

Planificación de Clase: Funciones Inversas en Arquitectura

Objetivo General: Que los estudiantes comprendan el concepto de función inversa y su aplicación práctica en el diseño arquitectónico para calcular una variable de entrada a partir de una salida deseada.

Desarrollo de la Clase:

Contexto: "Están diseñando la sala de reuniones principal para un nuevo centro de convenciones en Riobamba. Las normativas de seguridad y evacuación exigen que el área mínima por persona sea de $1,5 \text{ m}^2$. Además, por razones de acústica y visuales, la relación entre el largo y el ancho de la sala debe seguir un patrón específico."

Datos Clave:

El **área total** de la sala ($\text{Área}(L)$) se puede expresar como una función del largo L :
 $\text{Área}(L) = L \cdot (0,8L - 2) = 0,8L^2 - 2L$ (Esta función nos da el área si conocemos el largo).

Restricción: El largo L debe ser mayor a 2,5 metros para que el ancho sea positivo.

Pregunta Inicial: "Si necesitamos que la sala de reuniones tenga una capacidad para 120 personas, ¿cuáles deberían ser las dimensiones (largo y ancho) aproximadas de la sala?"

2. Exploración y Desarrollo

Nuestra función es $\text{Área}(L) = 0,8L^2 - 2L$. Esto nos da el área si conocemos el largo L . Pero ahora queremos lo contrario: conocer L si ya sabemos el Área .

Recuerdan la prueba de la línea horizontal.

Para que una función tenga inversa, debe ser uno a uno (inyectiva).

La función $\text{Área}(L)$ es una parábola. Si consideramos $L > 2,5$, veremos que es creciente y, por lo tanto, sí es inyectiva en ese dominio, lo cual nos permite buscar su inversa.

Determinación del Área Necesaria (5 min):

Si necesitamos una capacidad para 120 personas y cada una requiere $1,5 \text{ m}^2$, ¿cuál es el área mínima requerida?"

$$\text{Área Requerida} = 120 \text{ personas} \times 1,5 \text{ m}^2/\text{persona} = 180 \text{ m}^2.$$

Búsqueda de la Función Inversa:

Para encontrar la inversa, generalmente intercambiamos x y y y luego despejamos y . Aquí, intercambiaremos Área y L .

$$\text{Sea } y = \text{Área}(L) \text{ y } L = X.$$

Entonces,

$$y = 0,8X^2 - 2X.$$

En nuestro camino para encontrar la función inversa, llegamos a la siguiente ecuación después de intercambiar x y y :

$$x = 0,8y^2 - 2y$$

Vamos a mover la x al lado derecho de la ecuación, cambiando su signo:

$$0,8y^2 - 2y - x = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática. Para despejar X , usaremos la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas ($aX^2 + bX + c = 0$).

$$\text{Aquí, } a = 0,8, b = -2, c = -Y.$$

$$X = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(0,8)(-Y)}}{2(0,8)}$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3,2Y}}{1,6}$$

Dado que L (nuestra X) debe ser positivo (y mayor a 2,5), tomamos la raíz positiva.

Así, nuestra función inversa $L(\text{Área})$ es:

$$L(\text{Área}) = \frac{2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}}}{1,6}$$

Esta es la función que nos dice el largo necesario para un área dada.

Aplicación de la Función Inversa:

Ahora, usemos nuestra función inversa para encontrar el largo necesario para un área de 180 m^2 ."

$$L(180) = \frac{2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot 180}}{1,6}$$

