso aparece en la definición de función real de donde

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

ya que la parte izquierda denota la inversa de la función f y la parte de la derecha denota el recíproco multiplicativo de la función f, una manera simple de ver esta diferencia está en la definición misma de función inversa, la función inversa busca que conociendo las imágenes o los elementos del rango puedan determinarse los elementos del dominio o preimágenes, mientras que la operación por el recíproco bien sea aditivo o multiplicativo busca encontrar el respectivo elemento neutro, cero en la adición y uno en el producto.

Con lo anterior se definen las funciones trigonométricas inversas como sigue:

DEFINICIÓN 2.7

La función inversa del seno, denotada por $\sin^{-1} A$ o $\arcsin A$, se define como

$$\begin{aligned} &\text{Si } \sin A = x, \text{ entonces} \\ &\qquad A = \sin^{-1} x = \arcsin x. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.8

La función inversa del coseno, denotada por $\cos^{-1} A$ o $\arccos A$, se define

$$\begin{aligned} &\text{Si } \cos A = x, \text{ entonces} \\ &\qquad A = \cos^{-1} x = \arccos x. \end{aligned}$$

Es necesario resaltar que, como se demostrará más adelante, por tener las funciones seno y coseno rango el intervalo $[-1, 1]$ las respectivas inversas están definidas siempre que $-1 \leq x \leq 1$.

DEFINICIÓN 2.9

La función inversa de la tangente, denotada por $\tan^{-1} A$ o $\arctan A$, esta definida como

$$\begin{aligned} &\text{Si } \tan A = x, \text{ entonces} \\ &\qquad A = \tan^{-1} x = \arctan x. \end{aligned}$$

La función inversa de la tangente no tiene igual restricción que las respetivas inversas de seno y coseno ya que, como se demostrará más adelante en este mismo documento, la tangente tiene por rango el conjunto de los números reales.

2.3. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo significa conocer la longitud de sus tres lados y la magnitud de sus tres ángulos internos, un triángulo rectángulo puede resolverse cuando el planteamiento cumple uno de los dos siguientes casos:

a) Se conocen un lado y un ángulo.

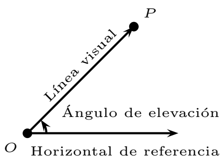
   En este caso se plantea una ecuación a partir de las razones trigonométricas del ángulo agudo conocido.

b) Se conocen dos lados.

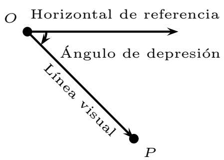
   En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado y las funciones trigonométricas inversas para conocer los ángulos agudos.

OBSERVACIÓN 2.1:

1. Se llama ángulo de elevación al ángulo formado por la línea de horizonte u horizontal de referencia y la línea vidual cuando el objeto observado se encuentra elevado sobre la linea horizontal de referencia.



2. Al ángulo formado por la línea horizontal de referencia y la línea visual cuando el objeto observado esta debajo de la horizontal de referencia, se le denomina ángulo de depresión.



Ejemplo 2.5 Desde el borde de un acantilado de $126m$ de altura, el ángulo de depresión de un yate es $20,7^o$. ¿A qué distancia del pie del acantilado está dicho bote?.

Solución:

Lo primero que se recomienda al resolver triángulos es representar el planteamiendo mediante una gráfica que organice la información dada.

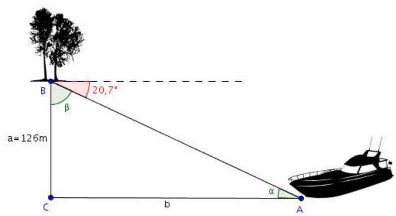


Figura 2.12: Ejemplo ángulo de depresión

Debido a que la línea horizontal de referencia desde el acantilado y el segmendo b son paralelas y la línea visual es una transversal que hace que el ángulo de depresión desde el acantilado y el ángulo de elevación desde el yate sean alternos internos entre paralelas (ver observación 1.2) se tiene que $\alpha = 20{,}7^o$. Así, utilizando una razón trigonométrica de α que relacione los dos catetos el triángulo se tiene que:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{126}{b}, \text{ luego} \\ b &= \frac{126}{\tan\alpha}, \text{ con } \alpha = 20{,}7^o \\ b &\approx 333{,}45m. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 Al observar desde el último piso de un edificio de $60ft$ de altura, el ángulo de elevación del extremo superior de una réplica de la Torre CN de Toronto (Canadá), es 14^o. Desde la base del edificio, el ángulo de elevación del extremo de la torre es 28^o. Determine *(a)* la altura de la réplica de la Torre CN y *(b)* la distancia del edificio a la torre.

Solución:

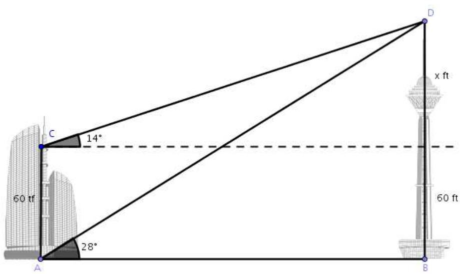


Figura 2.13: Ejemplo ángulo de elevación

De la gráfica, se tienen dos triángulos rectángulos, en la parte superior un triángulo rectángulo con catetos el segmento horizontal $\overline{AB}$ y el segmento x, en la parte inferior, un triángulo rectángulo con catetos la distancia horizontal entre los edificios $\overline{AB}$ y la altura del primer edificio $60ft$, así se tiene que:

$$\tan 14^o = \frac{x}{\overline{AB}}, \text{ entonces} \qquad \tan 28^o = \frac{60+x}{\overline{AB}}, \text{ así}$$
$$\overline{AB} = \frac{x}{\tan 14^o}. \text{ y} \qquad \overline{AB} = \frac{60+x}{\tan 29^o}.$$

Dado que el segmento $\overline{AB}$ es el mismo en los dos triángulos, se tiene

$$\frac{x}{\tan 14^o} = \frac{60+x}{\tan 28^o}$$

luego

$$\begin{aligned} x &= \frac{60\tan 14^o}{\tan 28^o - \tan 14^o} \\ &\approx 53ft. \end{aligned}$$

Con lo cual la altura de la torre es de aproximadamente $113ft$ y la distancia entre el edificio y la torre es aproximadamente $213ft$.

