FUNCIÓN CUADRÁTICA

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- La función cuadrática es una función polinómica del tipo
- f(x) = ax^2 + bx + c,
- Los coeficientes a, b y c son números reales
- a debe ser distinto de cero.

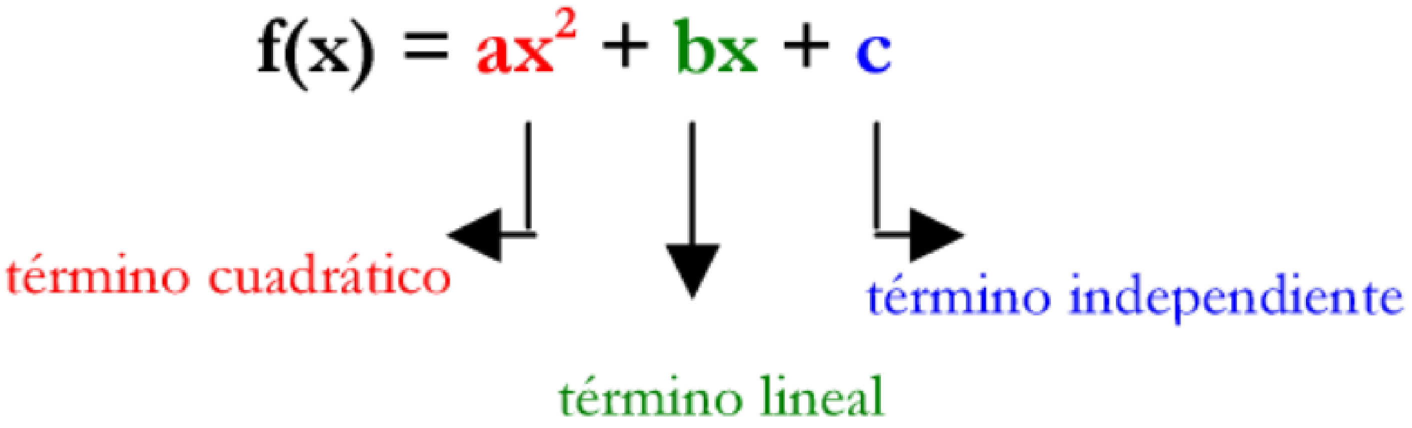


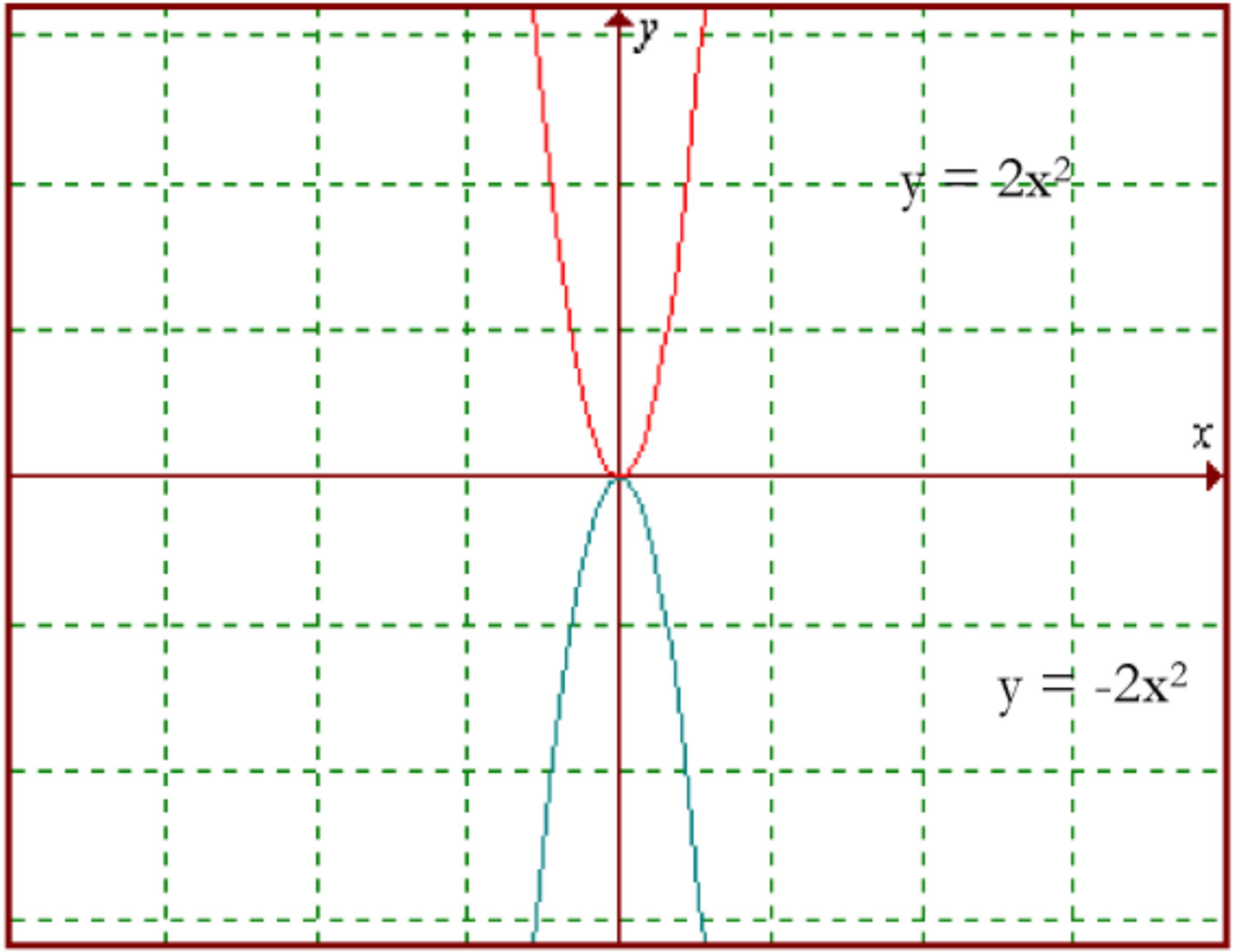
GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para construir el gráfico de una función cuadrática debemos tener en cuenta:

- **Coeficiente principal**: Si **a**, o sea el coeficiente principal, es mayor que cero la parábola es cóncava hacia arriba = 

  Si **a** es menor que cero la parábola es cóncava hacia abajo ó convexa = 

Coeficiente principal



Raíces

- **Raíces**: para hallar las raíces, o sea los puntos donde la gráfica corta el eje x, debemos igualar la función a cero. Si la función cuadrática es completa utilizamos la ecuación resolvente. Si es incompleto podemos despejar x ó igualmente utilizar la ecuación resolvente.

Raices

Siendo a, b, y c los coeficientes de la función:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Término independiente

- **Intersección con el eje y**: El término independiente, c, indica el punto donde la parábola corta el eje.

Vértice de la parábola

↳ **Vértice de la parábola**: El vértice de la parábola es un punto $V = (x_v ; y_v)$, podemos hallarlo de dos formas:

a) Realizando el promedio de las raíces,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$ si la función tiene raíces.

b) Si la función no tuviera raíces reales podemos hallar x_v con la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2.a},$$ donde b es el coeficiente lineal y a el coeficiente cuadrático.

Eje de simetría

- **Eje de simetría:** Las funciones cuadráticas son simétricas respecto de la recta vertical que pasa por el vértice de la misma. $x_e = x_v$

Ejercicio

$$f(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

- **Coeficiente principal**: $a = 3 \Rightarrow$ como el coeficiente principal es mayor que cero las ramas de la parábola van hacia arriba, o sea es cóncava.

Ejercicio

Raíces:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.3.(-6)}}{2.3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm 9}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \;;\; x_2 = -1$$

Ejercicio

Intersección con el eje y: c = -6, esto indica que corta al eje y en $y = -6$

Vértice: $V = (x_v\ ;\ y_v)$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_v = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_v = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\frac{1}{2} - 6$$

