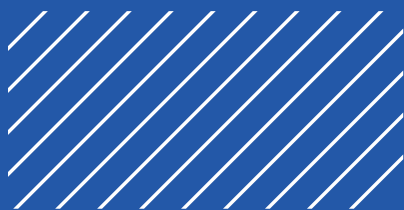


TREINTA PARADOJAS MATEMÁTICAS UNIVERSALES:

Una breve guía para
explicarlas todas



1ª edición



Treinta Paradojas Matemáticas Universales:
Una breve guía para explicarlas todas

*Treinta Paradojas Matemáticas Universales:
Una breve guía para explicarlas todas*

Revisión Técnica:
Editorial CEDIA

Corrección de Estilo:
Diseño y Diagramación:
Coordinación:

Laura Malache Silva
Erick Brito Quezada
Editorial CEDIA

Una publicación de la Editorial CEDIA,
arbitrada por pares académicos de doble ciego.

cedia

CEDIA
Gonzalo Cordero 2-111 y J. Fajardo
Cuenca – Ecuador
info@cedia.org.ec



ESPE – UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
Av. General Rumiñahui s/n y Ambato.
Sangolquí – Ecuador
comunicacion@espe.edu.ec

Primera edición
ISBN: 978-9942-7178-0-1

Quito, Ecuador
Noviembre de 2023.



Esta obra está bajo una licencia de [Creative Commons, Reconocimiento No Comercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

AUTORES

Pablo Álvarez Jiménez:

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, Magíster en Administración de Empresas, Egresado de la Maestría en Enseñanza de la Matemática. Consultor en Gerencia de Proyectos.

Marcelo Javier Arévalo Luzuriaga:

Ingeniero en Electrónica control y Automatización Industrial, Maestría en Enseñanza de la Matemática.

José Roberto Bossano Cueva:

Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática y Física, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente de Matemática.

Roberto Daniel Calderón Valle:

Ingeniero Agroindustrial, Magíster en Auditoría de Gestión de Calidad, Maestría en Enseñanza de la Matemática. PhD en Economía e Innovación Matemática de la Universidad Estatal del Suroeste de Rusia (SWSO). Docente Investigador de la Universidad Técnica de Cotopaxi (UTC).

Cristian Medardo Díaz Matailo:

Maestría en Enseñanza de la Matemática, Maestría Universitaria en Formación del Profesorado de Educación Secundaria del Ecuador, especialidad en Matemáticas. Licenciado en Ciencias de la Educación, Profesor de Enseñanza Media en la especialización de Matemáticas y Física, Docente Investigador externo del Instituto de Etnociencias de la Universidad Central del Ecuador.

Joe Fred García Arcos:

Ingeniero Industrial. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente de Matemática en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE.

Vicente Paúl García Mancero:

Ingeniero en Sistemas e Informática, Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente Investigador en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE.

Carlos Vicente Llerena Aguilar:

Ingeniero Mecánico, Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente Investigador en la Universidad Regional Amazónica IKIAM.

Juan Carlos Sarango Cuenca:

Ingeniero en Electrónica y Control, Diplomado en Administration Bussines, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente Investigador en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE.

Narcisa Marisol Sarmiento Sarmiento:

Maestría en Ciencias de la Educación, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente Investigador en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Damián Michael Tapia Orbea:

Ingeniero Mecánico, Maestría en Administración de Empresas, y Maestría en Enseñanza de la Matemática. Consultor Procesos Productivos.

Marina Vladimirovna Smirnova:

Ingeniera en Electrónica y Microprocesadores, Ingeniera en Gestión Educativa. Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente de Matemática y Física.

Luis Jhon Pilataxi Morales:

Licenciado en Ciencias de la Educación con Especialidad en Física y Matemática. Maestría en enseñanza de la Matemática.

Miguel Ángel Valencia Quezada:

Licenciado en Ciencias de la Educación con Especialidad en Física y Matemática. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente de Matemática

CONTENIDOS

Prólogo.....	7
01 Epiménides y Cresos <i>La paradoja del mentiroso</i>	8
02 Eubúlides y el hombre calvo <i>La paradoja del calvo o del montón</i>	10
03 ¿Conoces a tu hermano? <i>La paradoja del encapuchado</i>	13
04 ¿Seré amado o será odiado? <i>La paradoja de Sócrates</i>	15
05 El Todo y la parte <i>La paradoja de Galileo</i>	17
06 El cuerno de Gabriel <i>La paradoja de Bernoulli</i>	20
07 La paradoja de Russell <i>La paradoja de Russell</i>	23
08 El barbero desconcertado <i>La paradoja del barbero</i>	26
09 La paradoja de Cantor.....	29
10 La paradoja de Richard <i>La paradoja de Richard</i>	33
11 El Hotel del Infinito <i>Una paradoja del Infinito</i>	35
12 Vulgar versus interesante <i>La paradoja de Bechenbach</i>	37
13 Matrices mágicas <i>Una paradoja de Martin Gardner</i>	40
14 Aquiles y la Tortuga <i>Una aporía de Zenón</i>	47
15 La aporía de la flecha <i>Otra aporía de Zenón</i>	49
16 ¿Las paredes son permeables! <i>La banda de Möbius</i>	51

17 El enunciado y su contrario	54
<i>La paradoja de Brouwer</i>	
18 La paradoja de los cuatro hijos	56
19 ¡La circunferencia es un punto!	59
<i>Otra paradoja de Galileo</i>	
20 El copo de nieve	63
<i>La paradoja de Koch</i>	
21 La apuesta del duque de Toscana	67
22 La paradoja del cumpleaños	72
23 Dios es la coincidencia de los opuestos	77
<i>La paradoja de Nicolás de Cusa</i>	
24 El asno de Buridán	81
<i>La paradoja de Buridán</i>	
25 El engañoso término medio	83
<i>Una paradoja estadística</i>	
26 Los siete puentes de Königsberg	85
<i>La paradoja de Euler</i>	
27 ¿Cuánto espera esperar?	89
<i>La paradoja del ascensor</i>	
28 Patatas disecadas	92
<i>La paradoja de lo pesado y lo liviano</i>	
29 El misterioso número 9	95
<i>El círculo vicioso del 99</i>	
30 Conejos y baldosas	100
<i>La paradoja de la sucesión de Fibonacci</i>	
Epílogo	107
Bibliografía.....	108

PRÓLOGO

En esta obra, el lector encontrará 30 paradojas matemáticas que se desarrollan a lo largo de la historia. Su contenido se enfoca en demostrar, con conocimiento matemático, algunas soluciones encontradas por nuestros antepasados, ante diversas vivencias y en distintas ubicaciones geográficas.

Varios de los acontecimientos, que se presentan a continuación, están relacionados con hechos reales e imaginativos de los autores, considerando distintas referencias bibliográficas muy bien investigadas.

El objetivo de esta obra es lograr que el lector se involucre, en el fascinante mundo de las matemáticas, desde un punto de vista vivencial; seguramente muchas de las paradojas desarrolladas han sido experimentadas, de algún modo, a lo largo de la vida del ser humano en sus diversas facetas.

Esta obra va dirigida a estudiantes con conocimientos básicos de las matemáticas y tiene el ánimo de motivarlos a llevar a cabo un estudio superior de las ciencias exactas. A partir de su lectura, los autores, esperamos despertar la imaginación del lector para solucionar problemas cotidianos.

Los autores.



1

Epiménides y Creso

Epiménides fue un cretense que alcanzó la sabiduría. Decían de él que, al haber dormido por el espacio de 57 años, le fue revelado el sumo conocimiento de las cosas. Hacía cesar las pestes y recibía la comida de mano de las ninfas...

Creso, el rey de Lidia, oyó hablar de él y envió una nave a Creta para que lo trajera a su palacio. Cuando llegó, una corte de honor acompañó a Epiménides ante la presencia del rey. Creso dijo:

—¡Oh, Epiménides! Soy el monarca más rico en la actualidad y deseo recompensarte por tu sapiencia, pues la riqueza debe servir al conocimiento. ¡Pídeme lo que quieras!

—Está bien, Majestad —replicó Epiménides—. Te pido que me digas si la frase que voy a pronunciar es verdadera o falsa.

—¿Qué frase?

—*Estoy mintiendo.*

Creso se puso a pensar: "¡Esta frase debe ser verdadera! Pero... ¡un momento! Eso significaría que en ella Epiménides está mintiendo, pues es lo que dice la frase. ¡Y una frase que miente es falsa!".

En seguida consideró la otra posibilidad: "¡Entonces, la frase de Epiménides debe ser falsa! Mmm... Pero eso querría decir que Epiménides no está mintiendo, pues la frase afirma que sí lo está. Y si la frase de Epiménides no está mintiendo, entonces está diciendo la verdad. ¡Pero una frase que dice la verdad debe de ser verdadera!".

¿Puedes verlo? Si la frase del sabio cretense es verdadera, debe ser falsa; y si es falsa, tiene que ser verdadera. ¡El rey está encerrado en un círculo vicioso! Y, por más esfuerzos que hacía, no lograba salir de él.

—¡Me rindo! —exclamó, por fin—. No puedo decirte si la frase "*Estoy mintiendo*" es verdadera o falsa. ¡Si es verdadera, es falsa, y si es falsa, es verdadera!

—¡Majestad! —dijo Epiménides—. Cuando tengas la respuesta, mándame a llamar. Para mí será la recompensa más grata que jamás haya recibido.

Hizo una profunda reverencia y abandonó el palacio.

¿Puedes visualizar el aprieto en el que se encuentra el rey Creso? Imagina que la frase de Epiménides habría sido verdadera. Entonces, Epiménides está mintiendo, pues es lo que pondera la frase. Pero si Epiménides está mintiendo, ¡su frase es falsa! Ya lo sabes:

Si la frase de Epiménides es verdadera, debe ser falsa.

Imagina, por el contrario, que la frase de Epiménides habría sido falsa. ¿Qué afirma? Que Epiménides está mintiendo. ¡Entonces, Epiménides no está mintiendo! Pero si Epiménides no miente, ¡su frase debe de decir la verdad! Ya lo ves:

Si la frase de Epiménides es falsa, debe ser verdadera.

Anota tu respuesta:

Si la frase del sabio cretense es verdadera, debe ser falsa, y si es falsa, tiene que ser verdadera.

Esta frase de Epiménides obtuvo el nombre de *la Paradoja del mentiroso*. ¿Qué es lo que nos quiere comunicar?

La paradoja del mentiroso afirma que lo verdadero y lo falso no son opuestos, como generalmente creemos, sino que son inseparables. En efecto: si crees que la frase “*Estoy mintiendo*” es verdadera, resulta ser falsa, y si crees que es falsa, resulta ser verdadera. Lo falso no puede existir sin lo verdadero. Por otra parte, para concientizar la existencia de lo verdadero, necesitamos de lo falso, pues lo verdadero solo se aprecia en contraste con lo falso. Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del mentiroso se rebela contra la opinión de que, lo verdadero y lo falso, sean opuestos. Sostiene que lo verdadero y lo falso son inseparables; que no hay un concepto de lo verdadero y otro de lo falso, sino que el par verdadero-falso es uno solo.

Ahora, un chiste:

Lucas había ganado muchísimo dinero en las carreras y Emilio sentía envidia.

—¿Cómo lo conseguiste, Lucas? —le preguntó.

—Fue muy fácil —contestó Lucas— lo soñé.

—¿Lo soñaste?

—Sí. Había pensado en tres caballos, pero no estaba seguro del tercero. Entonces, la noche anterior soñé que había un ángel al pie de mi cama que me decía: “Bendito seas, Lucas, bendito seas siete veces siete”.

Cuando me desperté, me di cuenta que siete veces siete son cuarenta y ocho, y que el caballo que tenía el número cuarenta y ocho se llamaba Sueño Celestial. Así que en mi apuesta puse como tercer caballo a Sueño Celestial y me lo llevé todo, lo que se dice todo.

—Pero, Lucas, ¡siete por siete son cuarenta y nueve! —exclamó Emilio.

—Entonces —contestó Lucas— dedícate a las matemáticas.

Esta historia sostiene lo mismo que la paradoja del mentiroso: ¡lo verdadero y lo falso son amigos inseparables!



2

Eubúlides y el hombre calvo

Eubúlides se paseaba con sus discípulos por las calles de la ciudad de Megara, cuando vieron a un hombre calvo.

—¡He aquí un hombre con una frondosa cabellera! —exclamó Eubúlides.

—¿Cómo puedes decir eso? —se asombraron los discípulos—. ¡Ese hombre es calvo, pues su cabellera apenas cuenta con tres pelos!

—Tres pelos es suficiente para catalogarlo como un hombre de frondosa cabellera —insistió Eubúlides.

Y, al ver que no le entendían, dio a sus discípulos la siguiente explicación (Ayúdale a realizarla, por favor).

—¿Dirían que un hombre es calvo si solo tiene un pelo? —preguntó Eubúlides.

—Sí —contestaron a coro los discípulos.

—¿Dirían que es calvo si solo tiene dos pelos? —preguntó de nuevo el Maestro.

—Sí —contestaron los jóvenes—. Pues, al añadir un solo pelo, que es algo tan diminuto, la cualidad de una cabellera no puede cambiar.

—¿Y dirían que es calvo si solo tiene tres pelos?

—Sí, por la misma razón.

—Entonces, ¿dónde sitúan ustedes la línea divisoria entre ser calvo y no serlo? —preguntó Eubúlides.

—Yo, la colocaría en mil pelos —dijo un discípulo.

—Es decir —dijo Eubúlides—, si un hombre tiene 999 pelos, es calvo, y si tiene 1000 pelos, ¿ya no es calvo?

—Así lo creo —contestó el discípulo.

—Pero, ¿qué puede añadir un solo pelo? —dijo Eubúlides—. Como ustedes mismos dijeron, ¡un solo pelo no puede convertir una cabellera pobre en rica!

—Yo colocaría la diferencia entre un calvo y un no calvo en un millón de pelos —dijo otro discípulo.

—Según tú —aclaró Eubúlides—, si un hombre tiene 999999 pelos, es calvo, y si tiene 1'000000 pelos, ¿ya no es calvo?

—Sí, —contestó el discípulo.

—Pero, ¿qué puede añadir un solo pelo? —dijo Eubúlides—. ¡Un solo pelo no puede convertir a un calvo en un melenudo!

—Yo colocaría la diferencia entre un calvo y un no calvo en mil millones de pelos —dijo otro discípulo.

—En otras palabras —acotó Eubúlides—, si un hombre tiene 999999999 pelos, es calvo, y si tiene 1'000000000 pelos, ¿ya no es calvo?

—Así me parece —contestó el discípulo.

—Pero, ¿qué puede añadir un solo pelo? —dijo Eubúlides—. ¡Un solo pelo no puede convertir a un hombre calvo en un hombre peludo!

Todos estaban desconcertados.

—Por eso dije que un hombre que solo tiene tres pelos, posee una frondosa cabellera —concluyó Eubúlides—. Y también es cierto al revés: un hombre con un millón de pelos es calvo. ¡Las diferencias cuantitativas no existen! ¡O bien cualquier cantidad es poca cosa, o bien cualquier cantidad es un montón! Lo mismo da mucho que poco, pues no hay dónde colocar una línea divisoria entre ellos, y unos jóvenes inteligentes como ustedes deberían comprenderlo.

Esta enseñanza de Eubúlides obtuvo el nombre de *la Paradoja del hombre calvo o el montón*. ¿Qué nos quiere decir?

La paradoja de Eubúlides afirma que lo poco y lo mucho no son opuestos, como solemos creer, sino amigos inseparables. En efecto: si crees que posees mucho dinero en el banco, siguiendo el razonamiento de Eubúlides, también puedes demostrar que solo tienes un dólar; es decir, que tienes poco. ¡Si tienes mucho, resulta que también tienes poco!

Y de la misma manera, puedes demostrar que, si tienes poco, resulta que tienes mucho. En efecto: si solo posees un dólar, siguiendo el razonamiento de Eubúlides, puedes demostrar que posees todo el dinero del mundo. ¡Si tienes poco, resulta que tienes mucho!

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del calvo, o el montón, se rebela contra la opinión de que lo poco y lo mucho sean opuestos. Sostiene que lo poco y lo mucho son inseparables; que no hay un concepto de lo poco y otro de lo mucho, sino que el par poco-mucho es uno solo.

Y la misma enseñanza nos entrega la leyenda hindú sobre el inventor del ajedrez...

Hace mucho tiempo, vivía un rey hindú. En una de las batallas con el reino vecino, el rey perdió a su querido hijo, y desde entonces no encontraba alivio para su dolor. Los consejeros y los ministros de la corte trataban de distraerlo de distintas maneras, pero todo era inútil. El rey no podía olvidar a su hijo, muerto en batalla, y sufría de día y de noche.

Una mañana llegó al palacio un brahmán y pidió permiso para mostrar al soberano un nuevo juego inventado por él. El rey, sin ganas, aceptó. Pero el juego resultó ser tan interesante que, por primera vez en muchos años, el monarca se olvidó de su pena por el espacio de varias horas. Maravillado, exclamó:

—¡Si tu cabeza fue capaz de inventar este juego, se merece la más grande de las recompensas! ¡Pídeme lo que quieras!

—Su Majestad —replicó el brahmán—, yo no pido mucho. Ordenad que vuestros cortesanos pongan un grano de trigo sobre el primer cuadrado de mi tablero de ajedrez; dos granos sobre el segundo cuadrado; cuatro granos sobre el segundo cuadrado, y así sucesivamente, duplicando cada vez el número de granos, hasta llegar a la última casilla.

—Oh, ¡qué poco pides! —exclamó el rey, asombrado por la simpleza del brahmán.

Y ordenó que se le pagara inmediatamente. Pero los matemáticos de la corte hicieron el cálculo, y resultó que había que pagar al inventor del ajedrez 18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo.

—Si se pudiera sembrar de trigo toda la superficie de la Tierra y almacenar la cosecha durante ocho años —dijo el matemático principal—, ¡aun entonces el trigo obtenido no alcanzaría para pagar al brahmán su recompensa!

El rey estaba consternado.

—En verdad os digo, oh bondadoso monarca —dijo el brahmán—, que el problema que os aflige es pequeño como un minúsculo grano de trigo. Acabáis de ver cómo un solo grano, por sucesivas duplicaciones, es capaz de producir una montaña. Y de la misma manera, un pensamiento falso en vuestra mente ha producido incontables pesares. ¡Encontrad ese pensamiento y desechadlo! La montaña desaparecerá inmediatamente.

Sí: lo mucho y lo poco existen juntos. ¡Aun los reyes son mendigos! Eubúlides tiene razón:

Lo poco y lo mucho son amantes, el par poco-mucho es uno solo.

Y la paradoja del calvo nos ayuda a comprenderlo.



3

¿Conoces a tu hermano?

Clitómaco asistía a las reuniones de la secta estoica. En cierta ocasión, Crisipo le dirigió la siguiente pregunta:

—Dime, Clitómaco: ¿conoces a tu hermano?

—¡Lo conozco, y muy bien! —exclamó Clitómaco—. Hemos jugado juntos desde que tengo memoria, y hemos convivido en la casa muchos años.

—Pero yo soy de una opinión contraria —dijo Crisipo— y creo que tú no conoces a tu hermano.

—¿Cómo puedes decir tal cosa? —se ofendió Clitómaco—. Si no me quieres más en tus clases, dímelos; ¡pero no me insultes así!

—En ningún momento fue mi intención insultarte —replicó Crisipo—. Que no conoces a tu hermano es un hecho, y te lo puedo demostrar. Pero antes dime: ¿quién es el hombre encapuchado que acaba de llegar?

—No lo sé —dijo Clitómaco.

—¡Es tu hermano!

El hombre que había entrado bajo el Pórtico descubrió la capucha: ¡era el hermano de Clitómaco! ¡Este no sabía qué decir!

—Debes aceptar, Clitómaco —le dijo Crisipo—, que aún no conoces a tu hermano.

A esta situación se la llamó *la Paradoja del Encapuchado*. Como puedes ver, afirma que conocer y no conocer no son opuestos, como usualmente creemos, sino que son eternos amigos. En efecto: si crees que conoces a tu hermano, Crisipo te demuestra que no lo conoces. Por otra parte, los sabios afirman que todos somos hermanos, y si crees que no conoces a algún hombre, en realidad, sí lo conoces.

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del encapuchado se rebela contra la opinión de que conocer y no conocer sean opuestos. Sostiene que conocer y no conocer son inseparables; que no hay un concepto de conocer y otro de no conocer, sino que el par conocer-no conocer es uno solo.

Y la misma enseñanza nos entrega el cuento noruego, *El mayordomo listo*.

Narra que había una vez un mayordomo tan orgulloso de su cargo, que cuando iba de camino y veía acercarse algún coche, gritaba:

—¡Apártate, que viene el mayordomo!

Un día se tropezó con el rey, y sin saber que era este, gritó como de costumbre:

—¡Apártate, que viene el mayordomo!

Pero el rey continuó su camino sin hacerle caso y fue el mayordomo quien tuvo que apartarse. Al llegar junto a él, el rey le dijo:

—Mañana te presentarás en el palacio y si no sabes contestar las tres preguntas que te voy a hacer, morirás.

Y continuó su camino.

El mayordomo estaba muy asustado, así que, de vuelta a su casa, pidió al cocinero que fuera en su lugar. El cocinero tenía fama de ser inteligente, así que aceptó. Poniéndose los vestidos del mayordomo, se presentó en palacio y el rey salió a recibirlo a la puerta.

—Vamos a ver —le dijo—. ¿Cuánta distancia hay entre el Este y el Oeste?

—Un día de viaje —respondió el cocinero—, porque el Sol sale por el Este y se pone por el Oeste, y es lo que tarda un día.

—¡Muy bien! —dijo el rey asombrado—. ¿Cuánto crees que valgo?

—Si Jesucristo fue vendido por 30 monedas de plata, tú no querrás valer más de 29 —replicó el cocinero con mucho tacto.

—¡Muy bien, muy bien! —aprobó el rey, sumamente complacido—. Si tan listo eres, dime: ¿en qué estoy pensando en este momento?

—En que soy el mayordomo, cuando en realidad yo solo soy el cocinero —fue la respuesta.

—En este caso, vuelve a tu casa y conviértete en mayordomo, mientras el mayordomo se convierte en cocinero —dijo el rey, riendo.

Y así sucedió efectivamente.

¡Conocer y no conocer, nuevamente, demostraron ser uno! El rey creía conocer que quien estaba respondiendo sus preguntas era el mayordomo, pero resultó ser el cocinero. Crisipo tiene razón:

Conocer y no conocer son inseparables; el par conocer-no conocer es uno solo.

Siempre que creas conocer algo, habrá un aspecto de ello que no conozcas. Y el verdadero conocimiento consiste en comprenderlo.



4

¿Seré amado o seré odiado?

Un joven preguntó a Sócrates:

—¿Cuándo conviene decir lo justo y cuándo conviene decir lo injusto?

—Cualquiera de las dos cosas que hagas, te arrepentirás —contestó Sócrates.

—¿Por qué? —exclamó el joven, incrédulo—. Yo me hago el siguiente razonamiento:

Si digo lo justo, los dioses me amarán.

Si digo lo injusto, los hombres me amarán.

Por lo tanto, siempre seré amado.

—Y ¿por qué no te haces este otro razonamiento? —dijo Sócrates:

Si dices lo justo, los hombres te odiarán.

Si dices lo injusto, los dioses te odiarán.

Por lo tanto, siempre serás odiado.

El joven se marchó triste, pues quería amor y no comprendió que, para alcanzarlo, hay que aceptar el odio.

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de Sócrates se rebela contra la opinión de que el amor y el odio sean opuestos. Sostiene que el amor y el odio son inseparables; que no hay un concepto de amor y otro de odio, sino que el par amor-odio es uno solo.

Y la misma enseñanza nos entrega la historia bíblica, *David y Simei*.

Cuenta que, cuando David huía de Jerusalén, un hombre llamado Simei empezó a maldecirlo y a tirar piedras contra David y contra todos sus oficiales. Y, aunque el rey estaba protegido por la gente y por su guardia personal, Simei lo maldecía diciendo:

—¡Largo de aquí, malvado asesino! ¡No eres otra cosa que un asesino!

Entonces Abisai dijo al rey:

—¿Por qué este perro muerto ha de ofender a Su Majestad? ¡Ahora mismo voy a cortarle la cabeza!

Pero el rey respondió:

—¡Esto no es asunto de ustedes! Si él me maldice, será porque el Señor se lo ha ordenado. Y en tal caso, ¿quién puede pedirle cuentas de lo que hace? Quizás, cuando el Señor vea mi aflicción, me envíe bendiciones en vez de las maldiciones que hoy escucho.

Y David y sus hombres siguieron su camino, mientras que Simei se fue por la ladera del monte, paralelo a David, maldiciendo y arrojando piedras y levantando polvo.