Ejemplo 2.7 Desde lo alto del hotel Burj Al Arab en Dubai, a $689ft$ sobre el nivel del agua, el ángulo de depresión de un bote que está al sur es $18^o50'$. Calcular la velocidad del bote si después de moverse hacia el oeste durante $2min$, el ángulo de depresión es $14^o20'$.

Solución:

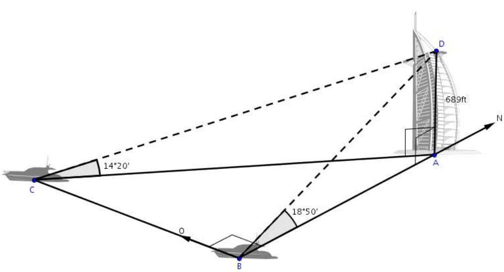


Figura 2.14: Ejemplo orientación

Se forman tres triángulos rectángulos, $\triangle ABC$; $\triangle ACD$ y $\triangle\ ABD$. Del $\triangle ABD$ se tiene

$$\begin{aligned} \tan 18{,}83^o &= \frac{689}{\overline{AB}}, \text{ entonces} \\ \overline{AB} &= \frac{689}{\tan 18{,}83^o} \\ &\approx 2020{,}24 ft. \end{aligned}$$

Ahora, del $\triangle ACD$

$$\begin{aligned} \tan 14{,}33^o &= \frac{689}{\overline{AC}}, \text{ así} \\ \overline{AC} &= \frac{689}{\tan 14{,}33^o} \\ &\approx 2697{,}15 ft. \end{aligned}$$

Con lo anterior se conocen, un cateto y la hipotenusa del $\triangle ABC$ del cual, el elemento de interés es el otro cateto; aplicanto el teorema de Pitágoras se llega a

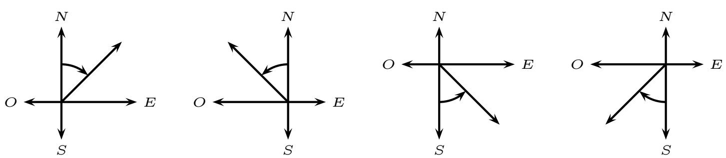
$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{2697{,}15^2 - 2020{,}46^2} \\ &\approx 1786{,}71 ft, \end{aligned}$$

con lo cual la velocidad del bote es aproximadamente

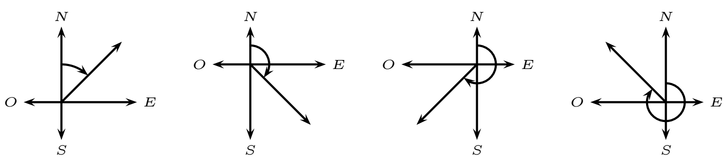
$$V \approx 893{,}36 \tfrac{ft}{min}.$$

OBSERVACIÓN 2.2:

1. Se llama *curso o dirección* al ángulo agudo que se forma con la línea Norte - Sur. Este ángulo se lee siempre positivo y con respecto a la línea Norte - Sur, su magnitud generalmente esta dada en GMS.



2. En la navegación aéra el *curso o dirección* corresponde al ángulo medido siempre con recto a la línea Norte, en sentido antihorario, aunque se lee siempre positivo.



Ejercicios 2

1. Dado que β es un ángulo en posición normal y su lado final para por el punto P, determine los valores de las seis funciones trigonométricas de β para los P dados.

   a) $P(-4,0)$
   b) $P\left(1,-\sqrt{3}\right)$
   c) $P(0,2)$
   d) $P(-3,-5)$
   e) $P(2,3)$
   f) $P(7,-24)$

2. Determine el cuadrante al que pertenece al ángulo y especifique los signos de las seis funciones trigonométricas de dicho ángulo.

   a) -1000^o
   b) 750^o
   c) $\frac{7\pi}{2}$
   d) $-\frac{4\pi}{3}$
   e) 212^o
   f) $\frac{7\pi}{6}$
   g) 385^o
   h) -955^o
   i) -150^o
   j) $-\frac{17\pi}{6}$
   k) $-\frac{10\pi}{3}$
   l) 0

3. Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de α

   a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\tan\alpha > 0$
   b) $\sec\alpha = \sqrt{2}$ y $\cot\alpha < 0$
   c) $\tan\alpha = -\frac{8}{15}$ y $\sec\alpha < 0$
   d) $\cot\alpha = \frac{4}{3}$ y $\csc\alpha < 0$
   e) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ y $\cos\alpha > 0$
   f) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ y $\sin\alpha > 0$

4. Determine el valor exacto de las siguientes expresiones

   a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$
   b) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}$
   c) $\left(-3\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$
   d) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}$
   e) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)}$
   f) $\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

5. En cierto motor de combustión interna, la distancia x (en metros) del centro de la biela a la cabeza del émbolo está dada por

$$x = \cos\theta + \sqrt{16 + \frac{\cos 2\theta}{2}},$$

   donde θ es el ángulo entre el brazo del cigüeñal y la trayectoria de la cabeza del émbolo. Encuentre x cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