$$L(180) = \frac{2 + \sqrt{4 + 576}}{1,6}$$

$$L(180) = \frac{2 + \sqrt{580}}{1,6}$$

$$L(180) = \frac{2 + 24,083}{1,6}$$

$$L(180) = \frac{26,083}{1,6} \approx 16,30 \text{ metros.}$$

El largo de la sala debe ser aproximadamente **16,30 metros**

Ahora calculamos el ancho usando

$$A(L) = 0,8L - 2$$

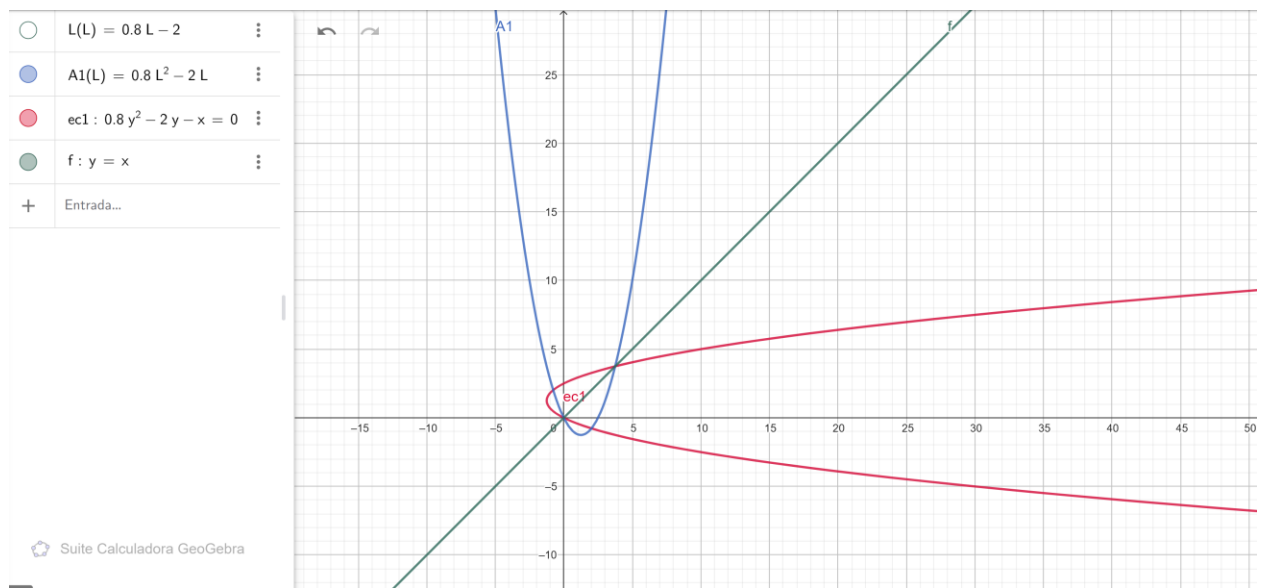
$$A(16,30) = 0,8(16,30) - 2$$

$$A(16,30) = 13,04 - 2 = 11,04 \text{ metros.}$$

Las dimensiones aproximadas para una sala de 120 personas serían **16,30 metros de largo por 11,04 metros de ancho**

Esto cumple con nuestra restricción de $L > 2,5$ metros.

Graficación e Interpretación:



Se grafica tanto $\text{Área}(L)$ como su inversa $L(\text{Área})$ en el mismo plano. Recuerden que la gráfica de una función y su inversa son simétricas con respecto a la línea $y = x$.

Características de las funciones

Función Original (Área en función del Largo): $\text{Área}(L) = 0,8L^2 - 2L$ Donde L (Largo) es la variable independiente y $\text{Área}(L)$ es la variable dependiente.

Función Inversa (Largo en función del Área): $L(\text{Área}) = \frac{2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}}}{1,6}$ Donde Área es la nueva variable independiente y $L(\text{Área})$ es la nueva variable dependiente.

Análisis de las Características de la Función Original y la Función Inversa

Función Original: $\text{Área}(L) = 0,8L^2 - 2L$

Dominio:

Matemáticamente: Una función cuadrática polinómica tiene un dominio de todos los números reales, $L \in (-\infty, \infty)$.

Contexto Arquitectónico: El largo (L) de una sala debe ser una medida positiva. Además, para que el ancho $A(L) = 0,8L - 2$ sea positivo (es decir, que la sala tenga un ancho real y no nulo o negativo), necesitamos:

$$0,8L - 2 > 0$$

$$0,8L > 2$$

$$L > \frac{2}{0,8}$$

$$L > 2,5.$$

Dominio Relevante: $L \in (2,5, \infty)$.

Rango:

Para encontrar el rango de una parábola, necesitamos su vértice. La coordenada L del vértice es

$$L_v = \frac{-b}{2a}$$

$$L_v = \frac{-(-2)}{2(0,8)}$$

$$L_v = \frac{2}{1,6}$$

$$L_v = 1,25.$$

La coordenada *Área* del vértice es

$$\text{Área}(1,25) = 0,8(1,25)^2 - 2(1,25) = 0,8(1,5625) - 2,5 = 1,25 - 2,5 = -1,25.$$

El vértice es $(1,25, -1,25)$. Como la parábola abre hacia arriba ($a = 0,8 > 0$), su rango matemático es $[-1,25, \infty)$.

Contexto Arquitectónico: Dado que nuestro dominio relevante es $L \in (2,5, \infty)$ y en este intervalo la función es creciente, el punto más bajo en este dominio es cuando L se acerca a 2,5. $\text{Área}(2,5) = 0,8(2,5)^2 - 2(2,5) = 0,8(6,25) - 5 = 5 - 5 = 0$.

Rango Relevante: $\text{Área} \in (0, \infty)$. (El área de una sala debe ser positiva).

Raíces (Intersecciones con el Eje L, donde $\text{Área}(L) = 0$):

$$0,8L^2 - 2L = 0$$

Factorizamos L : $L(0,8L - 2) = 0$

Soluciones: $L = 0$ o $0,8L - 2 = 0 \Rightarrow 0,8L = 2 \Rightarrow L = 2,5$.

Contexto Arquitectónico: Las raíces son $L = 0$ y $L = 2,5$. Estas representan los largos donde el área de la sala es cero. Tienen sentido: si el largo es cero, el área es cero. Si el largo es 2,5 metros, el ancho $A(2,5) = 0,8(2,5) - 2 = 2 - 2 = 0$, así que el área también es cero.

