

UNIDAD IV

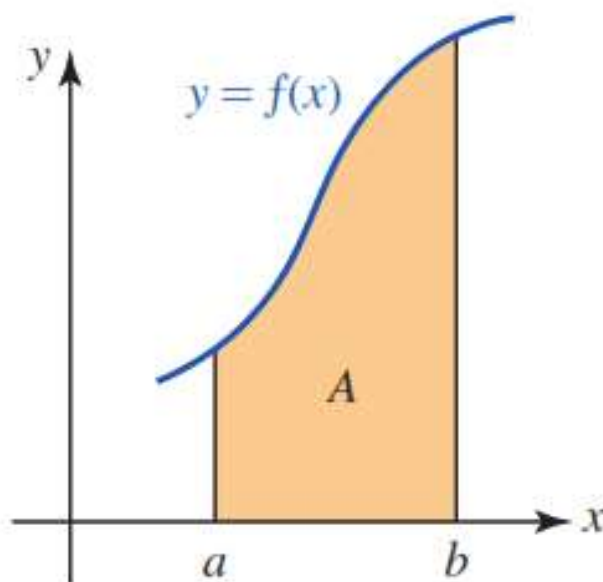
INTEGRALES DEFINIDAS

315

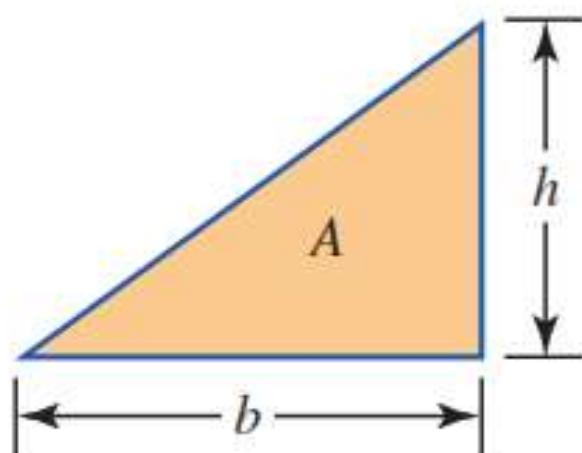
El problema del área → ... Integral Definida

Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

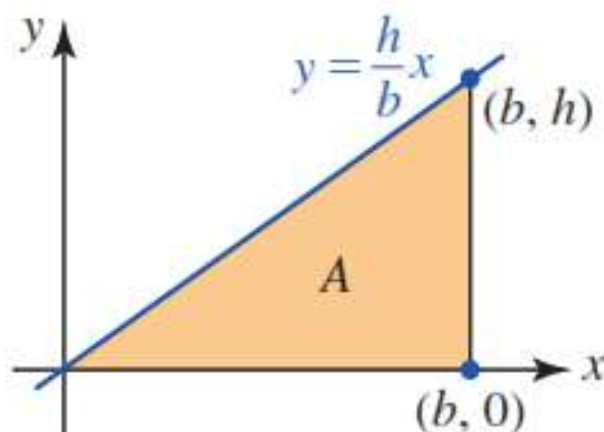
El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x .



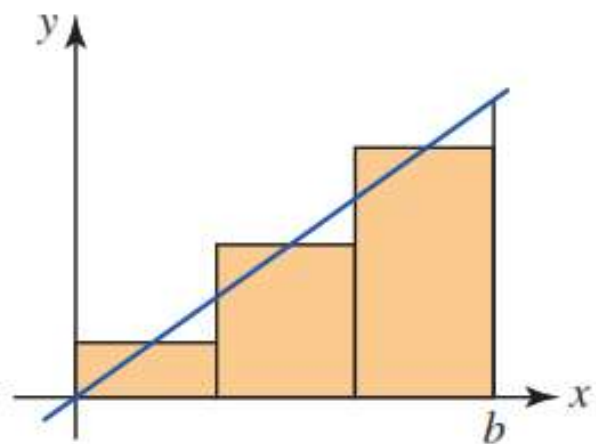
■ **Área de un triángulo** Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 5.3.2a). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 5.3.2b), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.



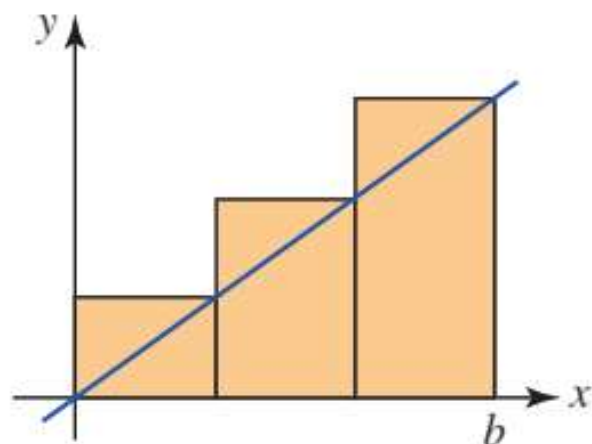
a) Triángulo rectángulo



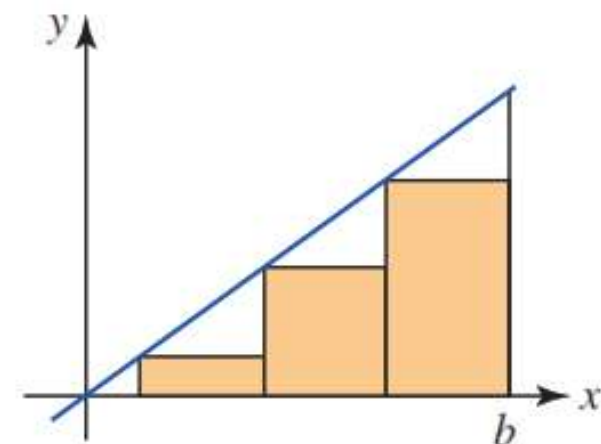
b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas



a)



b)



c)

FIGURA 5.3.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos

Al usar rectángulos, la **FIGURA 5.3.3** indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A . Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 5.3.3b). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^* , entonces

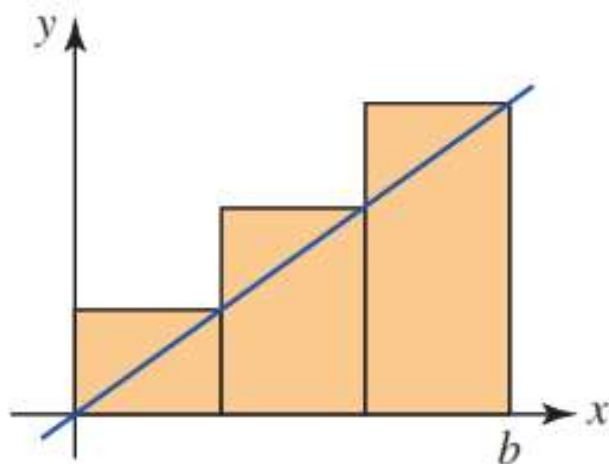
$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$

$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$x_3^* = 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.$$

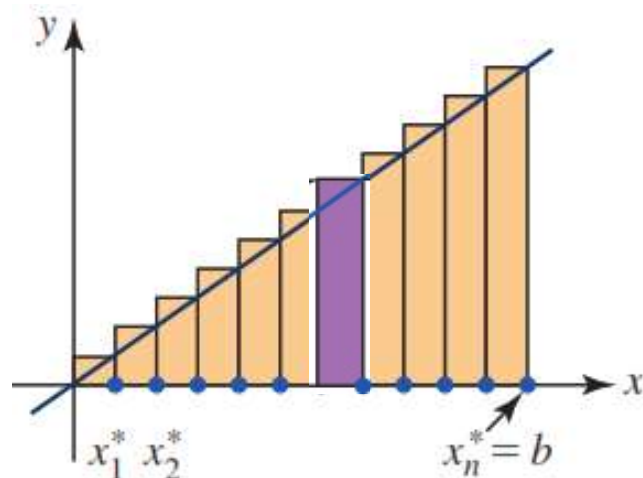


Como se muestra en la FIGURA 5.3.4a), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* $\times$ *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 5.3.4b). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A . Escribimos

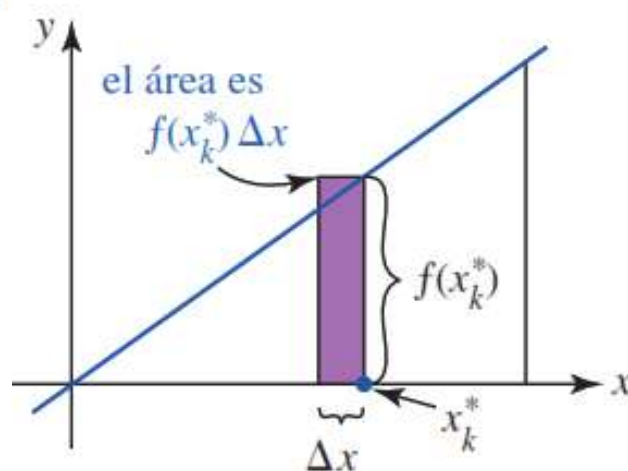
$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x. \quad (4)$$



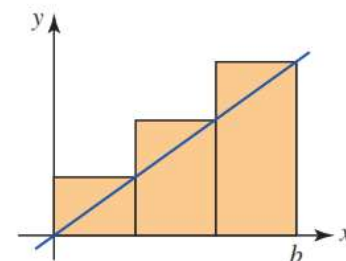
a) n rectángulos



b) Área de un rectángulo general

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos ($n \rightarrow \infty$) de anchos decrecientes ($\Delta x \rightarrow 0$). Luego,

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x. \quad f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$



de modo que con ayuda de la fórmula de suma *ii*) del teorema 5.3.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{n} \cdot k \right) \frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{bh}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right). \quad (5)$$

Finalmente, al hacer $n \rightarrow \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

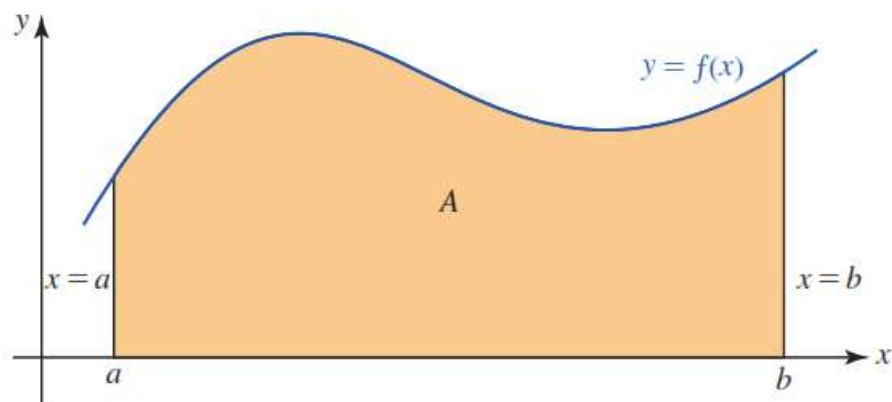
$$A = \frac{1}{2} bh \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} bh.$$

- La suma de las áreas de los n rectángulos

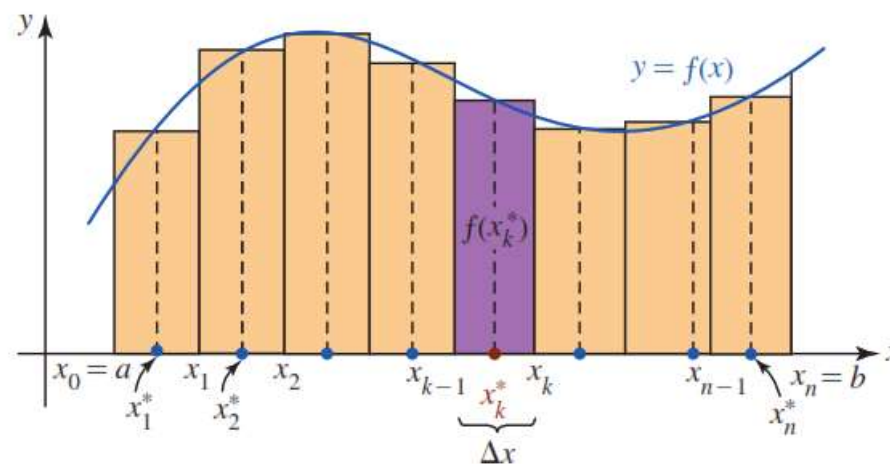
$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x = f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + f(x_3^*) \Delta x + \cdots + f(x_n^*) \Delta x,$$

representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.



a) Área A bajo la gráfica



b) n rectángulos

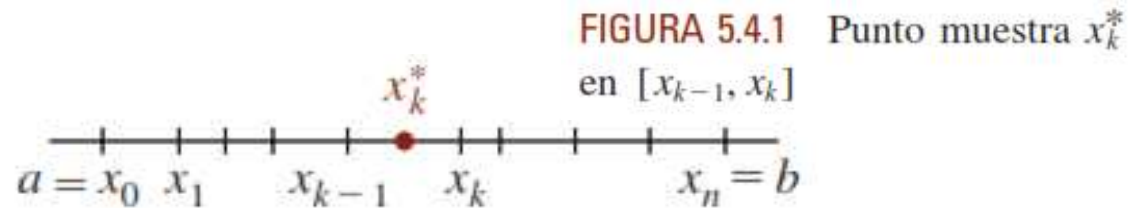
Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x. \quad (6)$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \rightarrow \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

Integral Definida



■ **Introducción** En la sección previa vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1)$$

La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P .

- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P .
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 5.4.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad \text{Sumas de Riemann} \quad (2)$$

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 5.3, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que “área bajo una gráfica” se refiere *al área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x* . Como se muestra en la FIGURA 5.4.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, donde $f(x_k^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x .

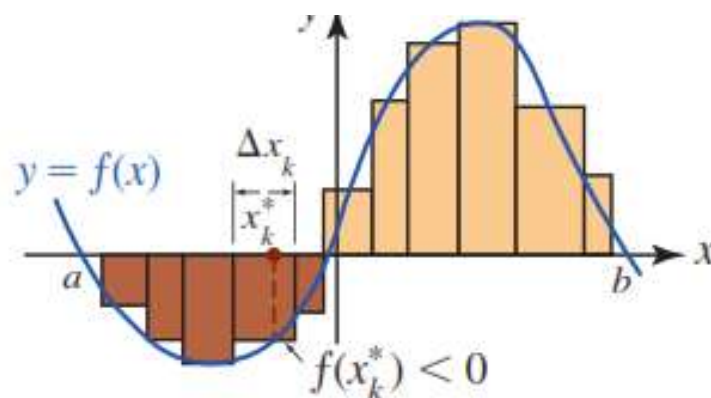


FIGURA 5.4.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b** , que se denota por $\int_a^b f(x) dx$, se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (4)$$

← **Sumas de Riemann**

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \rightarrow 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \rightarrow \infty$).

■ **Integrabilidad** En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (6)$$

■ **Propiedades de la integral definida** A continuación se analizarán algunas propiedades importantes de la integral definida que se definió en (4).

Las dos siguientes definiciones son útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

Definición 5.4.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f , entonces

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0. \quad (7)$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

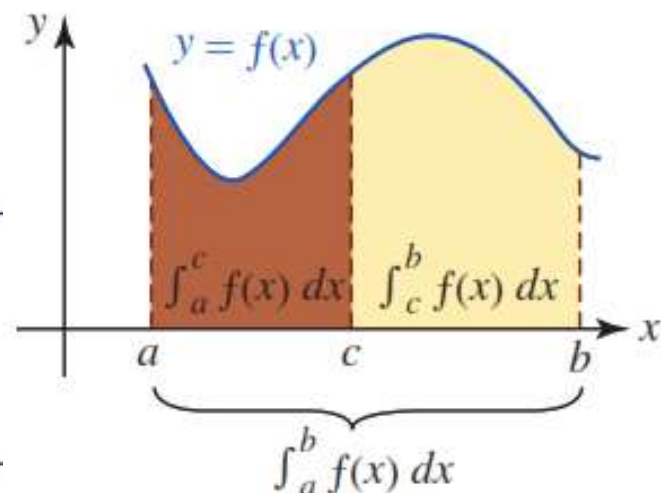
$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx. \quad (8)$$

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$i) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ donde } k \text{ es cualquier constante}$$

$$ii) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

**Teorema 5.4.5** Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a , b y c , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (10)$$

Teorema 5.4.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k ,

$$\int_a^b k \, dx = k \int_a^b dx = k(b - a).$$

Si $k > 0$, entonces el teorema 5.4.6 implica que $\int_a^b k \, dx$ es simplemente el área de un rectángulo de ancho $b - a$ y altura k . Vea la FIGURA 5.4.10.

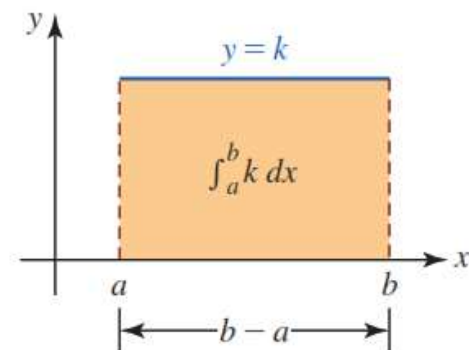


FIGURA 5.4.10 Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b - a)$

EJEMPLO 9 Integral definida de una constante

Por el teorema 5.4.6,

$$\int_2^8 5 \, dx = 5 \int_2^8 dx = 5(8 - 2) = 30.$$

Teorema 5.4.7 Propiedades de comparación

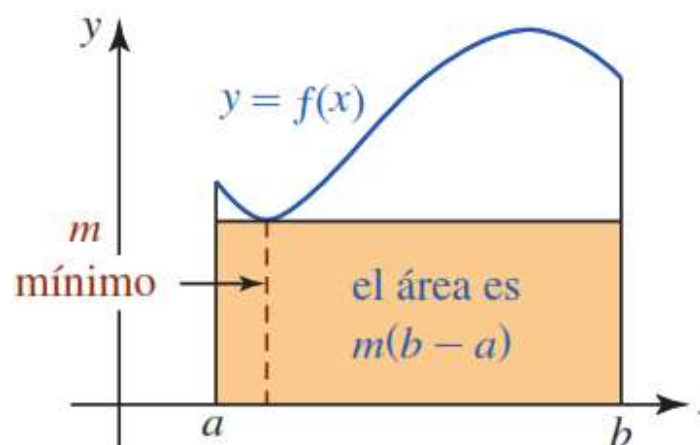
Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

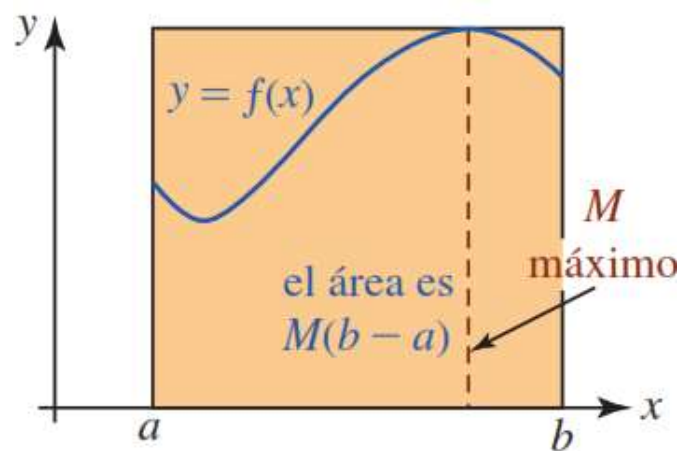
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$



a)



b)

■ **Área neta con signo** Debido a que la función f en la FIGURA 5.4.12 asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 5.4.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx. \quad (14)$$

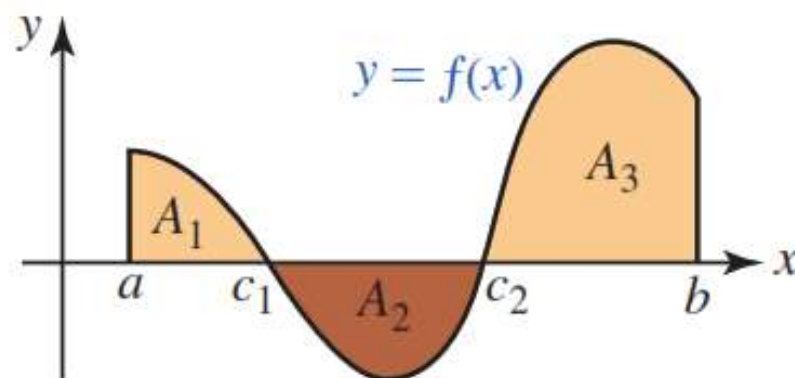


FIGURA 5.4.12 La integral definida de f sobre $[a, b]$ proporciona el área neta con signo

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x) dx = A_1 \quad \text{y} \quad \int_{c_2}^b f(x) dx = A_3,$$

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ en virtud de (13), tenemos $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \leq 0$ y así $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = -A_2$. Por tanto, (14) es

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Vemos que la integral definida proporciona el **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x) \Big|_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{integral definida}} = \underbrace{\int f(x) dx}_{\text{integral indefinida}} \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b.$$

Puesto que el teorema 5.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f , siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C) \Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^1 x^3 dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\int_1^3 x dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 5.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

EJEMPLO 3 Uso de (1)

Evalúe $\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1) dx$.

Solución Aplicamos *ii*) del teorema 5.1.2 y la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 a cada término del integrando, y luego usamos el teorema fundamental:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1) dx &= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Uso de (1)

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx$.

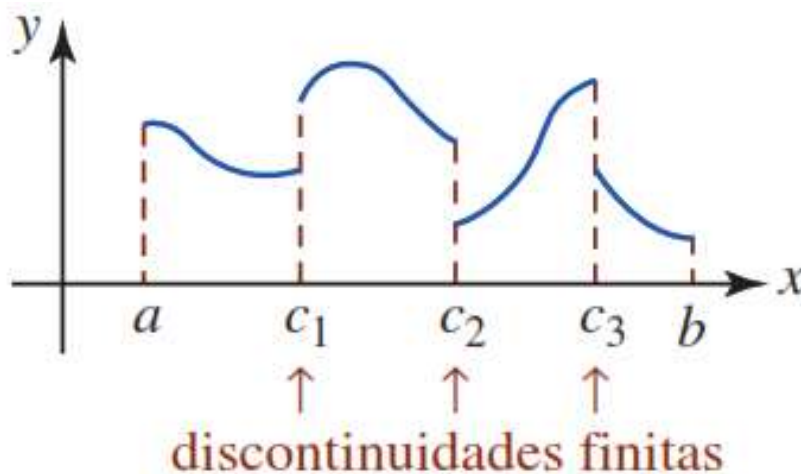
Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \sin x$. En consecuencia,

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

■ **Funciones continuas por partes** Se dice que una función f es **continua por partes** sobre un intervalo $[a, b]$ si existe a lo más un número finito de puntos c_k , $k = 1, 2, \dots, n$, ($c_{k-1} < c_k$) en los que f tiene una discontinuidad finita, o salto, sobre cada subintervalo abierto (c_{k-1}, c_k) . Vea la FIGURA 5.5.2. Si una función f es continua por partes sobre $[a, b]$, está acotada sobre el intervalo, y entonces por el teorema 5.4.2, f es integrable sobre $[a, b]$. Una integral definida de una función continua por partes sobre $[a, b]$ puede evaluarse con ayuda del teorema 5.4.5:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

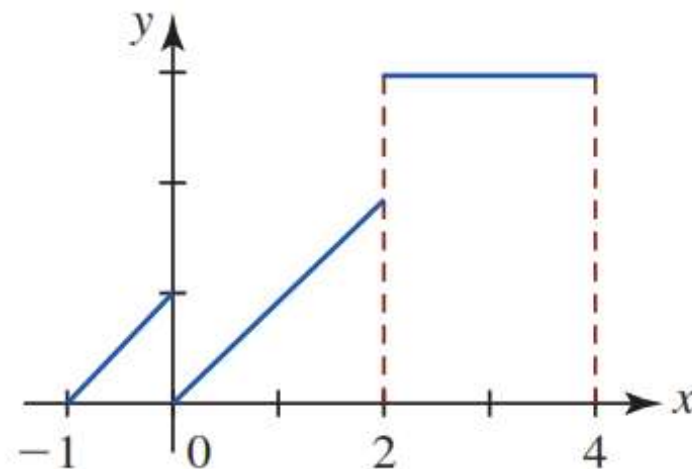
y al tratar a los integrandos de las integrales definidas en el miembro derecho de la ecuación anterior simplemente como si fuesen continuos sobre los intervalos cerrados $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\dots$, $[c_n, b]$.



EJEMPLO 7 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_{-1}^4 f(x) dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$



Solución La gráfica de una función f continua por partes se muestra en la FIGURA 5.5.3. Luego, por el análisis precedente y la definición de f :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^2 x dx + \int_2^4 3 dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^2 + 3x \Big|_2^4 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$



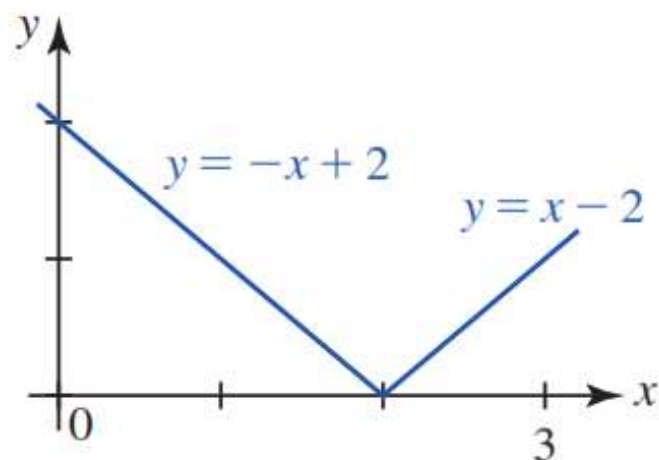
EJEMPLO 8 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_0^3 |x - 2| dx$.