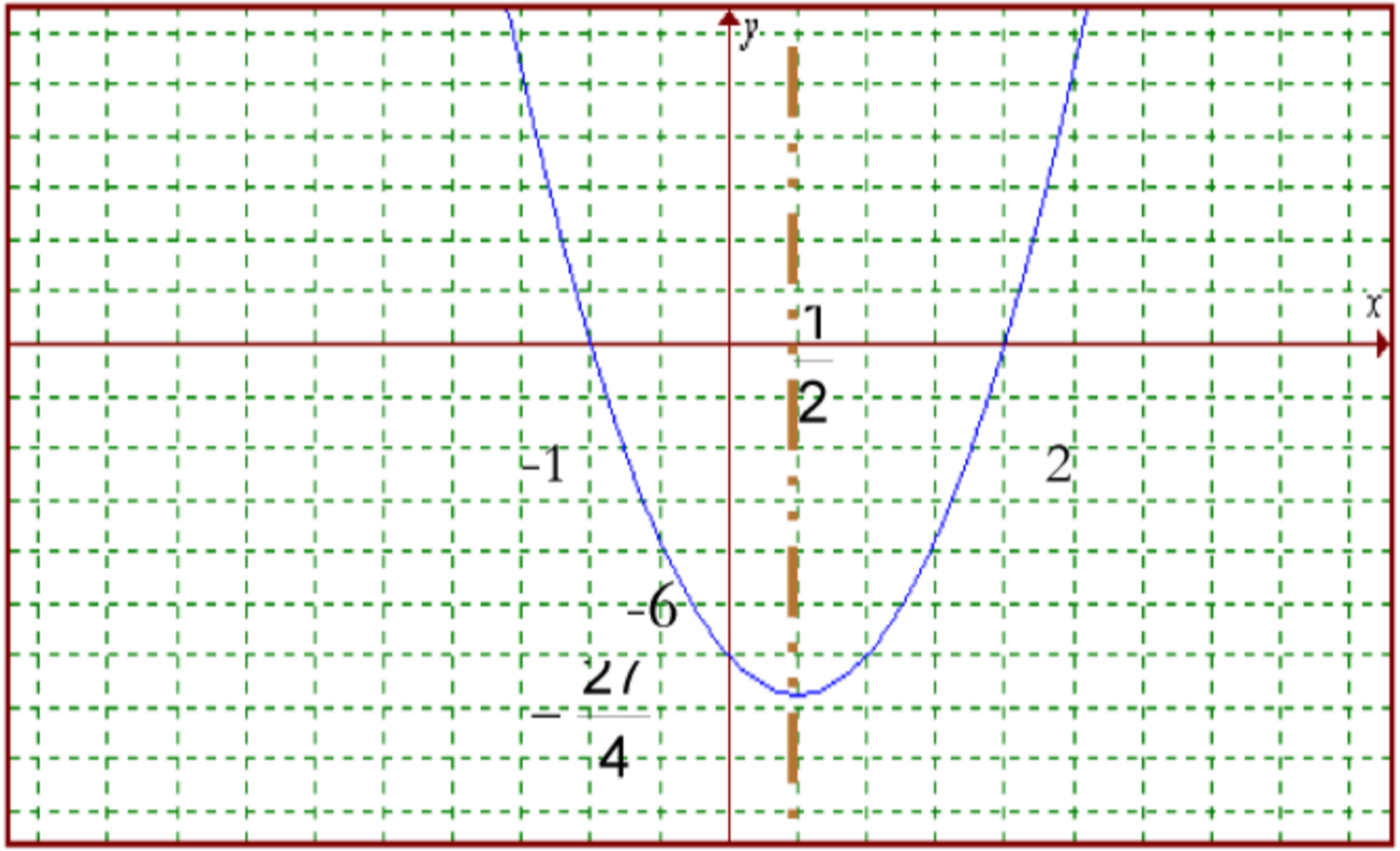
$$y_v = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - 6 = -\frac{27}{4}$$

$$\boxed{V = \left(\frac{1}{2}; -\frac{27}{4}\right)}$$

Eje de simetría: Es la recta $x_e = \frac{1}{2}$

Graficamos con los datos obtenidos:

Ejercicio



Si una función cuadrática no tiene raíces reales, para graficarla debemos tener en cuenta el vértice, la concavidad y un par de puntos a ambos lados del vértice.

$$y = x^2 + 2$$

Ejercicio

Buscamos las raíces igualando a cero:

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x = \sqrt{-2}$ la función no tiene raíces, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a -2.

Ejercicio

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{0}{2.1} = 0 \\ y_v = 0^2 + 2 = 2 \end{array}\right\} \boxed{V = (0\,;2)}$$