6. Demuestre que la pendiente de una recta esta dada por la ecuación
$$m = \tan\theta,$$
cuando θ es el ángulo que forma de recta con el eje horizontal en un sistema coordenado.
7. Los puntos A y B están en una misma recta horizontal con el pie de una colina, y los ángulos de depresión de estos puntos desde la cima son $30,2^o$ y $22{,}5^o$, respectivamente. Si la distancia entres A y B es $75m$. ¿cuál es la altura de la colina?.
8. Desde la cima de una montaña de $532m$ de altura con respecto a un río cercano, el ángulo de depresión de un punto P en la ribera más cercana del río es de $52{,}6^o$, y el ángulo de depresión de un punto Q directamente opuesto a P en la otra ribera, es de $34{,}5^o$. Los punto P y Q y el pie de la montaña están en una misma horizontal. Obtenga la distancia correspondiente a la anchura del río entre P y Q.
9. El punto T está en la cumbre de un monte. Desde un punto P del suelo, el ángulo de elevación de T es $16{,}3^o$. Desde el punto Q en la misma horizontal con P y el pie de la montaña, el ángulo de elevación de T es $28{,}7^o$. ¿Cuál es la altura de dicha montaña si la distancia entre P y Q es $125m$?.
10. Desde un punto de observación A, un guardia forestal descubre un incendio en dirección $S35^o50'O$. Desde otro punto B, a $8km$ directamente al oeste de A, otro guardia descubre el mismo incendio en dirección $S54^o10'E$. Determine, aproximadamente a qué distancia de A se encuentra el fuego.
11. Un puente levadizo tiene $150ft$ de longitud cuando está en posición normal sobre un río. Las dos secciones del puente pueden girar hacia arriba hasta un ángulo de 35^o;
    a) Si el nivel del agura está $15ft$ por debajo del puente, calcule la distancia entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente está completamente abierto.
    b) Determine la distancia de separación entre los extremos de las dos secciones cuando el puente está totalmente abierto.
12. En un juego de tiro al pato la figura del pato de mueve desde A hasta B con una velocidad de $10\frac{cm}{s}$. El tirador que se encuentra en un punto O a $50cm$ directamente frente del punto A y dispara balas que viajan a $20\frac{cm}{s}$ en cuanto ve el pato en A, ¿a qué ángulo debe orientar el disparo para darle al pato?.
13. Para techar una bodega cuyas dimensiones son $20in \times 40in \times 20in$, se coloca una columna de soporte de $46ft$ de altura en el centro de la

bodega. Para apoyar el techo, una viga debe ir apoyada en la parte superior de la columna y de la pared ¿qué ángulo de elevación tendrá el techo? (existen dos soluciones).

14. Un aeroplano despega de una pista con rumbo 40^o. Después de volar $800m$ el piloto gira 90^o y se dirige hacia el sureste.

    a) ¿Cuál es su nuevo rumbo?.

    b) Después de volar $1{,}6km$ en esta dirección, ¿qué rumbo debe fijar la torre de control para localizar al aeroplano?.

15. El faro Gibb's Hill de Southampton en Bermuda tiene su haz girando a una altura de $362ft$ sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que los barcos a $64{,}4km$ de distancia pueden ver su luz y que aviones que vuelan a $3000m$ la pueden ver desde una distanci de $193km$. Verifique que la información del folleto es cierta y deduzca que supone el folleto respecto de la altura del barco.

16. Una pared de $15ft$ de altura, está a $10ft$ de una casa. Encuentre la longitud de la escalera más corta que toque el borde superior de la pared y que alcance una ventana a $20{,}5ft$ del suelo.

17. Demuestre que el perímetro de un poígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r está dado por

$$P = 2nr\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

18. Demuestre que la base de un triángulo isósceles está dada por b siendo a la longitud de sus lados iguales y su ángulo en el vértice θ.

$$b = 2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Capítulo 3

Triángulos Oblicuángulos

DEFINICIÓN 3.1 Si en un triángulo ninguno de sus ángulo internos es recto, el trigángulo se define oblicuángulo.

Existen dos tipos de triángulos oblicuángulos

1. **Acutángulo:** si todos sus ángulos internos son agudos.

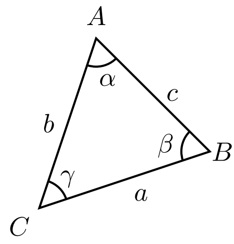


Figura 3.1: Triángulo Acutángulo.

2. **Obtusángulo:** si uno de sus ángulo internos es obtuso.

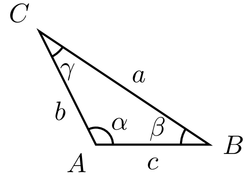


Figura 3.2: Triángulo Obtusángulo.

Teorema 5. *Teorema del Seno*

Si a, b, c y α, β, γ son los lados y los ángulos respectivamente opuestos de un triángulo, se cumple en cualquier caso que

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{3.1}$$

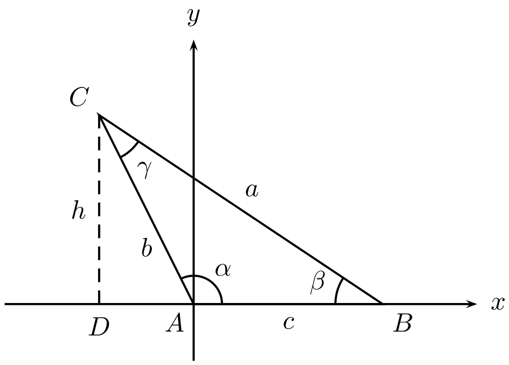


Figura 3.3: Demostración teorema del seno.