Solución Por la definición de valor absoluto,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x - 2| dx &= \int_0^2 |x - 2| dx + \int_2^3 |x - 2| dx \\ &= \int_0^2 (-x + 2) dx + \int_2^3 (x - 2) dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_2^3 \\ &= (-2 + 4) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



Teorema 5.5.3 Sustitución en una integral definida

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f una función continua sobre el rango de g . Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(d) - F(c). \quad (12)$$

Si $u = 2x^2 + 1$, entonces $x = 0$ implica $u = 1$, mientras que con $x = 2$ obtenemos $u = 9$. Así, por el teorema 5.5.3,

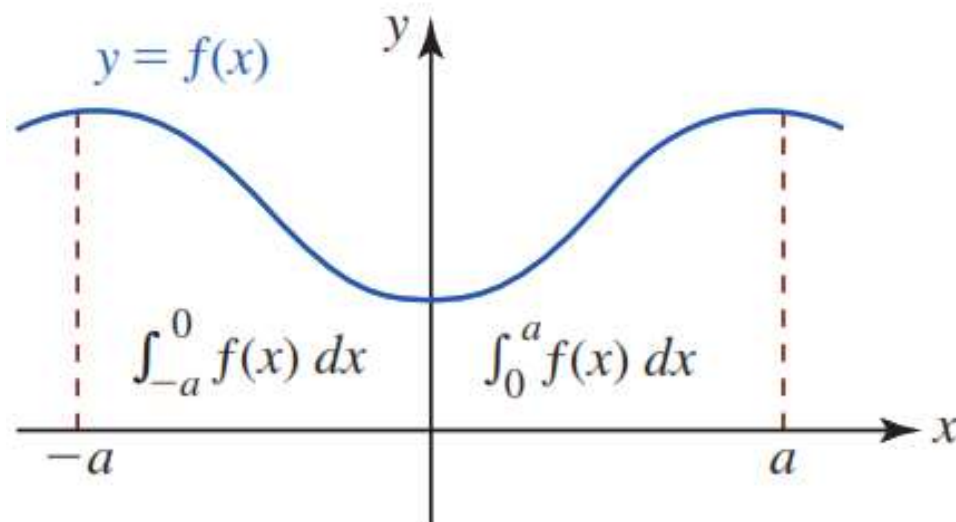
Evalúe $\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} x dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} x dx &= \frac{1}{4} \int_1^9 u^{1/2} du \quad \begin{array}{l} \text{u límites} \\ \downarrow \\ \text{integración} \\ \text{con respecto a u} \end{array} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 \\ &= \frac{1}{6} [9^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Teorema 5.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

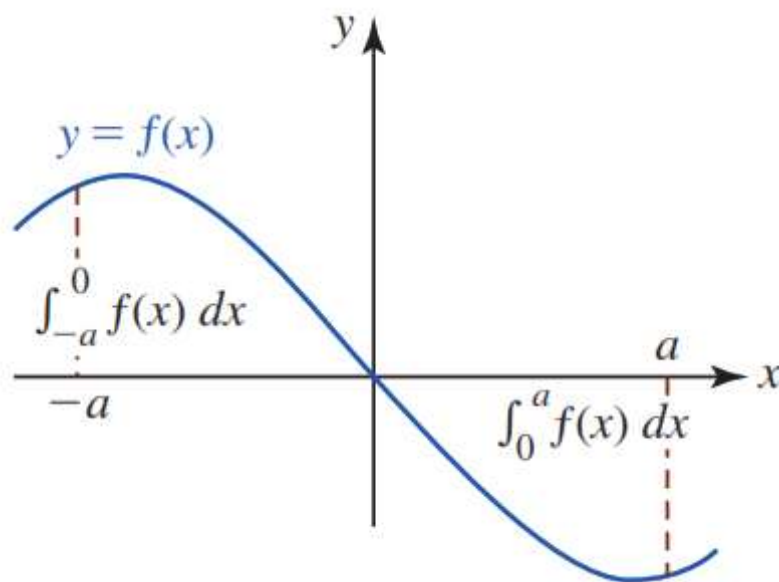
$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx. \quad (13)$$



Teorema 5.5.5 Regla de la función impar

Si f es una función impar integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (14)$$



EJEMPLO 10 Uso de la regla de la función par

Evalúe $\int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx$.

Solución El integrando $f(x) = x^4 + x^2$ es una función polinomial cuyas potencias son todas pares, de modo que f necesariamente es una función par. Puesto que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-1, 1]$, por el teorema 5.5.4 se concluye que es posible integrar sobre $[0, 1]$ y multiplicar el resultado por 2:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx &= 2 \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Uso de la regla de la función impar

Evalúe $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución En este caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar sobre el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Así, por el teorema 5.5.5 de inmediato tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 0.$$



Aplicaciones de la Integral

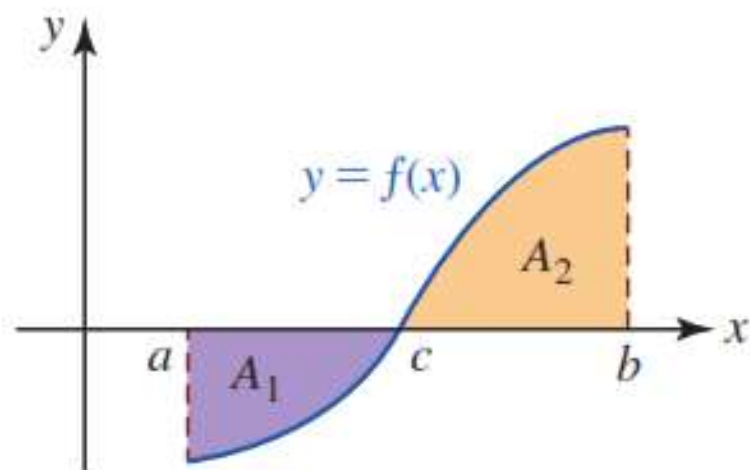
■ **Introducción** Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 5.4, el valor de $\int_a^b f(x) dx$ puede interpretarse como al *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.

■ **Área total** Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c)$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 6.2.1a), $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c)$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

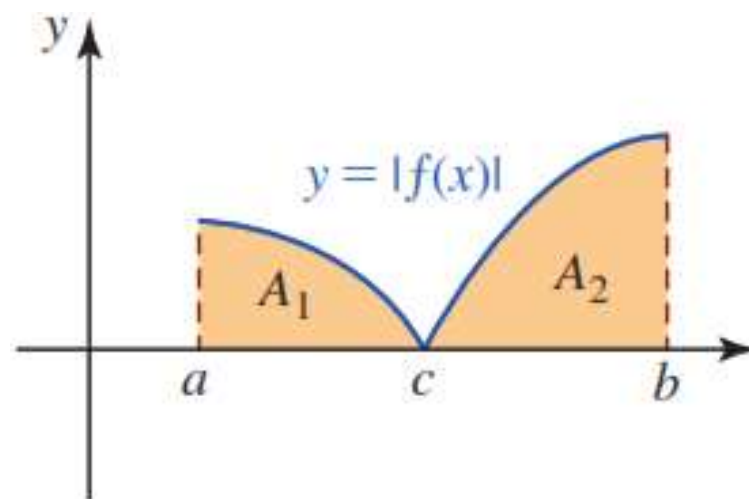
$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área

Como se muestra en la figura 6.2.1b), la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c)$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x . Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 6.2.1b) usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)| \, dx &= \int_a^c |f(x)| \, dx + \int_c^b |f(x)| \, dx \\ &= \int_a^c (-f(x)) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \\ &= A_1 + A_2.\end{aligned}$$



b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx. \quad (2)$$

EJEMPLO 1 Área total

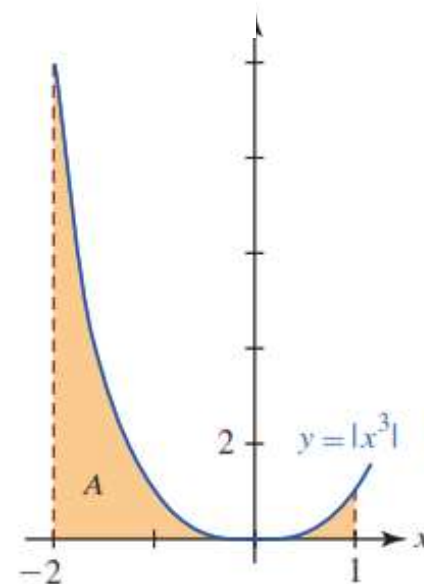
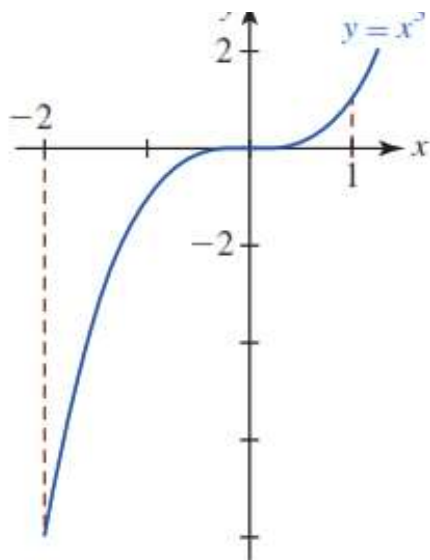
Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$.

Solución Por (2) se tiene

$$A = \int_{-2}^1 |x^3| dx.$$

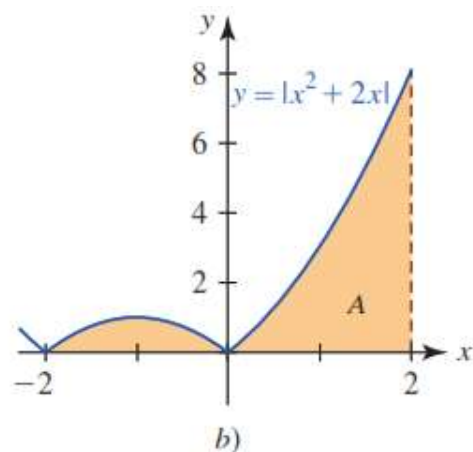
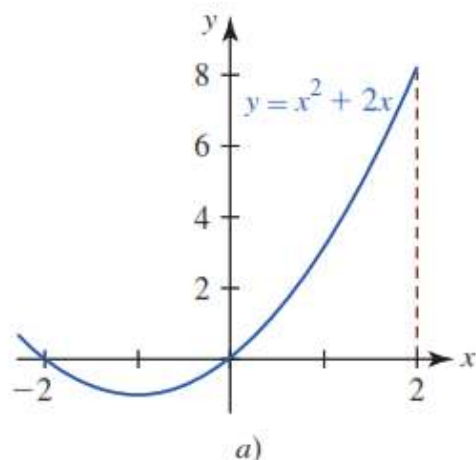
En la FIGURA 6.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Entonces, por (2) de la definición 6.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 |x^3| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x^3| \, dx + \int_0^1 |x^3| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 (-x^3) \, dx + \int_0^1 x^3 \, dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$



EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.

Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la FIGURA 6.2.3. Luego, por la figura 6.2.3a), vemos que sobre $[-2, 2]$,

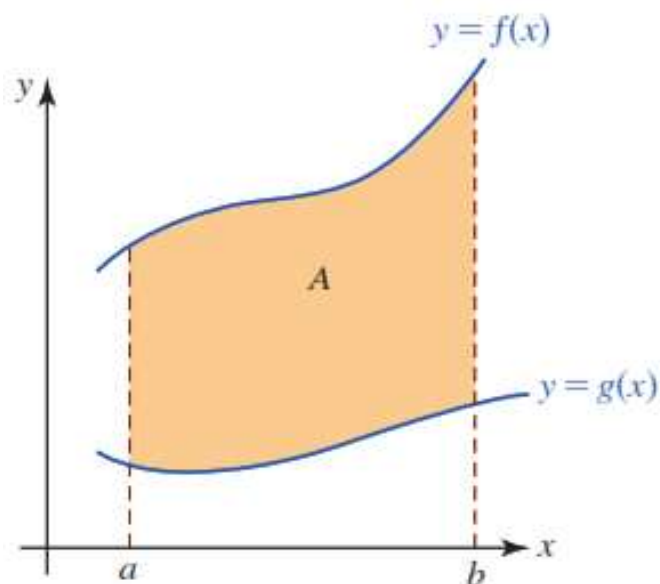
$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

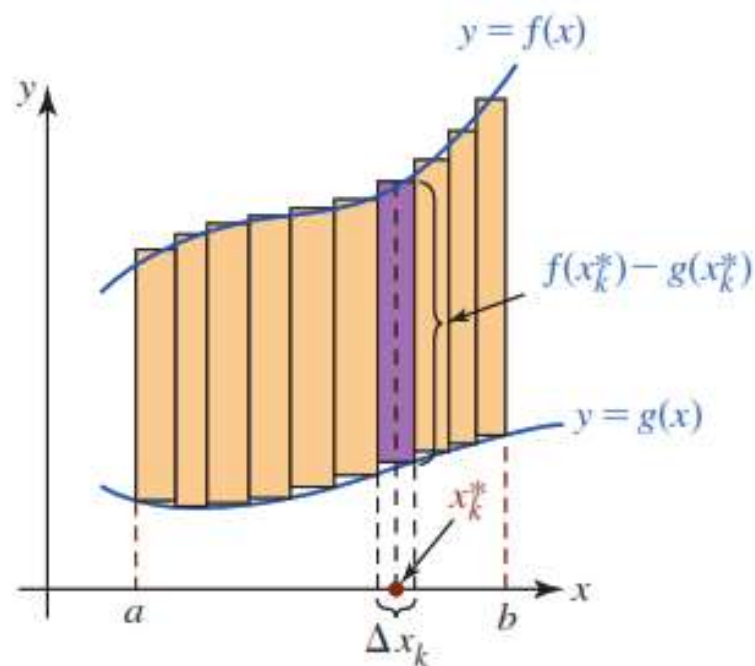
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 |x^2 + 2x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x^2 + 2x| \, dx + \int_0^2 |x^2 + 2x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 -(x^2 + 2x) \, dx + \int_0^2 (x^2 + 2x) \, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) + \left(\frac{8}{3} + 4 \right) - 0 = 8. \end{aligned}$$



■ **Área acotada por dos gráficas** El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la FIGURA 6.2.4a). El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región acotada por la gráfica de f y la gráfica de la función $y = 0$ (el eje x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



a) $f(x) \geq g(x)$ sobre $[a, b]$



b) Construcción de n rectángulos entre dos gráficas

FIGURA 6.2.4 Área A acotada entre dos gráficas

■ **Construcción de una integral** Suponga que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si escogemos un punto muestra x_k^* en cada subintervalo, es posible construir n rectángulos correspondientes que tengan el área

$$A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Vea la figura 6.2.4b). El área A de la región acotada por las dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$ es aproximada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k,$$