Cuando, después de varios meses, David emprendió el regreso a Jerusalén, la gente fue para recibirlo y ayudarlo a cruzar el río Jordán. También Simei se apresuró a bajar con los hombres de Judá para recibir al rey David.

Cuando el rey se disponía a cruzar el Jordán, Simei se inclinó ante él y le dijo:

—Ruego a Su Majestad que no tome en cuenta mi falta, ni recuerde el delito que este servidor suyo cometió el día que su Majestad salió de Jerusalén. No me guarde rencor, pues yo mismo reconozco mi culpa y, de toda la casa de José, hoy he sido el primero en salir a recibir a Su Majestad.

Entonces Abisai dijo:

—¿Acaso, Simei, no merece la muerte por haber maldecido al rey escogido por el Señor?

Pero David respondió:

—¡Esto no es asunto de ustedes! ¿Por qué se oponen a mí? Ahora sé bien que soy el rey de Israel, así que nadie en Israel morirá en este día.

Luego, dirigiéndose a Simei, le dijo que no moriría.

El amor y el odio viven juntos. Y la prueba de ello es que el odio de Simei fue vencido por el amor de David. ¡El amor de David disolvió el odio de Simei! ¿Cómo pudo hacerlo? Porque el odio y el amor coexistían en el alma de Simei. Sócrates tiene razón:

El amor y el odio son inseparables; el par amor-odio es uno solo.

La paradoja de Sócrates afirma la unidad del amor y el odio, y la historia de David sostiene que la transformación del odio, en el amor, es posible. ¡Podemos vivir sin el odio, solo en el amor!

Y ambos sabios, Sócrates y David, nos invitan a intentarlo.



5

El todo y la parte

En el año 1611, el gran duque de Toscana presentó a Galileo al cardenal Maffeo Barberini. Aunque era un devoto aristotélico, Barberini se sintió atraído por la personalidad de Galileo.

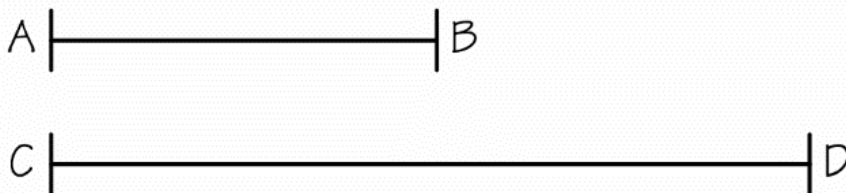
—¿Cómo explica usted que la infinitud de los puntos de una línea mayor sea idéntica a la infinitud de los puntos de una línea menor? —preguntó Galileo a Barberini—. ¿Cómo puede una línea más pequeña ser igual a una línea más grande?

—¡Nunca he oído hablar de una cosa tan extraña! —confesó Barberini.

—Pues es la verdad —dijo Galileo—. ¡Todos los infinitos son iguales!

Y dio, al asombrado cardenal, la siguiente explicación (Ayúdale a realizarla, por favor).

—Consideremos —dijo Galileo—, un intervalo AB, de 5 pulgadas de longitud, y otro intervalo CD, de 10 pulgadas. Como el intervalo CD tiene el doble de pulgadas que el intervalo AB, el intervalo CD parece ser mayor que el intervalo AB.



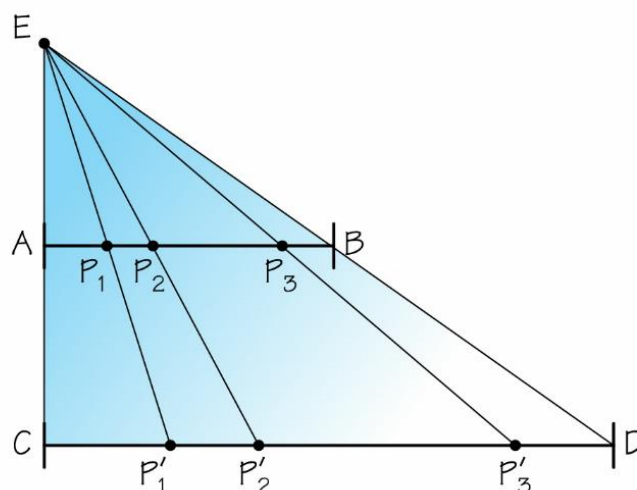
—Así me parece a mí —asintió Barberini—. Y creo que a todo el mundo.

—Ahora yo le propongo dibujar a los dos intervalos uniendo sus extremos con ayuda del punto E, —dijo Galileo—. ¿Puede ver que a cada punto P del intervalo AB le corresponde un punto P', del intervalo CD, y solo uno?

—Sí, lo puedo ver —contestó Barberini.

—¿Y que a cada punto P' del intervalo CD le corresponde un punto P, del intervalo AB, y solo uno?

—También lo puedo ver —dijo Barberini.



—¡Pues, entonces, acabamos de demostrar que hay tantos puntos en el intervalo AB como en el intervalo CD! —exclamó Galileo con júbilo—. ¡He cerrado mi caso! No hay ni más ni menos puntos en la línea grande que en la línea pequeña; sino que hay el mismo infinito de puntos en cada una de ellas. ¡Todos los infinitos son iguales! ¡Para Dios, la parte puede ser igual al todo!

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de Galileo se rebela contra la opinión de que la parte y el todo sean opuestos. Sostiene que la parte y el todo son inseparables; que no hay un concepto de la parte y otro del todo; sino que el par parte-todo es uno solo.

La leyenda griega, de la Reina Dido, nos entrega el mismo mensaje. Cuenta que Dido, hija del rey de Tiro, huyó de la casa en quince naves. Después de muchas aventuras, arribó a las tierras africanas, donde puso a los pies de los aborígenes una gran piel de buey, y les pidió:

—Por favor, véndanme el trozo de tierra que delimita esta piel. Les pagaré cien monedas de oro.

A los nativos les pareció un trato conveniente, y lo aceptaron de inmediato.

Dido hizo cortar el cuero en tiras muy estrechas, y, atándolas, consiguió una soga muy larga. Trazó, entonces, la gran semicircunferencia que, conjuntamente con la orilla del mar, delimitó aquel terreno que fue la cuna de la famosa ciudad de Cartago.

De esta manera, la sabia reina enseñó a todos que hay dos formas de entender la palabra *delimitar*. Los ingenuos aborígenes creyeron que, al referirse a “el trozo de tierra que

delimita esta piel”, Dido hablaba de la piel de buey. ¡Pero se equivocaron! Dido hablaba de la parcela que se podría formar con aquella piel, cortándola en tiras.

¡La diferencia fue asombrosa! En vez de delimitar un pequeño espacio, de unos cuantos pies cuadrados, ¡se delimitó toda una ciudad! En vez de delimitar una parte, ¡Dido se quedó con el todo!

La Reina Dido y Galileo están de acuerdo: el todo y la parte no son opuestos, como suponemos ingenuamente, sino que forman una unidad. Los aborígenes creían que estaban vendiendo a Dido una pequeña parte de sus tierras, pero resultó que le estaban vendiendo el gran todo. Galileo tiene razón:

El todo y la parte son amantes. El par todo-parte forma una unidad.

La persona que cree ser una parte de la Existencia, un día descubre que es el Todo.
¡Ese día puede ser hoy!



6

El cuerno de Gabriel

En cierta ocasión, Jean Bernoulli le dijo a un amigo:

—¡El arcángel Gabriel sopló su cuerno para mí!

—¿Qué quieres decir? —preguntó el amigo, extrañado.

—Se me presentó en un sueño y me dijo: “En ti conviven lo finito y lo infinito. Tu cuerpo es finito, pero tu alma es infinita”. Tomó su cuerno y lo sopló de tal manera que hasta ahora escucho su sonido.

—¿Y qué hiciste al despertar? —preguntó el amigo.

—Dibujé el cuerno del arcángel y me puse a estudiarlo. Y, ¡oh, sorpresa!, encontré que en el cuerno también convive lo finito con lo infinito.

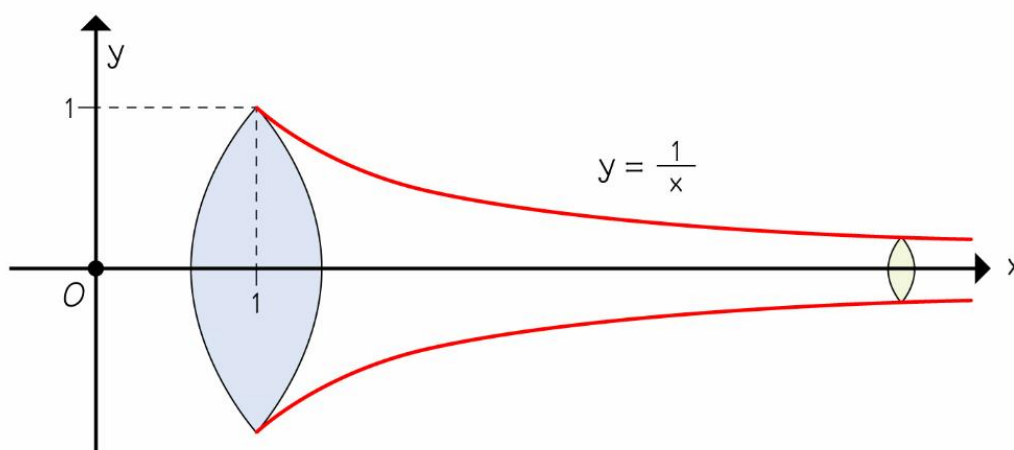
—¿De qué modo?

—Imagina —dijo Bernoulli—, que el cuerno del arcángel Gabriel se obtiene al girar la hipérbola:

$$y = \frac{1}{x}$$

Se gira alrededor del eje x , para los siguientes valores de x :

$$1 \leq x \leq \infty$$



Entonces, el volumen del cuerno es finito, mientras que su superficie es infinita.

—¿Por qué dices eso? —preguntó el amigo.

Y Bernoulli le dio la siguiente explicación. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Comprueba que el volumen del cuerno celestial es finito:

$$V_{\text{cuerno}} = \pi \int_1^{\infty} y^2(x) dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = - \left[\pi \cdot \frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \pi$$

¡Ahora verifica que su superficie es infinita! Recuerda que una superficie de revolución se calcula por la fórmula

$$S_{\text{revolución}} = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Entonces, puedes escribir:

$$\begin{aligned} S_{\text{cuerno}} &= 2\pi \int_1^{\infty} y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{x^4 + 1} dx \geq \\ &2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{x^4} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [2\pi \ln x]_1^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

Este es el resultado de tu investigación:

El cuerno de Gabriel, en efecto, contiene un volumen finito y una superficie infinita.

—¡Ya veo por qué dices que en el cuerno de Gabriel lo finito convive con lo infinito! —dijo el amigo.

—Pero hay algo que no logro entender —dijo Bernoulli—. Y es lo siguiente: ¿es imposible que un volumen finito sea rodeado por una superficie infinita! Imagina que llenamos el cuerno de Gabriel con pintura. Entonces, como el volumen del cuerno es

finito, significa que adentro éste contendrá una cantidad finita de pintura; pero la pintura, al estar en contacto con el cuerno, estará pintando su superficie por dentro. ¿Cómo puede una cantidad finita de pintura cubrir una superficie infinita? ¡Es una paradoja!

—¡Nada de eso! —exclamó el amigo—. El arcángel te dijo que tu cuerpo es finito y tu alma es Infinita, y ambos conviven en ti. Y de la misma manera el volumen finito y la superficie infinita conviven en el cuerno de Gabriel.

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del cuerno de Gabriel se rebela contra la opinión de que lo finito y lo infinito sean opuestos. Sostiene que finito e infinito son inseparables; que no hay un concepto de finito y otro de infinito, sino que el par finito-infinito es uno solo.

El mensaje del cuento medieval, *Cenicienta*, es el mismo que el de la paradoja de Bernoulli: la que cree ser una empleada doméstica es, en realidad, la esposa del príncipe. Una persona es limitada, constituye un ser finito; sin embargo, el Ser de la persona es Infinito y Eterno.

La literatura medieval está de acuerdo con las matemáticas: lo finito y lo infinito no son opuestos, como se suele creer, sino que forman una unidad. Jean Bernoulli tiene razón:

Lo finito y lo infinito son amigos entrañables. El par finito-infinito es uno solo.

La paradoja del cuerno de Gabriel te invita a conocer el infinito que vive en ti.



7

La paradoja de Russell

Bertrand Russell estaba comiendo una naranja, cuando se le ocurrió el siguiente razonamiento.

—Consideremos el conjunto de todas las cosas que no son naranjas —se dijo en voz alta—. ¿Es ese conjunto una cosa? ¡Ciertamente! ¿Y es una naranja? ¡No!, pues consiste de cosas como escritorios, libros y pájaros; y si fuera una naranja, solo consistiría de unos cuantos gajos. Luego, el conjunto de todas las cosas, que no son naranjas, *tiene que ser elemento de sí mismo*, pues es una cosa y no es una naranja.

Russell saboreó otro gajo y prosiguió razonando.

—Y también existen conjuntos que no son elementos de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todos los hombres no es un hombre: es la mitad masculina de la humanidad. Luego, el conjunto de todos los hombres *no es elemento de sí mismo*. Un conjunto de libros no es un libro: es una biblioteca o un quiosco. Y tampoco un conjunto de manzanas es una manzana: o bien se trata de un árbol o de una cesta. ¡Hay muchos conjuntos que *no son elementos de sí mismos*!

Russell meditó por unos instantes.

—Ahora fijémonos en el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos —dijo, dirigiéndose al gajo de turno—. Llamémoslo C . Es decir:

$$C = \{x: x \text{ es conjunto o } x \notin X\}$$

Preguntémonos ahora: ¿es el conjunto C elemento de sí mismo?

- Supongamos que sí: C es elemento de sí mismo. Es decir:

$$C \in C$$

Entonces, por la definición de C :

$$C \notin C$$

¡Si C es elemento de sí mismo, C no es elemento de sí mismo!

- Ahora supongamos que no, que C no es elemento de sí mismo. Es decir:

$$C \notin C$$

Entonces, por la definición de C :

$$C \in C$$

¡Si C no es elemento de sí mismo, C es elemento de sí mismo! ¡Es una paradoja! Anótala:

Paradoja de Russell

El conjunto de todos los conjuntos, que no son elementos de sí mismos, es elemento de sí mismo y no es elemento de sí mismo. Es decir, el conjunto de todos los conjuntos, que no son elementos de sí mismos, pertenece a sí mismo y no pertenece a sí mismo al mismo tiempo.

Russell acabó de degustar el último gajo. Su estómago digería la naranja, pero su mente no quería digerir la contradicción.

—El conjunto de todos los conjuntos, que no son elementos de sí mismos, es elemento de sí mismo y no es elemento de sí mismo —repetía Russell sin cesar—. ¿Qué significa esta paradoja?

—¡No es ninguna paradoja! —le dijo un amigo a quien Russell contó lo sucedido—. ¿Algo es y no es elemento de un conjunto? ¡Ocurre muy seguido! Por ejemplo, un hombre está con un pie dentro de la casa y con otro pie afuera. ¿Es ese hombre elemento del conjunto de los que están dentro de la casa? ¡Sí y no!

—¿Hay más ejemplos de ello? —preguntó Russell.

—¡Los que quieras! —exclamó el amigo—. Una persona que se viste con una malla transparente, ¿es elemento del conjunto de los vestidos, o de los desnudos? ¡Pertenece a ambos!, pues su cuerpo es visible a través de la malla transparente como si fuera desnudo, a pesar de estar cubierto con la malla como si fuera vestido.

—¡Ya veo! —dijo Russell—. Y creo que puedo proporcionar otro ejemplo. Un hombre en coma pertenece, al mismo tiempo, al conjunto de los vivos y al conjunto de los muertos; pues, aunque está privado de movimiento como un hombre muerto, respira como un hombre vivo.

Esta ambigüedad no le gustó a Russell, quien intentó evitar la paradoja y ofreció a la comunidad matemática la Teoría de los Tipos. En ella, si ciertos individuos pertenecen al tipo n , el conjunto de ellos pertenece al tipo $(n+1)$. De este modo Russell prohibió definir un objeto en términos de una clase que lo contenga.

Sin embargo, la Teoría de los Tipos demostró tener sus propias dificultades. La principal de ellas era el Axioma de Reducibilidad, el cual exigía que un tipo de un orden elevado fuera equivalente a un individuo simple.

Después de diez años de trabajar en la Teoría de los tipos, y una vez editado el libro *Principia Mathematica* que la contenía, Russell soñó que alguien pedía el libro a la bibliotecaria y lo tiraba a un basurero.

—Ser elemento de un conjunto o no serlo no es la cuestión —le dijo la bibliotecaria—. La cuestión es ser o no ser.

Russell no pudo entender la unidad de los opuestos *pertenecer-no pertenecer*. Creyó que, si perteneces a un conjunto, no puedes no pertenecerle y viceversa. Sin embargo, las dos palabras son interdependientes, pues no puedes comprender lo que significa *pertenecer*, a no ser que lo compares con *no pertenecer*. ¡*Pertenecer* solo se entiende en contraste con *no pertenecer*! El par *pertenecer-no pertenecer* es inseparable.

Anota este admirable descubrimiento:

La paradoja de Russell se rebela contra la opinión de que pertenecer y no pertenecer sean opuestos. Sostiene que pertenecer y no pertenecer son inseparables; que no hay un concepto de pertenecer y otro de no pertenecer, sino que el par pertenecer-no pertenecer es uno solo.

Fíjate en esta anécdota:

Un inglés emigró a los Estados Unidos y adquirió la ciudadanía americana.

Cuando regresó de vacaciones a Inglaterra, uno de sus parientes le recriminó por haber cambiado la nacionalidad.

—¿Qué ganaste por hacerte ciudadano americano? —le preguntó.

—Bueno, ante todo, he ganado la Revolución Americana —fue la respuesta.

¿Qué significa pertenecer a un país? Si solo con cambiar de pasaporte dejas de ser inglés y empiezas a ser americano, la frontera entre pertenecer y no pertenecer no puede ser muy seria. Y es lo que afirman ambas, la anécdota y la paradoja de Russell:

Pertenecer y no pertenecer son amigos inseparables, el par pertenecer-no pertenecer es uno solo.

¡Las paradojas barren las fronteras que traza la mente!



8

El barbero desconcertado

En cierta ocasión, Bertrand Russell se quedó a vivir en un pequeño pueblito de Inglaterra. Estaba escribiendo uno de sus libros de filosofía y quería estar solo.

Una mañana fue a ver al barbero y pidió que lo afeitara.

—Con mucho gusto —dijo el barbero, mientras le ponía la servilleta al cuello—. Yo afeito a todos los que no se afeitan a sí mismos y solo a ellos.

¡Y he aquí que esta frase se convirtió en un gran enigma para Russell!

Mientras el figaro daba uso a la navaja y a la tijera, Russell se preguntaba: “¿Se afeita o no se afeita a sí mismo este barbero?”. Ayúdale a averiguarlo, por favor.

—Supongamos que el barbero sí se afeita a sí mismo —razonaba Russell—. Entonces, el barbero pertenece al conjunto de los hombres que se afeitan a sí mismos, y él no afeita a los miembros de tal conjunto. Luego, el barbero no puede afeitarse a sí mismo.

¡La primera posibilidad quedó eliminada!

—Ahora supongamos, por el contrario, que el barbero no se afeita a sí mismo —continuaba razonando Russell—. Entonces, el barbero es miembro del conjunto de aquellos hombres a los que rasura otra persona. ¡Pero él sí afeita a los miembros de ese conjunto! Por lo tanto, el barbero debe afeitarse a sí mismo.

¡La segunda posibilidad también quedó eliminada!

—¿Qué es esto? —exclamó Russell, saltando del asiento—. ¡Si el barbero se afeita a sí mismo, no puede afeitarse a sí mismo, y si el barbero no se afeita a sí mismo, debe afeitarse a sí mismo! ¡Es una paradoja!

Anótala:

El barbero de Russell debe afeitarse y no afeitarse a la vez.

El matemático inglés contaba esta paradoja a aquellos amigos suyos que no eran especialistas en lógica.

Russell agradeció al peluquero y fue a dar un paseo.

—¿Qué significa esta paradoja? —se preguntaba, mientras caminaba por el prado—. ¿Cómo puede alguien pertenecer y no pertenecer al mismo conjunto? ¿Cómo puede afeitarse a sí mismo y no afeitarse, simultáneamente?

Russell trató de encontrar la solución a esta paradoja durante muchos años. Un amigo, psicólogo de profesión, le dijo:

—Dentro de cada hombre también vive una mujer. Mientras el hombre se afeita, la mujer no necesita hacerlo. ¡Y es así cómo un hombre se afeita y no se afeita a la vez!

Pero esta explicación no satisfizo a Russell, porque para una mente masculina es difícil aceptar la copresencia de algún rasgo femenino. Russell siguió buscando alguna manera de separar las acciones de *afeitarse* y *no afeitarse*, pero no encontró ninguna. Y es que estas palabras forman un par inseparable. Entendemos lo que significa la acción de afeitarse única y exclusivamente si la contrastamos con la acción de no afeitarse.

Por ejemplo, en una tribu de barbudos no habría consciencia de lo que es afeitarse o no afeitarse, pues se carecería de la experiencia de afeitarse. Igualmente, en una tribu de lampiños no se sabría qué es afeitarse y qué es no afeitarse, por la misma razón.

El cuento, *La hija del vendedor de garbanzos*, de *Las mil y una noches* se muestra de acuerdo con el barbero desconcertado. Narra que el hijo del sultán, para vengarse de los desdenes de la hija del vendedor de garbanzos, dijo a su padre:

—Quiero que mañana, a la hora de la plegaria, te presentes delante de mí, vestido y desnudo a la vez, riendo y llorando al mismo tiempo, montado y caminando sobre tus pies. Si por tu mala suerte, no te presentas como te digo, o solo llenas una de estas condiciones y no las otras, ten la absoluta seguridad de que tu cabeza saltará de tus hombros.

Zeina, que así se llamaba la hija inteligente del vendedor de garbanzos, ideó un plan. Dijo a su padre:

—En cuanto a la primera condición, tú no harás sino ir a la casa de nuestro vecino el pescador y pedirle que te venda una de sus redes, con la cual te confeccionaré un traje que te colocarás sobre el cuerpo desnudo. De esta suerte estarás vestido y desnudo a la vez.

En cuanto a la segunda condición, no harás sino tomar una cebolla antes de dirigirte al palacio de sultán, y en el portal te frotarás los párpados con ella. Entonces, comenzarás a reír y llorar al mismo tiempo.

Con respecto a la última condición, buscarás a nuestro vecino el mulero, le pedirás que te preste un borriquillo de corta edad y lo llevarás contigo hasta llegar al palacio del bribón del hijo del sultán. Entonces cabalgarás sobre el borriquillo y tus pies quedarán en el suelo, de tal modo que, al mismo tiempo, estarás montado y caminarás con tus pies a medida que el animal avance. Este es mi consejo, y Alá es el más sabio y poderoso —dijo.

Al cumplir perfectamente, el vendedor de garbanzos, las tres condiciones, el hijo del sultán llegó al colmo del furor y de la contrariedad y juró que esta vez sería a la joven a quien hundiría sin remedio.

Al escuchar el relato de su padre, Zeina, que era una muchacha inteligente y que olfateaba los acontecimientos, dijo:

—¡Antes de que él nos ataque, ataquemosle!

Y pidió a un cerrajero:

—Quiero que me construyas una armadura de acero a mi medida, que me cubra todo el cuerpo y, además, un casco del mismo metal. Pero tiene que estar construido de tal modo que, al menor movimiento, produzca un ruido ensordecedor.

El cerrajero cumplió el encargo a satisfacción y no tardó mucho en terminar la obra. En cuanto cayó la noche, Zeina se deslizó en su terrible armadura, llevando en su bolsillo unas tijeras y una navaja; y, tomando una aguda horqueta, se dirigió al palacio.

Cuando vieron acercarse a aquel guerrero espantoso, el portero, los guardias del palacio y los esclavos huyeron en todas direcciones, y Zeina llegó sin obstáculos a la habitación del hijo del sultán. Este, al escuchar el terrible ruido y ver entrar al que lo producía, se sobrecogió de terror, creyendo que el aparecido era un aniquilador de almas. Se tiró al suelo con el corazón en los pies y quedó inmóvil y desvanecido.

La hija del vendedor de garbanzos se aproximó a él y, sacando las tijeras y la navaja, le rasuró la mitad de los bigotes, el lado derecho de la barba, la mitad izquierda de los cabellos y las dos cejas. Y en seguida se fue, como había entrado, sin que nadie se atreviera a interceptarle el paso. ¡La ofensa, que el hijo del sultán hiciera a su padre, había sido vengada!