Demostración. En la Figura (3.3), de $\triangle ABC$

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}, \text{ luego}$$
$$h = b\sin\alpha.$$

Ahora, de $\triangle DBC$, triángulo rectángulo

$$\sin\beta = \frac{h}{a}, \text{ con lo cual}$$
$$h = a\sin\beta.$$

Como el segmento h es el mismo en los dos triángulos, entonces se tiene que

$$b\sin\alpha = a\sin\beta,$$

de donde, al dividir entre ab

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

Similar razonamiento puede aplicarse para la razón $\frac{\sin\gamma}{c}$. $\square$

Teorema 6. *Teorema del Coseno*

Si a, b, c *y* α, β, γ *son los lados y los ángulos respectivamente opuestos de un triángulo, se cumple en cualquier caso que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{3.2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{3.3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{3.4}$$

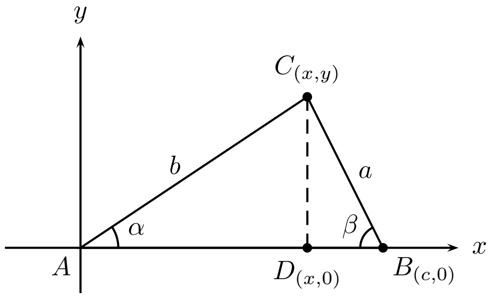


Figura 3.4: Demostración teorema del coseno.

Demostración. En la figura (3.4), de $\triangle ADC$

$$\cos\alpha = \frac{x}{b} \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{y}{b}$$

$$x = b\cos\alpha \qquad\qquad y = b\sin\alpha.$$

Aplicando la ecuación de la distancia para determinar la longitud del lado a de $\triangle ABC$, se tiene

$$\begin{aligned} a^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo x y y en el resultado anterior se llega a[1]

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\sin^2\alpha \\ &= b^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Razonamiento similar puede ser utilizado para demostrar las relaciones (3.3) y (3.4). □

[1]En el capítulo XXX se demostrará que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

3.1. Resolución de triángulos oblicuángulos

La resolución de triángulos oblicuángulos puede clasificarse en cuatro casos

[C1] **Lado Ángulo Ángulo o Ángulo Lado Ángulo**

Se conoce un lado y dos ángulos, uno opuesto al lado conocido, o se conocen dos ángulos y el lado entre ellos.

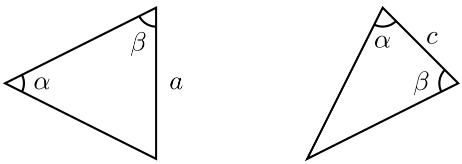


Figura 3.5: Caso LAA o ALA.

[C2] **Lado Lado Ángulo: "caso ambigüo"**

Se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. En este caso, no siempre podrá conformarse un triángulo con los datos suministrados, depende de la longitud del lado opuesto al ángulo dado.

Si se ubica el ángulo α conocido en posición normal en un plano coordenado y se construye su lado final con la longitud de b, uno de los lados dados, el otro lado conocido corresponderá al lado opuesto a α, puede entonces compararse la longitud de a, el otro lado conocido, con $b \sin \alpha$

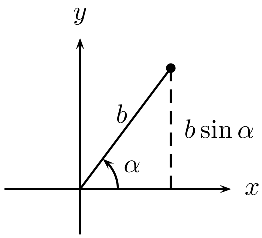
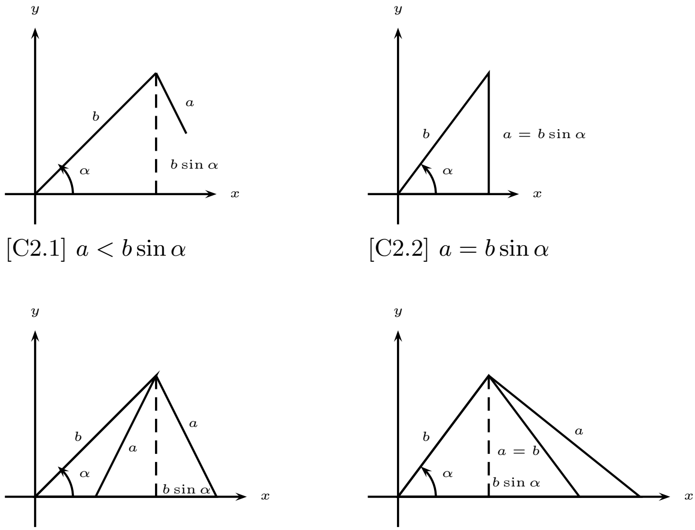


Figura 3.6: Caso ambigüo.

con lo cual se tiene uno de los siguientes casos



[C2.1] $a < b\sin\alpha$ [C2.2] $a = b\sin\alpha$

[C2.3] $b > a > b\sin\alpha$ [C2.4] $a \geq b$

Figura 3.7: Caso ambigüo.

puede tenerse entonces: ningún triángulo si $a < b\sin\alpha$, un triángulo rectángulo si $a = b\sin\alpha$, un triángulo con ángulo obtuso β o un triángulo acutángulo si $b > a > b\sin\alpha$, o finalmenten si $a \geq b$ puede formarse uno de dos triángulo, uno isosceles si $a = b$ o un triángulo obtusángulo[2] con ángulo obtuso *gamma* si $a > b$.[3]

En cualquiera los casos [C1] y [C2] se conoce una *pareja completa*[4], para resolver alguno de estos casos se aplica el teorema del seno expresado en la ecuación (3.1) que despeja directamente la magnitud de los ángulos, sin embargo también puede escribirse como

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

si lo que se requiere es la longitud de los lados.

[C3] **Lado Ángulo Lado**

Son conocidos la longitud de dos lados y el ángulo entre éstos.

---

[2] Recuerde que en un triángulo obtusángulo, el ángulo obtuso siembre es el ángulo opuesto al lado de mayor longitud.

[3] Recuerde que la notación de un triángulo se desarrolla con los vértices las letras A, B y C, los lados a, b y c respectivamente opuestos a cada vértice y los ángulos α, β y γ correspondientes a cada vértice como muestran las figuras 3.1 y 3.2.

[4] Se llama pareja completa a la pareja de un ángulo y su lado opuesto, en el caso ALA puede completarse la pareja haciendo $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

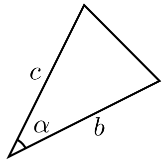


Figura 3.8: Caso LAL.

[C4] **Lado Lado Lado**

Se tiene la longitud de los tres lados del triángulo.

