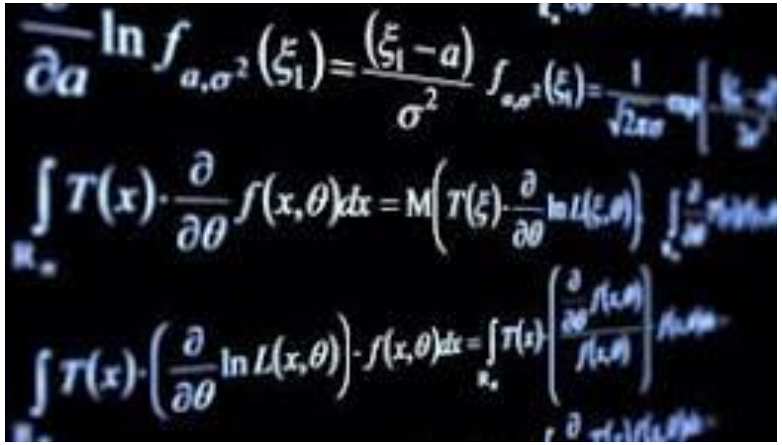
Economía Matemática

Tercer semestre

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado son fundamentales en matemáticas y física, y se definen como ecuaciones que involucran una función desconocida y(x), su derivada y'(x) y posiblemente la variable independiente x.



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado con coeficiente variable y término variable son una generalización importante de las ecuaciones diferenciales estándar.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

CONCEPTOS.

Ecuación diferencial: Es una ecuación que involucra una función desconocida y(x), su primera derivada y’(x), la variable independiente x, y posiblemente funciones de x y y.

Primer orden y grado: Indica que la ecuación involucra solo la primera derivada de la función desconocida y que el grado más alto de derivación es 1.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

CONCEPTOS.

Coeficiente variable: Los coeficientes que multiplican a y’(x) pueden ser funciones de x.

Término variable: Los términos de la ecuación pueden depender tanto de x como de y.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

CARACTERÍSTICAS:

Forma general: Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma F(x,y,y’)=0, donde F es una función que involucra x, y, y’.

Solución general: La solución de una ecuación diferencial de primer orden incluye una constante arbitraria que debe determinarse a partir de condiciones iniciales específicas.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

CARACTERÍSTICAS:

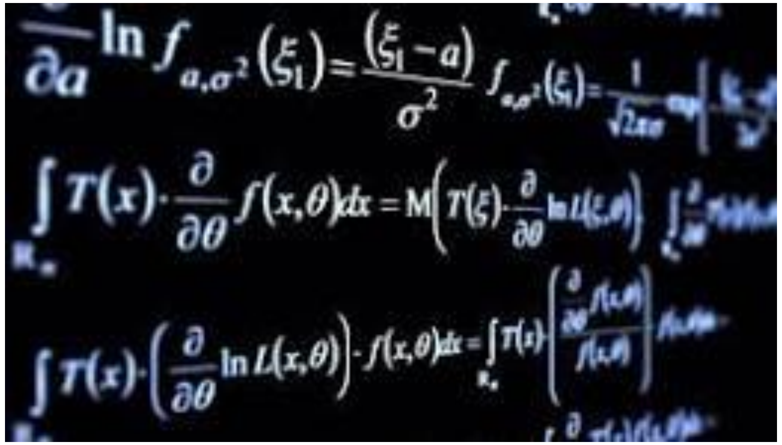
Solución general: La solución puede ser más compleja que en el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y términos constantes, y puede requerir métodos especiales como la integración exacta, factores integrantes específicos, métodos numéricos o aproximaciones.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	$orden\ 2\ por\ \frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	$orden\ 3\ por\ y'''$
$(x + y)dx = (y - x)dy$	$orden\ 1\ por$ "dx" y "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	$orden\ 2\ por\ y''$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	$orden\ 4\ por$ "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Modelado físico: Muchos fenómenos en física, biología, economía y otras disciplinas se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales de primer orden.

Fundamental en análisis matemático: Son la base para comprender ecuaciones más complejas y sistemas dinámicos.



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

IMPORTANCIA.

Modelado de fenómenos reales: Muchos fenómenos físicos, biológicos y económicos involucran coeficientes y términos variables. Estas ecuaciones permiten modelar de manera más precisa situaciones donde las condiciones varían con respecto al tiempo o al espacio.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	*orden 2 por* $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	*orden 3 por* y'''
$(x + y)dx = (y - x)dy$	*orden 1 por* "dx" *y* "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	*orden 2 por* y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	*orden 4 por* "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

IMPORTANCIA.

Aplicaciones prácticas: En ingeniería y ciencias aplicadas, es común encontrarse con situaciones donde las propiedades del sistema varían con el tiempo o la posición, por lo que es crucial poder manejar ecuaciones diferenciales con coeficientes y términos variables**.**

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	*orden 2 por* $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\,3x$	*orden 3 por* y'''
$(x+y)dx = (y-x)dy$	*orden 1 por "dx" y "dy"*
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	*orden 2 por* y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	*orden 4 por* "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

EJEMPLOS.