Ahora llegó el momento para el hijo del sultán de preguntarse: ¿está él afeitado o no? Este hermoso cuento de *Las Mil y una noches* confirma el hallazgo de Bertrand Russell: ¡parece que uno puede estar afeitado y no afeitado, al mismo tiempo! Pues el hijo del sultán tiene rasurada la mitad de los bigotes, y entera la otra mitad; tiene afeitado el lado derecho de la barba, pero sin afeitar su lado izquierdo; tiene cortada la mitad izquierda de los cabellos, pero sin cortar su mitad derecha.

La literatura y Russell están de acuerdo: afeitarse y no afeitarse no son opuestos, como generalmente creemos, sino que forman una unidad. Anota este increíble hallazgo:

Afeitarse y no afeitarse son amantes. La pareja afeitarse-no afeitarse forma una unidad.

Las palabras no son creadas de una en una, las palabras son creadas en parejas. Y la paradoja del barbero nos hace acuerdo de ello.



9

La paradoja de Cantor

Georg Cantor no se sentía satisfecho con la aritmética de los números finitos, y creó una nueva aritmética: la de los números infinitos. Los llamó *transfinitos*.

—Si yo fuera Dios —decía a menudo—, hubiera creado a los números transfinitos para la humanidad. Son tan grandes que son capaces de expresar nuestros anhelos y alegrías.

Leopoldo Kronecker preguntó a Cantor:

—¿Qué tipo de números son esos? ¿De dónde le vino la idea de imaginar números transfinitos?

Cantor contestó:

—¡Son los nuevos números para la humanidad! Los números transfinitos son nuestros corazones y nuestras almas, porque el corazón humano es infinito, el alma del hombre es infinita. ¡Todos llevamos en nuestro espíritu un anhelo de lo infinito! Si yo fuese el Creador, mis números tocarían el infinito, tratarían de llegar al infinito, acariciarían el infinito.

—Para mí —dijo Kronecker secamente—, Dios hizo los números enteros, y el resto es obra del hombre.

Kronecker nunca llegó a aceptar el sueño de Cantor, nunca llegó a comprender su deseo de expresar en símbolos finitos la naturaleza infinita de alma humana.

Cantor era feliz con los números transfinitos, gozaba con ellos como un niño goza con un juguete nuevo. Pero un día se le ocurrió el siguiente razonamiento. Ayúdale a realizarlo, por favor.

Sea A un conjunto consistente de 3 elementos: a , b y c . Entonces, el conjunto de todos los subconjuntos de A , llamado $P(A)$ contendrá $2^3 = 8$ elementos:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

—Puedo ver que, si un conjunto A posee n elementos, el conjunto $P(A)$ poseerá 2^n elementos, que es un número que siempre será mayor que n , —se dijo Cantor.

El matemático alemán logró probar que esta propiedad se extiende a los conjuntos infinitos. Este teorema obtuvo el su nombre:

Teorema de Cantor

Si un conjunto A posee infinitos elementos, su *conjunto partes* $P(A)$ poseerá estrictamente más elementos que A :

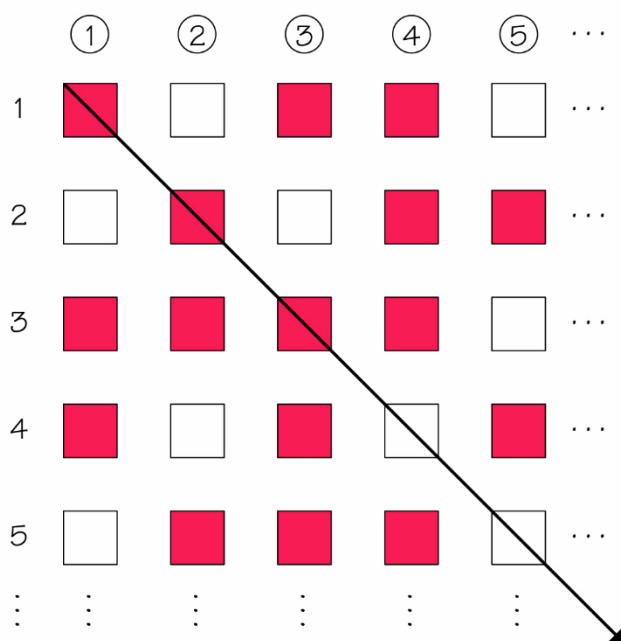
$$\text{Card}(A) < \text{Card}(P(A))$$

Para un caso particular de este teorema, cuando el conjunto A es un conjunto enumerable, Martin Gardner propone una demostración divertida.

Consideremos un conjunto enumerable; ¿pueden los subconjuntos, de ese conjunto, ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales? Para dilucidarlo, es muy útil, dice Martin Gardner, recurrir a una baraja de cartas.

Supongamos que tal correspondencia existe. Simbolicemos cada subconjunto con una hilera de cartas que continúa sin fin a la derecha. Una carta boca arriba (blanca) indicará que el número que aparece encima está en el subconjunto, una carta boca abajo (roja) indicará que no lo está.

Imaginemos a estas filas infinitas, dice Martin Gardner, alistadas en un orden cualquiera y enumeradas 1, 2, 3, ... de arriba a abajo. Si continuamos formando tales hileras, ¿contendrá finalmente nuestra lista a todos los subconjuntos?



¡No! Para demostrarlo, consideremos el conjunto diagonal, en el cual damos la vuelta a cada una de las cartas: las que están boca arriba se ponen boca abajo y viceversa. ¿Pertenece este nuevo conjunto a nuestra lista?

¡No! El nuevo conjunto diagonal no puede ser el primer subconjunto, ya que su primera carta difiere de la primera carta del subconjunto 1. Tampoco puede ser el segundo

subconjunto, dado que su segunda carta difiere de la segunda carta del subconjunto 2. Y tampoco puede ser el tercer subconjunto, debido a que su tercera carta difiere de la tercera carta del subconjunto 3. En general, no puede ser el n -ésimo subconjunto, porque que su n -ésima carta difiere de la n -ésima carta del subconjunto n .

Ya que hemos creado un subconjunto que no puede estar en la lista, nos vemos obligados a concluir que la suposición original es falsa. ¡El conjunto de todos los subconjuntos, de un conjunto $\aleph_0$, tiene una cardinalidad mayor que $\aleph_0$! De este modo, Cantor encontró un infinito no enumerable, equivalente al de los números reales y lo llamó $\aleph_1$.

Cantor decide ahora considerar el Conjunto de todos los conjuntos; lo nombra CTC. Entonces, por el teorema que recibió su nombre, se puede escribir así:

$$Card(CTC) < Card(P(CTC))$$

¡Pero el conjunto de todos los conjuntos también incluye al conjunto partes de sí mismo!

$$P(CTC) \subset CTC$$

Entonces:

$$Card(P(CTC)) \leq Card(CTC)$$

¡Pero esto es una contradicción! Pues, al mismo tiempo debe cumplirse que:

$$Card(CTC) < Card(P(CTC)) \quad \text{y} \quad Card(P(CTC)) \leq Card(CTC)$$

Esto significa que:

$$Card(CTC) < Card(P(CTC)) \leq Card(CTC)$$

Por la propiedad transitiva, podemos concluir que:

$$Card(CTC) < Card(CTC)$$

¡La cardinalidad del Conjunto de todos los conjuntos es menor a sí misma! Pero sabemos que todo número cardinal debe ser igual a sí mismo. Entonces, la cardinalidad del Conjunto de todos los conjuntos es, al mismo tiempo, igual y menor a sí misma ¡El *igual* resultó ser *menor*! A esta demostración se la llamó *la paradoja de Cantor*. Anótala:

La cardinalidad del Conjunto de Todos los Conjuntos es, al mismo tiempo, igual y mayor que ella misma.

Esta fue una de las primeras paradojas que se descubrió en la Teoría de Conjuntos.

Cantor no pudo entender la unidad de los opuestos *igual-mayor*. Creyó que, si es igual, no puede ser mayor, y, si es mayor, no puede ser igual. Sin embargo, las dos palabras son interdependientes, pues no puedes comprender lo que significa *igual*, a no ser que lo

compares con algo *mayor*. ¡Igual es siempre respecto de algo *mayor*! El par *igual-mayor* es inseparable.

Anota este sorprendente descubrimiento:

La paradoja de Cantor se rebela contra la opinión de que igual y mayor sean opuestos. Sostiene que igual y mayor son inseparables; que no hay un concepto de igual y otro de mayor, sino que el par igual-mayor es uno solo.

El cuento medieval *El gato con botas* nos entrega la misma enseñanza: aunque te consideres igual a tu cuerpo, el cual es pobre y mortal, en realidad, eres mayor a ti mismo. ¡Eres un alma próspera e inmortal!

El protagonista del cuento era el hijo menor de un molinero, quien le dejó por herencia un gato. El gato resultó ser tan inteligente que logró disponer al rey a favor de su amo, a quien dio el nombre de *Marqués de Carabás*. Demostró al rey que el marqués era propietario de un magnífico castillo y de los campos que había alrededor y que producían en abundancia trigo y cebada. La hija del rey se enamoró locamente del marqués, y la boda se realizó para el placer y el contento de todos.

La literatura medieval nos muestra, así, que una persona se cree igual a su cuerpo; sin embargo, el alma de la persona es inconmensurablemente mayor. Los atributos de igual y mayor no son opuestos, como solíamos creer, sino que forman una unidad. La paradoja de Cantor tiene razón:

Los atributos de igual y mayor son amigos entrañables. El par igual-mayor es uno solo.

La paradoja de Cantor te invita a descubrir tu alma.



10

La paradoja de Richard

En el año 1905, el matemático francés Jules Richard realizó el siguiente razonamiento.

—Se puede establecer —se dijo—, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todas las fórmulas de un sistema dado cualquiera y el conjunto de los números naturales. Dicho de otro modo, el conjunto de todas las fórmulas tiene la cardinalidad $\aleph_0$.

Y siguió diciendo:

—Como demostró Georg Cantor, la cardinalidad del conjunto de los números reales es $\aleph_1$, que es mayor que $\aleph_0$. Pero, ¿cómo ha de bastar un sistema de lógica simbólica, en el cual el conjunto de todas las fórmulas tiene la cardinalidad $\aleph_0$, para la discusión y el desarrollo de una rama de las matemáticas, que maneja conjuntos cuya cardinalidad es mayor? ¿Cómo podemos hablar, mediante un lenguaje de cardinalidad $\aleph_0$, sobre el conjunto de los números reales, cuya cardinalidad es $\aleph_1$ (que es mayor a $\aleph_0$)?

¡Es una paradoja! Anótala:

El conjunto $\mathfrak{R}$, de los números reales, cuya cardinalidad es $\aleph_1$ y es mayor que $\aleph_0$, no puede ser discutido ni desarrollado dentro de nuestro lenguaje, puesto que tan solo es capaz de contener $\aleph_0$ fórmulas.

¡El conjunto de los números reales no puede ser expresado con palabras! El conjunto de los números reales no puede ser expresado con ningún lenguaje, ni siquiera con un lenguaje tan simbólico como lo es el lenguaje matemático. Sin embargo, creemos que sí podemos expresarlo y hablamos sin cesar sobre números reales. ¡Lo *expresable* demostró ser *inexpresable*! El par *expresable-inexpresable* es indivisible.

Anota este sorprendente descubrimiento:

La paradoja de Richard se rebela contra la opinión de que expresable e inexpressable sean opuestos. Sostiene que expresable e inexpressable son inseparables, que no hay un concepto de expresable y otro de inexpressable, sino que el par expresable-inexpressable es uno solo.

Con su paradoja, Richard se anticipó a los místicos que sostienen que lo Real es inexpressable con las palabras.

En cierta ocasión Lao Tse pronunció esta sentencia:

*Los que saben no hablan,
los que hablan no saben.*

Los discípulos le preguntaron que qué significaba. Él, en su lugar, preguntó:

—¿Quién de vosotros conoce la fragancia de una rosa?

Todos la conocían. Entonces, les pidió:

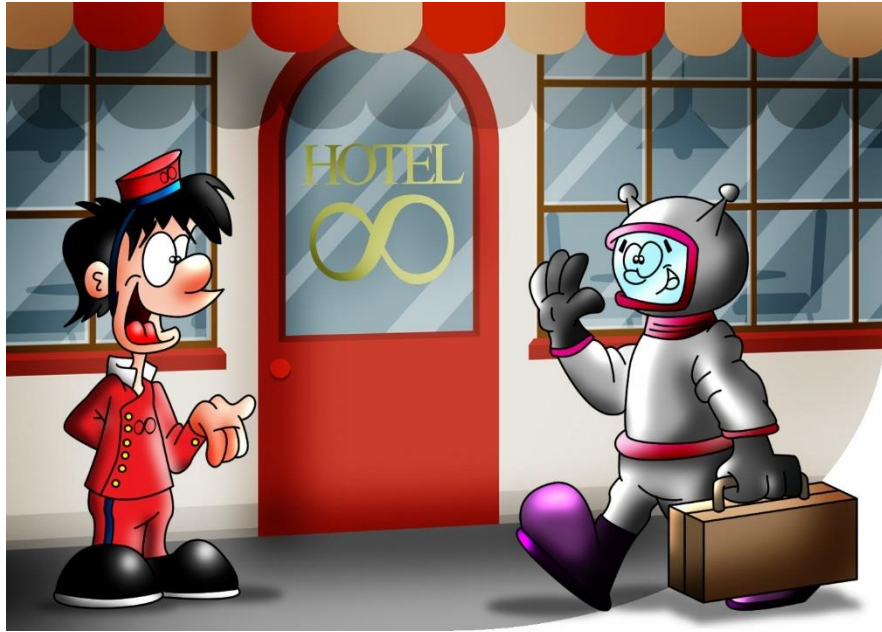
—¡Expresadlo con palabras!

Y todos guardaron silencio.

Los místicos y los matemáticos están de acuerdo: no puedes expresar lo inexpressable con palabras. ¡Sin embargo, lo puedes expresar! La fragancia de una rosa no puede ser dicha, pero puede ser percibida y disfrutada; ¡eso es un acto de expresión! Entonces, expresar y no expresar no son opuestos, como generalmente opinamos, sino que forman una unidad. Jules Richard tiene razón:

Expresar y no expresar son amigos íntimos. El par expresar-no expresar es uno solo.

Las paradojas te siguen revelando sus secretos.



11

El Hotel del Infinito

En una clase, Richard Dedekind contó, a sus estudiantes, el siguiente cuento.

—En el centro de nuestro universo, hay un hotel enorme. Su nombre es Hotel del Infinito. Tiene un número infinito de habitaciones, que están enumeradas de 1 en adelante.

Un día, cuando todas las habitaciones estaban ocupadas, llegó un piloto que estaba viajando a otra galaxia. A pesar de no disponer de habitaciones, el gerente consiguió dar alojamiento al piloto. ¿Cómo lo hizo?

—Trasladó al ocupante de cada habitación a la del número siguiente —dijo un estudiante—. De este modo, el que ocupaba la habitación 1, pasó a ocupar la habitación 2; el que ocupaba la habitación 2, pasó a ocupar la habitación 3; el que ocupaba la habitación 3, pasó a ocupar la habitación 4; etc. ¡Así, la habitación 1 quedó libre para el piloto!

—¡Correcto! —asintió Dedekind y prosiguió con el cuento—. Al día siguiente se presentaron cinco parejas de recién casados, que estaban de luna de miel. ¿Pudo el gerente recibir a los nuevos huéspedes?

—Sí, —dijo otro estudiante— Solo tuvo que trasladar al ocupante de cada habitación a la habitación cuyo número era 5 unidades mayor. De este modo, el que ocupaba la habitación 1, pasó a ocupar la habitación 6; el que ocupaba la habitación 2, pasó a ocupar la habitación 7; el que ocupaba la habitación 3, pasó a ocupar la habitación 8; etc. ¡Así, las primeras 5 habitaciones quedaron libres para los recién casados!

—¡Una solución perfecta! —dijo Dedekind y prosiguió con el cuento—. El fin de semana llegó un número infinito de comerciantes para celebrar una convención. ¿Logró el gerente dar alojamiento a los recién llegados?

—¡Por supuesto! —dijo otro estudiante—. Solo tuvo que trasladar al ocupante de cada habitación a la habitación de número doble. De este modo todos quedaron alojados en habitaciones de números pares, y ¡las impares quedaron libres para los comerciantes!

—¡Una decisión sabia! —dijo Richard Dedekind y comentó—. Ningún conjunto finito puede ponerse en correspondencia biunívoca con ninguno de sus subconjuntos propios.

Pero, como acabamos de ver, la situación es muy distinta para los conjuntos infinitos ¡Éstos vulneran totalmente la clásica regla de que el todo sea mayor que la parte!

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del Hotel del Infinito se rebela contra la opinión de que la parte y el todo sean opuestos. Sostiene que la parte y el todo son inseparables; que no hay un concepto de la parte y otro del todo, sino que el par parte-todo es uno solo.

La propiedad de los conjuntos infinitos, de ser equipotentes con sus propios subconjuntos, impresionó tanto a Richard Dedekind, que definió a los conjuntos infinitos precisamente como aquellos conjuntos que pueden ponerse en correspondencia con alguno de sus subconjuntos propios.

El mensaje del Hotel Infinito es idéntico al que nos entregan los místicos. Así, Teilhard de Chardín dice:

Considerada en su realidad concreta, la sustancia del Universo no puede dividirse, sino que, como una especie de átomo gigantesco, forma en su totalidad la única realidad indivisible. Cuanto más y más profundamente penetramos en la materia, valiéndonos de métodos cada vez más poderosos, tanto más azorados nos deja la dependencia recíproca de sus partes. Es imposible efectuar cortes en esta red o aislar una parte de ella sin que los bordes se nos deshilachen y se nos enmarañen.

La paradoja del Hotel del Infinito enriqueció a la Teoría de los Conjuntos con una nueva definición y nos ayudó a comprender la unidad de todo lo existente.



12

Vulgar versus interesante

En abril del año 1945, *The American Mathematical Monthly* publicó una nota, de Edwin Bechenbach, titulada *Números Interesantes*. Decía así:

Dividamos, a todos los números enteros positivos, en dos clases: interesantes y vulgares. Por ejemplo, el número 1 es interesante porque es el primero de todos; el número 2 es interesante porque es el primer número par y el primer número primo; el número 3 es interesante porque es el primer número impar; el número 4 es interesante porque es el primer número compuesto y el primer cuadrado; el número 5 es interesante porque la estrella de cinco puntas constituía el símbolo que representaba la salud y la vida en la escuela pitagórica; el número 6 es interesante porque la suma de sus divisores es 6; etc. Por esta razón los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 pertenecen a la clase de números interesantes.

De la misma manera, habrá números que no se distinguen por ninguna propiedad especial. Por ejemplo, esos podrían ser, tal vez, los números 3876, 10013, 70005831, etc. Esos son los números vulgares.

Consideremos, dice Bechenbach, al número más pequeño de la lista de los números vulgares. ¡Pero, precisamente, la propiedad de ser el más pequeño lo hace interesante! Tenemos que, por lo tanto, trasladarlo a la otra lista, a la lista de números interesantes.

En la lista disminuida de números vulgares, continua Bechenbach, existirá otro número más pequeño. ¡Esa propiedad, de inmediato, lo hace interesante! Así que también tendremos que trasladarlo a la otra lista.

Y de este modo, termina diciendo Bechenbach, cada número acabará siendo un número interesante, ¿no es así?

Como puedes ver, no hay números vulgares, ¡todos son interesantes! Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de Bechenbach se rebela contra la opinión de que vulgar e interesante sean opuestos. Sostiene que vulgar e interesante son inseparables; que no hay un concepto de vulgar y otro de interesante, sino que el par vulgar-interesante es uno solo.

Hay una historia, de la vida del Buda, que nos entrega el mismo mensaje.

El Buda llegó a una población. El emperador salió a recibirlo y le pidió ser iniciado. Los discípulos del Buda le susurraron al oído:

—¡Cuidado con ese hombre! Hemos oído muchas cosas extrañas sobre él. Nunca se ha bajado de su cuadriga, nunca ha caminado sobre sus pies. En su palacio debe estar siempre sumergido en todo tipo de deleites y lujos. Cuando asciende las escalinatas de su palacio, estas están alineadas de mujeres desnudas, que él utiliza como pasamanos en lugar de la barandilla. En su vida no ha conocido más que vino y mujeres. Y hoy, de repente, quiere convertirse en monje; quiere renunciar a todo y participar en disciplinas ascéticas. ¡Lo más probable es que os abandone en el camino!

El Buda replicó:

—Por lo que sé respecto a los seres humanos, ese hombre no abandonará. Está harto de un extremo y está pasando a otro.

Los discípulos dijeron:

—No creemos que sea capaz de caminar descalzo por las calles o mendigar su comida, o que pueda soportar el calor y la lluvia.

—Será capaz de soportar mucho más que vosotros —dijo el Buda.

Todos se rieron. Estaban seguros de que, en esta ocasión, el Buda estaba equivocado.

Pero el Buda demostró estar en lo cierto. A partir del día siguiente podía verse que, mientras el resto de los monjes caminaba por un sendero, el rey se salía del camino para caminar a través de los espinos. Y si los monjes se sentaban bajo la sombra de un árbol, él permanecía de pie al sol. Mientras que los monjes comían una vez al día, él solo se alimentaba en una ocasión cada dos días.

En seis meses se quedó hecho un esqueleto. Antes tenía un cuerpo bonito, pero ahora se marchitó y empezaron a notársele los huesos. Tenía los pies llagados.

El Buda les dijo a sus discípulos:

—¿Lo veis? No dejabais de decir que no podía confiarse en ese hombre, pero os aventajará en disciplinas ascéticas.

Los monjes estaban asombrados ante la visión intuitiva del Buda. ¿Cómo podía saberlo? El Buda dijo:

—El ego siempre elige uno u otro extremo; no puede detenerse en el medio. Él era rey de reyes, y ahora es un monje de monjes. Reunió a todas las mujeres hermosas del reino y tenía los senderos de su palacio tachonados de gemas; ahora tampoco es un monje ordinario, sino extraordinario.

Y continuó diciendo:

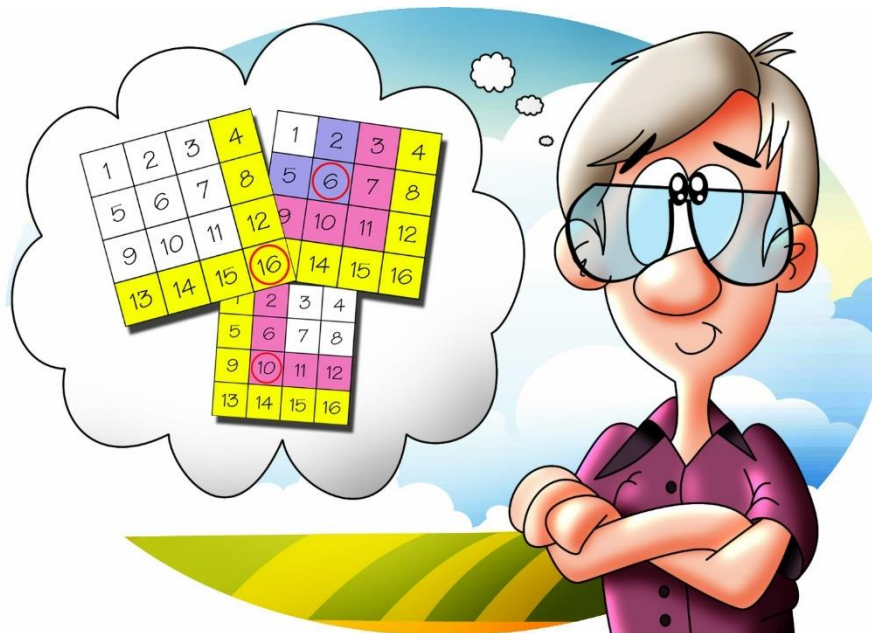
—Vosotros camináis por un sendero normal, pero él elige el irregular. Todos evitáis caminar sobre los espinos, pero él parece buscarlos. Os sentáis a la sombra, y él permanece de pie al sol. ¡Será el número uno haga lo que haga! No puede dejar de ser el número uno. ¡Os derrotará! Ya ha derrotado a reyes, ¿creéis que perdonará a unos simples monjes como vosotros? El ego elige los extremos.

¿Por qué el ego hace eso? ¡Porque la propiedad de ser el número más pequeño de la lista de los números vulgares le convierte en interesante! Y de ese modo el pequeño número debe ser trasladado a la lista de números interesantes.

Sí, Bechenbach tiene razón:

Lo vulgar y lo interesante son inseparables, el par vulgar-interesante es uno solo.

La paradoja de números interesantes te demuestra que todo es interesante: ¡solo tienes que aprender a verlo!