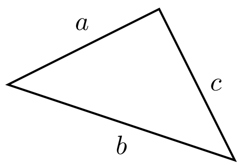


Figura 3.9: Caso LLL.

Para resolver los casos [C3] y [C4] se aplica el teorema del coseno que de manera análoga al teorema del seno puede escribirse como

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

para despejar de manera directa la magnitud de los ángulos.

Ejemplo 3.1 Un helicóptero se halla suspendido a una altura de $305m$ sobre un edificio de $92m$ de altura. Desde la terraza y desde el helicóptero puede verse la parte más alta de otro edificio. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43^o y desde la terraza del primer edificio, el ángulo de elevación es de 18^o. Determine la altura del segundo edificio y la separación horizontal entre los dos edificios.

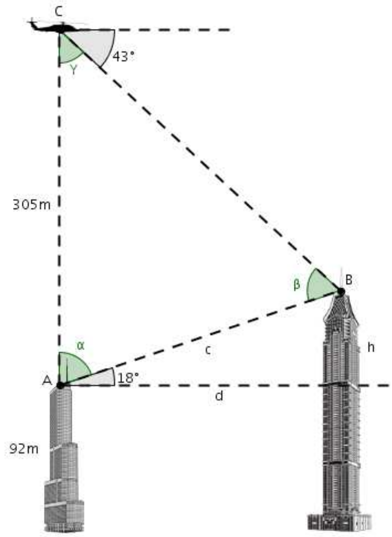


Figura 3.10: Ejemplo teorema del seno.

Solución:

Los ángulos α y γ son complementarios con el ángulo de 18^o y el de 43^o respectivamente, luego

$$\begin{aligned}\alpha &= 90^o - 18^o \\ &= 72^o\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\gamma &= 90^o - 43^o \\ &= 47^o\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\beta &= 180^o - (\alpha + \gamma) \\ &= 61^o\end{aligned}$$

La longitud del segmento c de $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin 47^o} &= \frac{305}{\sin 61^o} \\ c &= \frac{305 \sin 47^o}{\sin 61^o} \\ &\approx 255m\end{aligned}$$

La altura del segundo eficio corresponde a $92m + h$

$$\begin{aligned}\sin 18^o &= \frac{h}{255} \\ h &\approx 79m\end{aligned}$$

luego la altura total del segundo edificio es aproximadamente $171m$, ahora la distancia horizontal entre los dos edificios d es,

$$\begin{aligned} \cos 18^o &= \frac{d}{255} \\ d &\approx 243m \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2 En un sistema manivela - biela - pistón, la manivela tiene $7{,}62cm$ de longitud y la biela $22{,}86cm$. Cuando el ángulo con vértice en el pistón y extremos en el extremo de la manivela A y el centro del cigüeñal O es de 15^o, ¿Qué tan lejos está el pistón del centro del cigüeñal O?.

Solución:

De la información dada se deduce que corresponde al caso ambigüo [C2] por lo tanto lo primero es hacer la comparación de los datos con el correspondiente $b\sin\alpha$.

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= 22{,}86\sin 15^o \\ &\approx 5{,}92 \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene el caso [C2.3] y por tanto existen dos posibles soluciones.

Aplicando el teorema del seno

$$\begin{aligned} \frac{\sin\Omega}{22{,}86} &= \frac{\sin 15^o}{7{,}62} \\ \sin\Omega &= \frac{22{,}86\sin 15^o}{7{,}62} \\ &\approx 0{,}776457 \end{aligned}$$

De donde se deduce, por ángulos de referencia, que existen dos ángulos que satisfacen $\sin\Omega \approx 0{,}776457$

$$\Omega_1 \approx 51^o \qquad\qquad \Omega_2 \approx 129^o$$

Con $\Omega_1 \approx 51^o$

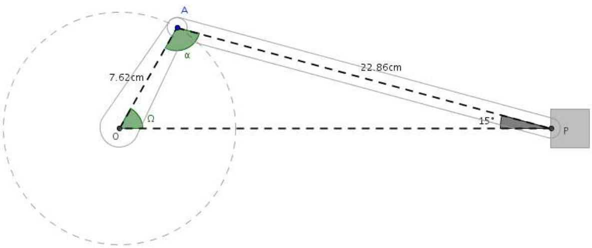


Figura 3.11: Ejemplo caso ambigüo (a)

la magnitud de α queda determinada por

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^o - (51^o + 15^o)\\ &= 114^o\end{aligned}$$

con lo que la magnitud de $\overline{OP}$, utilizando nuevamente el teorema del seno, es

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OP}}{\sin 114^o} &= \frac{7{,}62}{\sin 15^o}\\ \overline{OP} &= \frac{7{,}62 \sin 114^o}{\sin 15^o}\\ &\approx 27cm.\end{aligned}$$

Ahora con $\Omega_2 \approx 129^o$

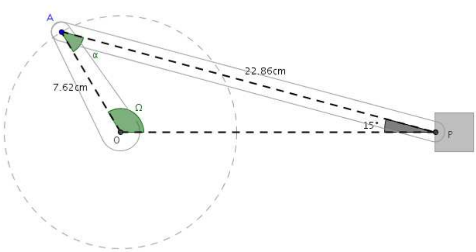


Figura 3.12: Ejemplo caso ambigüo (b)

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^o - (129^o + 15^o)\\ &= 36^o\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OP}}{\sin 36^o} &= \frac{7{,}62}{\sin 15^o}\\ \overline{OP} &= \frac{7{,}62 \sin 36^o}{\sin 15^o}\\ &\approx 17cm\end{aligned}$$

es la distancia del pistón al centro del cigüeñal.

Ejemplo 3.3 Al intentar volar de la ciudad A a la ciudad B, una distancia de $330mi$, un piloto tomó un curso equivocado en 10^o. Si el avión mantiene una velocidad promedio de $220\frac{mi}{h}$ y el error en la dirección se descubre después de $15min$, ¿qué ángulo debe girar el piloto para dirigirse a la ciudad B y cuál debe ser su velocidad para que el vuelo total tarde $90min$?.