Intersecciones con el Eje Área (cuando $L = 0$):

$$\text{Área}(0) = 0,8(0)^2 - 2(0) = 0.$$

La función interseca el eje del Área en el punto $(0,0)$, que también es una de sus raíces. Esto significa que si el largo de la sala es 0, el área es 0.

Puntos Máximos y Mínimos:

Como es una parábola que abre hacia arriba, tiene un **mínimo global** en su vértice $(1,25, -1,25)$.

Contexto Arquitectónico: Dado nuestro dominio relevante $L \in (2,5, \infty)$, la función es estrictamente **creciente** en este intervalo. Por lo tanto, no tiene un máximo en este dominio, y el valor mínimo es cuando L se acerca a 2,5 (donde el Área se acerca a 0).

Asíntotas:

Una función cuadrática polinómica **no tiene asíntotas** (verticales, horizontales u oblicuas). Su gráfica es una parábola que se extiende indefinidamente.

Función Inversa: $L(\text{Área}) = \frac{2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}}}{1,6}$

¡Aquí es donde la relación se vuelve mágica! Las características del dominio y rango de la función original se **intercambian** en la función inversa.

Dominio:

Matemáticamente: Para que la raíz cuadrada sea real, el argumento debe ser no negativo: $4 + 3,2 \cdot \text{Área} \geq 0 \Rightarrow 3,2 \cdot \text{Área} \geq -4 \Rightarrow \text{Área} \geq -\frac{4}{3,2} \Rightarrow \text{Área} \geq -1,25$.

Contexto Arquitectónico: El área de una sala debe ser positiva.

Dominio Relevante: $\text{Área} \in (0, \infty)$.

Relación con la Original: Este dominio es el **rango relevante** de la función original.

Rango:

Matemáticamente: Si $\text{Área} = 0$, $L(0) = \frac{2 + \sqrt{4}}{1,6} = \frac{2 + 2}{1,6} = \frac{4}{1,6} = 2,5$.

A medida que *Área* aumenta, el término bajo la raíz aumenta, y $L(\text{Área})$ también aumenta sin límite.

Rango Relevante: $L \in (2,5, \infty)$.

Relación con la Original: Este rango es el **dominio relevante** de la función original.

Raíces (Intersecciones con el Eje Área, donde $L(\text{Área}) = 0$):

$$\frac{2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}}}{1,6} = 0.$$

$$\text{Esto implicaría } 2 + \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}} = 0 \Rightarrow \sqrt{4 + 3,2 \cdot \text{Área}} = -2.$$

Una raíz cuadrada de un número real no puede ser negativa. Por lo tanto, **no tiene raíces reales** en el dominio donde $\text{Área} > 0$.

Contexto Arquitectónico: Esto es coherente, ya que un área positiva siempre nos devolverá un largo positivo.

Intersecciones con el Eje L (cuando $\text{Área} = 0$):

$$L(0) = 2,5.$$

La función inversa interseca el eje L en $(0,2,5)$.

Relación con la Original: Esto corresponde a la raíz de la función original en $(2,5,0)$. El punto $(2,5,0)$ en la función original se convierte en $(0,2,5)$ en la función inversa, ¡las coordenadas se intercambian!

Puntos Máximos y Mínimos:

La función $L(\text{Área})$ es una función creciente en su dominio $\text{Área} \in (0, \infty)$. A medida que el área aumenta, el largo necesario también aumenta.

Por lo tanto, no tiene máximos o mínimos en este dominio. El valor más bajo que toma es cuando *Área* se acerca a 0, y *L* se acerca a 2,5.

Asíntotas:

Una función que incluye una raíz cuadrada y no tiene denominadores que puedan ser cero (como esta) **no tiene asíntotas verticales ni horizontales** en el sentido tradicional. Crece indefinidamente, aunque a una tasa decreciente (se "aplana" un poco a medida que el *Área* crece mucho).

Resumen de la Relación Clave:

Característica	Función Original <i>Área</i> (<i>L</i>)	Función Inversa <i>L</i> (<i>Área</i>)
Dominio Relevante	$L \in (2,5, \infty)$	$\textit{Área} \in (0, \infty)$
Rango Relevante	$\textit{Área} \in (0, \infty)$	$L \in (2,5, \infty)$
Raíces	$L = 0, L = 2,5$ (donde $\textit{Área} = 0$)	No tiene (donde $L = 0$ para $\textit{Área} > 0$)
Intersección Eje X	(0,0), (2,5,0) (con eje <i>L</i>)	No tiene (con eje <i>Área</i> positivo)
Intersección Eje Y	(0,0) (con eje <i>Área</i>)	(0,2,5) (con eje <i>L</i>)
Comportamiento	Creciente para $L > 1,25$	Creciente para $\textit{Área} > -1,25$

Característica	Función Original $\text{Área}(L)$	Función Inversa $L(\text{Área})$
Asíntotas	No tiene	No tiene
Simetría Gráfica	(Con $L(\text{Área})$) respecto a $y = x$	(Con $\text{Área}(L)$) respecto a $y = x$