13

Matrices mágicas

En su libro, *Paradojas que hacen pensar*, Martin Gardner ofrece a sus lectores un interesante entretenimiento. Dice así:

Copie esta matriz de 4 por 4 en una hoja, y enumere de 1 a 16 sus casillas. Voy a hacer una exhibición de fuerza psíquica que le dejará atónito. ¡Voy a controlar una selección de cuatro números de esta matriz, realizada por usted!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Rodee con un círculo un número cualquiera a su capricho. Por ejemplo, el número 16. Tache con una barra vertical la columna que lo contiene, y haga otro tanto con la fila:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ahora rodee otro número cualquiera de los no tachados todavía. Por ejemplo, el número 11. Vuelva a tachar la fila y la columna de éste:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Elija a su capricho un tercer número no tachado. Por ejemplo, el número 6, y suprima también su fila y su columna:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Finalmente, rodee el único número restante.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

¡Ahora sume los cuatro números seleccionados! ¿Preparado? Voy a decirle cuánto vale la suma que usted ha calculado. Es... es... ¡34! ¿Es correcto? ¿Cómo he podido yo saberlo? ¿Tal vez, he influido sobre usted en el momento de elegir los números?

Compruébalo: ¡los números que elegiste suman 34!

$$16 + 11 + 6 + 1 = 34$$

¡Quizás, el lector desee intentar con otra elección de números! Considere la misma matriz:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Esta vez rodee con un círculo el número 13. Tache con una barra vertical la columna que lo contiene, y haga otro tanto con la fila:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Acto seguido, elija el número 10:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Prosiga con el número 8:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Por último, rodee el número 3:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

¡La suma de los números que eligió, de nuevo, es 34!

$$13 + 10 + 8 + 3 = 34$$

¿Por qué esta matriz nos obliga a que la suma de los números elegidos sea siempre 34?, pregunta Martin Gardner. Y lo explica de este modo.

En el encabezamiento de esta matriz, de 4 por 4, escribamos horizontalmente los números 1, 2, 3 y 4; y verticalmente los números 0, 4, 8 y 12:

	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

Estos ocho números se llaman *generadores* de la matriz mágica. Ahora, en cada casilla, se escribe el número suma de sus dos generadores. Una vez rellenado, de este modo el casillero, encontraremos la matriz inicial:

	1	2	3	4
0	$0 + 1 = 1$	$0 + 2 = 2$	$0 + 3 = 3$	$0 + 4 = 4$
4	$4 + 1 = 5$	$4 + 2 = 6$	$4 + 3 = 7$	$4 + 4 = 8$
8	$8 + 1 = 9$	$8 + 2 = 10$	$8 + 3 = 11$	$8 + 4 = 12$
12	$12 + 1 = 13$	$12 + 2 = 14$	$12 + 3 = 15$	$12 + 4 = 16$

Veamos ahora, nos dice Martin Gardner, qué es lo que sucede al señalar cuatro números según el procedimiento indicado. Tal procedimiento garantiza que no serán elegidos dos números de una misma fila o columna. Cada número de la matriz es suma de un único par de generadores; por consiguiente, la suma de los cuatro números señalados será siempre igual a la suma de los ocho generadores. Y, como los generadores de esta matriz suman 34:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 34$$

También los cuatro números elegidos habrán de sumar 34.

Como puedes ver, con este algoritmo siempre podrán construirse matrices cuadradas a partir de números generadores; de tal manera, al elegir tres números al azar y sumarlos con aquel que no fue escogido, resultará la misma sumatoria de los números que generaron la matriz.

Aunque tú elijas los números al azar, lo predeterminado del algoritmo hará que la suma de tus números siempre sea la de los ocho generadores de la matriz. Y últimamente los psicólogos están descubriendo que, cuando creemos actuar azarosamente, en realidad, hay mecanismos psicológicos preexistentes que dirigen nuestro comportamiento. ¡El azar y el conocimiento son uno! Anota este sorprendente hallazgo:

Las matrices mágicas de Martin Gardner se rebelan contra la opinión de que el azar y el conocimiento sean opuestos. Sostienen que el azar y el conocimiento son inseparables, que no hay un concepto del azar y otro del conocimiento, sino que el par azar-conocimiento es uno solo.

Osho, nuestro místico contemporáneo, lo explica de la siguiente manera.

Imaginaos que me hallo sentado bajo un árbol y uno de vosotros está sentado en la copa del árbol. De repente, me dice que puede ver, por la carretera, un vehículo que yo no veo. Yo afirmo que no hay ningún vehículo, que la carretera está vacía. En lo que concierne a lo que yo puedo ver, la carretera está vacía.

Para mí, el vehículo está en el futuro. Para el que está en el árbol, está en el presente. Y por eso dirá: “Hay un vehículo”, y yo diré: “Ahora no hay ninguno. Puede que en el futuro”. Pero, para él, estará en el presente, porque ya lo está viendo.

Al cabo de un rato, yo también empezaré a ver el vehículo. Para mí, habrá llegado hasta el presente desde el futuro.

Luego, el vehículo pasa por la carretera y desaparece de mi vista de nuevo. Para mí ha desaparecido en el pasado. Pero para el que está en el árbol —que lo sigue viendo— seguirá estando en el presente.

Para mí, el vehículo estaba en el futuro, luego llegó al presente y desapareció en el pasado. Para el otro no ha hecho más que moverse en un presente continuo. Lo que ocurre es que está sentado a un nivel superior al que yo estoy.

Para el que está sentado en la copa del árbol, no hay azar, solo hay conocimiento: ¡el vehículo siempre está ahí! En cambio, para el que está sentado debajo del árbol, solo hay azar, no hay conocimiento: ¡el vehículo apareció de la nada y desapareció en la nada!

Martin Gardner tiene razón:

El par azar-conocimiento es uno solo.

Las matrices mágicas te revelan que la magia está en la comprensión de la unidad de los opuestos.



14

Aquiles y la tortuga

Zenón amaba a su maestro Parménides, el cual afirmaba que el movimiento no existe. Para defenderlo de los opositores, Zenón ideó varios argumentos, llamados *aporías*.

En la época de Zenón y Parménides, existían dos concepciones del tiempo y del espacio. Una se llamaba *Concepción Monádica Finita* y la otra, *Concepción de Divisibilidad Infinita*. La primera consideraba que el espacio y el tiempo están constituidos por un número finito de mónadas; mientras que la segunda, que el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles.

Lógicamente, las dos concepciones eran rivales, pues en la concepción monádica no se puede seguir dividiendo el espacio indefinidamente, porque en algún momento se llega a la mónada que es indivisible.

Para convencer a los defensores de la concepción de divisibilidad infinita, Zenón exponía la *aporía de Aquiles y la tortuga*; y para convencer a los defensores de la Concepción monádica finita, de que el movimiento no existe, Zenón exponía su *aporía de la flecha*.

En este apartado conocerás la *aporía de Aquiles y la tortuga*, y en el siguiente, la de la Flecha.

Si el opositor creía en la divisibilidad infinita del espacio y el tiempo, Zenón le preguntaba:

—¿Puedes ver que Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanza a la lenta tortuga?

—No —decía el opositor—. ¡Estoy seguro de que la alcanza sin dificultad!

—Este es el momento para entender que no —decía Zenón—. Presta atención a lo que te voy a decir.

Y proseguía de esta manera:

—Imagina que Aquiles y la tortuga hacen una carrera. ¿Cuál será el resultado? ¡Que Aquiles, el de los pies ligeros, no alcance jamás a la lenta tortuga! ¿Por qué? Porque el perseguidor siempre debe llegar al punto de donde el perseguido acaba de partir; de manera que, el más lento, necesariamente debe estar siempre algo adelantado todavía.

El opositor trataba de comprender las palabras del Maestro. Ayúdale en esta difícil tarea, por favor.

Imagina que Aquiles concede a su rival una ventaja de 100 metros. Supón también que la velocidad de Aquiles es 10 veces mayor que la velocidad de la tortuga. Entonces, en el momento en el que el guerrero ha recorrido los 100 metros, que le separan de la tortuga, esta habrá adelantado la décima parte, es decir, 10 metros.

Ante esta disminución de distancia, Aquiles se siente animado. ¡Cómo no, si el espacio que le separaba de la tortuga se ha reducido 10 veces! Ahora su tarea es mucho más fácil: solo hay que recorrer 10 metros. ¡Y Aquiles lo hace con éxito! Pero, mientras tanto, su rival avanzó 1 metro.

Aquiles no se desanima. ¡Ahora solo le separa de la tortuga 1 metro! El guerrero lo recorre, seguro de su triunfo. Pero ¿qué ha pasado? ¡Que la lenta Tortuga avanzó 10 centímetros!

¿Puedes verlo? Siempre que Aquiles llega al punto que ocupaba la tortuga, ésta había adelantado ya la décima parte. Puede ser muy poco, tan solo un milímetro o una micra; ¡pero el hecho es que la Tortuga siempre está delante de nuestro héroe! ¿En qué momento podría producirse el encuentro?

—¡Aquiles jamás atrapará a la tortuga! —exclamaba el opositor, atónito.

—Por eso digo que el movimiento es mera ilusión de nuestros sentidos —concluía Zenón—. ¡Todo está en eterno reposo! Aunque tus ojos te digan que Aquiles agarra a la Tortuga, ¡ello nunca sucede!

Anota este sorprendente hallazgo:

La aporía de Aquiles y la tortuga se rebela contra la opinión de que el movimiento y el reposo sean opuestos. Sostiene que el movimiento y el reposo son inseparables; que no hay un concepto de movimiento y otro de reposo, sino que el par movimiento-reposo es uno solo.

El arte de hacer dibujos animado dio la razón a Zenón. Para proyectar sobre la pantalla una figura en movimiento, se hacen miles de dibujos instantáneos, ligeramente diferentes entre sí. Al proyectarlos a la velocidad de 28 dibujos por segundo, se produce la ilusión de que la figura se está moviendo. ¡Pero, en realidad, cada dibujo es estático!

Parménides y Zenón tienen razón: ¡el movimiento es mera ilusión de nuestros sentidos!



15

La aporía de la flecha

Para demostrar a los defensores de la Concepción monádica finita, que el movimiento no existe, Zenón exponía su aporía de la flecha. Si el opositor creía en la constitución monádica del espacio y el tiempo, Zenón le decía:

—Si lanzas una flecha y tomas en cuenta que todos los instantes son indivisibles, te darías cuenta de que la flecha no realiza movimiento alguno.

—¿Por qué? —preguntaba el desconcertado opositor—. ¡A mí me parece que la flecha llega a su destino!

—Este es el momento para entender que no, —decía Zenón—. Presta atención a lo que te voy a decir.

Y proseguía de esta manera:

—¿Podría el movimiento ocurrir en un instante dado? ¡No!, porque, como cada instante es una mónada y es indivisible, la flecha se encuentra en una posición fija, de modo que está en reposo. ¿Podría el movimiento ocurrir entre dos instantes contiguos? ¡Tampoco!, porque, como entre dos instantes contiguos no hay otro instante, no hay tiempo para que el movimiento tenga lugar. ¡De modo que la flecha siempre está en reposo!

El opositor se esforzaba por comprender las palabras del Maestro. Ayúdale en esta difícil tarea, por favor.

Recuerda que Zenón dirigía la paradoja de la flecha únicamente a personas que creían que los instantes de tiempo son indivisibles. Bajo esta hipótesis, supón que la flecha se movió durante un instante. Entonces, estaría en diferentes lugares al comienzo y al final de ese instante. Pero ello implicaría que el instante tiene un principio y un fin, es decir, consta al menos de dos partes; y eso significaría que es divisible, al contrario de nuestra suposición.

—¡La flecha siempre está en reposo! —exclamaba el opositor, atónito— ¡El movimiento, en realidad, parece ser una ilusión de los sentidos!

Como puedes ver, la paradoja de la flecha afirma que el movimiento y el reposo no son opuestos, como generalmente creemos, sino que son eternos amigos. Anota este hecho:

La aporía de la flecha se rebela contra la opinión de que el movimiento y el reposo sean opuestos. Sostiene que el movimiento y el reposo son inseparables; que no hay un concepto de movimiento y otro de reposo, sino que el par movimiento-reposo es uno solo.

Hay una historia sufí que está impregnada del mismo espíritu. Se llama *Salomón y Azrael*:

Un hombre vino, muy temprano, a presentarse en el palacio del profeta Salomón, con el rostro pálido y los labios descoloridos.

Salomón le preguntó:

—¿Por qué estás en ese estado?

El hombre respondió:

—Azrael, el ángel de la muerte, me ha dirigido una mirada impresionante, llena de cólera. ¡Manda al viento, por favor te lo suplico, que me lleve a la India para poner a salvo mi cuerpo y mi alma!

Salomón mandó al viento que hiciera lo que pedía el hombre. Y, al día siguiente, el profeta preguntó a Azrael:

—¿Por qué has echado una mirada tan inquietante a este hombre, que es un fiel? Le has causado tanto miedo que ha abandonado su patria.

Azrael respondió:

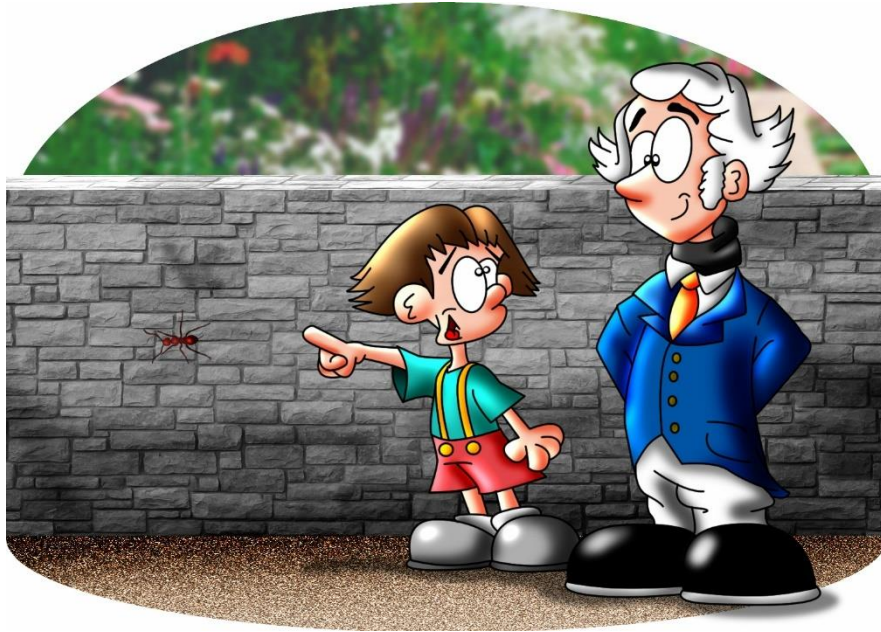
—¡Ha interpretado mal esa mirada! No lo miré con cólera, sino con asombro. Dios, en efecto, me había ordenado que fuese a tomar su vida en la India, y me dije: “¿Cómo podría, a menos que tuviese alas, trasladarse a la India?”

¡Aunque corras más rápido que el viento, no te salvarás de la quietud de la muerte! Y si es así, ¿en qué se diferencia el movimiento del reposo?

Zenón tiene razón:

El movimiento y el reposo son amigos entrañables; el par movimiento-reposo es uno solo.

Con la ayuda de la aporía de la flecha, Zenón demostraba, a los que creían en la constitución monádica del espacio y del tiempo, que el movimiento no existe.



16

¡Las paredes son permeables!

En cierta ocasión, Ferdinand Möbius y su hijo fueron a visitar un hermoso jardín que se había inaugurado cerca de Leipzig. Antes de entrar en el jardín, decidieron dar un paseo alrededor de su muro.

—Si yo fuera Dios —dijo el niño, indicando una hormiga que se desplazaba horizontalmente sobre el muro—, haría que esta hormiga no tenga que cruzar el borde superior del muro para oler una rosa. Haría que la hormiga, siguiendo siempre la recta horizontal, llegue al interior del jardín. ¡Haría que el muro sea permeable y que la hormiga pueda atravesarlo!

—Y yo sé cómo hacerlo, —dijo Möbius.

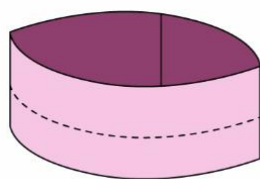
—¿De veras? ¿Cómo?

—Te lo mostraré en la casa —prometió Möbius.

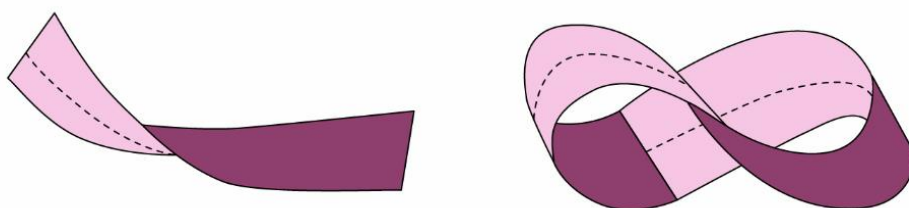
Después de disfrutar de hermosas rosas y tulipanes, regresaron a la casa y Möbius se preparó para dar a su hijo la explicación prometida. Ayúdale a realizarla, por favor

Con una tijera Möbius cortó dos tiras de papel y tomó una de ellas. Con una pega unió los extremos opuestos, obteniendo un cilindro.

—Esta es una superficie que tiene, como bordes, dos circunferencias disjuntas —explicó—. Además, tiene dos lados: la cara interior y la cara exterior.



Seguidamente tomó la otra tira y unió los extremos opuestos, girando previamente, en 180 grados, a uno de ellos.



—¡Esta es una superficie que tiene un solo borde! —exclamó—. ¡Y también tiene un solo lado, que es interior y exterior a la vez!

Posteriormente a esta banda se la llamó *la banda de Möbius*.

—Si sigues esta banda, siempre horizontalmente, llegarás al otro lado de ella sin cruzar ningún borde —explicó Möbius—. Y si, nuevamente, emprendes el viaje horizontal, volverás al lado inicial sin encontrar ninguna frontera en tu camino. ¡Lo de afuera resulta ser lo de adentro y lo de adentro, lo de afuera! Dios hace todas las fronteras reversibles. ¡Las paredes y los muros no existen!

Anota este increíble hallazgo:

La banda de Möbius se rebela contra la opinión de que fuera y dentro sean opuestos. Sostiene que fuera y dentro son inseparables; que no hay un fuera y un dentro, sino que el par fuera-dentro es uno solo.

El cuento sufi, *Las monedas en la pared*, se muestra plenamente de acuerdo con esta interpretación. Narra que una vez, vivía un tacaño que ponía todo su dinero, tan pronto como lo recibía en su tienda, en una cavidad entre la pared de su casa y la de su vecino. Moneda a moneda, introducía todo a través de un pequeño agujero que había hecho para este propósito.

Esta práctica aumentó aún más su avaricia, hasta que no solo no gastaba nada, sino que, además, ideó visitar a su vecino a la hora de comer, de modo que podía comer sin costo para él.

—Yo estoy, después de todo —se dijo a sí mismo—, pagándole con mi compañía. Además, a él le gusta ser caritativo y alimentar a quienquiera que esté en su casa cuando se sirven las comidas.

Llegó el momento en que incluso vendió su negocio y puso todas las ganancias en la pared, derivando gran placer de la hospitalidad sin fin de su generoso amigo.

Cuando, después de muchos años, su vecino murió, el avaro derribó la pared para tomar el tesoro y se encontró con que el vecino lo había robado: ¡el avaro había estado comiendo de su propio dinero!

¡El vecino atravesó la pared! Möbius y su hijo lo adivinaron correctamente: ¡Dios hace todas las paredes y los muros permeables!

Fuera y dentro son inseparables, el par fuera-dentro es uno solo.

¡La banda de Möbius te enseña a atravesar los muros!



17

El enunciado y su contrario

Luitzen Brouwer sostenía que el Principio del Tercer Excluido es falaz. Para demostrarlo a sus amigos, escribió sobre una hoja la siguiente frase:

Esta frase consta de siete palabras.

Preguntó a los presentes:

—¿Es esta frase verdadera?

—Es falsa —contestaron todos—, pues no consta de siete palabras, sino de seis.

—¿Y qué dirían de la frase que afirma lo contrario? —preguntó Brouwer.

—¡Que debe ser verdadera! —exclamaron los amigos—. Si un enunciado es falso, su contrario debe ser verdadero. ¡Así lo afirma el Principio del Tercer Excluido!

Brouwer escribió:

Esta frase no consta de siete palabras.

—Es la frase que afirma lo contrario de la anterior —dijo—. ¿Es verdadera?

—¡Es falsa —exclamaron todos—, pues esta frase sí consta de siete palabras!

—Como ven —concluyó Brouwer—, una frase puede ser falsa y también su negación. ¡El Principio del Tercer Excluido no tiene lugar!

A esta situación se la llamó *La paradoja del enunciado y su contrario*. Nos hace comprender que afirmar y negar no son opuestos, como generalmente creemos, sino que son eternos amigos. Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del enunciado y su contrario se rebela contra la opinión de que afirmar y negar sean opuestos. Sostiene que afirmar y negar son

inseparables, que no hay un concepto de afirmar y otro de negar, sino que el par afirmar-negar es uno solo.

Y la misma enseñanza nos entrega el cuento *¡Ahorcar no se puede perdonar!*

Narra que en el año 1701 a.C., Hammurabi, rey de Babilonia, fue informado que su visir, el cobrador de impuestos, había hecho inscripciones incorrectas en las tablillas. Hammurabi se sintió furioso, pero decidió controlar su cólera y preguntó a su bufón Apligaum:

—¿Qué me aconsejas que haga con el infeliz? ¿Le mando a ahorcar o le perdono?

—¡Ahorcar no se puede perdonar! —contestó el bufón.

—¿Qué dices?

—¡Ahorcar no se puede perdonar! —volvió a decir el bufón.

—¡No te entiendo! ¿Dices *ahorcar, porque no se puede perdonar*; o dices que *ahorcar no se puede; por lo tanto, hay que perdonar*?

—¡Oh, rey! —dijo Apligaum solemnemente—. Lo comprenderás en seguida. ¡Por supuesto que he dicho que *no puedes ahorcar; por lo tanto, debes perdonar*! ¡Es imposible ahorcar a un individuo!

—¿Por qué dices eso? ¡He mandado a ahorcar a muchos!

—¡No, majestad! —dijo Apligaum con fuerza—. Te puede parecer que acabas con la vida de un hombre en el momento en el que le aprietas la garganta con la soga. ¡Pero la verdad es que sigue existiendo! Su Espíritu en seguida se reencarna en otro cuerpo. ¡El Espíritu es eterno, majestad!

—¡Bien dicho! —exclamó Hammurabi y perdonó al visir.

¡Afirmar y negar, nuevamente, demostraron ser uno! Luitzen Brouwer tiene razón:

Afirmar y negar son inseparables; el par afirmar-negar es uno solo.

Y la paradoja del enunciado y su contrario nos ayuda a comprenderlo.



18

La paradoja de los cuatro hijos

En el año 1959, Martin Gardner se encontró en la calle con una pareja de amigos recién casados.

—Hemos decidido que vamos a tener cuatro hijos —le comentaron—, y ya estamos pensando en construir una casa con cuatro habitaciones infantiles: dos habitaciones para niñas y dos para niños.

—¿Cómo saben que serán dos varones y dos mujeres? —preguntó Gardner—. ¡Según la ciencia, lo más probable es que tengan tres niños de un sexo y uno de sexo opuesto!

—¿Cómo es eso? —preguntaron los futuros padres, desconcertados—. ¿Acaso no es lógico que, de cuatro hijos, la mitad sea de un sexo, y la otra mitad de otro?

—¡No! —volvió a decir Gardner—. Lo más probable es que tengan tres varones y una niña, o tres niñas y un varón.

Y dio a los futuros padres la siguiente explicación. Ayúdale a realizarla, por favor.

Considera todas las combinaciones posibles que pueden presentarse a la hora de tener cuatro hijos. Representa a las niñas con una M (de *mujer*), y a los niños con una H (de *hombre*). Entonces, son posibles las siguientes combinaciones:

M-M-M-M, M-M-M-H, M-M-H-M,
M-M-H-H, M-H-M-M, M-H-M-H, M-H-H-M,
M-H-H-H, H-M-M-M, H-M-M-H,
H-M-H-M, H-M-H-H, H-H-M-M, H-H-M-H,
H-H-H-M, H-H-H-H.

Como puedes ver, hay 16 posibilidades. ¡Cuenta los casos favorables!

¿Cuántas veces se repite una combinación de dos niños y dos niñas? ¡Solo 6! Éstas son todas las opciones:

M-M-H-H,	M-H-M-H,	M-H-H-M,
H-M-M-H,	H-M-H-M,	H-H-M-M.

Por lo tanto, la probabilidad de tener una pareja de niños de cada sexo es tan solo de $\frac{6}{16}$ es decir, de 37,5%.