Solución:

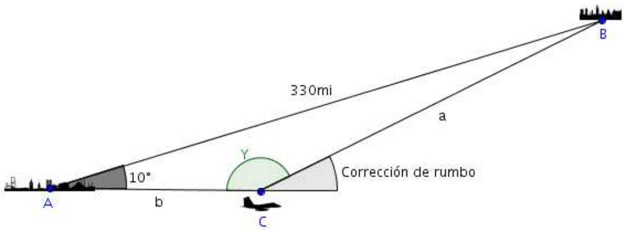


Figura 3.13: Ejemplo teorema del coseno

Lo primero es determinar que distancia recorrió el avión, para ello se sabe que la velocidad está dada por la ecuación $V = \frac{b}{t}$, con b la distancia recorrida, despejando b se tiene que $b = Vt$, con $V = 220\frac{mi}{h}$ y $t = 15min$

$$b = 55mi$$

Ahora, aplicando el teorema del coseno

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{330^2 + 55^2 - 2 \times 330 \times 55 \cos 10^o}\\ &\approx 276millas\end{aligned}$$

con lo cual puede calcularse γ

$$\cos\gamma = \frac{276^2 + 55^2 - 330^2}{2 \times 276 \times 55}$$
$$\gamma = \arccos(-0{,}978228)$$
$$\gamma \approx 168^o$$

el ángulo con el que el piloto debe corregir el rumbo es el ángulo suplementario de γ

$$\gamma_s = 12^o$$

finalmente, la distancia total a recorrer será de $331mi$, con lo que la velocidad que debe mantener para que el vuelo tenga una duración de $90min$ es de $V \approx 220{,}67\frac{mi}{h}$.

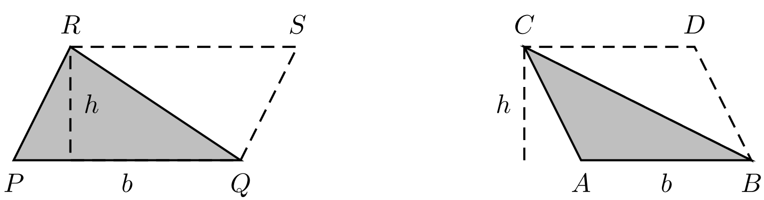
3.2. Área de triángulos

Existen tres teoremas que definen el área[5] de un triángulo.

Teorema 7. *Dado un triángulo de base b y altura correspondiente h, el área A esta dada por*

$$A_\triangle = \frac{1}{2}bh. \tag{3.5}$$

Demostración. Es suficiente con ver que una región triángular puede considerarse como la mitad de una región en forma de paralelogramo, por tanto la ecuación que define el área de un triángulo se deduce de la ecuación del área de un paralelogramo, las siguientes dos gráficas muestran esto.



$A_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}bh$ $\qquad$ $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$

Figura 3.14: Área de un triángulo, forma geométrica

□

Ejemplo 3.4: Demostrar que el área de la región sombreada es la mitad del área del paralelogramo.

[5]Wikipedia; área es una medida de la extensión de una superficie.

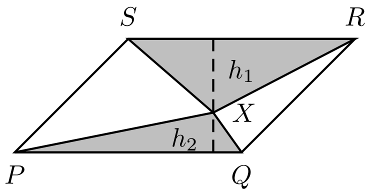


Figura 3.15: Área de un triángulo, forma geométrica

Solución:
El área total del paralelogramo $\square PQRS$ esta dada por

$$A_{\square PQRS} = \overline{PQ}(h_1 + h_2).$$

Ahora, el área de cada uno de los triángulos sombreados es

$$A_{\triangle PQX} = \frac{\overline{PQ}h_2}{2} \qquad A_{\triangle SRX} = \frac{\overline{SR}h_1}{2}.$$

Dado que se trata de un paralelogramo, puede afirmarse que $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$, luego

$$\begin{aligned} A_{\triangle PQX} + A_{\triangle SRX} &= \frac{\overline{PQ}h_2}{2} + \frac{\overline{PQ}h_1}{2} \\ &= \frac{\overline{PQ}(h_1 + h_2)}{2}. \end{aligned}$$

que corresponde a la mitad del área de $\square PQRS$.

Teorema 8. *Si se conocen las longitudes de los de los lados de un triángulo, y el ángulo comprendido entre ellos*

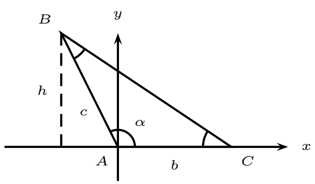


Figura 3.16: Área de un triángulo, forma trigonométrica.

el área del triángulo queda definida por:

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha. \tag{3.6}$$

Demostración. Del **Teorema 7**,

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2}bh$$

observando la Figura (3.16)

$$h = c \sin \alpha$$

sustituyendo h en (3.5)

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

$\square$

Ejemplo 3.5 Determine el volumen del prisma

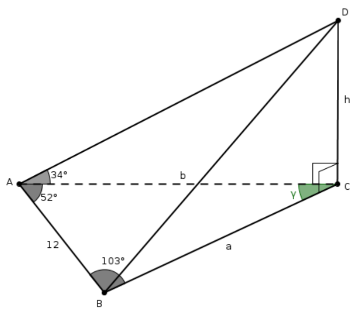


Figura 3.17: Ejemplo área de un triángulo, forma trigonométrica

Solución: Lo primero es recordar que el volumen del prisma se expresa $v = A_b h$ con A_b el área de la base y h la altura del prisma, con esto, se sabe que hay que determinar estas dos magnitudes para poder encontrar el volumen del prisma.