Ejemplo con coeficiente variable:

(x2+y) y’ = y

Esta ecuación tiene un coeficiente variable $x^2 + y$

Puede resolverse separando las variables y luego integrando

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	*orden 2 por* $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	*orden 3 por* y'''
$(x + y)dx = (y - x)dy$	*orden 1 por* "dx" *y* "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	*orden 2 por* y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	*orden 4 por* "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

EJEMPLOS.

Ejemplo con término variable.

Aquí, el término

$$y' = \frac{x^2}{1+y^2}$$

es variable debido a la presencia de y en el denominador. Esta ecuación puede ser resuelta utilizando técnicas de integración o análisis paramétrico

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	*orden 2 por* $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	*orden 3 por* y'''
$(x+y)dx = (y-x)dy$	*orden 1 por* "dx" *y* "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	*orden 2 por* y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	*orden 4 por* "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

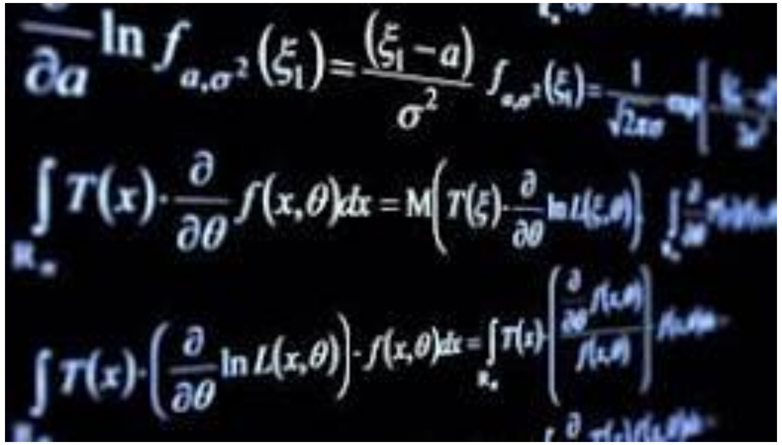
ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ejemplo lineal:

y'+2xy=0 Esta ecuación diferencial se puede resolver utilizando el factor integrante.

Esta ecuación diferencial se puede resolver utilizando el factor integrante. La solución general es:

$y(x) = Ce^{-x^2}$, donde C es una constante.

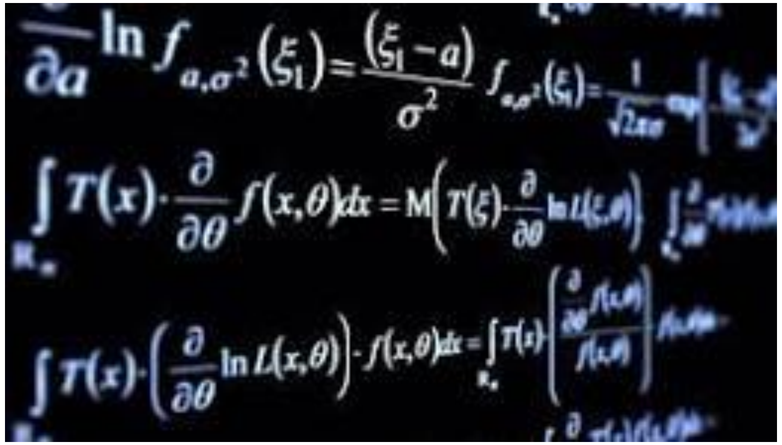


ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ejemplo no lineal:

y’=x2+y2

Esta ecuación no se puede resolver de manera directa como la anterior, pero se puede estudiar su comportamiento gráfico y encontrar soluciones aproximadas o numéricas.



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

En resumen, las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado con coeficiente variable y término variable son herramientas fundamentales en el modelado matemático y científico, permitiendo representar una amplia gama de fenómenos que no pueden ser descritos por ecuaciones con coeficientes y términos constantes.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	*orden 2 por* $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	*orden 3 por* y'''
$(x + y)dx = (y - x)dy$	*orden 1 por* "dx" *y* "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	*orden 2 por* y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	*orden 4 por* "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS-

1. **Ejemplo 1: Ecuación separable**

   $\frac{dy}{dx} = 2x$

   Resolución:

   Esta ecuación es separable, lo que significa que se puede escribir de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, donde $f(x) = 2x$ y $g(y) = 1$.

   Integrando ambos lados:
   $\int dy = \int 2x\, dx$
   $y = x^2 + C$

   Donde C es una constante de integración. Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS-

2. **Ejemplo 2: Ecuación lineal**

$$y' + 3y = 6x$$

Resolución:

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La forma estándar es $y' + p(x)y = q(x)$, donde $p(x) = 3$ y $q(x) = 6x$.

Para resolverla, utilizamos el factor integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{3x}$:

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS-

Multiplicamos toda la ecuación por e^{3x}:

$e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 6xe^{3x}$

La parte izquierda se puede escribir como la derivada de $e^{3x}y$:

$\frac{d}{dx}(e^{3x}y) = 6xe^{3x}$

Integrando ambos lados:

$e^{3x}y = \int 6xe^{3x}\,dx$

$e^{3x}y = 2xe^{3x} + C$

Dividiendo por e^{3x}:

$y = 2x + Ce^{-3x}$

Donde C es una constante de integració