



# **Economía Matemática**

Tercer semestre

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado son fundamentales en matemáticas y física, y se definen como ecuaciones que involucran una función desconocida  $y(x)$ , su derivada  $y'(x)$  y posiblemente la variable independiente  $x$ .

The image shows handwritten mathematical formulas on a chalkboard. The top line is the derivative of the log-likelihood function for a normal distribution:  $\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \xi_1 - a \right) f_{a, \sigma^2}(\xi_1)$ . The middle line is the Fisher information formula:  $\int_{x_*} \tau(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left( \tau(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$ . The bottom line is another form of the Fisher information formula:  $\int \tau(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int \tau(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta) dx$ .

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado con coeficiente variable y término variable son una generalización importante de las ecuaciones diferenciales estándar.



# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## CONCEPTOS.

**Ecuación diferencial:** Es una ecuación que involucra una función desconocida  $y(x)$ , su primera derivada  $y'(x)$ , la variable independiente  $x$ , y posiblemente funciones de  $x$  y  $y$ .

**Primer orden y grado:** Indica que la ecuación involucra solo la primera derivada de la función desconocida y que el grado más alto de derivación es 1.



The image shows a chalkboard with several mathematical expressions written in white chalk on a black background. The formulas include:  
-  $y' = p(x) - q(y)$   
-  $y = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = p(x) - q(y)$   
-  $\frac{dy}{q(y)} = p(x) dx$   
-  $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x) dx$   
-  $\int x dx$   
-  $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2}$   
-  $\int \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$   
-  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## CONCEPTOS.

**Coeficiente variable:** Los coeficientes que multiplican a  $y'(x)$  pueden ser funciones de  $x$ .

**Término variable:** Los términos de la ecuación pueden depender tanto de  $x$  como de  $y$ .



# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## CARACTERÍSTICAS:

**Forma general:** Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma  $F(x,y,y')=0$ , donde  $F$  es una función que involucra  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ .

**Solución general:** La solución de una ecuación diferencial de primer orden incluye una constante arbitraria que debe determinarse a partir de condiciones iniciales específicas.



# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

## Coeficiente variable y término variable.

### CARACTERÍSTICAS:

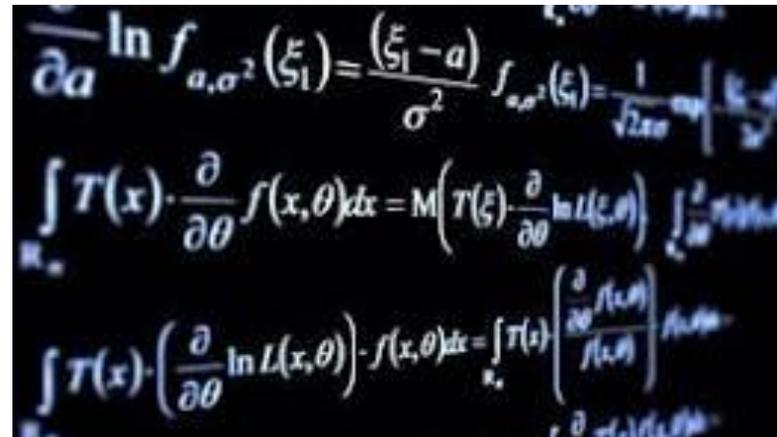
**Solución general:** La solución puede ser más compleja que en el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y términos constantes, y puede requerir métodos especiales como la integración exacta, factores integrantes específicos, métodos numéricos o aproximaciones.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	orden 2 por $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	orden 3 por $y'''$
$(x + y)dx = (y - x)dy$	orden 1 por "dx" y "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	orden 2 por $y''$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	orden 4 por " $\frac{d^4y}{dx^4}$ "

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

**Modelado físico:** Muchos fenómenos en física, biología, economía y otras disciplinas se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales de primer orden.

**Fundamental en análisis matemático:** Son la base para comprender ecuaciones más complejas y sistemas dinámicos.



The image shows a chalkboard with several mathematical formulas written in white chalk. The formulas are related to probability density functions and their derivatives. The top line shows the derivative of the natural logarithm of a normal distribution's PDF with respect to the mean parameter  $a$ . The middle line shows the expectation value of the derivative of the PDF with respect to the parameter  $\theta$ . The bottom line shows the expectation value of the derivative of the log-likelihood function with respect to the parameter  $\theta$ .