Para determinar al área de la base del prisma, $\triangle ABC$, se tienen conocidos α **y** β por lo tanto $\gamma = 25^o$, utilizando el teorema del seno

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin 52^o} &= \frac{12}{\sin 25^o} \\ a &= \frac{12 \sin 52^o}{\sin 25^o} \\ a &\approx 22{,}3751 \end{aligned}$$

con lo cual, el área de la base del prisma es

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{22{,}3751 \times 12 \sin 103^o}{2} \\ &\approx 130{,}81 u^2. \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar la altura del prisma, primero se determina la longitud de b

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin 103^o} &= \frac{12}{\sin 25^o} \\ b &\approx 27{,}6667 u. \end{aligned}$$

luego la altura h, del prisma queda definida por

$$\begin{aligned}\tan 34^o &= \frac{h}{27{,}6667}\\ h &\approx 18{,}6614u.\end{aligned}$$

finalmente, el volumen v del prisma

$$\begin{aligned}v &\approx 130{,}81u^2 \times 18{,}6612u\\ &\approx 2441{,}09u^3.\end{aligned}$$

Teorema 9. *El área de un triángulo cuyos lados a, b y c son conocidos, esta dada por la llamada fórmula de Herón de Alejandría.*

$$A_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{3.7}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Herón de Alejandría cuya principal obra es su libro *Métrica*, fue un matemático que vivio alrrededor del 75 d.C. y quien despertó un gran debate dentro de los matemáticos griegos con su fórmula para el cálculo del área del un triángulo ya que los matemáticos griegos conocian el área como un doble producto y el volumen como un triple producto, sin embargo un producto de cuatro factores para el cálculo de un área parecia ser algo ambigüo, sin embargo esto queda fácilmente explicado por la obtención de la raíz cuadrada de dicho producto.

Demostración. Del Teorema 8 $A_\triangle = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, lo que puede escribirse como[6]
:

$$\begin{aligned} A_\triangle &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2\left(1-\cos^2\alpha\right)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha)\tfrac{1}{2}bc(1-\cos\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, dado que la formula de Herón esta expresada en función de los lados del triángulo los factores $(1+\cos\alpha)$ y $(1-\cos\alpha)$ deben quedar expresados en términos de los lados del triángulo, utilizando el teorema del coseno se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha) &= \tfrac{1}{2}bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}bc\left(\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{4} \end{aligned}$$

que por ser una diferencia de cuadrados puede escribirse como

$$\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha) = \frac{(b+c)+a}{2}\cdot\frac{(b+c)-a}{2}, \tag{3.9}$$

bajo el mismo procedimiento se demuestra que

$$\tfrac{1}{2}bc(1-\cos\alpha) = \frac{a-(b+c)}{2}\cdot\frac{a+(b-c)}{2}, \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.9) y (3.10) respectivamente en (3.8) se obtiene

$$A_\triangle = \sqrt{\frac{(b+c)+a}{2}\cdot\frac{(b+c)-a}{2}\cdot\frac{a-(b-c)}{2}\cdot\frac{a+(b-c)}{2}} \tag{3.11}$$

ahora, haciendo

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

se consigue

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}, \qquad s-b = \frac{a-b+c}{2}, \qquad s-c = \frac{a+b-c}{2},$$

así, se simplifica la escritura de (3.11) para finalmente tener

$$A_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

□

Ejemplo 3.6 Calcular el ángulo ϕ, área de un ala del avión y teniendo en cuenta que el fuselaje mide $5{,}8ft$ determinar la envergadura del avión (extensión de un extremo a otro de las alas).

[6] En el capítulo XXX se demostrará que $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

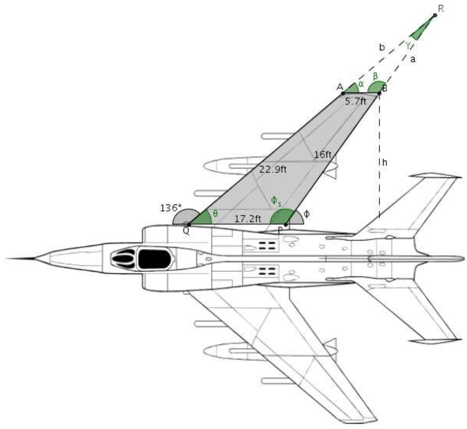


Figura 3.18: Ejemplo área de un triángulo, fórmula de Herón.

Solución: Para empezar, se trazó una prolongación de los lados $\overline{QA}$ y $\overline{PB}$ del ala del avión, para construir $\triangle PQR$ y determinar el área del ala con la diferencia $A_{\triangle PQR} - A_{\triangle ABR}$.

Para establecer la envergadura del avión es necesario conocer la distancia h (perpendicular al fuselaje) desde el extremo de una de las alas

$$\sin 44^o = \frac{h}{22{,}9}$$
$$h \approx 15{,}9077 ft$$

con esto puede determinarse la magnitud de ϕ

$$\phi = \arcsin\left(\frac{15{,}9077}{16}\right)$$
$$\approx 83{,}842^o,$$

con lo que ϕ_s, el suplementario de ϕ e interno en el ala, tiene una magnitud de $\phi_s \approx 96{,}158^o$ y $\gamma \approx 39{,}842^o$. En $\triangle ABR$, ya que el lado $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{PQ}$ se cumple que $\alpha \cong \theta$ y $\phi_s \cong \beta$ con esto se determina la longitud de los segmentos

$$\overline{BR} = \frac{5{,}7 \sin 44^o}{\sin 39{,}842^o} \approx 6{,}18031 ft \qquad \overline{AR} = \frac{5{,}7 \sin 96{,}158}{\sin 39{,}842} \approx 8{,}84557 ft$$

sumando estos resultados a las longitudes correspondientes de los lados $\overline{QA}$ y $\overline{PB}$ se tiene la longitud de los lados $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$, con lo cual, el Área total $A_{\triangle PQR}$

es

$$\begin{aligned} A_{\triangle PQR} &= \sqrt{s(s-31{,}7456)(s-17{,}2)(s-22{,}1803)} \\ &\approx 180{,}738ft^2 \end{aligned}$$

donde $s = \frac{31{,}7456+17{,}2+22{,}1803}{2}$, y el área de $\triangle ABR$ es

$$\begin{aligned} A_{\triangle ABR} &= \sqrt{s(s-5{,}7)(s-6{,}18031)(s-8{,}84557)} \\ &\approx 17{,}5122ft^2 \end{aligned}$$

con $s = \frac{5{,}7+6{,}18031+8{,}84557}{2}$, por tanto el área de un ala del avión es aproximadamente $163{,}226ft^2$ y dado que el fuselaje miden en su ancho $5{,}8ft$ junto con la longitud h ya calculada, la envergadura del avión es de aproximadamente $37{,}6154ft$.