Entonces, ¿qué es lo más probable en un matrimonio con cuatro hijos? Aunque resulte difícil de creer, si cuentas las opciones, obtendrás como resultado que lo más probable es tener un niño y tres niñas, o una niña y tres niños. En efecto: estas son las posibilidades:

M-M-M-H,	M-M-H-M,	M-H-M-M,	M-H-H-H,
H-M-M-M,	H-M-H-H,	H-H-M-H,	H-H-H-M.

¡Son 8! Entonces, la probabilidad de tener un niño y tres niñas, o una niña y tres niños es de $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, es decir, del 50%. En resumen: la mitad de los matrimonios con cuatro hijos tendrán un niño y tres niñas, o una niña y tres niños, y solo el 37,5% tendrá dos niñas y dos niños.

El evento que parecía ser más probable, resultó ser menos probable; y el evento que parecía ser menos probable, resultó ser más probable. Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de los cuatro hijos se rebela contra la opinión de que *más probable y menos probable* sean opuestos. Sostiene que *más probable y menos probable* son inseparables; que no hay un concepto de *más probable* y otro de *menos probable*, sino que el par *más probable-menos probable* es uno solo.

Y la misma enseñanza nos entrega la historia hindú, *La elección de Arjuna*.

Cuando el peligro del enfrentamiento entre las dos castas rivales, los Kurus y los Pandavas, por el reino de Hastinapura, se hizo inminente, Arjuna fue a Dwaraka para pedir ayuda a Krishna.

Al enterarse del hecho, Duryodhana, el jefe de los Kurus, tomó los más rápidos corceles que pudo reunir y arribó a Dwaraka antes de Arjuna. Al llegar, Arjuna se encontró con él en el vestíbulo, junto a los aposentos de Krishna. Duryodhana sonrió a Arjuna y le dijo:

—¡He sido más afortunado que tú! Pues llegué antes y es justo que Krishna me ayude a mí.

—No importa quién llegó antes o después —contestó Arjuna—. Krishna ayudará a aquél que pide por una causa justa.

Ambos entraron a los aposentos. Krishna estaba durmiendo; Duryodhana se acomodó en un asiento junto a la cabecera, mientras Arjuna se quedó a los pies de la cama y permaneció a los pies de Krishna, con las manos juntas y con los ojos cerrados.

Cuando Krishna despertó de sus sueños, saludó afectuosamente a ambos y les preguntó por las razones de su venida. Duryodhana dijo:

—Krishna, sabes lo que pasa entre nosotros como primos: posiblemente, lucharemos por el antiguo trono de Hastinapura. Por eso he venido a pedir que ayudes en la guerra, poniéndote de nuestro lado.

—Y yo te pido que te pongas del lado de nosotros, Krishna —dijo Arjuna.

—Quiero ayudar a ambos —dijo Krishna— y les deseo proponer una elección. Arjuna es el más joven, él tendrá que elegir entre dos alternativas. La primera alternativa es mi ejército de terribles guerreros, iguales a mí en valor; y la segunda alternativa soy yo, solo yo, y no lucharé, pues he decidido no llevar armas. ¿Qué dices, Arjuna? ¿Cuál de las dos alternativas escoges? ¿Eliges un ejército, o un Krishna desarmado?

Arjuna se postró a los pies de Krishna; sus ojos estaban cegados por las lágrimas.

—Te elijo a ti, mi Señor —le dijo a Krishna—. No quiero nada más en este mundo. Te quiero a ti.

Duryodhana se puso contento de haber conseguido el gran ejército de Krishna. ¡Él no sabía que un Krishna desarmado vale más que mil ejércitos! En el momento en el que Arjuna eligió a Krishna, el destino de la guerra quedó sellado: como resultado de ella, los Pandavas derrocaron para siempre a los Kurus y ganaron gloriosamente el trono de Hastinapura. ¡La elección de Arjuna fue ciento por ciento correcta!

¡Lo más probable y lo menos probable, nuevamente, demostraron ser uno! Duryodhana no sabía que un Krishna desarmado vale más que todos los ejércitos del mundo. Lo que parecía ser más probable, ganar la guerra con un ejército, resultó ser menos probable que ganar la guerra con un solo hombre. El evento que parecía ser el más probable, resultó ser el menos probable, y el evento que parecía ser el menos probable, resultó ser el más probable.

Martin Gardner tiene razón:

Lo más probable y lo menos probable son amigos; el par más probable-menos probable es uno solo.

¡Las paradojas te siguen revelando sus secretos!

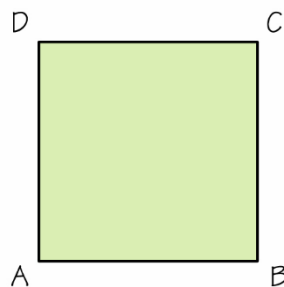


19

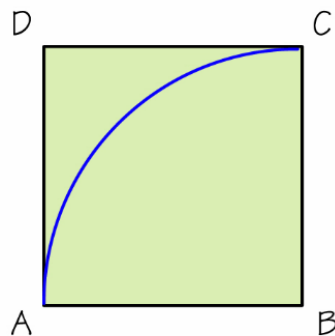
¡La circunferencia es un punto!

En la obra *Diálogos relativos a dos nuevas ciencias*, Galileo Galilei demuestra que la circunferencia no es más que un punto. Lo hace de la siguiente manera.

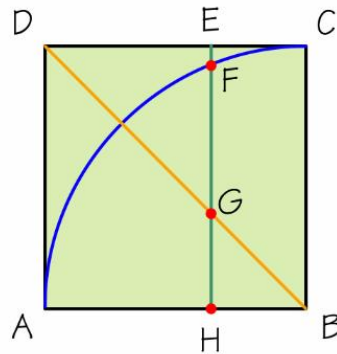
Traza el cuadrado ABCD:



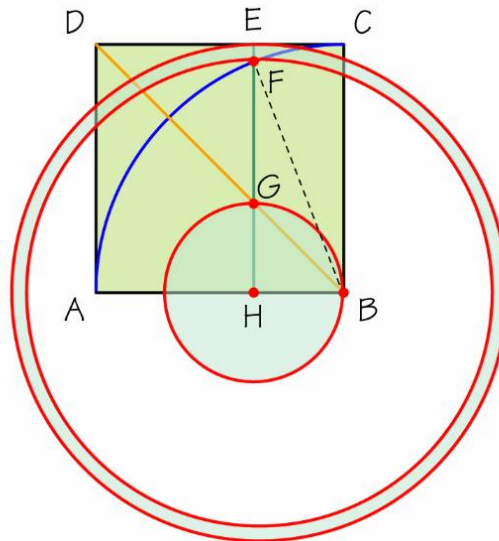
Haciendo centro en B, traza un arco de circunferencia AC:



Sobre AB, traza una recta perpendicular HE y la diagonal del cuadrado BD; luego, llama F y G a los puntos de las intersecciones que se formaron.



Al hacer centro en H, traza las circunferencias de radios HG, HF y HE:



¡Galileo va a demostrar que el área del círculo rayado es igual al área de la corona circular rayada!

Por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo FHB, Galileo puede afirmar que:

$$BF^2 = HB^2 + HF^2$$

Es decir:

$$HB^2 = BF^2 - HF^2 \quad (1)$$

Pero, por construcción:

$$BC = HE$$

Y, puesto que BC y BF son radios del mismo cuadrante de circunferencia:

$$BC = BF$$

Por lo tanto:

$$HE = BF \quad (2)$$

Por otra parte, puesto que son radios del mismo círculo:

$$HG = HB \quad (3)$$

Al reemplazar (2) y (3) en (1), Galileo obtiene:

$$HG^2 = HE^2 - HF^2$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por π , Galileo obtiene:

$$\pi \cdot HG^2 = \pi \cdot HE^2 - \pi \cdot HF^2$$

El primer miembro de esta igualdad representa el área del círculo rayado; el segundo es la diferencia de las áreas de los círculos de radio HE y HF; y, por consiguiente, representa el área de la corona circular rayada. Anota este hallazgo de Galileo:

El área de la circunferencia, con centro en H y radio HG, es igual al área de la corona circular con centro en H y radios HF y HE.

Ahora, Galileo hace que H tienda a B. ¿Qué sucederá entonces? La circunferencia se convierte en un punto y la corona se reduce a la circunferencia de radio BC. ¡Luego, un punto es igual en área a una circunferencia!

—¡La circunferencia es un punto! —exclamó Galileo, atónito—. ¡Dios convierte un punto en una circunferencia!

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de Galileo se rebela contra la opinión de que circunferencia y punto sean opuestos. Sostiene que circunferencia y punto son inseparables; que no hay circunferencia por un lado y punto por otro, sino que el par circunferencia-punto es uno solo.

En el Oriente, este hecho se conocía desde hace algunos siglos: Gaudapada, el célebre filósofo hindú del siglo VIII, había realizado el mismo descubrimiento que Galileo. Sucedió así.

Gaudapada se quedó a pernoctar en un bosque con su discípulo Govinda. Prendieron el fuego y, después de una ligera cena, Gaudapada recogió del suelo una rama caída, introdujo su punta en el carbón prendido y trazó en el aire una circunferencia.

—¿Puedes ver esta circunferencia? —preguntó a Govinda.

—Sí —dijo Govinda—. ¡La puedo ver claramente!

—¡No puedes ver claramente aquello que no existe! —exclamó Gaudapada—. ¡Si prestas atención, verás que el tizón ardiente no trazó ninguna circunferencia! En un instante dado, ¿dirías que hay una circunferencia?

—No —dijo Govinda—, pues en un instante dado solo existe la punta del tizón ardiente, exenta de movimiento.

—Y en otro instante dado, ¿dirías que hay una circunferencia? —preguntó Gaudapada.

—No —contestó Govinda—, pues en cualquier instante lo único que existe es la punta del tizón ardiente en reposo.

—Entonces, ¿en qué momento dirías que se trazó la circunferencia? —gritó Gaudapada. Y añadió con calma—. ¡Govinda! Todas las líneas que percibes en el espacio son imaginarias.

E hizo anotar a su discípulo la siguiente sloka:

El tizón ardiente, que se deja de agitar, está exento de toda apariencia y permanece sin cambio. De la misma manera, la conciencia, que se deja de agitar por actos imaginarios, está exenta de toda apariencia y permanece sin cambio.

El descubrimiento de Gaudapada afirma que la circunferencia y el punto no son opuestos, sino idénticos. ¡La circunferencia y el punto son lo mismo! Donde te parece ver una circunferencia, en realidad, solo hay un punto que se mueve, una punta de un tizón ardiente.

El mensaje de Gaudapada es el mismo que el de la paradoja de Galileo: la circunferencia es solo un punto, porque la punta de un tizón agitado dibuja una circunferencia. Galileo tiene razón:

La circunferencia y el punto son amigos entrañables. El par circunferencia-punto es uno solo.

La paradoja de Galileo te invita a conocerte sin actos imaginarios. Te invita a descubrir cómo eres cuando permaneces sin cambio.



20

El copo de nieve

Un día del año 1900, Helge von Koch le dijo a un colega:

—¡Ya sé cómo Dios crea el mundo! Él no lo hizo en seis, días ni descansó el séptimo; ¡lo está creando en este mismo instante, mientras le estoy hablando! Él lo crea aquí y ahora, y solo descansa cuando me voy a dormir.

—¿Cómo es eso? —exclamó el colega, muy extrañado.

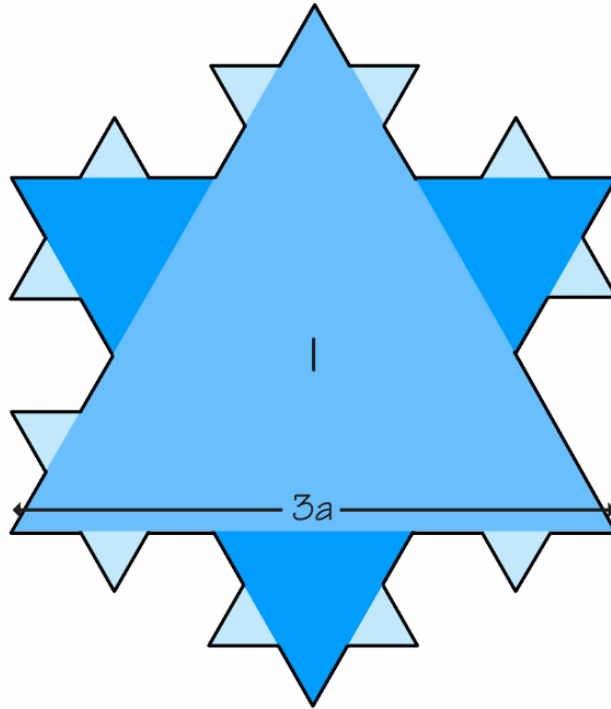
—Se lo puedo explicar con el ejemplo del copo de nieve.

—¡Le quedaré muy agradecido!

Y Koch le dio a su colega la siguiente explicación. Ayúdale a realizarla, por favor

Para construir un copo de nieve, Koch procedió de la siguiente manera.

- Partió de un triángulo equilátero de lado $3a$.
- Sobre el tercio central de cada lado construyó, hacia el exterior, un triángulo equilátero de lado a , y eliminó la base de esos nuevos triángulos (que son 3).
- Sobre cada lado de longitud a de la nueva figura construyó, hacia el exterior y tomando como base el tercio central, un triángulo equilátero de lado $\frac{a}{3}$, y eliminó las bases de todos esos nuevos triángulos (su número es 12).



- Sobre el tercio central de cada lado de la figura resultante, construyó un triángulo equilátero de lado $\frac{a}{3}$, y eliminó las bases de todos esos nuevos triángulos (su número es 48).

¿Cuáles son los perímetros de estos polígonos sucesivos? El primero mide $9a$, el segundo $12a$, el tercero $16a$, etc. ¿A dónde tienden los perímetros de estos polígonos? ¡Al infinito!, pues forman una progresión aritmética cuya razón, de $\frac{4}{3}$, es mayor a 1.

Ahora veamos, dice Koch, cuáles son las áreas de estos polígonos. El área del triángulo original es

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2$$

En la segunda etapa se añadieron 3 triángulos, y su aporte fue el siguiente:

$$A_2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

En la tercera etapa se añadieron 12 triángulos. Su área puede ser calculada de esta manera:

$$A_3 = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

La cuarta etapa añadió 48 triángulos:

$$A_4 = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{9}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{27} a^2$$

La suma de todas las áreas será, entonces, ésta:

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{27} a^2 + \dots$$

Al excluir el primer sumando, ¡se trata de una progresión geométrica! Como su razón es $\frac{4}{9}$, su suma arriba a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{27} a^2 + \dots \right) &= \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots \right) &= \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{9}{5} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{18}{5} \sqrt{3} a^2 \end{aligned}$$

¿En qué proporción está esta área con la del triángulo original? Calcúlala:

$$\frac{\frac{18}{5} \sqrt{3} a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{8}{5}$$

Esta es la respuesta de Koch:

El copo de nieve es una curva continua (aunque no diferenciable). Su longitud es infinita, sin embargo, su área es finita e igual a $\frac{8}{5}$ del área del triángulo original.

De este modo Koch nos ha presentado una curva más larga que la distancia de la Tierra a la estrella más lejana. ¡Sin embargo, su gráfica cabe en un sello de correos!

—Dios nunca se detiene —concluyó Koch—. Ni en la tercera etapa de la creación del copo, ni en la décima, ni en la millonésima. ¡El copo es una vibración infinita! El río de la vida nunca se estanca. Cuando se presenta una hipótesis sobre algo, lo paralizamos mentalmente; pero el río de la vida sigue fluyendo. ¡La creación del mundo es aquí y ahora!

Para crear una figura tan pequeña como la de un copo de nieve, Dios genera una sucesión infinita de líneas quebradas, obteniendo una curva de área finita, pero de longitud infinita. Anota el sorprendente descubrimiento de Koch:

El copo de nieve se rebela contra la opinión de que lo finito y lo infinito sean opuestos. Sostiene que lo finito y lo infinito son inseparables, que no hay un concepto de lo finito y otro de lo infinito, sino que el par finito-infinito es uno solo.

Rumi, el famoso poeta sufí, dice:

¡Perderías la razón si conocieras el reino de Dios! De la viña, solo un racimo de uva llega a la ciudad; porque la viña no puede trasladarse a ella.

¡Sobre todo si la viña es el jardín del Amado! Este universo no es más que una corteza.

Tu Ser Infinito no puede trasladarse a tu cuerpo finito. ¡Tú tienes que salir a buscarlo!
El copo de nieve de Helge von Koch te invita a conocer lo infinito.



21

La apuesta del duque de Toscana

El duque de Toscana era un jugador empedernido. Más que nada le gustaba jugar dados, y todas las noches apostaba con sus amigos.

Un día el obispo de Toscana le encontró en la calle y le dijo:

—¡No está bien, duque! Usted juega a los dados, y, como eso es pecado a los ojos de Dios, después de la muerte irá directo al infierno.

—¡Imposible, Eminencia! —exclamó el duque—. Dios es bueno y no puede haber creado ningún infierno; ¿cómo se podría ir a una parte que no existe? Si desea usted convencerse, en este momento lancemos tres dados. Si los tres números suman 9, el infierno existe; pero si suman 10, el infierno no existe. Si suman cualquier otro número, no lo tomaremos en cuenta y volveremos a lanzar. Le estoy proponiendo una apuesta muy justa, pues tanto el 9, como el 10 tienen el mismo número de chances: 6. ¡Mire usted!

Y enumeró los chances del número 9 y del número 10:

$1 + 2 + 6 = 9$	$1 + 3 + 6 = 10$
$1 + 3 + 5 = 9$	$1 + 4 + 5 = 10$
$1 + 4 + 4 = 9$	$2 + 2 + 6 = 10$
$2 + 2 + 5 = 9$	$2 + 3 + 5 = 10$
$2 + 3 + 4 = 9$	$2 + 4 + 4 = 10$
$3 + 3 + 3 = 9$	$3 + 3 + 4 = 10$

—¡De modo que estamos en igualdad de condiciones! —afirmó. —¿Qué dice?

—¡De acuerdo! —dijo el obispo. —¡Como tengo la razón, estoy seguro que Dios me hará ganar la apuesta!

El duque sacó del bolsillo tres dados, uno blanco, uno amarillo y uno rojo, y los lanzó. Los dados cayeron sobre el empedrado. ¡Salieron los números 3, 3 y 4, que suman 10! ¡El duque ganó la apuesta!

—¡Sus dados deben estar cargados! —gritó el obispo y se alejó refunfuñando.

Sin embargo, nunca más volvió a molestar a su incómodo rival.

De noche el duque contó el incidente a sus amigos.

—¡Mis dados no están cargados! —les aseguró—. Pero desde hace mucho tiempo he observado que en tres lanzamientos simultáneos de dados el 10 aparece más veces que el 9. A pesar de que ambos tienen 6 posibilidades de salir, el 10 sale con más frecuencia que el 9. ¿Alguien de ustedes me puede explicar este hecho?

Pero los amigos no tenían ninguna idea al respecto. El duque fue, entonces, a visitar a Gerolamo Cardano, quien pensó en el problema durante varios días, pero no encontró ninguna respuesta satisfactoria.

50 años más tarde, en el año 1610, Galileo Galilei se enteró del problema y exclamó:

—¡Yo sé por qué el 10 sale más veces que el 9!

Y dio la siguiente explicación. ¿Le ayudas?

A Galileo se le ocurre la siguiente idea: escribir todos los posibles resultados del lanzamiento de tres dados en forma de tripletas. Por ejemplo, la tripleta (3,6,4) significará que en el dado blanco salió el 3, en el dado amarillo el 6, y en el rojo el 4. De esta manera puedes anotar todos los eventos que pueden ocurrir:

(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(1,1,4)	(1,1,5)	(1,1,6)
(1,2,1)	(1,2,2)	(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,2,6)
(1,3,1)	(1,3,2)	(1,3,3)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,3,6)
(1,4,1)	(1,4,2)	(1,4,3)	(1,4,4)	(1,4,5)	(1,4,6)
(1,5,1)	(1,5,2)	(1,5,3)	(1,5,4)	(1,5,5)	(1,5,6)
(1,6,1)	(1,6,2)	(1,6,3)	(1,6,4)	(1,6,5)	(1,6,6)
(2,1,1)	(2,1,2)	(2,1,3)	(2,1,4)	(2,1,5)	(2,1,6)
(2,2,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,2,4)	(2,2,5)	(2,2,6)
(2,3,1)	(2,3,2)	(2,3,3)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,3,6)
(2,4,1)	(2,4,2)	(2,4,3)	(2,4,4)	(2,4,5)	(2,4,6)
(2,5,1)	(2,5,2)	(2,5,3)	(2,5,4)	(2,5,5)	(2,5,6)
(2,6,1)	(2,6,2)	(2,6,3)	(2,6,4)	(2,6,5)	(2,6,6)
(3,1,1)	(3,1,2)	(3,1,3)	(3,1,4)	(3,1,5)	(3,1,6)
(3,2,1)	(3,2,2)	(3,2,3)	(3,2,4)	(3,2,5)	(3,2,6)
(3,3,1)	(3,3,2)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,3,5)	(3,3,6)
(3,4,1)	(3,4,2)	(3,4,3)	(3,4,4)	(3,4,5)	(3,4,6)
(3,5,1)	(3,5,2)	(3,5,3)	(3,5,4)	(3,5,5)	(3,5,6)
(3,6,1)	(3,6,2)	(3,6,3)	(3,6,4)	(3,6,5)	(3,6,6)
(4,1,1)	(4,1,2)	(4,1,3)	(4,1,4)	(4,1,5)	(4,1,6)
(4,2,1)	(4,2,2)	(4,2,3)	(4,2,4)	(4,2,5)	(4,2,6)
(4,3,1)	(4,3,2)	(4,3,3)	(4,3,4)	(4,3,5)	(4,3,6)
(4,4,1)	(4,4,2)	(4,4,3)	(4,4,4)	(4,4,5)	(4,4,6)
(4,5,1)	(4,5,2)	(4,5,3)	(4,5,4)	(4,5,5)	(4,5,6)
(4,6,1)	(4,6,2)	(4,6,3)	(4,6,4)	(4,6,5)	(4,6,6)
(5,1,1)	(5,1,2)	(5,1,3)	(5,1,4)	(5,1,5)	(5,1,6)
(5,2,1)	(5,2,2)	(5,2,3)	(5,2,4)	(5,2,5)	(5,2,6)
(5,3,1)	(5,3,2)	(5,3,3)	(5,3,4)	(5,3,5)	(5,3,6)
(5,4,1)	(5,4,2)	(5,4,3)	(5,4,4)	(5,4,5)	(5,4,6)

(5,5,1)	(5,5,2)	(5,5,3)	(5,5,4)	(5,5,5)	(5,5,6)
(5,6,1)	(5,6,2)	(5,6,3)	(5,6,4)	(5,6,5)	(5,6,6)
(6,1,1)	(6,1,2)	(6,1,3)	(6,1,4)	(6,1,5)	(6,1,6)
(6,2,1)	(6,2,2)	(6,2,3)	(6,2,4)	(6,2,5)	(6,2,6)
(6,3,1)	(6,3,2)	(6,3,3)	(6,3,4)	(6,3,5)	(6,3,6)
(6,4,1)	(6,4,2)	(6,4,3)	(6,4,4)	(6,4,5)	(6,4,6)
(6,5,1)	(6,5,2)	(6,5,3)	(6,5,4)	(6,5,5)	(6,5,6)
(6,6,1)	(6,6,2)	(6,6,3)	(6,6,4)	(6,6,5)	(6,6,6)

Como puedes ver, existen 216 posibles resultados del lanzamiento de los tres dados. Esto es así porque cada uno puede arrojar 6 resultados diferentes, y $6^3 = 216$. Ahora anota aquellas tripletas en las que la suma de los tres números es igual a 10. Son éstas:

(1,3,6), (1,4,5), (1,6,3),
 (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (2,5,3), (2,6,2),
 (3,1,6), (3,2,5), (3,3,4), (3,4,3), (3,5,2), (3,6,1),
 (4,1,5), (4,2,4), (4,3,3), (4,2,2), (4,5,1),
 (5,1,4), (5,2,3), (5,3,2), (5,4,1),
 (6,1,3), (6,2,2), (6,3,1).

¡Son 27! En seguida indica las tripletas en las que la suma de los tres números es igual a 9. Son las siguientes:

(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (1,5,3), (1,6,2),
 (2,1,6), (2,2,5), (2,3,4), (2,4,3), (2,5,2), (2,6,1),
 (3,1,5), (3,2,4), (3,3,3), (3,4,2), (3,5,1),
 (4,1,4), (4,2,3), (4,3,2), (4,4,1),
 (5,1,3), (5,2,2), (5,3,1),
 (6,1,2), (6,2,1).