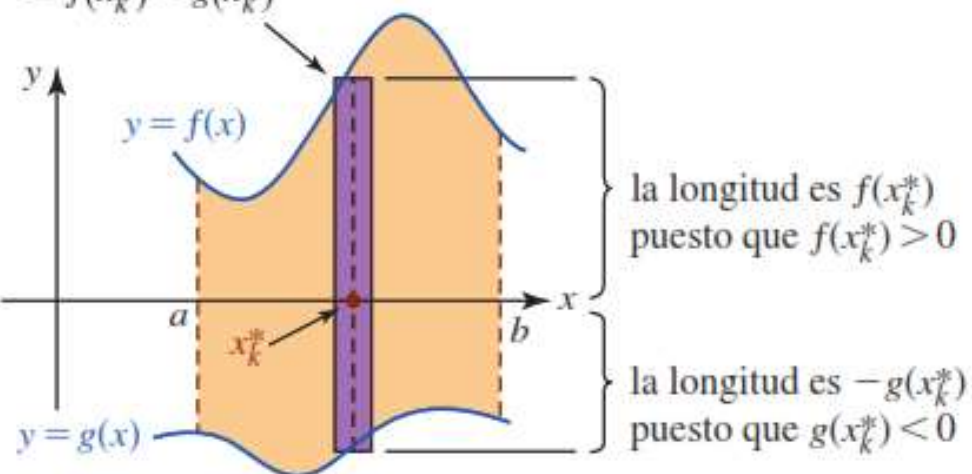
lo cual a su vez sugiere que el área es

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

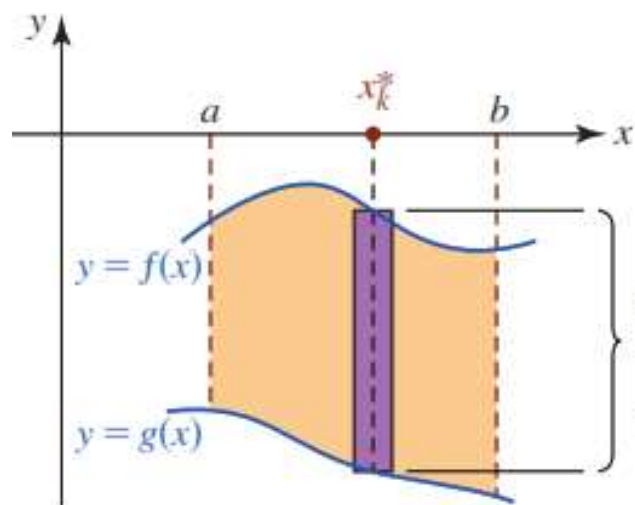
Puesto que f y g son continuas, también lo es $f - g$. Entonces, el límite anterior existe y, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (3)$$

$$f(x_k^*) + (-g(x_k^*)) \\ = f(x_k^*) - g(x_k^*)$$



a) $f(x) > 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$



b) $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$

Definición 6.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$

cualquier caso, sobre cualquier subintervalo de $[a, b]$, el integrando idóneo siempre es

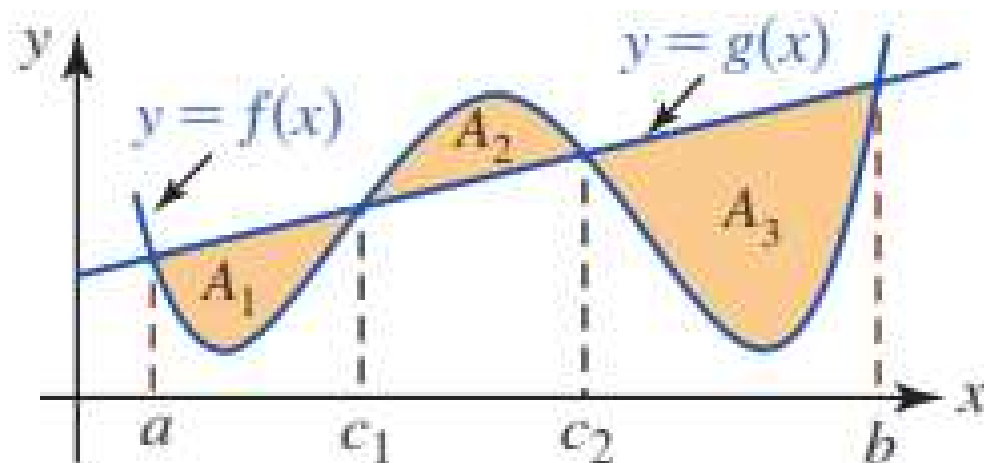
(gráfica superior) – (gráfica inferior).

Así como en (1), el valor absoluto del integrando está dado por

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & \text{para } f(x) - g(x) < 0 \\ f(x) - g(x), & \text{para } f(x) - g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Una manera más práctica de interpretar (5) consiste en trazar las gráficas de f y g con precisión y determinar visualmente que:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{siempre que } g \text{ es la gráfica superior} \\ f(x) - g(x), & \text{siempre que } f \text{ es la gráfica superior} \end{cases}$$



En la figura 6.2.6, el área A acotada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \\
 &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)| \, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)| \, dx + \int_{c_2}^b |f(x) - g(x)| \, dx \\
 &= \int_a^{c_1} [g(x) - f(x)] \, dx + \int_{c_1}^{c_2} [f(x) - g(x)] \, dx + \int_{c_2}^b [g(x) - f(x)] \, dx.
 \end{aligned}$$

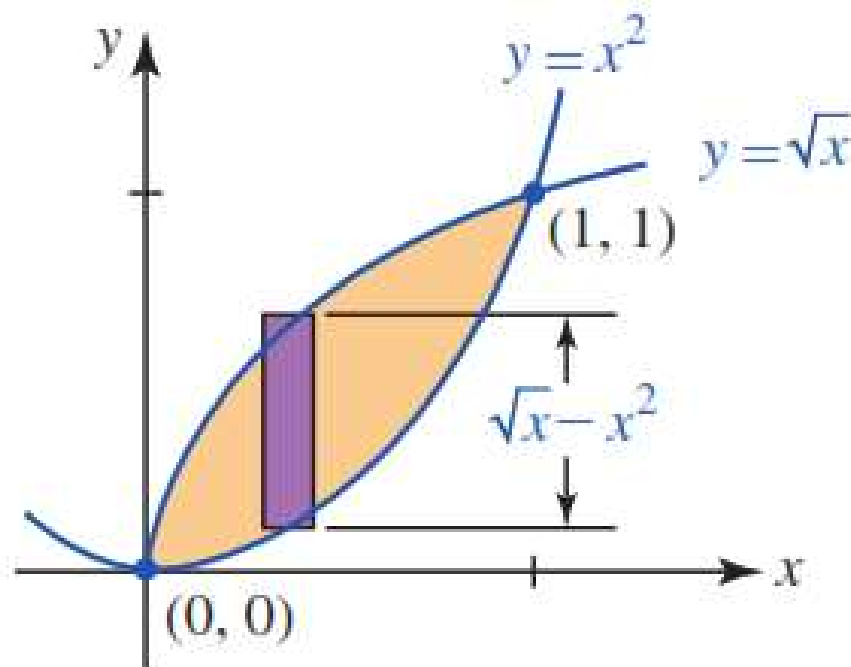
$\uparrow$
 g es la gráfica superior
 $\uparrow$
 f es la gráfica superior
 $\uparrow$
 g es la gráfica superior

EJEMPLO 3 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

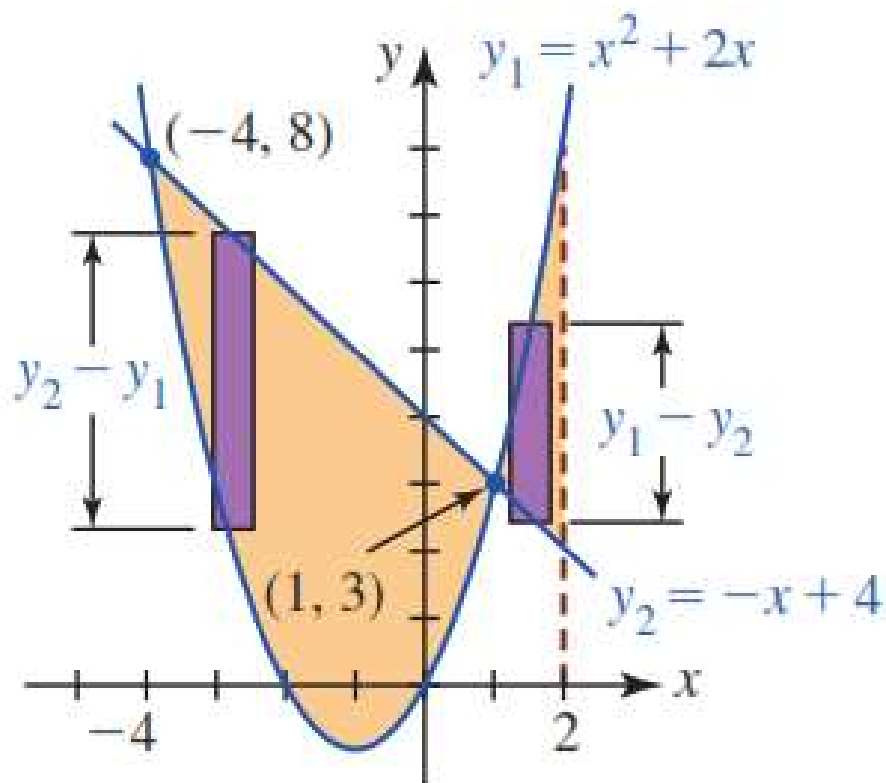
Solución Como se muestra en la FIGURA 6.2.7, la región en cuestión se localiza en el primer cuadrante. Puesto que 0 y 1 son las soluciones de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, las gráficas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$, se concluye que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



EJEMPLO 4 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.



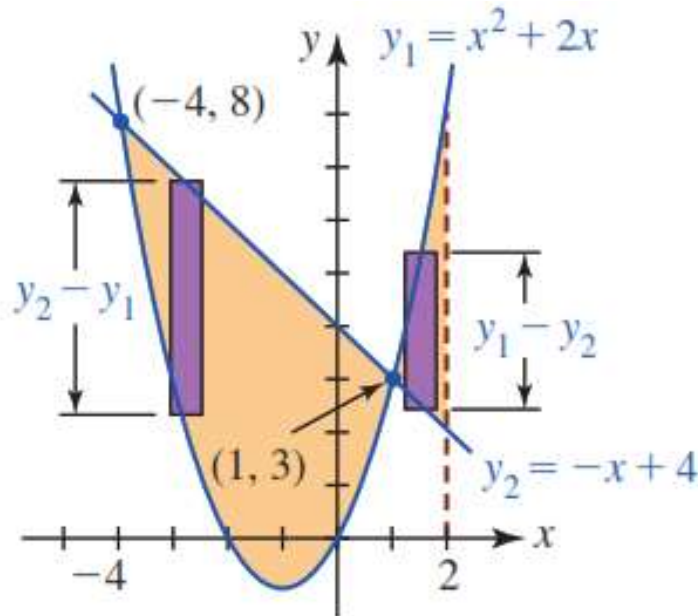
Solución Las funciones dadas se denotan por

$$y_1 = x^2 + 2x \quad \text{y} \quad y_2 = -x + 4.$$

Como se muestra en la FIGURA 6.2.8, las gráficas se cortan sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Para encontrar los puntos de intersección resolvemos la ecuación $x^2 + 2x = -x + 4$ o $x^2 + 3x - 4 = 0$ y encontramos que $x = -4$ y $x = 1$. El área en cuestión es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$:

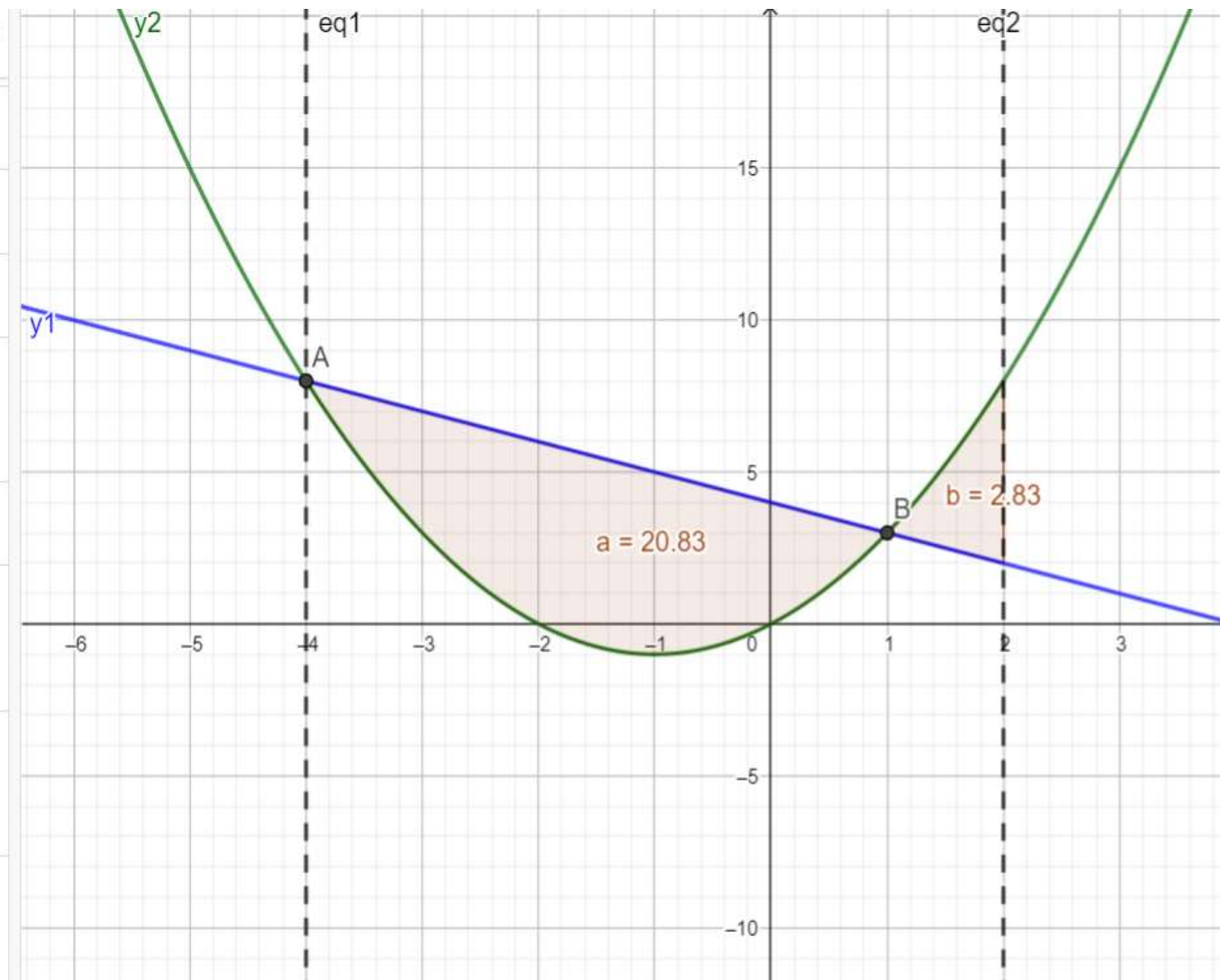
$$A = \int_{-4}^2 |y_2 - y_1| \, dx = \int_{-4}^1 |y_2 - y_1| \, dx + \int_1^2 |y_2 - y_1| \, dx.$$



Pero como $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(-4, 1)$ y $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(1, 2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^1 [(-x + 4) - (x^2 + 2x)] dx + \int_1^2 [(x^2 + 2x) - (-x + 4)] dx \\ &= \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) dx + \int_1^2 (x^2 + 3x - 4) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_{-4}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16 \right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right) = \frac{71}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

	$y_2(x) = x^2 + 2x$	
	$y_1(x) = -x + 4$	
	eq1 : $x = -4$	
	eq2 : $x = 2$	
	Intersect(y_2, y_1)	
	$\rightarrow A = (-4, 8)$	
	$\rightarrow B = (1, 3)$	
	$a = \text{IntegralBetween}(y_1, y_2, -4, 1)$	
	$\rightarrow 20.83$	
	$b = \text{IntegralBetween}(y_2, y_1, 1, 2)$	
	$\rightarrow 2.83$	
	$c = a + b$	
	$\rightarrow 23.67 = 71/3$	

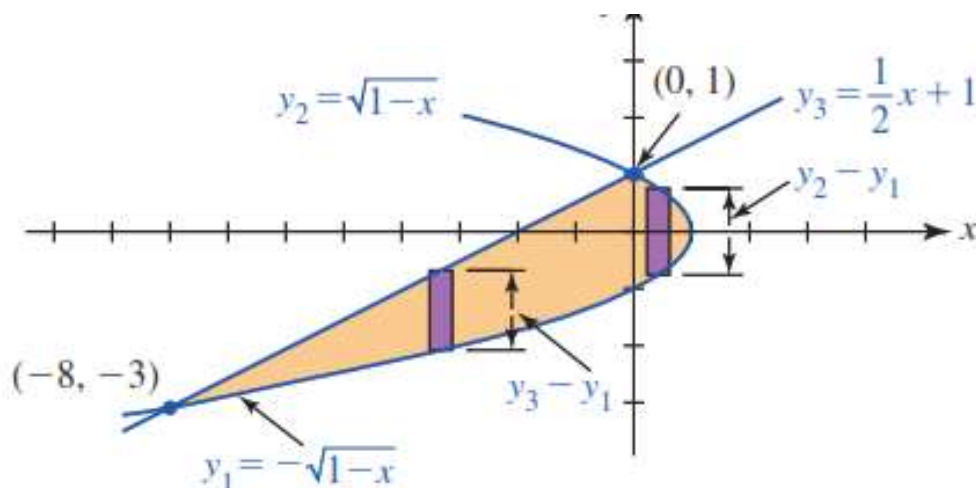


EJEMPLO 6 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Observamos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ define de manera implícita dos funciones, $y_2 = \sqrt{1 - x}$ y $y_1 = -\sqrt{1 - x}$ para $x \leq 1$. Si definimos $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, por la FIGURA 6.2.10 vemos que la altura de un elemento de área sobre el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras la altura de un elemento sobre el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Por tanto, si se integra con respecto a x , el área deseada es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^0 (y_3 - y_1) dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx.$$



Por tanto, el área de la región es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$; es decir,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^0 \left[\left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - (-\sqrt{1-x}) \right] dx + \int_0^1 [\sqrt{1-x} - (-\sqrt{1-x})] dx \\ &= \int_{-8}^0 \left(\frac{1}{2}x + 1 + \sqrt{1-x} \right) dx + 2 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right) \Big|_{-8}^0 - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} \right) - \frac{4}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot 1^{3/2} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Volúmenes de sólidos: método de las rebanadas

■ **Introducción** La forma que indiscutiblemente viene a la mente al evocar las palabras **cilindro recto** es el cilindro *circular* recto; es decir, la conocida forma de una lata de aluminio. Sin embargo, un cilindro recto no necesita ser circular. Por geometría, un **cilindro recto** se define como un sólido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral que es generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos constituyen los límites de las regiones planas. Cuando las regiones son círculos, obtenemos el cilindro circular recto. Si las regiones son rectángulos, el cilindro es un paralelepípedo rectangular. Algo común a todos los cilindros, como los cinco mostrados en la FIGURA 6.3.1, es que su volumen V está dado por la fórmula

$$V = A \cdot h, \quad (1)$$

donde A denota el área de una base (es decir, el área de una de las regiones planas) y h denota la altura del cilindro (es decir, la distancia perpendicular entre las regiones planas).

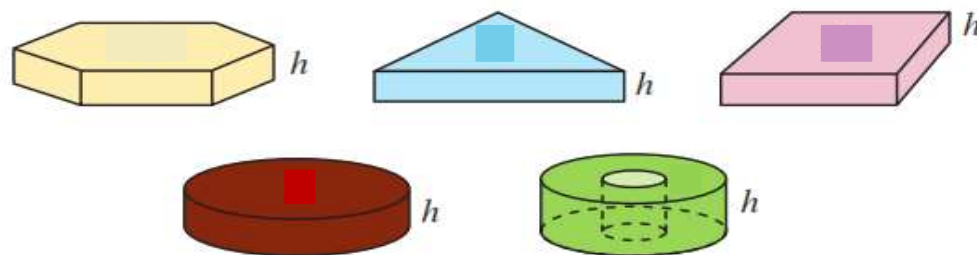


FIGURA 6.3.1 Cinco cilindros rectos diferentes

■ **Método de las rebanadas** Suponga que V es el volumen del sólido mostrado en la FIGURA 6.3.2 acotado por planos que son perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Además, suponga que conoce una función continua $A(x)$ que proporciona el área de una región de sección transversal que se forma al *rebanar* el sólido por un plano perpendicular al eje x ; en otras palabras, una rebanada es la intersección del sólido y un plano. Por ejemplo, para $a < x_1 < x_2 < b$ las áreas de las secciones transversales mostradas en la figura 6.3.2 son $A(x_1)$ y $A(x_2)$. Con esto en mente, suponga que rebana al sólido en cortes delgados por planos paralelos (semejantes a rebanadas de pan de caja comercial) de modo que el grosor o ancho de una rebanada es Δx_k . Al usar cilindros rectos para aproximar los volúmenes de estas rebanadas es posible construir una integral definida que proporcione el volumen V del sólido.

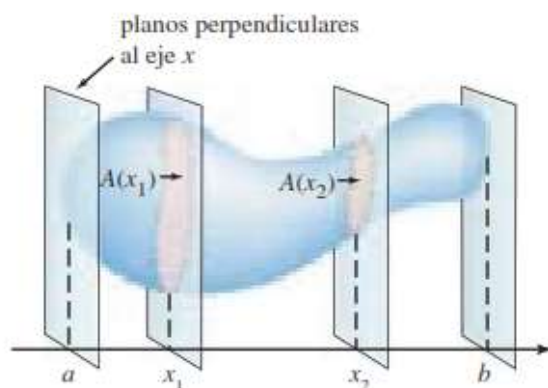


FIGURA 6.3.2 Las regiones o las secciones transversales tienen áreas conocidas



Una pieza de pan es una rodaja formada por dos rebanadas

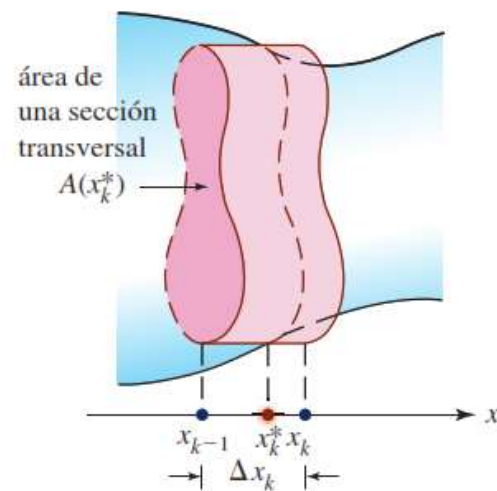


FIGURA 6.3.3 El volumen de un cilindro recto es una aproximación al volumen de una rebanada

Definición 6.3.1 Volumen por rebanadas

Sea V el volumen de un sólido acotado por planos perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Si $A(x)$ es una función continua que proporciona el área de una sección transversal del sólido formado por un plano perpendicular al eje x en cualquier punto en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) \, dx. \quad (3)$$

Tenga presente que no hay nada especial sobre la variable x en (3); dependiendo de la geometría y el análisis del problema también es posible terminar con una integral $\int_c^d A(y) \, dy$.

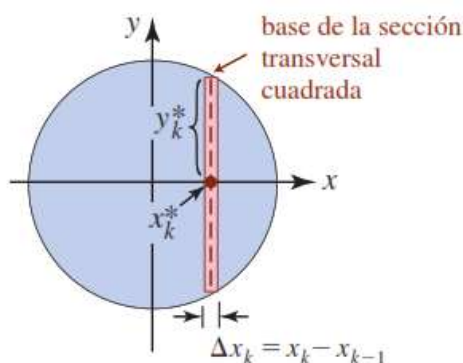
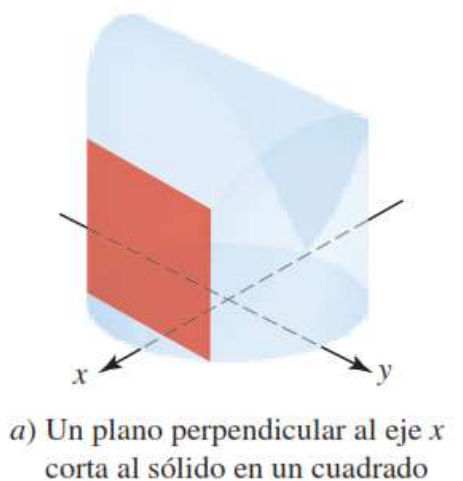


FIGURA 6.3.4 Sólido en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Sólido con secciones transversales cuadradas

Para el sólido en la FIGURA 6.3.4a), las secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular son cuadradas. Dado que el radio de la base es 4 pies, encuentre el volumen del sólido.

Solución Sean x y y ejes como se muestra en la figura 6.3.4a); a saber: el origen está en el centro de la base circular del sólido. En esta figura, una sección transversal cuadrada se muestra perpendicular al eje x . Puesto que la base del sólido es un círculo, tenemos $x^2 + y^2 = 4^2$. En la figura 6.3.4b), la línea discontinua en x_k^* representa la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ en una partición del intervalo $[-4, 4]$. A partir de esto vemos que la longitud de un lado de la sección transversal cuadrada es $2y_k^* = 2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}$. Por tanto, el área de una sección transversal cuadrada es

$$A(x_k^*) = (2\sqrt{16 - (x_k^*)^2})^2 = 64 - 4(x_k^*)^2.$$

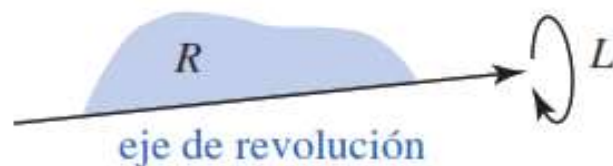
El volumen del cilindro recto que aproxima el volumen del sólido o rebanada en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = (64 - 4(x_k^*)^2) \Delta x_k.$$

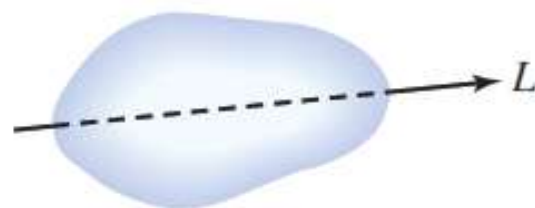
Al formar la suma $\sum_{k=1}^n V_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ obtenemos la integral definida

$$V = \int_{-4}^4 (64 - 4x^2) dx = 64x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-4}^4 = \frac{512}{3} - \left(-\frac{512}{3}\right) = \frac{1024}{3}.$$

■ **Método del disco** Como acaba de analizarse, el volumen V de un sólido puede encontrarse por medio de una integral definida siempre que se conoce una función $A(x)$ que proporciona el área de una sección transversal formada al hacer pasar un plano por el sólido de forma perpendicular a un eje. En el caso de encontrar el volumen de un sólido de revolución, siempre es posible encontrar $A(x)$; el eje en cuestión es el eje de revolución L . Vemos que al rebanar el sólido por medio de dos planos paralelos perpendiculares al eje de revolución, el volumen de las rebanadas resultantes del sólido pueden aproximarse por cilindros *circulares* rectos que son discos o arandelas. A continuación se ilustrará la construcción de una integral de volumen usando discos.



a) Región



b) Sólido

■ **Construcción de una integral** Sea R la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.6. Si esta región se hace girar alrededor del eje x , encontramos el volumen V del sólido de revolución resultante.