Ejercicios 3

1. Resuelva el triángulo o los triángulos si se trata de un caso ambigüo; encuentre sus respectivas áreas.

    a) $a = 9{,}5,\ \alpha = 135^o,\ \beta = 30^o$

    b) $c = 88,\ \alpha = 30^o,\ \gamma = 120^o$

    c) $\beta = 101^o6',\ \gamma = 23^o24',\ c = 0{,}0149$

    d) $\alpha = 52^o42',\ \beta = 75^o36', b = 408$

    e) $b = 5649,\ a = 6382,\ \beta = 59{,}43^o$

    f) $3{,}562,\ c = 4{,}210,\ \beta = 50{,}23^o$

    g) $a = 1{,}4,\ b = 2{,}1,\ \gamma = 120^o$

    h) $a = 15,\ c = 22,\ \beta = 135^o$

2. Un avión sale de un aeropuerto con un curso de 310^o. Después de volar $150mi$, se hace necesario que regrese al aeródromo. Debido a un error de navegación, el avión vuela $150mi$ con un curso de 115^o. Determine, después de recorrer las $300mi$ (de ida y regreso)

    a) ¿A qué distancia estará del aeropuerto?

    b) ¿Cuál es la orientación del avión con relación al aeropuerto?

3. Un guardabosques camina sobre un sendero inclinado 5^o respecto de la horizontal directamente hacia una torre de observación de incendios de $100ft$ de altura. El ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 40^o. ¿Qué tan lejos está el guardabosques de la torre en este momento?.

4. El capitán de un buque en el mar visualiza el puerto en el que el buque va a atracar. Visualiza también un faro que sabe que está a $1mi$ de distancia del puesto y mide el ángulo entre las dos visuales, que resulta ser de 20^o. Con el bueque navegando directamente hacia el puerto, el capitán repite esta medición después de viajar 5 minútos a $12\frac{mi}{h}$. Si el nuevo ángulo es de 30^o, ¿qué tan lejos está el buque del puerto?.
5. Dos rutas aéreas se cortan con un ángulo de $50,6^o$. En un momento dado, un avión en curso está a 53,4mi de la intersección, y otra aeronave en otro curso está a 63,9mi de dicho cruce. ¿Cuál es la distancia entre los aviones en ese momento? (Existen dos soluciones).
6. Una rampa tiene una inclinación de 41,3^o con respecto al piso. Sobre esta rampa se apoya una tabla de 20,6ft de longitud, con su extremo apoyado en el piso situado en el punto P a 12,2ft de la base Q de la rampa, mientras que el otro extremo está en el punto R. Determine la distancia del punto Q al punto R.
7. Un topógrafo se da cuenta de que la dirección de un punto A a un punto B es $S63^oO$ y que la dirección de A a C es $S38^oO$. Ahora $\overline{AB} =$ 239 yardas, y $\overline{BC} = 374$ yardas. Determine $\overline{AC}$.
8. Un asta de bandera está colocado en la parte superior de un edificio de $115ft$ de altura. Desde un punto del mismo plano horizontal de la base del edificio, los ángulos de elevación de los extremos inferior y superior del asta de bansera son 63,2^o y 58,6^o respectivamente, ¿Cuál es la altura del asta de bandera?.
9. Tres circunferencias de radios $115, 150$ y 225 metros respectivamente, son tangentes entre sí por la parte externa. Encuentre los ángulos del triángulo formado al unir los centros de las circunferencias.
10. Obtenga el área de un paralelogramo que tiene lados de longitud $12ft$ y $16ft$, si un ángulo en un vértice mide 40^o.
11. Las dimensiones de una caja rectangular son $8 \times 6 \times 4$ pulgadas. Encuentre el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal del lado 6×4 pulgadas.
12. Una catedral está situada en la cima de una colina. Cuando la punto de su torre se obserca desde el pie de la colina, el ángulo de elevación es de 48^o. Cuando se ve desde un punto a una distancia de $200ft$ alejado de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 41^o. La cuesta de la colina forma un ángulo de 32^o. Aproxime la altura de la catedral.
13. Un avión de reconocimiento que vuela a una altura de $10000ft$, localiza a un submarino a un ángulo de depresión de 37^o y un buque tanque a un ángulo de depresión de 21^o, si el ángulo formado por el submarino, el avión y el buque es de 130^o, ¿cuál será la distancia entre el submarino y el buque tanque?.

14. Obtenga el área de los triángulos cuyos vértices están en los puntos indicados

    a) $(-2,1),\ (2,-3)$ y $(5,4)$

    b) $(0,-3),\ (2,4)$ y $(5,2)$

15. Demuestre que el área de un triángulo puede expresarse como

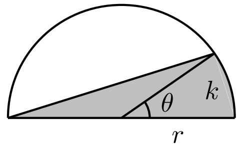
$$A_{\triangle} = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

16. Demuestre que el radio de una circunferencia inscrita en un triángulo de lados a, b y c esta dado por

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

17. Determine el área de la región sombreada



18. Utilice la gráfica para demostrar que

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$