¡Son solo 25! ¿Qué parte de las posibilidades forma el 10? Claro que sí:

$$\frac{27}{216} = 0.125 = 12.5\%$$

¿Y qué parte de las posibilidades forma el 9? Por supuesto:

$$\frac{25}{216} = 0.1157 = 11.57\%$$

El 10 y el 9 no tienen las mismas probabilidades de ser obtenidos: ¡el 10 tiene más posibilidades que el 9! Y esto explica perfectamente lo que había observado el duque de Toscana. A Galileo se le ocurrió, entonces, definir del siguiente modo los dos conceptos básicos de la futura Teoría de Probabilidades:

Espacio muestral

El espacio muestral de un juego de azar es el conjunto de todos los eventos posibles que pueden producirse como resultado del juego.

Probabilidad de un suceso

Un suceso es un conjunto de eventos llamados **favorables**. La **probabilidad de un suceso** se calcula dividiendo el número de eventos favorables entre el número total de los eventos del espacio muestral:

$$p = \frac{\text{número de eventos favorables}}{\text{número total de eventos}}$$

¡Estas son las definiciones que utilizamos para el cálculo de las probabilidades hasta el día de hoy! Anota la respuesta al problema, del duque de Toscana, que dio Galileo:

En la apuesta del duque de Toscana con el obispo, el infierno tiene la probabilidad de $\frac{25}{216} = 11.57\%$ de existir, y la probabilidad de $\frac{27}{216} = 12.5\%$ de no existir.

Gracias a este incidente, Galileo se interesó por los juegos de azar y más tarde escribió un folleto titulado *Sopra le scopere del dadi* (*Descubrimientos sobre los juegos de dados*), que fue publicado en el año 1718.

La apuesta del duque de Toscana, además de demostrar que el infierno no existe, enriqueció a la Matemática con el concepto de la probabilidad.

De esta manera, se demostró que el ganar y el perder no son tan diferentes como solíamos creer. Ingenuamente suponíamos que el 9 y el 10 tienen las mismas oportunidades de ganar y de perder en el juego del lanzamiento de tres dados, es decir, que ninguno gana ni pierde respecto del otro. Sin embargo, como descubrió Galileo, el 9 no tiene las mismas oportunidades que el 10, pues sus chances son menores. Es decir, en el juego del lanzamiento de tres dados el 9 pierde y el 10 gana.

Siempre que alguien gana, algún otro pierde, y siempre que alguien pierde, algún otro gana. ¡No puede haber un ganador, sin que haya un perdedor, y no puede haber un perdedor, sin que haya un ganador! Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del duque de Toscana se rebela contra la opinión de que ganar y perder sean opuestos. Sostiene que ganar y perder son inseparables, que no hay un concepto de ganar y otro de perder, sino que el par ganar-perder es uno solo.

La historia de Alí, el yerno de Mahoma, nos entrega el mismo mensaje.

En una batalla, Alí hizo pedazos la espada de un guerrero enemigo. Este se quedó impotente, esperando ser abatido, pero al mismo tiempo gritando en su furia:

—¡Dame tu espada y te destruiré!

Alí le dio su propia espada, quedándose él mismo sin ningún medio de defensa. Su enemigo, cuando se hubo recobrado de su sorpresa, preguntó:

—¿Cómo puedes dar tu única espada, en medio de una batalla, al hombre que te odia y está tratando de destruirte?

Alí dijo:

—Forma parte de la tradición familiar que nadie nos pida nada en vano.

Sobra decir que el enemigo rehusó matar a un hombre como Alí.

El mensaje de esta historia es el *mismo* que el de la paradoja del duque de Toscana: ganar y perder son lo *mismo*. Cualquier persona creería que, al entregar su espada al enemigo, Alí iba a perder la batalla y la vida. ¡Sin embargo, Alí fue el ganador! No solamente conservó la vida: se ganó la admiración y la reverencia de su propio enemigo.

Queda demostrado:

Ganar y perder son amigos entrañables. El par ganar-perder es uno solo.

Y la paradoja del duque de Toscana te ayudó a comprenderlo.



22

La paradoja del cumpleaños

En una conferencia Andrei Kolmogorov explicaba a los asistentes el concepto de evento probable. Con este propósito les hizo la siguiente pregunta:

—¿Cuántas personas se necesita reunir en una fiesta, para que dos de ellas coincidan en el día de su cumpleaños con una probabilidad mayor del 50%?

—Hay que reunir a 366 personas —respondieron los presentes—. Así estaremos seguros que, como el año tiene 365 días, al menos dos de las personas tendrán que coincidir en el día de sus cumpleaños.

—¡No es así! —dijo Kolmogorov—. La respuesta correcta es 23 personas. ¡Solo hay que reunir a 23 personas, y la probabilidad de que dos de ellas coincidan en el día de su cumpleaños será mayor al 50%! Ustedes están pensando en un evento seguro, pero yo les estoy preguntando sobre un evento probable, el que ocurre con una probabilidad mayor del 50%.

—¿Solo 23 personas? —se sorprendieron los asistentes—. ¡No puede ser!

Y Kolmogorov dio la siguiente explicación. Ayúdale a realizarla, por favor

Primero resuelve el problema para un tamaño muestral pequeño, igual a 1, 2, 3 y 4, y luego generalizarás el resultado.

Para $n = 1$ tenemos en la fiesta una sola persona. En este caso la probabilidad de coincidir con otra persona, en el día del cumpleaños, es cero, dado que la otra persona no existe. Anótalo: $P_1 = 0$.

Para $n = 2$, en la fiesta hay dos personas. Determina el espacio muestral para este caso:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,2), \dots, (1,365), (2,1), \\ (2,2), (2,3), \dots, (2,365), \\ (3,1), (3,2), (3,3), \dots (3,365), \dots \\ (365,1), (365,2), \dots, (365,365) \end{array} \right\}$$

Ya lo sabes:

$$|\Omega| = 365^2$$

Los casos favorables son los siguientes:

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (365,365)\}$$

Su número es 365. Por lo tanto:

$$P_2 = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365} = 0.27\%$$

Para $n = 3$ en la fiesta hay tres personas. Determina el espacio muestral para este caso:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), \dots, (1,1,365), \\ (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3) \dots, (1,2,365), \\ (1,3,1), (1,3,2), (1,3,3), \dots (1,3,365), \dots \\ (365,365,1), (365,365,1), \dots, (365,365,365) \end{array} \right\}$$

Es decir:

$$|\Omega| = 365^3$$

En este caso, en vez de calcular los casos favorables, es más sencillo calcular los casos no favorables. Es decir, en vez de calcular la probabilidad de que las fechas del cumpleaños de al menos dos de las personas coincidan, es más fácil calcular la probabilidad del suceso de que todas las personas cumplan años en fechas diferentes. De esta forma obtienes:

$$1 - P_3 = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = \frac{364 \cdot 363}{365^2}$$

Por lo tanto:

$$P_3 = 1 - \frac{364 \cdot 363}{365^2} = 0.82\%$$

Realiza el cálculo para $n = 4$. En este caso en la fiesta hay cuatro personas. Siguiendo el mismo método de razonamiento, obtendrás que:

$$|\Omega| = 365^4$$

Y, que:

$$1 - P_4 = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4} = \frac{364 \cdot 363 \cdot 362}{365^3}$$

Por lo tanto:

$$P_4 = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4} = 0.82\%$$

¡Como era de esperar, la probabilidad crece junto con el número de las personas en la fiesta!

Ya puedes comprobar si la estimación de Kolmogorov de 23 personas es correcta. Calcula la probabilidad de que, si en la fiesta hay 22 personas, dos de ellas coincidan en el día de su cumpleaños. En ese caso:

$$P_{22} = 1 - \frac{365!}{365^{22} \cdot (365 - 22)!} = 47.57\%$$

Ahora, calcula la probabilidad que, si en la fiesta hay 23 personas, dos de ellas coincidan en el día de su cumpleaños:

$$P_{23} = 1 - \frac{365!}{365^{23} \cdot (365 - 23)!} = 50.73\%$$

¡Kolmogorov tiene razón!

La cantidad necesaria de invitados para tener una probabilidad mayor a 50% de que dos de ellos cumplan años el mismo día, es menor de lo que comúnmente se piensa. ¡Hace falta tan solo 23 invitados!

—Como pueden ver —dijo Kolmogorov—, solo hacen falta 23 invitados para que dos de ellos coincidan en el día de su cumpleaños con una probabilidad mayor del 50%. ¡Ustedes acaban de comprender qué es un evento probable en contraste con un evento seguro!

Anota este interesante hecho:

La paradoja del cumpleaños se rebela contra la opinión de que lo probable y lo seguro sean opuestos. Sostiene que lo probable y lo seguro son inseparables, que no hay cómo comprender qué es lo probable sin contrastarlo con lo seguro, y viceversa. ¡El par probable-seguro es uno solo!

Muchas veces un evento que consideramos poco probable, e incluso imposible, resulta ser seguro. Así lo sostiene la leyenda judía de Rubén y Penina:

Cuando la reina de Saba estuvo en Jerusalén, el rey Salomón no se cansaba de hablarle de los prodigios de Dios. Un día, el rey Salomón estaba explicándole que Dios disponía los matrimonios en el Cielo, aunque le resultaba muy difícil hacer parejas.

—Me creo todo lo que me has contado sobre ese Dios tuyo, tan grande y maravilloso —le interrumpió la reina—, pero esto no lo entiendo. ¿Cómo es posible

que disponga matrimonios en el Cielo? Con tu permiso, me gustaría poner esta cuestión a prueba.

—De acuerdo —dijo Salomón—. ¿Cómo lo haremos?

—Te propongo que vayamos a dar una vuelta por las calles de Jerusalén, —dijo la reina—, donde yo elegiré una muchacha soltera que enviarás a una isla desierta. En cuanto llegue, deberá vivir prisionera en la copa de un gran árbol. Allí estará totalmente aislada. Pienso que esto puede constituir una forma justa de demostrar si tu Dios puede encontrarle pareja o no.

El rey Salomón accedió, y salieron juntos en busca de la muchacha adecuada. Las calles estaban abarrotadas de gente y tuvieron que abrirse paso a empujones entre la muchedumbre. Dejando atrás el bullicioso mercado, la reina divisó a una preciosa muchacha que estaba sacando agua de un pozo, y dijo:

—¡Aquella es la joven! ¡Quiero saber cómo se las va a arreglar tu Dios para encontrarle pareja allí!

La joven, que se llamaba Penina, se sintió profundamente turbada cuando reconoció al rey Salomón y a la reina de Saba. Sin embargo, sabía perfectamente que era inútil tratar de protestar y tomó inmediatamente la resolución de ponerle al mal tiempo buena cara.

Ellos llevaron a la infeliz muchacha a una lejana isla, completamente alejada del contacto humano. Allí había un bosque en el que crecía un árbol muy hermoso y muy viejo. Excavaron en su tronco un minúsculo recinto, en el que podría vivir, y le dejaron un telar y unos instrumentos musicales para que se distrajera. Penina llenó sus solitarios días, dedicándose a tejer una maravillosa tela, a cantar dulces canciones y a tocar los instrumentos. Como el rey Salomón conocía el lenguaje de los pájaros, le confió a un faisán mágico que la custodiara y le procurara todo lo que la muchacha necesitara.

En aquellos días cierto barco navegaba cerca de la isla. Mientras el capitán descansaba en su camarote, su hijo Rubén llevaba el timón. Al principio todo iba bien, pero se levantó una violenta tempestad, el viento hinchó las velas y las olas enfurecidas zarandearon al barco. Una enorme ola vino a estrellarse contra la cubierta, arrojando al agua a Rubén y a varios marineros. Por suerte, Rubén consiguió asirse en una tabla que flotaba por ahí cerca. Se agarró a ella desesperadamente, hasta que la marea lo arrastró hasta las costas de una isla, a muchas millas de la nave de su padre.

Cuando pasó el temporal, el capitán se quedó varios días surcando el mar en busca de sobrevivientes y, sobre todo, de su amado hijo. Al final, abandonó la búsqueda y siguió su camino.

La isla era pequeña. Un día, que Rubén iba en busca de comida, halló un gran árbol que sobresalía por encima de todos los demás. Al verlo, intentó encontrar la forma de trepar en él para coger sus frutos, cuando por encima de su cabeza vio que un faisán volaba en círculos con una cesta en el pico. El pájaro se posó sobre una rama y pasó cuidadosamente la cesta a través de una ventanita abierta en la corteza del árbol.

Rubén decidió averiguar quién estaba escondido en el árbol. Trepó hasta el ventanuco, y se quedó asombrado cuando descubrió a una preciosa joven que lo miraba.

Rubén la llamó. Penina se asustó al oír el sonido de una voz humana.

—¿Quién está ahí? —preguntó ella tímidamente.

—Caí al agua desde un barco durante un temporal y vine a parar a esta isla. Pero, ¿quién eres tú? —preguntó Rubén.

Entonces Penina le contó su triste historia; Rubén no podía dar crédito a sus oídos. Se instaló en una rama cerca de la ventana desde la cual los dos jóvenes podían verse. Estuvieron conversando toda la noche y, para entonces, ninguno de los dos dudaba del amor que se profesaban y de las muchas cosas que tenían en común.

Al día siguiente, cuando llegó el faisán con la ración de comida diaria para Penina, descubrió a Rubén junto a ella en el cuartito y voló a dar la noticia al rey Salomón. Este quedó encantado al oírlo. Ordenó al faisán que llevara suficiente comida para los dos jóvenes, y les envió los mejores manjares de la cocina real.

El amor de los dos jóvenes creció y decidieron casarse. Al cabo de un año, la pareja tuvo una preciosa niña.

Poco después de este feliz acontecimiento, iba a celebrarse la boda del hijo del rey Salomón y se enviaron invitaciones a las familias reales y a los notables del reino. Como era de suponerse, la reina de Saba también estaba invitada. El rey decidió aprovechar la ocasión para poner fin al solitario exilio de Penina y Rubén, y envió un barco para que los trajera a la boda real.

Fue, sin duda, la más feliz y alegre de las celebraciones.

En cuanto a la reina de Saba, fue testigo de que, a pesar de todos los obstáculos, Dios había reunido a Penina con el hombre con el que estaba destinada a casarse. Era la prueba de que todos los matrimonios se conciertan en el Cielo y la reina nunca volvió a dudar de la palabra del rey Salomón.

Aunque el evento de encontrar pareja para una criatura encerrada en una isla parece casi imposible, ¡Dios lo puede hacer! La probabilidad de ese evento es 1, porque Dios es la Totalidad de la Existencia y en la Totalidad no puede haber omisión. La Totalidad es completa y perfecta, ¿de qué probabilidad se puede hablar allí?

Y es lo que afirma la paradoja del cumpleaños:

No hay cómo comprender qué es lo probable sin contrastarlo con lo seguro, y no hay cómo comprender qué es lo seguro sin contrastarlo con lo probable. ¡El par probable-seguro es uno solo!

Todas las palabras son creadas en parejas. Por esta razón cada una se entiende únicamente en contraste con su compañera. Y ello significa que las parejas no son opuestas, sino complementarias, amigas, amantes.



23

Dios es la coincidencia de los opuestos

Una mañana Nicolás de Cusa exclamó:

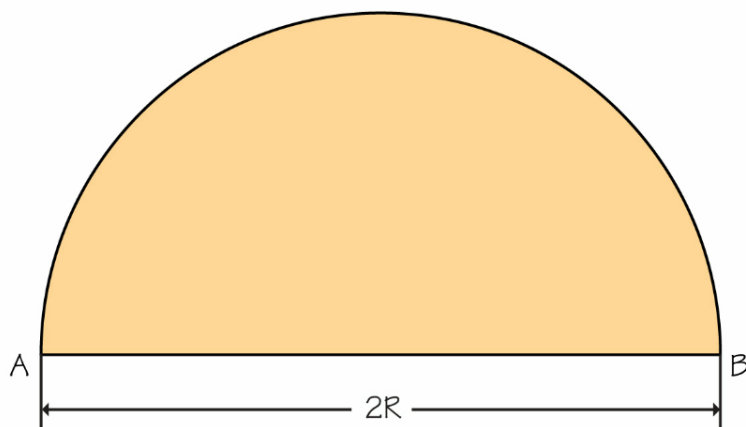
—Ahora comprendo: ¡Dios es la coincidencia de los opuestos! Los opuestos, que nosotros consideramos totalmente separados e irreconciliables, son para Él aspectos complementarios de una y la misma realidad.

Y reveló su descubrimiento al monje con quien vivía en la misma celda. Este le dijo:

—¡No puedo creerlo! ¿Todos los opuestos son lo mismo para Dios?

—Sí —replicó Nicolás de Cusa—. Y te puedo dar un ejemplo.
Ayúdame a realizarlo, por favor

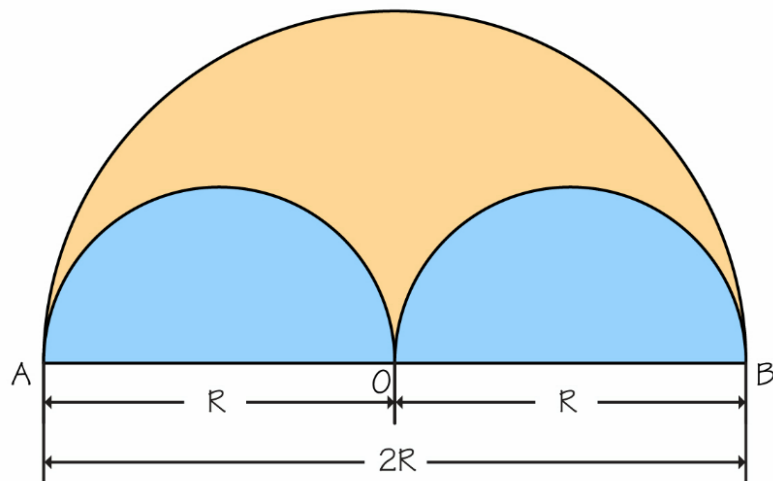
Nicolás de Cusa trazó un arco de radio R .



—Seguramente, estarás de acuerdo —dijo al compañero—, que esta semicircunferencia mide πR .

—Estoy totalmente de acuerdo —respondió el monje.

Nicolás de Cusa subdividió en dos partes iguales cada radio y, con el nuevo radio, trazó dos semicircunferencias pequeñas:

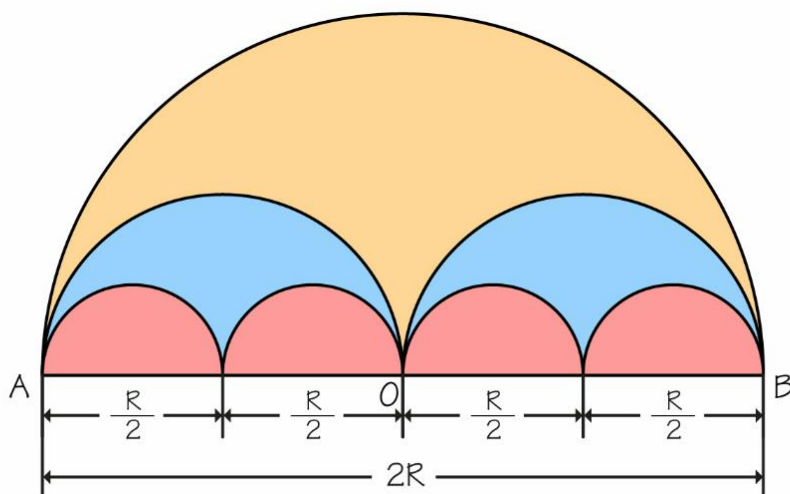


—¿Puedes ver que, las dos semicircunferencias pequeñas juntas, de nuevo miden πR ? —preguntó.

—¡Lo veo claramente! —exclamó el monje—. Porque cada una de ellas mide $\pi \frac{R}{2}$ y su suma mide πR :

$$\pi \frac{R}{2} + \pi \frac{R}{2} = \pi R$$

Nicolás de Cusa, una vez más, subdividió en dos partes iguales cada radio anterior, y con el nuevo radio trazó cuatro semicircunferencias pequeñas:



—¿Puedes ver que, juntas, las cuatro semicircunferencias pequeñas nuevamente miden πR —preguntó.

—¡Me cuesta creerlo, pero lo veo nítidamente! —exclamó el monje.— Cada una de las cuatro semicircunferencias mide $\pi \frac{R}{4}$, y su suma mide πR :

$$\pi \frac{R}{4} + \pi \frac{R}{4} + \pi \frac{R}{4} + \pi \frac{R}{4} = \pi R$$

—Es evidente —concluyó Nicolás de Cusa—, que puedo continuar indefinidamente el proceso de duplicar el número de semicircunferencias, al dividir sus diámetros para dos. Así obtendré una sucesión de curvas $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$, consistente de semicircunferencias, cuya suma de longitudes será siempre igual a la longitud de la semicircunferencia grande, es decir, a πR .

El monje estaba en silencio.

—¡Ya veo lo que ello significa! —exclamó de pronto—. Que, al final de cuentas, la curva límite estará constituida de circunferencias infinitamente pequeñas y no será posible distinguirla del segmento AB que es su diámetro. ¡Lo redondo se convirtió en lo recto!

—¡Así es! —asintió Nicolás de Cusa—. También el valor del número π se hizo igual a 2, pues la longitud de la semicircunferencia es πR y la longitud del diámetro es $2R$:

$$\pi R = 2R$$

Al dividir esta igualdad para R , obtenemos que:

$$\pi = 2$$

—¡Increíble! —exclamó el monje—. ¡En el infinito, lo curvo se convierte en lo recto, la semicircunferencia en el diámetro, y 3.14 en 2!

—Por eso te dije que Dios es la coincidencia de los opuestos —dijo Nicolás de Cusa—. Lo que a nosotros nos parece opuesto e irreconciliable, para Él, es lo mismo.

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de Nicolás de Cusa se rebela contra la opinión de que la semicircunferencia y el diámetro sean opuestos. Sostiene que la semicircunferencia y el diámetro son inseparables, que no hay un concepto de semicircunferencia y otro de diámetro, sino que el par semicircunferencia-diámetro es uno solo.

Lao Tse manifiesta la misma comprensión en el siguiente poema:

¿Hay diferencia entre el sí y el no?
¿Hay diferencia entre el bien y el mal?
¿Debo temer lo que los hombres temen? ¡Que desatino!
Tener y no tener nacen juntos,
Difícil y fácil se complementan,
Entre largo y corto hay contraste,
Alto y bajo uno a otro se apoyan,
El frente y el dorso se siguen.

¡Todo es creado en pares! Y ello significa que los pares no son opuestos, sino complementarios, amigos, amantes.

Los opuestos coinciden para aquel que comprendió, pues los opuestos coinciden para Dios.



24

El asno de Buridán

Juan Buridán, el insigne filósofo francés del siglo XIV, le dijo a un abogado que luchaba por la justicia:

—Dices que la justicia consiste en la igualdad de derechos. ¡Pero, la igualdad está muerta! Para actuar, necesitamos un poco de desigualdad, de preferencia. ¿Qué dirías de un asno que tuviese ante sí, y exactamente a la misma distancia, dos haces de heno idénticos? ¿Crees que manifestaría preferencia por uno más que por otro?

—¡No lo creo! —replicó el abogado—. Tal asno no tendría ningún motivo para escoger el haz de la izquierda antes que el haz de la derecha. ¡De no haber una preferencia, no puede haber elección!

—¡Exactamente! —dijo Buridán—. El asno del que estamos hablando no manifestaría ninguna preferencia y, por tanto, moriría de hambre. ¡Como dice el refrán, moriría de sed junto a la fuente! Así que la motivación es vital y la motivación solo se produce por las diferencias, es decir, por las desigualdades. ¿Por qué, pues, quieres luchar por eliminarlas?

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del asno de Buridán se rebela contra la opinión de que igual y desigual sean opuestos. Sostiene que igual y desigual son idénticos, que no hay igual, por un lado, y desigual, por otro; sino que el par igual-desigual es uno solo.

Tus preferencias te hacen vivo, pues te hacen desear actuar en la vida. ¡Sin deseos estarías muerto!

El cuento jasídico, *Caminando en la cuerda floja*, nos entrega el mismo mensaje. Cuenta que había dos amigos del rey y ambos fueron declarados culpables de un crimen. Como les amaba a ambos, el rey deseaba ser magnánimo con ellos, pero no podía absolverlos, pues ni siquiera la palabra de un rey puede contravenir la ley.

Entonces pronunció este veredicto:

Se extenderá una cuerda floja por encima de un profundo precipicio y, uno tras otro, los dos deberán cruzarlo. Al que llegue al otro lado, se le perdonará la vida.

Se hizo la voluntad del rey. El primero de los amigos alcanzó el otro lado.

El otro, aun parado en el mismo lugar, gritó al primero:

—Dime, amigo, ¿cómo lograste cruzar?

El primero le contestó:

—Solo sé una cosa: en cuanto sentía que me tambaleaba hacia un lado, me inclinaba hacia el lado opuesto.

La existencia es paradójica, la paradoja es su esencia misma. Se manifiesta a través de los opuestos, es un equilibrio de opuestos. Buridán tiene razón:

Igual y desigual son idénticos; el par igual-desigual es uno solo.