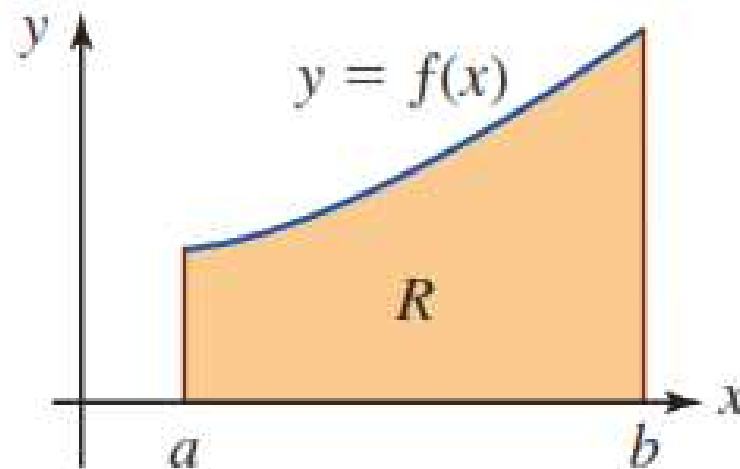
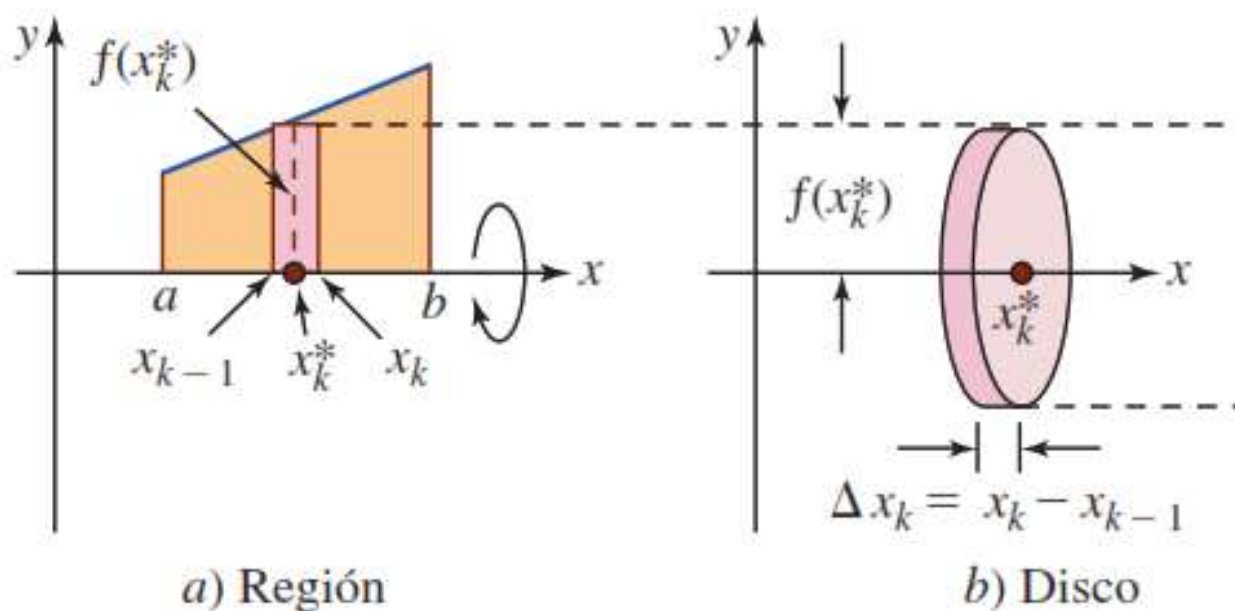


FIGURA 6.3.6 Región a girar alrededor del eje x

Sea P una partición de $[a, b]$ y sea x_k^* cualquier número en el k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 6.3.7a). A medida que el elemento rectangular de ancho Δx_k y altura $f(x_k^*)$ gira alrededor del eje x , genera un disco sólido. Luego, la sección transversal del sólido determinada por un plano que corta la superficie en x_k^* es un círculo de radio $r = f(x_k^*)$, y así el área de la sección transversal es $A(x_k^*) = \pi [f(x_k^*)]^2$. El volumen del cilindro circular recto, o disco sólido, de radio $r = f(x_k^*)$ y altura $h = \Delta x_k$ es $\pi r^2 h$ o

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k.$$



La suma de Riemann

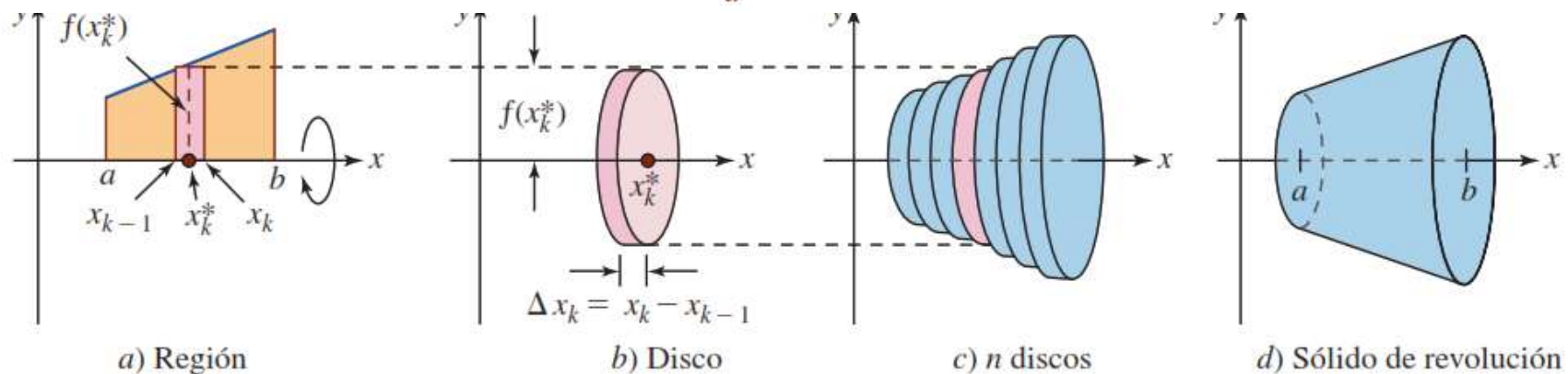
$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k$$

representa una aproximación al volumen del sólido mostrado en la figura 6.3.7d). Esto sugiere que el volumen V del sólido de revolución está dado por

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \pi [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k$$

o bien,

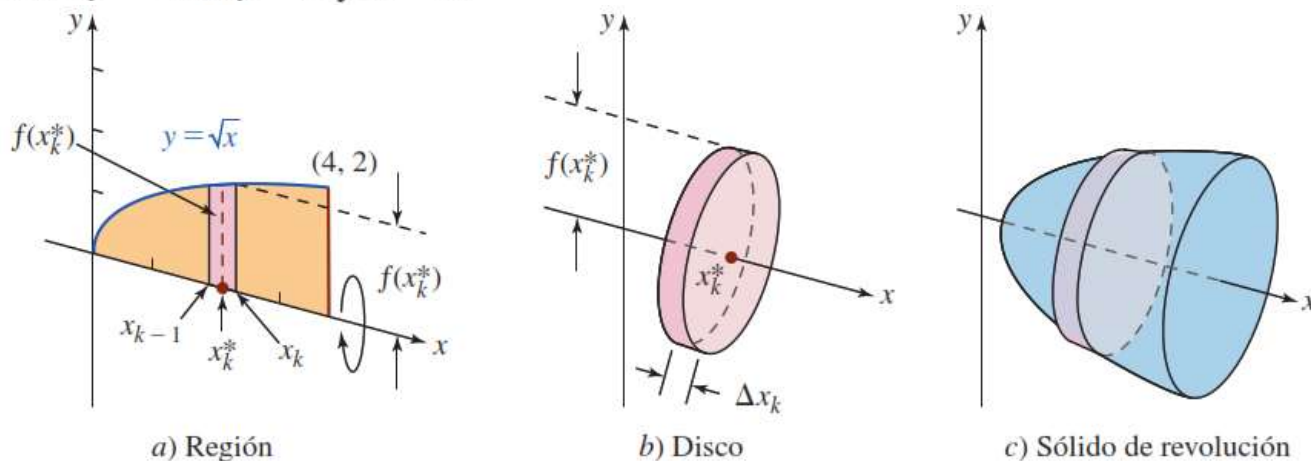
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (4)$$



[Volumes of Revolution Animation](#)

EJEMPLO 2 Método del disco

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.



Solución En la FIGURA 6.3.8a) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una rebanada de la sección transversal x_k^* es

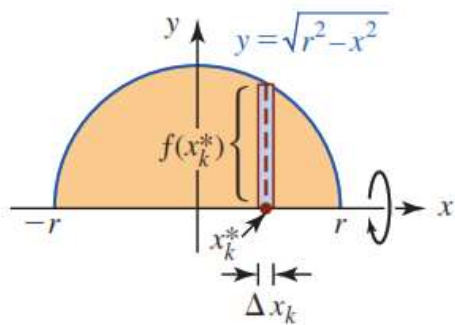
$$A(x_k^*) = \pi [f(x_k^*)]^2 = \pi [(x_k^*)^{1/2}]^2 = \pi x_k^*,$$

y así el volumen del disco correspondiente mostrado en la figura 6.3.8b) es

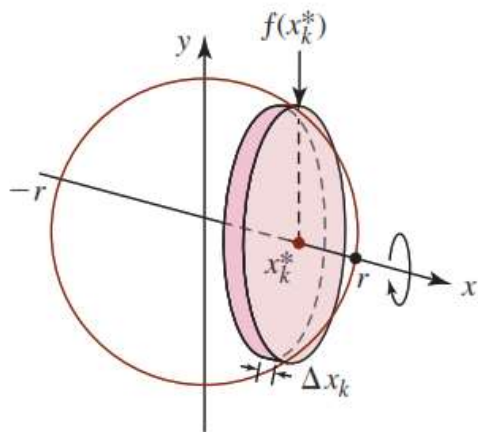
$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi x_k^* \Delta x_k.$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi.$$



a) Región



b) Esfera

EJEMPLO 3 Volumen de una esfera

Demuestre que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución Una esfera de radio r puede generarse al girar un semicírculo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x . Por la FIGURA 6.3.9 vemos que el área de una región de la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi(\sqrt{r^2 - (x_k^*)^2})^2 = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)$$

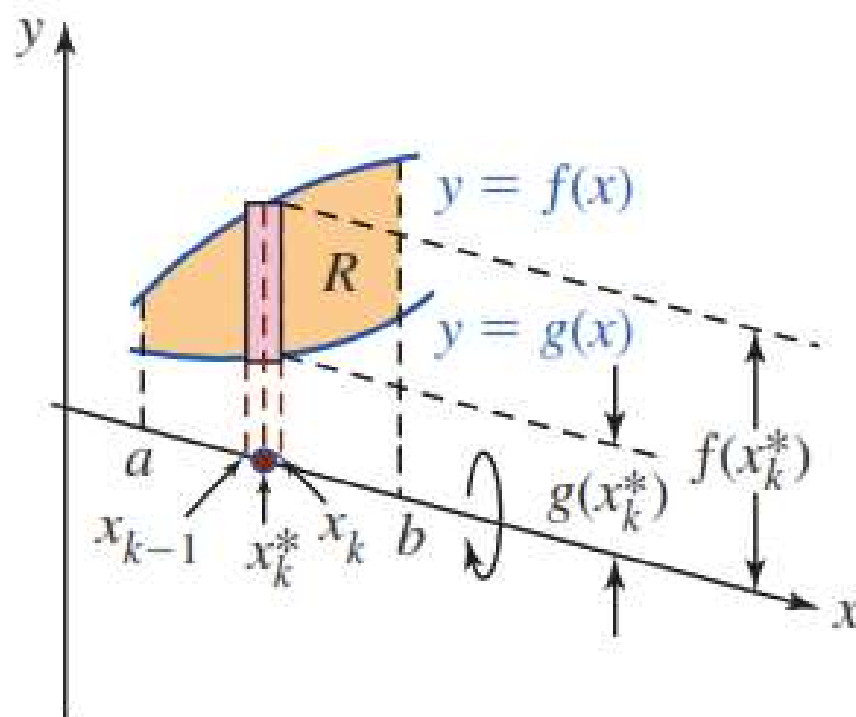
y por tanto, el volumen de un disco es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi(r^2 - (x_k^*)^2) \Delta x_k.$$