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \xi_1 - a \right) f_{a, \sigma^2}(\xi_1)$$
$$\int_{x_*}^{\infty} T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left( T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta) dx$$

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## IMPORTANCIA.

**Modelado de fenómenos reales:**  
Muchos fenómenos físicos, biológicos y económicos involucran coeficientes y términos variables. Estas ecuaciones permiten modelar de manera más precisa situaciones donde las condiciones varían con respecto al tiempo o al espacio.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	<i>orden 2 por <math>\frac{d^2y}{dx^2}</math></i>
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	<i>orden 3 por <math>y'''</math></i>
$(x + y)dx = (y - x)dy$	<i>orden 1 por "dx" y "dy"</i>
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	<i>orden 2 por <math>y''</math></i>
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	<i>orden 4 por "<math>\frac{d^4y}{dx^4}</math>"</i>

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

## Coeficiente variable y término variable.

### IMPORTANCIA.

**Aplicaciones prácticas:** En ingeniería y ciencias aplicadas, es común encontrarse con situaciones donde las propiedades del sistema varían con el tiempo o la posición, por lo que es crucial poder manejar ecuaciones diferenciales con coeficientes y términos variables.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	<i>orden 2 por <math>\frac{d^2y}{dx^2}</math></i>
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	<i>orden 3 por <math>y'''</math></i>
$(x + y)dx = (y - x)dy$	<i>orden 1 por "dx" y "dy"</i>
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	<i>orden 2 por <math>y''</math></i>
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	<i>orden 4 por "<math>\frac{d^4y}{dx^4}</math>"</i>

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## EJEMPLOS.

**Ejemplo con coeficiente variable:**

$$(x^2+y) y' = y$$

Esta ecuación tiene un coeficiente variable  $x^2 + y$

Puede resolverse separando las variables y luego integrando

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	orden 2 por $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	orden 3 por $y'''$
$(x + y)dx = (y - x)dy$	orden 1 por "dx" y "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	orden 2 por $y''$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	orden 4 por $\frac{d^4y}{dx^4}$

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

## EJEMPLOS.

### Ejemplo con término variable.

Aquí, el término

$$y' = \frac{x^2}{1+y^2}$$

es variable debido a la presencia de  $y$  en el denominador. Esta ecuación puede ser resuelta utilizando técnicas de integración o análisis paramétrico

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	orden 2 por $\frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	orden 3 por $y'''$
$(x + y)dx = (y - x)dy$	orden 1 por "dx" y "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	orden 2 por $y''$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	orden 4 por " $\frac{d^4y}{dx^4}$ "

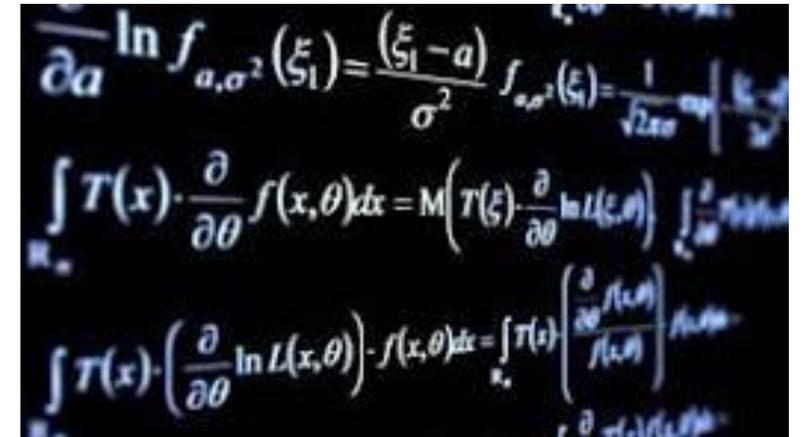
# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

## Ejemplo lineal:

$y'+2xy=0$  Esta ecuación diferencial se puede resolver utilizando el factor integrante.