Y la paradoja del asno de Buridán te ayudó a comprenderlo.



25

El engañoso término medio

En una conversación, con un defensor de los métodos estadísticos de investigación, Martin Gardner ofreció el siguiente ejemplo:

La dirección de una empresa está a cargo de señor Artilugio, su hermano y seis parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica precisa un operario más.

El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto.

—Aquí pagamos muy bien —dice el señor Artilugio—. El salario medio es de 60000 pesetas semanales. Durante el período de formación solo cobrará usted 15000, pero pronto le subiremos el sueldo.

Al cabo de unos cuantos días, Félix quiso ver al jefe.

—¡Me ha engañado usted! He hablado con los otros operarios y ninguno gana más de 20000 pesetas a la semana. ¿Cómo puede ser de 60000 pesetas el salario medio?

—¡He aquí la nómina! —dice el señor Artilugio—. Yo gano 480000; mi hermano, 200000; mis seis parientes reciben 50000 cada uno; los cinco capataces, 40000, y los diez operarios, 20000 cada uno. El total semanal es de 1'380000 pesetas para 23 personas. ¿Me equivoco?

—No —dice Félix—, el salario medio, en efecto, es de 60000 pesetas, pues:

$$1'380000 \div 23 = 60000 \text{ pst.}$$

¡Pero, aun así, usted me ha engañado!

—Bueno, hubiera podido hablarle no de la *media*, sino de la *mediana*.

—¿Qué es eso?

—Es el salario que ocupa el lugar central en la nómina. Mire usted su descripción en miles de pesetas:

480 200 50 50 50 50 50 50 40 40 40
40 40 20 20 20 20 20 20 20 20 20

—¿Qué salario ocupa el lugar central? ¡El de 40000 pesetas!

—¿Y qué papel juegan aquí las 20000 pesetas?

—Eso se llama *moda*. Es el salario que está más de moda en la empresa. ¡Es el ganado por el máximo número de personas!

—Como puede ver —concluyó Martin Gardner—, los enunciados estadísticos pueden ser en extremo engañosos. La palabra *media* puede ser útil, pero cuando hay valores extremos muy dispares, como sucede con los elevados salarios de los jefes de una empresa, el *salario medio* puede crear una impresión falsa.

¡El término medio resulta ser ficticio! Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del término medio se rebela contra la opinión de que extremos y medios sean opuestos. Sostiene que extremos y medios son interdependientes, que no hay extremos por un lado y medios por otro, sino que el par extremos-medios es uno solo.

Nos contentamos con el término medio estadístico porque nos hace acuerdo de la Vía Media. Los sabios siempre nos aconsejan evitar los extremos y seguir la Vía Media. Y, al escuchar hablar del *término medio* estadístico, creemos que hemos alcanzado la *Vía Media*.

¿Qué es la Vía Media? Buda la descubrió de la siguiente manera:

Cuando Buda emprendió su búsqueda espiritual, se dedicó a practicar innumerables austeridades.

Un buen día acertaron a pasar dos músicos junto al árbol, bajo el que él estaba sentado en meditación. Uno de ellos le decía al otro:

—No tenses demasiado las cuerdas de tu cítara, o se romperán, y tampoco las dejes demasiado flojas, o no producirán música. ¡Procura dar con el término medio!

Aquellas palabras produjeron tal impacto en Buda que revolucionaron toda su manera de ver la espiritualidad. Estaba convencido de que habían sido pronunciadas para él y, desde aquel instante, renunció a todos sus rigores y emprendió un camino fácil y liviano: el de la moderación. Desde entonces su método de acceder a la iluminación se conoce con el nombre de *Vía Media*.

¡El engañoso término medio te puede ayudar a encontrarla!



26

Los puentes de Königsberg

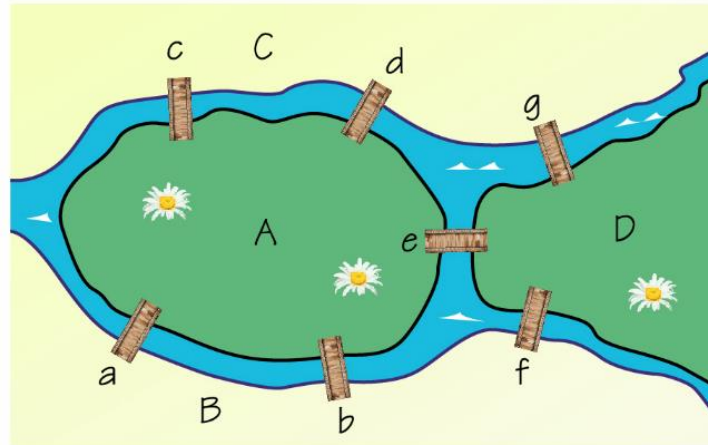
Leonhard Euler tenía trece hijos. Escribía a menudo sus artículos con un bebé en su regazo, mientras los niños mayores jugaban a su alrededor. Fue así como escribió el artículo sobre los puentes de Königsberg.

En la ciudad de Königsberg había, en el siglo XVIII, siete puentes que cruzaban el río Pregel. Unían entre sí dos islas, que había en el río, y a cada una de ellas con las orillas. Los pobladores de la ciudad venían entreteniéndose por largo tiempo con este problema:

¿Es posible recorrer los siete puentes con un paseo continuo, sin volver a recorrer dos veces el mismo puente?

Cuando este acertijo llamó su atención, Euler decidió resolver el problema de una vez por todas. Tomó a un niño y lo puso en su regazo; tomó un lápiz con la mano y se puso a escribir. Ayúdale en esta difícil tarea, por favor.

Euler empieza introduciendo una notación apropiada para el problema. Usará letras A, B, C y D para designar las cuatro porciones de tierra que están separadas, una de otra, por el río Pregel; y letras a, b, c, d, e, f y g, para los siete puentes que cruzan el río.

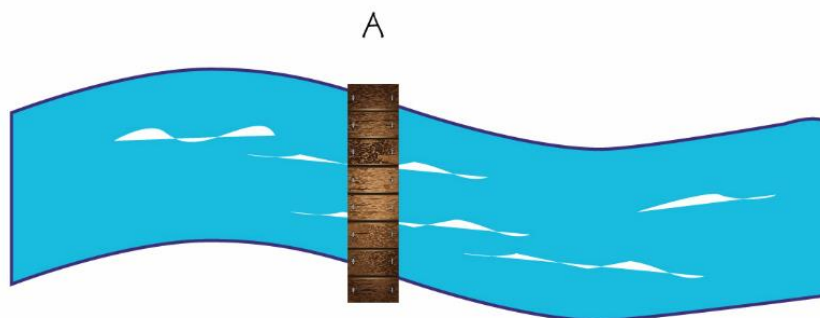


De este modo, Euler puede representar, como AB, al paso de la región A a la región B (realizado sea por el puente a o por el puente b); o como ABDC, el paso de la región A a la región B, luego a la región D, y luego a la región C, etc. Si el caminante cruza n puentes, la combinación correspondiente deberá contener $(n + 1)$ letras. Así, se necesitarán ocho letras para determinar el cruce sucesivo de 7 puentes.

Con esta notación, el problema queda reducido a determinar si, a partir de las cuatro letras, A, B, C y D, se puede formar una serie de ocho letras, en la que la combinación AB (o BA) aparezca 2 veces, puesto que hay 2 puentes entre las regiones A y B. Análogamente, la combinación AC (o CA) tendrá que aparecer 2 veces, puesto que hay 2 puentes entre las regiones A y C; mientras que las combinaciones AD, BD y CD tendrán que aparecer 1 sola vez.

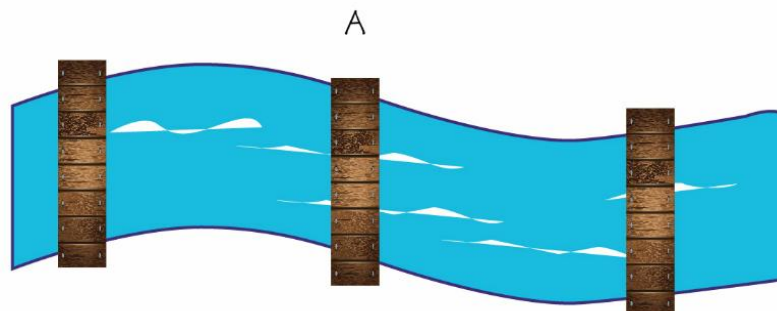
—Intentemos averiguar —dice Euler al niño—, si teóricamente es posible tal ordenación de letras.

A fin de encontrar la regla que gobierna la situación, Euler considera una única región A, a la que conduce un único puente.

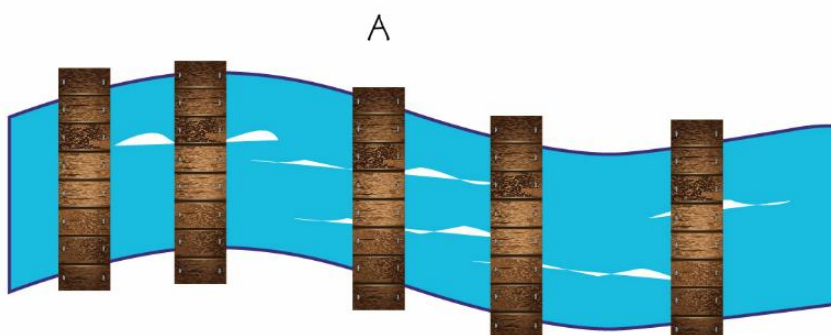


Si el caminante cruza este puente, ha de haber estado en A antes de cruzar, o ha alcanzado A después de cruzarlo (¡solo hay estas dos posibilidades!). Así que, según la notación introducida, la letra A aparecerá en la serie del cruce una sola vez.

Seguidamente, Euler considera la misma región A, a la que conducen tres puentes.



Si el caminante cruza los tres puentes, la letra A aparecerá en la expresión de este camino dos veces, ya sea que el camino comience en A o no.
 Ahora hay cinco puentes que conducen a la región A.



Si el caminante cruza los cinco puentes, la letra A aparecerá en la expresión del camino tres veces.
 Euler infiere la siguiente regla:

Regla de Euler

Si el número de puentes es impar, aumentamos ese número en una unidad y dividimos el resultado para 2. El cociente representará el número de veces que aparece la letra A en la descripción del camino.

—¡Volvamos ahora al problema de Königsberg! —exclama Euler.

- Puesto que hay cinco puentes que conducen a la isla A, en el paseo buscado, la letra A ha de aparecer 3 veces.
- Como hay tres puentes que conducen a la región B, la letra B ha de aparecer 2 veces.
- Dado que hay tres puentes que conducen a la región C, la letra C ha de aparecer 2 veces.
- Ya que hay tres puentes que conducen a la isla D, la letra D ha de aparecer 2 veces.

Es decir, concluye Euler:

- En el paseo requerido, la letra A, ha de aparecer 3 veces, y las letras B, C y D han de aparecer 2 veces cada una. ¡Es decir, el paseo constará de 9 letras!

—¡Pero eso es imposible! —comenta Euler al niño que juega en su regazo—. ¡Porque el paseo debe describirse por 8 letras, y hemos obtenido 9!

El bebé se muestra completamente de acuerdo con su padre. Anota la respuesta de Leonhard Euler:

No se puede realizar una travesía de los siete puentes de Königsberg, sin volver a recorrer dos veces el mismo puente.

Aunque algunos habitantes de Königsberg opinaban que algún día se encontraría una manera de realizar el paseo misterioso, Euler demostró que tal hazaña es imposible. Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de los siete puentes de Königsberg se rebela contra la opinión de que posible e imposible sean opuestos. Sostiene que posible e imposible son interdependientes, que no hay posible por un lado e imposible por otro, sino que el par posible-imposible es uno solo.

¿Qué es lo posible? ¿Y qué es lo imposible? Un incidente de la vida de Buda nos lo aclara de manera diáfana:

En cierta ocasión, Buda se vio amenazado de muerte por un bandido llamado Angulimal.

—Se bueno —le dijo Buda— y ayúdame a cumplir mi último deseo. ¡Corta una rama de ese árbol!

Con un golpe de su espada, el bandido hizo lo que pedía Buda.

—Y ahora, ¿qué? —le preguntó a continuación.

—Ponla de nuevo en su sitio —dijo Buda.

El bandido soltó una carcajada.

—¡Debes estar loco si piensas que alguien puede hacer semejante cosa!

—Al contrario —le dijo Buda—. Eres tú el loco al pensar que eres poderoso porque puedes herir y destruir. ¡Eso es cosa de niños! El poderoso es el que sabe crear y curar.

Euler y Buda tienen razón:

Posible e imposible son amantes, el par posible-imposible es uno solo.

Y los siete puentes de Königsberg te ayudaron a comprenderlo.



27

¿Cuánto espera esperar?

George Gamow y Mervin Stern eran dos físicos teóricos de la Universidad George Washington. Trabajaban en el mismo edificio de la universidad, el cual contaba con 8 pisos. Gamow tenía su despacho en la segunda planta, y Stern, en la sexta. Como eran amigos, era habitual que uno fuera a visitar al otro en su oficina, para lo cual tomaba el ascensor.

En sus frecuentes trayectos, Gamow apreció que, cuando llamaba al ascensor, la mayoría de las veces este venía de una planta superior; mientras que Stern se dio cuenta justo de lo contrario: que, al llamarlo a su planta, siempre venía de alguna inferior. Juntos, los dos amigos decidieron buscar una explicación de este extraño fenómeno. Ayúdales en esta difícil tarea, por favor.

Generalmente pensamos que la probabilidad de que, al llamar al ascensor, este venga de una planta superior o de una inferior es del 50%; decimos: o viene de arriba, o viene de abajo. Sin embargo, esto solo se cumple, de forma aproximada, en una planta intermedia; en el resto tiende a ocurrir justamente lo que atestiguaron Gamow y Stern.

Supón que estás junto con Stern, en la sexta planta de ese edificio de 8 pisos, y llamas al ascensor. Supón también que los ascensores se mueven de forma uniforme por todo el edificio (es decir, que no hay ningún motivo para que estén en una planta y no en otra). ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor venga de arriba?

Como te encuentras en el piso 6, y el edificio cuenta con 8 pisos, solo bajan los ascensores que se encuentran en los pisos 6, 7 y 8, mientras que suben los ascensores que se hallan en los pisos 1-5.

Entonces, la probabilidad con la que el ascensor venga de una planta superior es la siguiente:

$$P(\text{viene de arriba}) = \frac{3}{8} = 37.5\%$$

Ahora imagina que estás junto con Gamow, en la segunda planta del edificio. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor venga de abajo?

Como te encuentras en el piso 2, y el edificio cuenta con 8 pisos, solo suben los ascensores que se encuentran en los pisos 1 y 2, mientras que bajan los ascensores que se hallan en los pisos 3-7.

Entonces, la probabilidad con la que el ascensor venga de una planta inferior es la siguiente:

$$P(\text{viene de abajo}) = \frac{2}{8} = 25\%$$

Anota tu respuesta:

La probabilidad de que al estar en el sexto piso, el ascensor venga de arriba es de 37.5%, mientras que la probabilidad de que, estando en el segundo piso, el ascensor venga de abajo es de 25%.

Como puedes ver, en ambos casos la probabilidad es mucho menor que el 50%. Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja del ascensor se rebela contra la opinión de que esperar y no esperar sean opuestos. Sostiene que esperar y no esperar son interdependientes, que no hay esperar, por un lado, y no esperar, por otro; sino que el par esperar-no esperar es uno solo.

Cuando el ascensor no llega, te molestas, pues tienes que esperar. Pero, ¿por qué esperar? ¿Y cuánto esperas esperar? El cuento sufí, *El rey y el doctor*, afirma que no necesitas esperar ni un segundo, que puedes tenerlo todo aquí y ahora.

Él era un doctor, y el rey de cierto país le llamó para que tratase su enfermedad. El sabio doctor rehusó. Entonces el rey ordenó a los soldados que lo aprehendiesen y lo llevasen a su presencia.

Cuando estuvieron cara a cara, el rey dijo:

—Te he traído aquí, atado de pies y manos, para que me cures, porque sufro de una inexplicable parálisis. Si me curas, te recompensaré, si no, haré que te corten la cabeza.

El doctor dijo:

—Trasladémonos juntos a una habitación de la que todas las otras personas sean excluidas.

Cuando estuvieron solos, el sabio sacó un cuchillo y dijo:

—Ahora me tomaré la revancha por haberme tratado con tal violencia —y avanzó hacia el rey.

Aterrorizado y sin saber qué hacer, el rey saltó y comenzó a correr alrededor de la sala, olvidándose de la parálisis en su ansiedad por escapar del Sufí.

Mientras llamaba a los guardias, el sufí corrió hacia una ventana y escapó.

De este modo, el rey fue curado de su parálisis.

No necesitas esperar, te dice la paradoja del ascensor y el cuento sufí. ¡Ya has esperado más que suficiente!

Esperar y no esperar son amigos, el par esperar-no esperar es uno solo.

Puedes bajar de las alturas de tu ego y subir al cielo en un abrir y cerrar de ojos.



28

Patatas disecadas

El amigo de un empresario se quejaba de la pesada carga de su vida.

—Como tú bien sabes —le dijo el empresario—, en mi empresa producimos patatas fritas con formas geométricas para los niños. Para ello tenemos que reducir la cantidad de agua que hay en las patatas, del 99 al 98 por ciento. ¡Y el resultado es increíble!

—¿Qué tiene de increíble?

—Si tomas 100 kilos de patatas con 99% de agua, y la reduces al 98%, ¿qué cantidad de patatas crees que obtendrás?

—¡Es muy simple! —dijo el amigo—. Si en 100 kilos el agua constituía el 99%, en unos 98 kilos constituirá el 98%.

—¡Nada de eso! —exclamó el empresario—. De los 100 kilos de patatas solo quedarán 50 kilos.

Y, viendo el asombro de su amigo, le dio la siguiente explicación. Ayúdale a realizarla, por favor:

Llama x a la cantidad de agua que se debe eliminar de las patatas para reducir su humedad del 99% al 98%. Los 100 kilos de patatas contenían, al comienzo:

$$100 \cdot 0.99 = 99kg \text{ de agua y, al final, tan solo: } (100 - x) \cdot 0.98kg.$$

La cantidad de agua que perdieron las patatas es, entonces, la diferencia entre estas dos expresiones:

$$99 - (100 - x) \cdot 0.98 = x$$

¡Resuelve esta ecuación lineal!

Reordena los términos:

$$99 - 98 + 0.98x = x$$

Has obtenido que:

$$1 = 0.02x$$

Despeja la incógnita:

$$x = \frac{1}{0.02} = 50kg$$

Anota tu respuesta:

Si tomas 100 kilos de patatas, cuya cantidad de agua es de 99%, y la reduces al 98%, obtendrás solo 50 kilos de patatas. ¡El peso de las patatas se redujo a la mitad!

¡Increíble!, ¿no es así?

—¡Ya veo! —exclamó el amigo—. Pero ¿qué tiene que ver con las pesadas cargas que me aquejan?

—¿No te das cuenta? —dijo el empresario—. Si reduces tu preocupación por el mundo, tan solo en 1%, esa pesadez se reducirá a la mitad. ¡Diseca el mundo como yo diseco las patatas!

La pesada carga que llevas es el mundo. Incluso cuando las personas no están contigo, te preocupas por ellas. ¡Pero ellas ni siquiera se enteran de tu preocupación! Tratas de sostener el mundo de día y de noche y eso es lo que produce pesadez en tu vida. Eres como la mosca que cree que hace andar el carruaje porque se sienta sobre el timón o zumba en las orejas de los caballos.

El mundo se mueve por sí solo, no necesita que lo sostengas, el mundo se mueve por sí mismo. ¡Puedes dejarlo a un lado y ponerte a descansar cuando quieras!

Anota este sorprendente hallazgo:

La paradoja de las patatas disecadas se rebela contra la opinión de que pesado y liviano sean opuestos. Sostiene que pesado y liviano son idénticos, que no hay pesado por un lado y liviano por otro; sino que el par pesado-liviano es uno solo.

El cuento boliviano, *¡El mundo se va a caer!*, nos entrega el mismo mensaje:

El Conejo vio que estaba perdido. Se le venía el mundo encima; la peor desgracia que le podía ocurrir, la tenía a cuatro pasos. Allí, delante, estaba el Zorro, astuto y veloz. ¡El Conejo no tenía escapatoria!

Fue entonces cuando pensó que la única salida que le quedaba era engañarlo. Hasta ese momento, a ningún conejo se le había ocurrido nunca burlar a un zorro. Parecía algo imposible.

“Si no me ocurre algo muy pronto, me va a comer”, pensó.

Junto al Conejo había una piedra. ¡Si al menos pudiera ocultarse tras ella! Pero ya era tarde, porque el Zorro lo había visto.

La piedra era tan alta que parecía una pared. El Conejo se acercó a ella y empezó a empujar, como si estuviera aguantándola para que no se cayera.

Vio al Zorro más cerca y empezó a gritar:

—Zorro, Zorro, ayúdame, ¡que se va a caer el mundo!

El Zorro se acercó. Lo tenía a su lado, lo oía respirar, veía sus dientes afilados... ¡Hubiera sido un suicidio escapar! Por eso insistió, como si estuviera muy apurado:

—¡Ayúdame a aguantar la piedra, que se va a caer el mundo!

El Zorro puso sus manos delanteras en la piedra y empujó fuertemente. ¡No quería que se le cayera el mundo encima! Entonces el Conejo aprovechó para escapar.

—¡Si sueltas la piedra, te va a caer el mundo encima y te va a aplastar! —le gritó ya desde lejos.

El Zorro aún está aguantando la piedra, para que el mundo no le caiga encima.

¿Qué significa liberarse de la carga del mundo? Solo comprender que no necesitas sostener el mundo, pues este se mueve por sí solo. Y es lo que afirman las patatas disecadas y este cuento de astucia:

Pesado y liviano son idénticos, el par pesado-liviano es uno solo.

¡Las paradojas nos revelan los secretos de la vida!



29

El misterioso número 9

Para explicar a sus alumnos, el criterio de Al-Khwarizmi de divisibilidad para 9, un profesor de matemáticas les dijo:

—El número 9 está escondido en el natalicio de cada persona.

Y sintió un aire de desconfianza en el aula.

—¡Podemos comprobarlo ahora mismo! —afirmó—. Quiero que cada uno de ustedes escriba la fecha de su nacimiento como un solo número. Por ejemplo, si nació el 22 de febrero del año 1967, escríbalo como 2221967.

Todos lo hicieron.

—Ahora, reordenamos las cifras y formamos con ellas otro número distinto, cualquiera que más nos guste. Por ejemplo, 1292627. En seguida restamos el número menor del mayor. En nuestro, ejemplo se produce:

$$2221967 - 1292627 = 929340$$

Cada estudiante hizo lo propio con su fecha de nacimiento.

—Sumemos todas las cifras de la diferencia —siguió diciendo el profesor—. En nuestro ejemplo se obtiene:

$$9 + 2 + 9 + 3 + 4 + 0 = 27$$

—Y también sumemos las cifras de esta suma —siguió indicando—. En nuestro ejemplo obtenemos:

$$2 + 7 = 9$$

Todos los hicieron.

—¿Qué obtuvo cada uno de ustedes? —preguntó a la clase.

—¡El número 9! —exclamaron todos a coro.

—Tal y cómo les dije: ¡el número 9 está escondido en el natalicio de cada uno de nosotros! —concluyó el profesor.

Como los jóvenes le pidieron que les aclarara este misterio, les ofreció la siguiente explicación. Ayúdale a realizarla, por favor

El matemático árabe Al-Khwarizmi había descubierto el siguiente criterio de divisibilidad para el número 9:

Teorema de Al-Khwarizmi

Un número es divisible para 9 si y solamente si la suma de sus cifras se divide para 9.

¿Cómo lo demostrarías?

Imagina que tienes un número n que posee a centenas, b decenas y c unidades:

$$n = 100a + 10b + c$$

Representalo de este modo:

$$n = (99 + 1)a + (9 + 1)b + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$

Los términos $99a$ y $9b$ siempre se dividen para 9, sin importar los valores de a y b . Entonces, el número n se divide para 9 siempre y cuando el término $(a + b + c)$ se divida para 9. ¡Pero este término representa a la suma de las cifras del número n ! De este modo, el criterio de Al-Khwarizmi demostró ser válido.