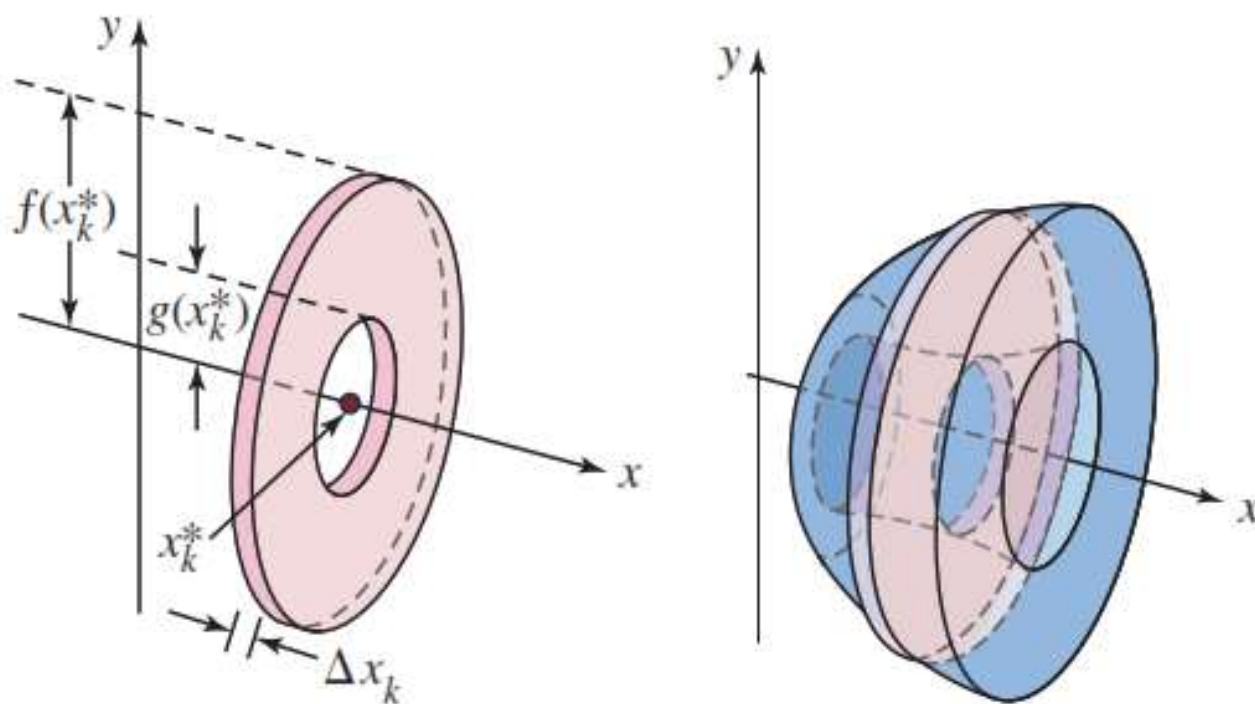
Al usar (4) observamos que el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-r}^r = \pi \frac{2}{3} r^3 - \left(-\pi \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■ **Método de la arandela** Sea R la región acotada por las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.10a), que se hace girar alrededor del eje x



Entonces una rebanada perpendicular al eje x del sólido de revolución en x_k^* es una circular o anillo anular. Cuando el elemento rectangular de ancho Δx_k que se muestra en la figura 6.3.10a) gira alrededor del eje x , genera una arandela.



El área del anillo es $\longrightarrow A(x_k^*) = \text{área del círculo} - \text{área del orificio}$
 $= \pi [f(x_k^*)]^2 - \pi [g(x_k^*)]^2 = \pi ([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2)$

y el volumen V_k de la arandela representativa mostrada en la figura 6.3.10b) es

$$V_k = A(x_k^*) \Delta x_k = \pi ([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \Delta x_k.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

EJEMPLO 4 Método de la arandela

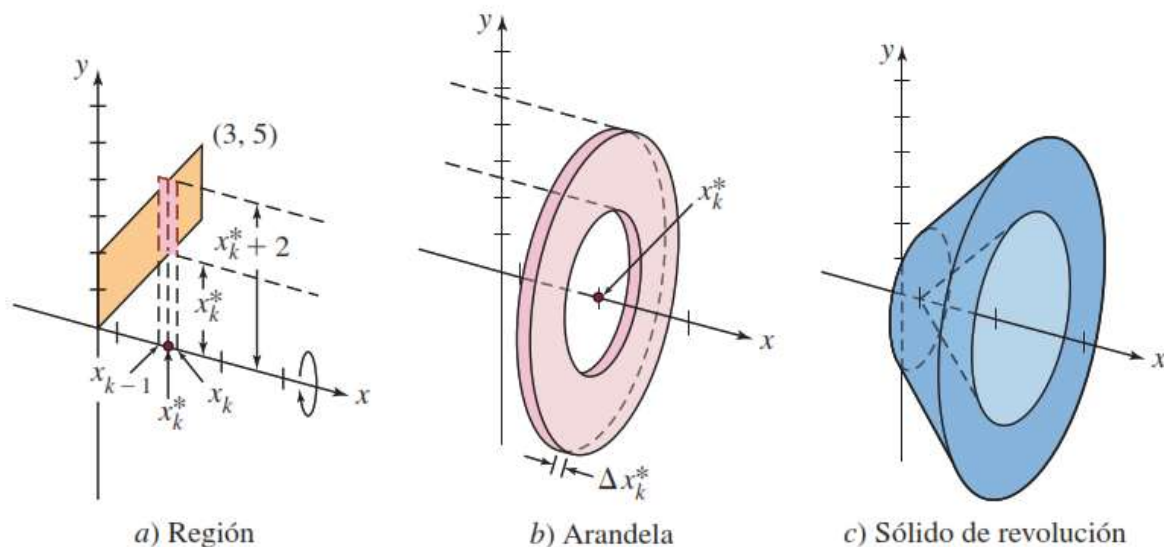
Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = x + 2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución En la FIGURA 6.3.11a) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una sección transversal del sólido correspondiente al plano perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[(x_k^* + 2)^2 - (x_k^*)^2] = \pi(4x_k^* + 4).$$

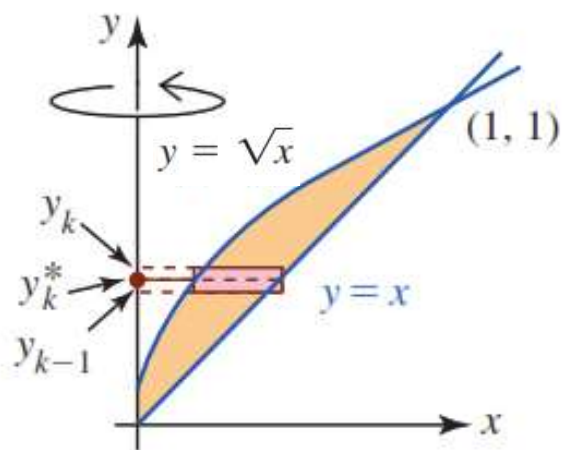
El proceso usual de sumas y límites acostumbrado lleva a la integral definida para el volumen V del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_0^3 (4x + 4) dx = \pi(2x^2 + 4x) \Big|_0^3 = 30\pi.$$

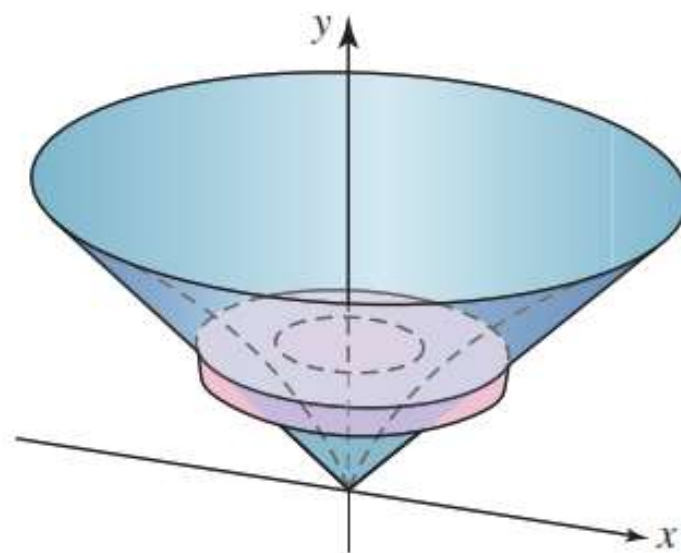


EJEMPLO 5 Integración con respecto a y

Encuentre el volumen V del sólido formado por la región que gira alrededor del eje y y acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.



a) Región



b) Arandela y sólido de revolución

Solución Cuando el elemento rectangular horizontal en la FIGURA 6.3.12a) gira alrededor del eje y genera una arandela de ancho Δy_k . El área $A(y_k^*)$ de la región anular en y_k^* es

$$A(y_k^*) = \text{área del círculo} - \text{área del orificio}.$$

El radio del círculo y el radio del hueco se obtienen al despejar, a su vez, $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ para x en términos de y :

$$A(y_k^*) = \pi(y_k^*)^2 - \pi[(y_k^*)^2]^2 = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4).$$

Así, el volumen de una arandela es

$$V_k = A(y_k^*) \Delta y_k = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4) \Delta y_k.$$

Usualmente sumando los V_k y tomando el límite de la suma cuando $\|P\| \rightarrow 0$ llevan a la integral definida para el volumen del sólido:

$$V = \pi \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \pi \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \pi.$$

■ **Revolución alrededor de una recta** El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución cuando una región se hace girar alrededor de un eje que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 6 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

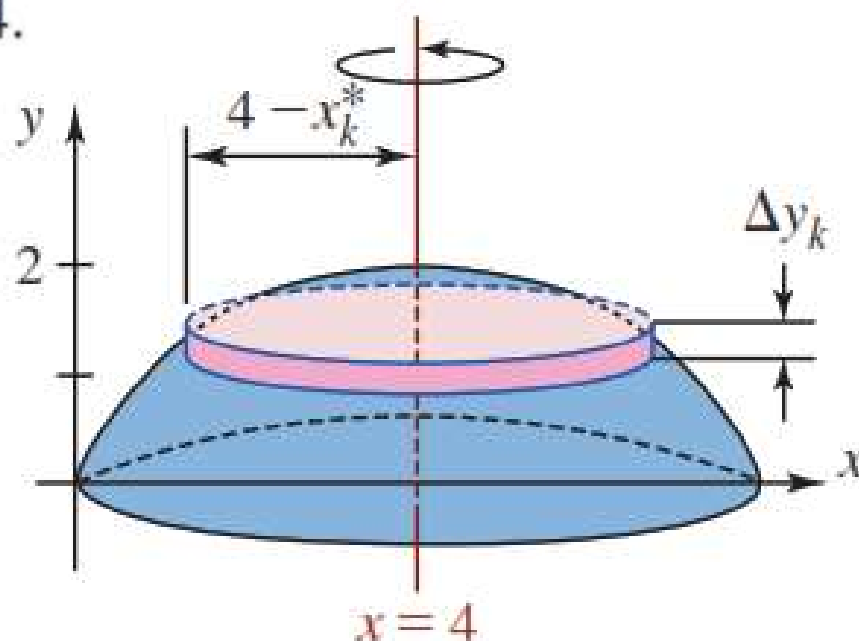
Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 4$ que se muestra en el ejemplo 2.

$$y = \sqrt{x}, y = 0 \text{ y } x = 4.$$

Solución El sólido de revolución en forma de domo se muestra en la FIGURA 6.3.13. Por inspección de la figura vemos que un elemento rectangular horizontal de ancho Δy_k que es perpendicular a la recta vertical $x = 4$ genera un disco sólido cuando gira alrededor de ese eje. El radio r de ese disco es

$$r = (\text{valor } x \text{ más a la derecha}) - (\text{valor } x \text{ más a la izquierda}) = 4 - x_k^*,$$

$$y = \sqrt{x}, y = 0 \text{ y } x = 4.$$



y entonces su volumen es

$$V_k = \pi(4 - x_k^*)^2 \Delta y_k.$$

Para expresar x en términos de y se usa $y = \sqrt{x}$ para obtener $x_k^* = (y_k^*)^2$. En consecuencia,

$$V_k = \pi(4 - (y_k^*)^2)^2 \Delta y_k.$$

Eso conduce a la integral

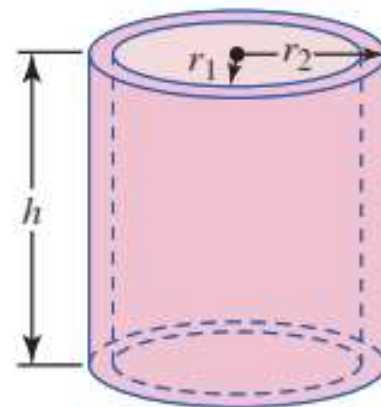
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy \\ &= \pi \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{256}{15} \pi. \end{aligned}$$



Volúmenes de sólidos: método de los cascarones

■ **Introducción** En esta sección continuamos el análisis de cómo encontrar volúmenes de sólidos de revolución. Pero en lugar de usar planos perpendiculares al eje de revolución para rebajar el sólido en rodajas cuyo volumen puede aproximarse por cilindros circulares rectos regulares (discos o arandelas), desarrollamos un nuevo método para encontrar volúmenes de sólidos de revolución que utiliza cascarones cilíndricos circulares. Antes de construir un integral que represente el **método de los cascarones** es necesario encontrar el volumen del cascarón cilíndrico general que se muestra en la FIGURA 6.4.1. Si, como se observa en la figura, r_1 y r_2 denotan respectivamente los radios interior y exterior del cascarón, y h es su altura, entonces su volumen está dado por la diferencia

$$\begin{aligned} &\text{volumen del cilindro exterior} - \text{volumen del cilindro interior} \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$