Esta ecuación diferencial se puede resolver utilizando el factor integrante. La solución general es:

$$y(x) = Ce^{-x^2}, \text{ donde } C \text{ es una constante.}$$



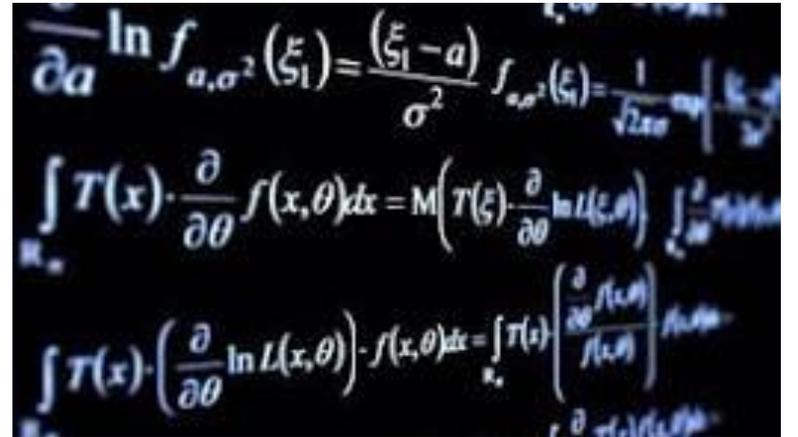
The image shows a chalkboard with several mathematical formulas written in white chalk. The formulas are related to the calculus of variations and the method of Lagrange multipliers. The top formula is  $\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \frac{\xi_1 - a}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{(\xi_1 - a)^2}{2\sigma^2}}$ . The middle formula is  $\int_{x_*} T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left( T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$ . The bottom formula is  $\int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta) dx$ .

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

**Ejemplo no lineal:**

$$y' = x^2 + y^2$$

Esta ecuación no se puede resolver de manera directa como la anterior, pero se puede estudiar su comportamiento gráfico y encontrar soluciones aproximadas o numéricas.


$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ \frac{\xi_1 - a}{\sigma^2} \right] e^{-\frac{(\xi_1 - a)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\int_{x_*}^x T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left( T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right) \int_{x_*}^x f(x, \theta) dx$$
$$\int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta) dx$$

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. Coeficiente variable y término variable.

En resumen, las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado con coeficiente variable y término variable son herramientas fundamentales en el modelado matemático y científico, permitiendo representar una amplia gama de fenómenos que no pueden ser descritos por ecuaciones con coeficientes y términos constantes.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$	<i>orden 2 por <math>\frac{d^2y}{dx^2}</math></i>
$y''' + y'' + y' + y = \text{sen } 3x$	<i>orden 3 por <math>y'''</math></i>
$(x + y)dx = (y - x)dy$	<i>orden 1 por "dx" y "dy"</i>
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	<i>orden 2 por <math>y''</math></i>
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	<i>orden 4 por "<math>\frac{d^4y}{dx^4}</math>"</i>

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS–

## 1. Ejemplo 1: Ecuación separable

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Resolución:

Esta ecuación es separable, lo que significa que se puede escribir de la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , donde  $f(x) = 2x$  y  $g(y) = 1$ .

Integrando ambos lados:

$$\int dy = \int 2x dx$$

$$y = x^2 + C$$

Donde  $C$  es una constante de integración.  Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS-

## 2. Ejemplo 2: Ecuación lineal

$$y' + 3y = 6x$$

**Resolución:**

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La forma estándar es  $y' + p(x)y = q(x)$ , donde  $p(x) = 3$  y  $q(x) = 6x$ .

Para resolverla, utilizamos el factor integrante  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{3x}$ .

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN –EJEMPLOS-

Multiplicamos toda la ecuación por  $e^{3x}$ :

$$e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 6xe^{3x}$$

La parte izquierda se puede escribir como la derivada de  $e^{3x}y$ :

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}y) = 6xe^{3x}$$

Integrando ambos lados:

$$e^{3x}y = \int 6xe^{3x} dx$$

$$e^{3x}y = 2xe^{3x} + C$$

Dividiendo por  $e^{3x}$ :

$$y = 2x + Ce^{-3x}$$

Donde  $C$  es una constante de integración ↓