¡Ya puedes demostrar que, si haces las operaciones que ha indicado el profesor, siempre obtendrás el número 9! En efecto, digamos que tu fecha de nacimiento es:

$$n = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Y el número desordenado es

$$n' = 100000b + 10000d + 1000f + 100e + 10a + c$$

Entonces, al realizar la resta, se producirá:

$$n - n' = (100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f) - (100000b + 10000d + 1000f + 100e + 10a + c)$$

Puedes presentar esta resta de la siguiente manera:

$$n - n' = 100000(a - b) + 10000(b - d) + 100(d - e) + 10(e - a) + (f - c)$$

Y también, así:

$$\begin{aligned}
 n - n' &= (99999 + 1)(a - b) + (9999 + 1)(b - d) \\
 &\quad + (999 + 1)(c - f) + (99 + 1)(d - e) \\
 &\quad + (9 + 1)(e - a) + (f - c)
 \end{aligned}$$

Reordena los términos de este modo:

$$\begin{aligned}
 n - n' &= 99999(a - b) + 9999(b - d) + 999(c - f) + 99(d - e) + \\
 &\quad 9(e - a) + (f - c) + (a - b) + (b - d) + (c - f) + (d - e) + (e - a)
 \end{aligned}$$

Como puedes observar, los últimos términos se cancelan entre sí. Queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 n - n' &= 99999(a - b) + 9999(b - d) + 999(c - f) + 99(d - e) + \\
 &\quad 9(e - a) + (f - c) + (a - b) + (b - d) + (c - f) + (d - e) + (e - a)
 \end{aligned}$$

Extrae el factor común 9:

$$\begin{aligned}
 n - n' &= 9[11111(a - b) + 1111(b - d) + 111(c - f) + 11(d - e) + \\
 &\quad (e - a)]
 \end{aligned}$$

Como puedes ver, ¡se obtuvo un número divisible para 9! Según el criterio de Al-Khwarizmi, eso quiere decir que la suma de las cifras de la diferencia entre n y n' también se divide para 9. Si sigues sumando las cifras de los nuevos números, en algún momento llegarás al número 9. ¿Por qué? Porque 9 es el menor número positivo divisible para 9 y las sumas de las cifras producen números cada vez más pequeños.

¡El número 9, en efecto, está escondido en el natalicio de cada persona! Aunque dos individuos tengan *diferentes* fechas de nacimiento, el número 9 está presente en ambas, así que, en ese sentido, las dos fechas son *iguales*. Anota este increíble descubrimiento:

La paradoja del número 9 se rebela contra la opinión de que igual y diferente sean opuestos. Sostiene que igual y diferente son amigos, que no hay igual por un lado y diferente por otro; sino que el par igual-diferente es uno solo.

—Para volver a Dios, tenemos que atravesar *nueve* puertas —solía decir Al-Khwarizmi—. Dios se esconde dentro de nosotros detrás de *nueve* puertas. ¡El número *nueve* es sagrado!

¡Pero, si no entiendes su mensaje, el número 9 puede causarte problemas! En la India lo llaman *círculo vicioso del 99*.

Cuenta la historia que un barbero pobre era muy feliz, como solo puede serlo a veces la gente pobre. No tenía nada de qué preocuparse.

Era el barbero del rey, solía masajearle, arreglarle el cabello, servirle cada día. Incluso el rey le tenía envidia y siempre le preguntaba:

—¿Cuál es el secreto de tu felicidad? Siempre estás rebosante de alegría. No pareces caminar sobre la tierra, pareces estar volando. ¿Cuál es tu secreto?

El barbero dijo:

—No lo sé. En realidad, nunca antes había oído esa palabra, secreto. ¿Qué quieres decir? Simplemente soy feliz. Me gano el pan y luego me retiro. Eso es todo.

Entonces el rey preguntó a su primer ministro, que era un hombre de conocimiento:

—Tú debes saber el secreto de este barbero. Yo soy un gran rey y no soy tan feliz, pero ese hombre tan pobre, sin tener nada, es muy feliz.

El primer ministro dijo:

—No sabe nada acerca del círculo vicioso del 99.

El rey dijo:

—¿Qué es eso?

El ministro se rio y replicó:

—Haremos una cosa. Esta noche arrojaremos una bolsa con 99 rupias al interior de su casa.

Al día siguiente el barbero estaba en el infierno, no pudo dormir en toda la noche. Contó las rupias de la bolsa una y otra vez: noventa y nueve. Estaba excitado, el corazón le palpitaba, la sangre circulaba, se revolvía en la cama y no podía dormir. Se levantaba una y otra vez, tocaba las rupias de oro, las contaba de nuevo. El número 99 era el problema, porque, cuando tienes 99, quieres que sean 100.

¡La mente tiene que completar las cosas! La mente es perfeccionista. ¿Noventa y nueve? ¡Tienen que ser cien!

Así que el barbero pasó toda la noche planeando qué hacer al día siguiente para conseguir una rupia. ¡Una rupia de oro era algo difícil de conseguir! Solo consiguió algunos centavos de rupia, que en aquellos días eran suficientes. Una rupia de oro significaba casi un mes de trabajo.

Decidió comer pasando un día; comer un día y ayunar otro. Estaba triste. Al día siguiente llegó triste y preocupado, ya no volaba en el cielo, estaba muy sobre la tierra. Un gran lastre, como una piedra, colgaba de su cuello.

El rey le preguntó:

—¿Qué te pasa? Pareces muy preocupado.

El barbero no dijo nada, porque no quería hablar de la bolsa.

Pero cada día la situación empeoraba más y más. No podía dar bien los masajes, porque no tenía energía a causa del ayuno. El rey preguntó de nuevo:

—Ahora no tienes nada de energía y pareces muy triste y desgraciado. ¿Qué ha sucedido? Dímelo, puedo ayudarte.

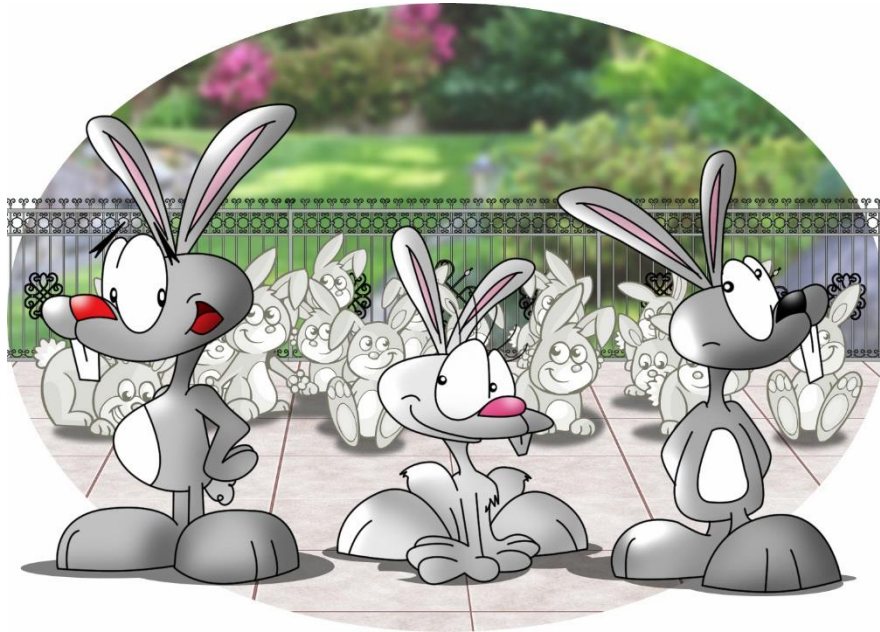
El barbero dijo:

—Ahora soy una víctima del círculo vicioso del 99.

Para volver a ser feliz, el barbero solo tiene que comprender que no hay diferencia entre 99 y 100. (¡Recuerda la paradoja del hombre calvo de Eubúlides!). Anótalo:

El par igual-diferente es uno solo.

¡Y el misterioso número 9 te ayudó a comprenderlo!



30

Conejos y baldosas

En una reunión de matemáticas recreativas, con sus amigos, Martin Gardner les contó la historia del patio del califa Al-Mansur.

El califa llegó a enterarse de que solo viviría hasta la edad que indicaba el número de baldosas en su patio. Estas resultaron ser 64, pues el patio tenía la forma de un cuadrado perfecto, de 8 baldosas por 8, y el califa ya contaba con 63 años.

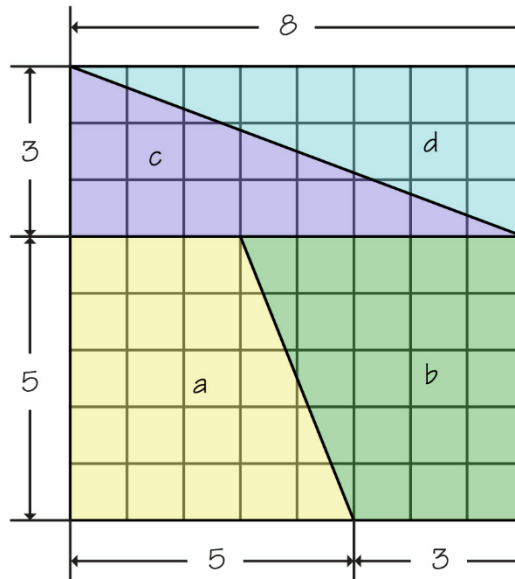
—¡Significa que este es el último año de mi vida! —exclamó con tristeza.

Y ofreció dar una valiosísima recompensa al que embaldosara el patio de nuevo, sin aumentar ni disminuir el número de baldosas, pero logrando que la superficie del patio se hiciera más grande.

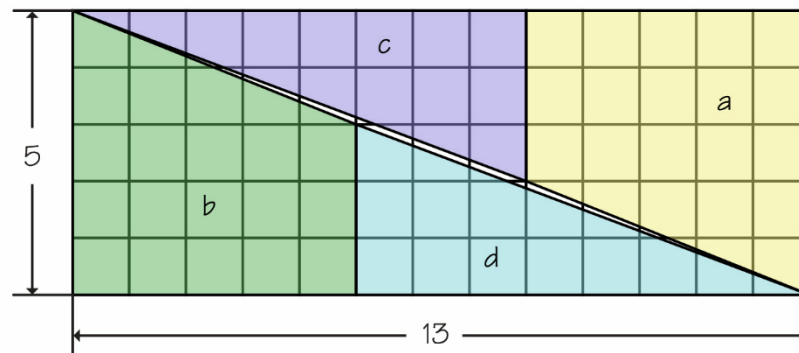
A la mañana siguiente, un persa, que llegó al palacio, dijo:

—Yo puedo hacer lo que desea el califa.

Y lo realizó del siguiente modo: con dos líneas rectas dividió el patio en cuatro partes, dos trapecios, iguales entre sí, y dos triángulos, también iguales.



Conforme a sus instrucciones, los esclavos colocaron las partes de este modo:



El patio adquirió la forma de un rectángulo, cuya longitud medía 13 brazas y el ancho, 5. El área del patio era ahora de... ¡ $13 \times 5 = 65$ baldosas! ¡Gracias a la inventiva del persa, el califa tenía la posibilidad de vivir no 64, sino 65 años!

—¡Viviré un año más! —suspiró el califa con alivio.

Pero en el dibujo puedes apreciar que no tuvo lugar una transformación real, porque entre las dos diagonales hay un espacio vacío, cuya extensión es exactamente de una baldosa.

—Les hago la siguiente pregunta— dijo Martin Gardner a los amigos—, ¿qué otra medida podría tener el patio del califa Al-Mansur? ¿O la medida de 8 por 8 es la única posible para aumentar en una baldosa el tamaño del patio?

Los amigos se pusieron a pensar. Ayúdales en esta difícil tarea, por favor.

Como puedes ver, en la transformación del cuadrado, de 8 por 8, en un rectángulo, de 5 por 13, intervienen tres números: 5, 8 y 13. ¿Te recuerdan algo? Por supuesto: ¡la sucesión de Fibonacci! Su definición es la siguiente:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Es decir, la sucesión empieza con dos unidades, y cada término siguiente se obtiene sumando los dos precedentes:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Como puedes observar, los números 5, 8 y 13 son términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci. ¿Crees que sea casual que cumplan con la siguiente propiedad:

$$8^2 = 5 \cdot 13 - 1$$

¿O esta propiedad satisfacen todos los términos de la sucesión de Fibonacci? Considera las siguientes triplas de números de Fibonacci:

$$1^2 = 1 \cdot 2 - 1$$

$$2^2 = 1 \cdot 3 + 1$$

$$3^2 = 2 \cdot 5 - 1$$

$$5^2 = 3 \cdot 8 + 1$$

$$8^2 = 5 \cdot 13 - 1$$

$$13^2 = 8 \cdot 21 + 1$$

$$21^2 = 13 \cdot 34 - 1, \text{ etc.}$$

Martin Gardner te sugiere que demuestres que, para los términos de la sucesión de Fibonacci, siempre se cumple la siguiente propiedad:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1$$

¡Manos a la obra!

Hazlo por inducción. Como verificaste arriba, la base de la inducción se cumple. Ahora, supón que has demostrado la hipótesis inductiva:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1$$

Necesitas demostrar que:

$$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} \pm 1$$

Presenta el producto de la parte derecha de este modo:

$$F_n \cdot F_{n+2} = F_n \cdot (F_n + F_{n+1}) = F_n^2 + F_n \cdot F_{n+1}$$

Al usar la hipótesis inductiva, puedes escribirlo así:

$$F_n \cdot F_{n+2} = (F_n \cdot F_{n+1} \pm 1) + F_n \cdot F_{n+1} = F_{n+1} \cdot (F_{n+1} + F_n) \pm 1$$

Por la definición de la sucesión de Fibonacci, puedes asegurar que:

$$F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1} \cdot F_{n+1} \pm 1$$

Es decir,

$$F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1}^2 \pm 1$$

Luego de trasponer los términos, obtienes lo que querías demostrar:

$$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} \pm 1$$

Anota tu descubrimiento:

Teorema

Para todos los términos de la sucesión de Fibonacci se cumple la siguiente propiedad:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1$$

Como pudiste apreciar, en esta fórmula los signos *más* y *menos* se van alternando. En otras palabras:

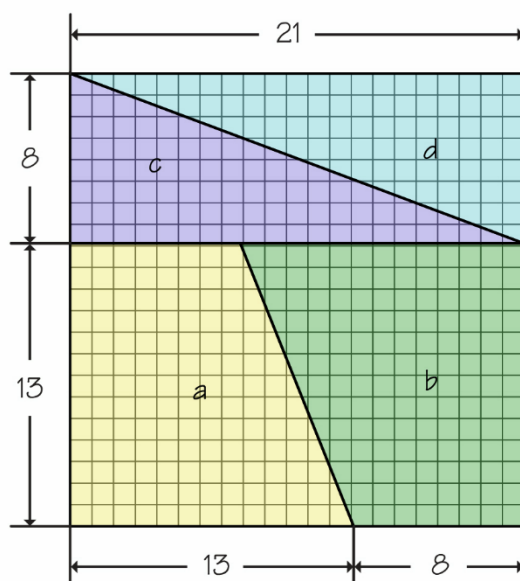
Todo número de Fibonacci, que ocupa un lugar impar en la sucesión tiene un cuadrado, que es una unidad mayor que el producto de los términos de lugar par, adyacentes a él. Y todo número de Fibonacci, situado en un lugar par de la sucesión, tiene un cuadrado una unidad menor que el producto de los términos de lugar impar que lo escoltan.

Al saber esto, es fácil predecir si el rectángulo, asociado a un cuadrado dado, ganará o perderá una unidad de superficie.

Así, si el patio del califa medía 13 por 13 baldosas, el truco del persa no hubiera surtido efecto, pues:

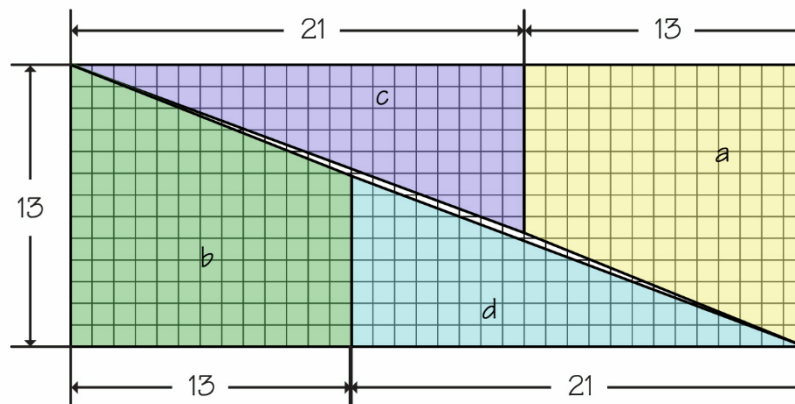
$$13^2 = 8 \cdot 21 + 1$$

¡El califa hubiera perdido un año de vida! En cambio, si el patio del califa hubiera medido 21 por 21 baldosas, el truco hubiera surtido un efecto positivo para el sultán.



¿Por qué? Porque:

$$21^2 = 441 = 13 \cdot 34 - 1 = 442 - 1$$



¡El califa hubiera ganado un año de vida! Y puedes proseguir con otras medidas del patio de la misma manera.

¿No te parece extraño que la sucesión de Fibonacci, que fue descubierta al describir la reproducción de conejos, sirva para aumentar los años de vida de una persona? ¡La sucesión de Fibonacci describe por igual a la reproducción de conejos y a la transformación de baldosas!

¿Son diferentes las baldosas a los conejos? Parecen diferentes, pero se describen por los mismos números de Fibonacci; así que, en algún sentido profundo, deben ser iguales. Anota este sorprendente descubrimiento:

La paradoja de la sucesión de Fibonacci se rebela contra la opinión de que baldosas y conejos sean diferentes. Sostiene que baldosas y conejos son amigos, que no hay ninguna separación entre ellos. Baldosas pueden convertirse en conejos y conejos pueden convertirse en baldosas.

¡Las cosas no se mantienen estáticas, se transforman unas en otras! Este también es el mensaje de esta historia hindú:

El Gurú Nanak llegó a una aldea. Allí vivía un hombre que conocía a Nanak. Vino un día a entrevistarse con él y luego siguió acudiendo regularmente para prestarle sus servicios.

Uno de sus vecinos le preguntó:

—Hermano, ¿a dónde vas tan regularmente?, ¿a qué cita acudes con tanta exactitud?

El discípulo replicó:

—Ha llegado a la ciudad un hombre santo y voy a verle todos los días.

—Me gustaría verle también, —le dijo aquel.

Así, pues, empezaron a ir juntos, hasta que un día, por el camino, el vecino conoció a una esclava del amor. Y a partir de entonces ambos salían juntos, pero uno iba a la casa de prostitución y el otro a servir a su Gurú.

Un día el vecino le dijo al discípulo:

—Hermano, yo voy a hacer algo malo y tú vas a hacer servicio. Al ponerse el sol nos encontraremos y veremos lo que ha ocurrido en nuestras vidas.

Este partió en busca de la mujer, pero no la encontró en la casa. Se fue entonces a dar un paseo y se sentó en un lugar solitario. Enfrascado en sus descarriados pensamientos, comenzó a cavar con su alfanje en el terreno. ¡Y he aquí que topó con una moneda de oro! Siguió cavando y encontró un ánfora llana de trozos de carbón.

El discípulo, después de haber besado los pies de su Gurú, se dispuso a partir. Al salir pisó un pincho que le atravesó el pie. Vendándose la herida, que sangraba abundantemente, con un jirón de su túnica; regresó a casa cojeando.

Su vecino, al verle, le inquirió por lo ocurrido. Este le contó lo sucedido y aquél replicó:

—En el mismo día, yo he encontrado una moneda de oro, y tú te has herido el pie. Debemos preguntar cómo es posible esto, pues tú vas a hacer servicio a tu Gurú y yo a pecar.

Ambos acudieron a casa de Nanak y le contaron lo acaecido, pidiéndole explicación a tal extraño destino.

El Gurú Nanak les rogó que guardaran silencio y dijo al vecino:

—El ánfora llena de carbón estaba antes repleta de monedas de oro. Tú habías dado en tu vida anterior una moneda de oro a un santo y como premio te esperaba el ánfora llena de monedas. Pero, como tu vida había sido conducida por caminos de maldad, las monedas de oro se tornaron en trozos de carbón.

Luego se dirigió al discípulo:

—En el destino de tu amigo una horca estaba escrita y en el tuyo también; pero, como me habías hecho servicio, se redujo a una pequeña herida.

¡El oro se transformó en carbón, la horca se transformó en una pequeña herida! Las cosas no se mantienen estáticas, se transforman unas en otras. La sucesión de Fibonacci tiene razón:

¡Baldosas y conejos son intercambiables! No hay ninguna separación entre ellos. Baldosas pueden convertirse en conejos y conejos pueden convertirse en baldosas.

Tal y cómo lo dice Heráclito: ¡este mundo es una eterna transformación!

Epílogo

Las paradojas nos ayudan a recordar la unidad que existe entre los opuestos.

Generalmente creemos que se puede separar y aislar entre sí los opuestos, y que así debe hacerse. Pero, como nos lo muestran todas las paradojas, hacer eso es como intentar separar los dos extremos de una banda de goma. Lo único que se puede lograr es que la banda se rompa violentamente.

Familiarizándonos con las paradojas que se han descubierto a lo largo del desarrollo de la Matemática, podemos empezar a comprender por qué, en las tradiciones místicas del mundo entero, se llama “liberado” a aquél que ha abandonado la ilusión de los opuestos. En su búsqueda de paz, ese hombre ya no manipula uno contra otro, a los opuestos; sino que los trasciende a ambos.

Para el hombre liberado ya no hay bien y mal; hay más allá del bien y del mal. No hay verdad contra falsedad; hay la Conciencia que las trasciende a ambas. No hay vida contra muerte; hay un centro de aprehensión de ambas, que las incluye a ambas.

Para un hombre así, la cuestión no es separar los opuestos para lograr un progreso hacia lo positivo, sino más bien unificar y armonizar los opuestos, tanto positivos como negativos, descubriendo un fundamento que les sostenga a ambos. Ese fundamento es, precisamente, la Conciencia de la unidad de todos los opuestos.

La liberación no consiste, entonces, en liberarse de lo negativo, como comúnmente suponemos; sino en liberarse totalmente de los pares de opuestos. Este liberarse de los pares es el descubrimiento del Reino de los Cielos aquí en la Tierra. El Cielo no es un estado en que se dan todos los extremos positivos sin ningún negativo, sino un estado de entendimiento de las no-oposiciones, o de la no-dualidad.

El libro religioso hindú *Bhagavad Gita* lo expresa maravillosamente:

*Contento con tener lo que por sí solo llega,
Más allá de los pares, liberado de envidia,
Sin apego al éxito ni al fracaso,
Aun cuando actúe, no se encadena.
Hay que reconocer como eternamente libre
A quien no abomina ni anhela;
Porque quien se ha liberado de los pares,
Fácilmente se libera del conflicto.*

Como dice Ken Wilber:

*Cuando se comprende que los opuestos son uno, la discordia se
disuelve en concordia, las batallas se convierten en danzas, los antiguos
enemigos se revelan amantes.*

¡Y las paradojas matemáticas nos invitan a descubrirlo!

Bibliografía

Aleksandrov, K. et al (1981). La Matemática: su contenido, métodos y significado. Editorial Alianza S.A Madrid España.

Apostol, Tom (1961). Calculus Vol 1. Blaidell PublishingCompany. New York, USA.

Boyer, Carl (1968). A History of Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, Inc 1964.

De Mello, Anthony (1997). La oración de la rana 2. Editorial Sal Terrae, Bogotá, 1997.

Howard Eves (1964). An introduction of a History of Mathematics. Holt, Rinehart and Winston

Idries, Shah (1978). Aprender a aprender. Ediciones Paidos Ibérica S.A, Barcelona.

Idries, Shah (1982). El buscador de la verdad. Ediciones Kaidós, Barcelona.

Jaskowski, S. (1934). On the Rules of Suypposition in Formal Logic. Studia Logica N1, Varsovia.

Kneale, William (1972). El desarrollo de la Lógica. Ediorial Tecnos S.A, Madrid.

Morris, Kline (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial. S.A, Madrid.

Morris, Kline (1974). Matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume. S.A, Madrid.

Osho (2007). La Geometría de la Conciencia. Enseñanzas místicas de Pitágoras. Editorial Edaf, SL. Madrid.

Ramanujan, S. (2000). Modular Equations and Aproximations to pi. Quarter Journal of Mathematics.

Rey, Pastor y Babini, J. (1951). Historia de la Matemática. Espassa-Calpe S.A Buenos Aires.

Ribnikov, K. (1974). Historia de las Matemáticas. Editorial Mir, Moscú.

Rumi, Yalal Al-Din (1989). 50 cuentos sufíes. Ediciones Paidos Ibérica S.A Barcelona.



El sello editorial de la Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y la Academia – CEDIA, nace con la finalidad de aportar a la creación y publicación de resultados, investigaciones y procesos académicos, que fomenten el desarrollo de la ciencia y promuevan la innovación a nivel nacional e internacional.

1ª edición

ISBN: 978-9942-7178-0-1



9 789942 717801

**TREINTA
PARADOJAS
MATEMÁTICAS
UNIVERSALES**

cedia