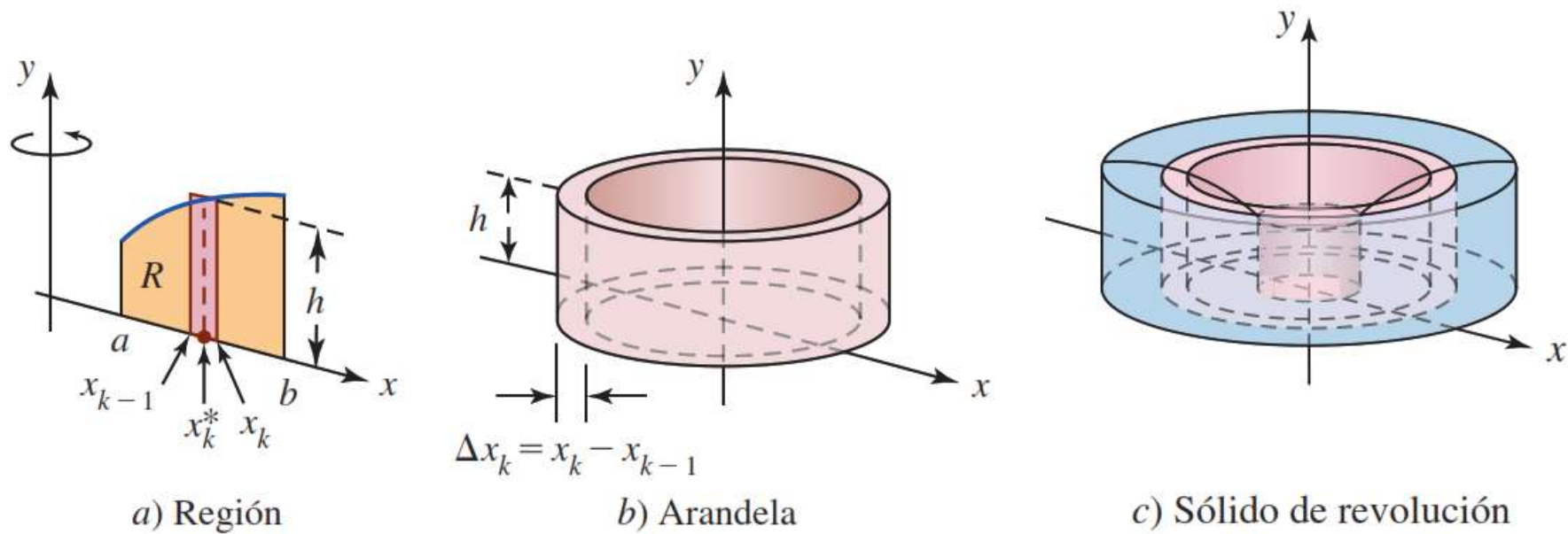


FIGURA 6.4.2 Cuando el elemento rectangular rojo en a) gira alrededor del eje y se genera el cascarón rojo en b)

■ **Construcción de una integral** En la sección 6.3 vimos que un elemento rectangular de área que es perpendicular a un eje de revolución genera, al girar, ya sea un disco circular o una arandela circular. No obstante, si hacemos girar el elemento rectangular mostrado en la FIGURA 6.4.2a) alrededor del eje y , generamos un cascarón hueco como se muestra en la figura 6.4.2b). Para encontrar el volumen que se observa en la figura 6.4.2c), sea P una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La partición P divide el intervalo en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, de ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si identificamos el radio exterior como $r_2 = x_k$ y el radio interior como $r_1 = x_{k-1}$ y definimos $x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, entonces x_k^* es el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Con la identificación adicional $h = f(x_k^*)$ por (1) se concluye que el volumen representativo del cascarón en la figura 6.4.2b) puede escribirse como

$$\begin{aligned} V_k &= \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})h \\ &= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2} h(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

o bien,

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Una aproximación al volumen del sólido está dada por la suma de Riemann

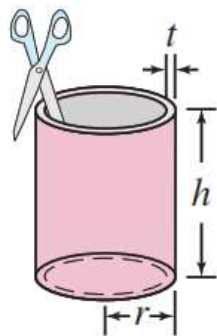
$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (2)$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero, el límite de (2) es una integral definida que se usa como la definición del volumen V del sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (3)$$

Por ejemplo, $f(x)$, que representa la altura del rectángulo en la figura 6.4.2, puede ser la diferencia $f(x) - g(x)$ si el elemento rectangular está entre las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$. Para establecer una integral para un problema dado sin adentrarse en un tedioso análisis, considere que un cascarón es una delgada lata de aluminio a la que se han quitado las partes superior e inferior. Para encontrar el volumen de la concha (es decir, el volumen del metal en la analogía de la lata de aluminio), imagine que la lata se corta en forma recta a lo largo de su lado y que se aplana como se ilustra en la FIGURA 6.4.3a) y b). Como se muestra en la figura 6.4.3c), entonces el volumen de la concha es el volumen de este sólido regular:

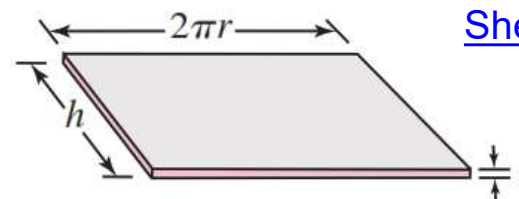
$$\begin{aligned}\text{volumen} &= (\text{longitud}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= (\text{circunferencia del cilindro}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= 2\pi rht.\end{aligned}\tag{4}$$



a) La arandela se corta por su lado



b) Se aplana



c) El resultado es un sólido rectangular

[Shell method animation](#)

EJEMPLO 1 Uso del método de los cascarones

Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Este problema se resolvió en el ejemplo 5 de la sección 6.3. En ese ejemplo vimos que usar un elemento rectangular horizontal perpendicular al eje y de ancho Δy_k generaba una arandela al girarlo alrededor del eje y . En contraste, cuando un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k gira alrededor del eje y y genera un cascarón. Con ayuda de la FIGURA 6.4.4a) en (4) se hace la identificación $r = x_k^*$,

$$h = \text{gráfica superior} - \text{gráfica inferior} = \sqrt{x_k^*} - x_k^*,$$

y $t = \Delta x_k$. A partir del volumen del cascarón,

$$V_k = 2\pi x_k^* (\sqrt{x_k^*} - x_k^*) \Delta x_k = 2\pi ((x_k^*)^{3/2} - (x_k^*)^2) \Delta x_k,$$

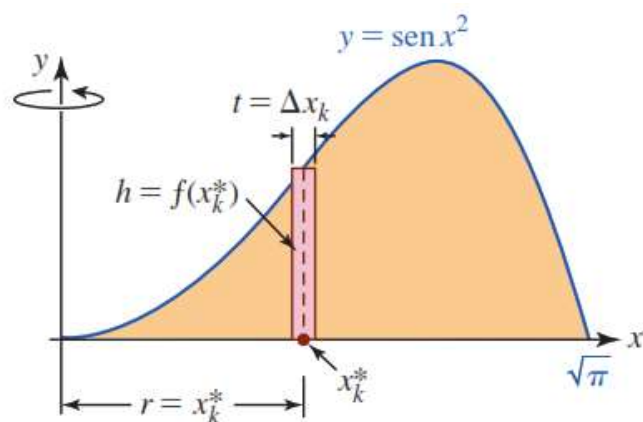
obtenemos la integral definida al determinar el volumen del sólido:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

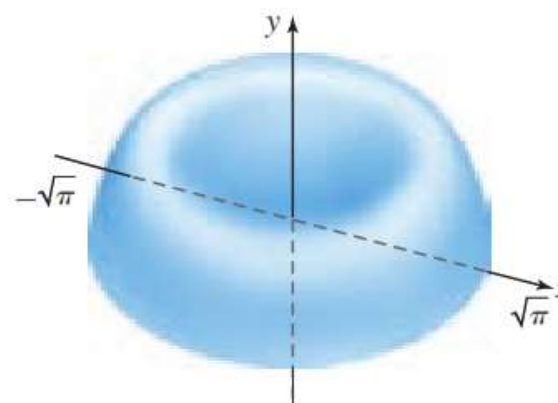
EJEMPLO 2 Uso del método de los cascarones

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la gráfica de $y = \sin x^2$ y $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$.

Solución La gráfica de $y = \sin x^2$ sobre el intervalo indicado en la FIGURA 6.4.5 se obtuvo con ayuda de un SAC.



a) Región



b) Sólido de revolución

FIGURA 6.4.5 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Uso del método de los cascarones

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la gráfica de $y = \sin x^2$ y $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$.

Solución La gráfica de $y = \sin x^2$ sobre el intervalo indicado en la FIGURA 6.4.5 se obtuvo con ayuda de un SAC.

Cuando este elemento gira alrededor del eje y , se genera un cascarón con radio $r = x_k^*$, altura $h = \sin(x_k^*)^2$ y grosor $t = \Delta x_k$. Por (4), el volumen del cascarón es

$$V_k = 2\pi x_k^* \sin(x_k^*)^2 \Delta x_k.$$

Así, por (3) se tiene

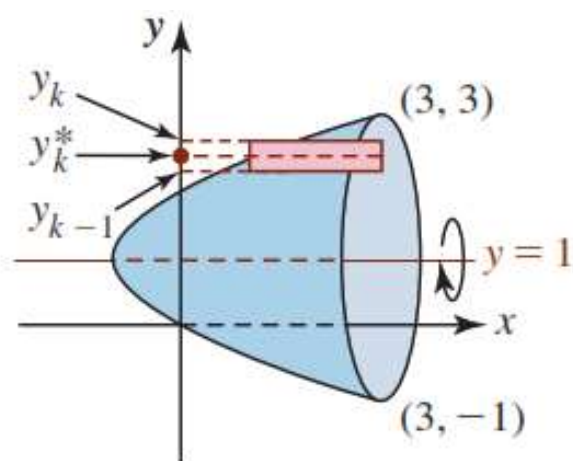
$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx.$$

Si $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$ y $x dx = \frac{1}{2} du$. Los límites de integración u se determinan a partir del hecho de que cuando $x = 0$, $u = 0$ y $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. En consecuencia, el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura 6.4.5b) es

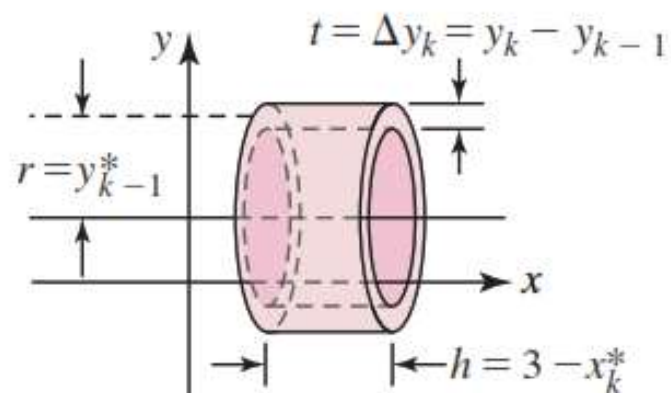
$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin u du = -\pi \cos u \Big|_0^{\pi} = \pi(1 + 1) = 2\pi.$$

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

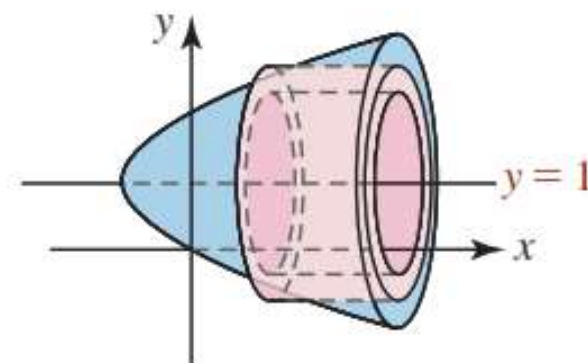
Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.



a) Región



b) Cascarón



c) Sólido de revolución

FIGURA 6.4.6 Región, cascarón

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.

Solución En este caso, un elemento rectangular de área perpendicular a una recta horizontal que gire alrededor de la recta $y = 1$ generaría un disco. Puesto que el radio del disco no se mide desde el eje x sino desde la recta $y = 1$, sería necesario resolver $x = y^2 - 2y$ para y en términos de x . Este inconveniente puede evitarse si se usa un elemento horizontal de área, que entonces genera un cascarón como el que se muestra en la FIGURA 6.4.6b). Observe que cuando $x = 3$, la ecuación $3 = y^2 - 2y$, o en forma equivalente $(y + 1)(y - 3) = 0$, tiene las soluciones -1 y 3 . Por tanto, sólo es necesario partir el intervalo $[1, 3]$ sobre el eje y . Después de hacer las identificaciones $r = y_k^* - 1$, $h = 3 - x_k^*$ y $t = \Delta y_k$, por (4) se concluye que el volumen de un cascarón es

$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - x_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - (y_k^*)^2 + 2y_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(-(y_k^*)^3 + 3(y_k^*)^2 + y_k^* - 3)\Delta y_k. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.

A partir de la última línea se observa que el volumen del sólido es la integral definida

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3) dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3y \right) \Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] = 8\pi. \end{aligned}$$

GRACIAS

395

Ing. Kléber Jaramillo, MSc.