Ejercicio

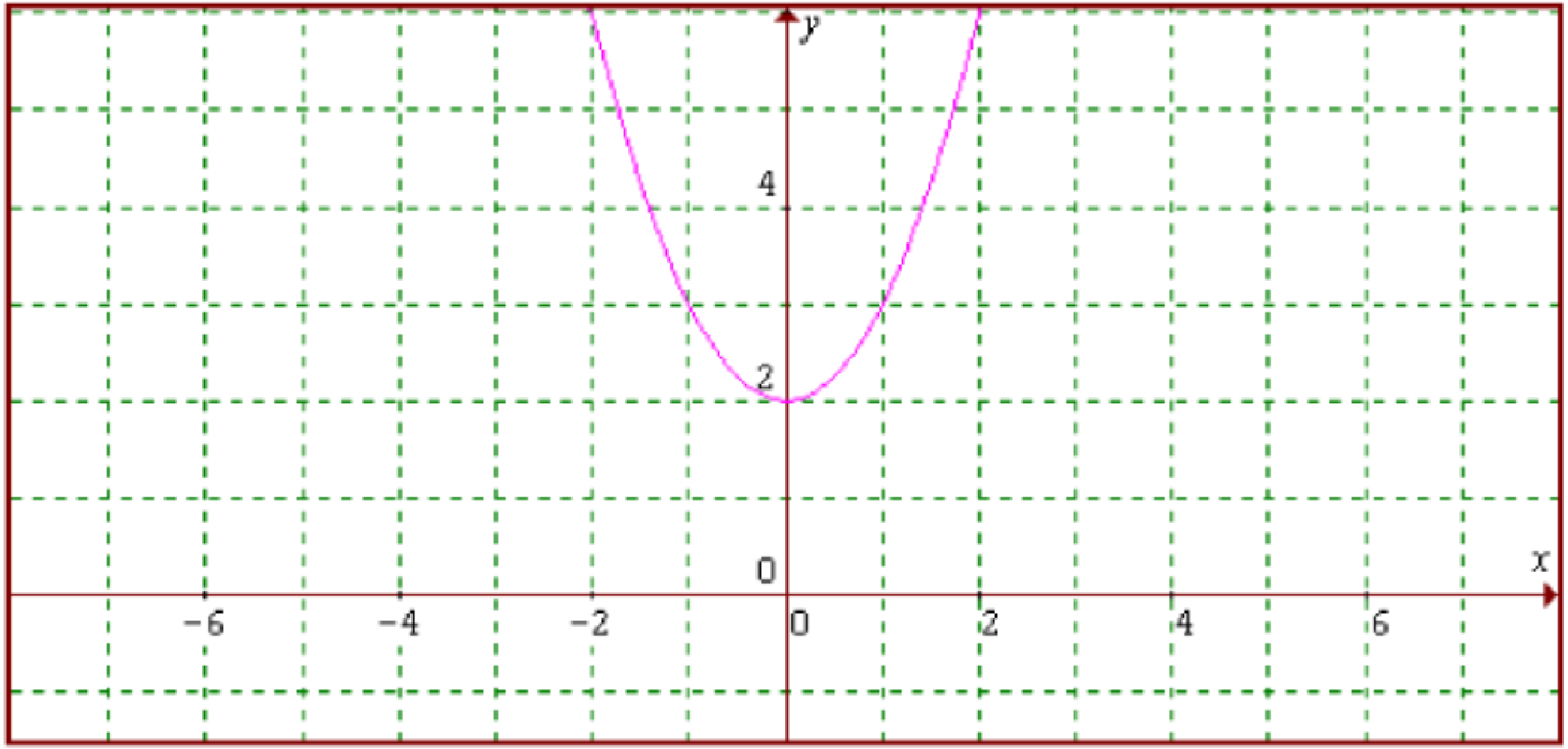
Coeficiente principal: a = 1 , la parábola tiene sus ramas hacia arriba

Buscamos un par de puntos a ambos lados del vértice para que nos ayuden a realizar el gráfico de esta función:

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$

$f(1) = 1^2 + 2 = 3$

Ejercicio



PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Una función cuadrática puede cortar el eje x en dos puntos, uno ó ninguno.

Esto quiere decir que puede tener: dos raíces, una raíz ó ninguna.

¿Qué determina que una función cuadráti-

ca tenga una, dos ó ninguna raíz?

Si nos fijamos en la fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Ejercicio a

$$y = x^2 - 4x + 4$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

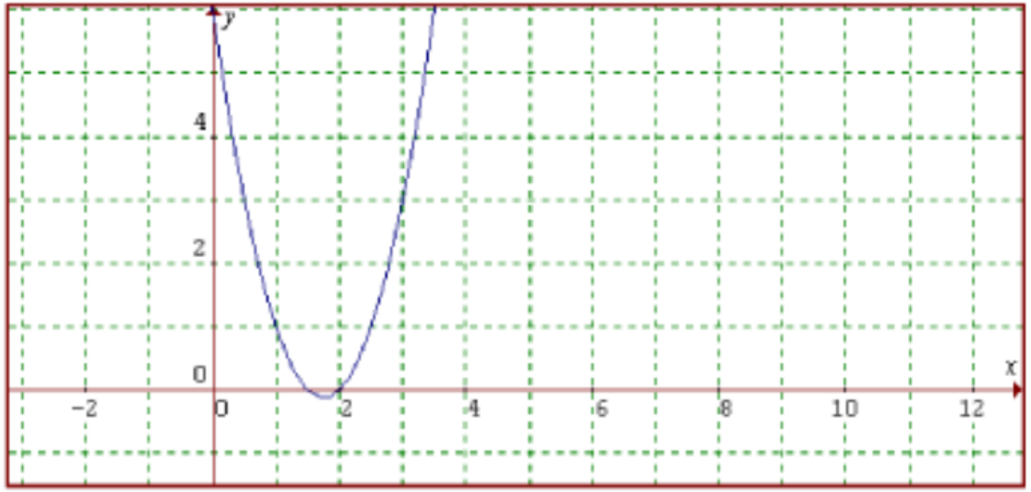
$$x_1 = x_2 = 2$$

Ejercicio b

$$y = 2x^2 - 7x + 6$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4.2.6}}{2.2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = \frac{3}{2}$$

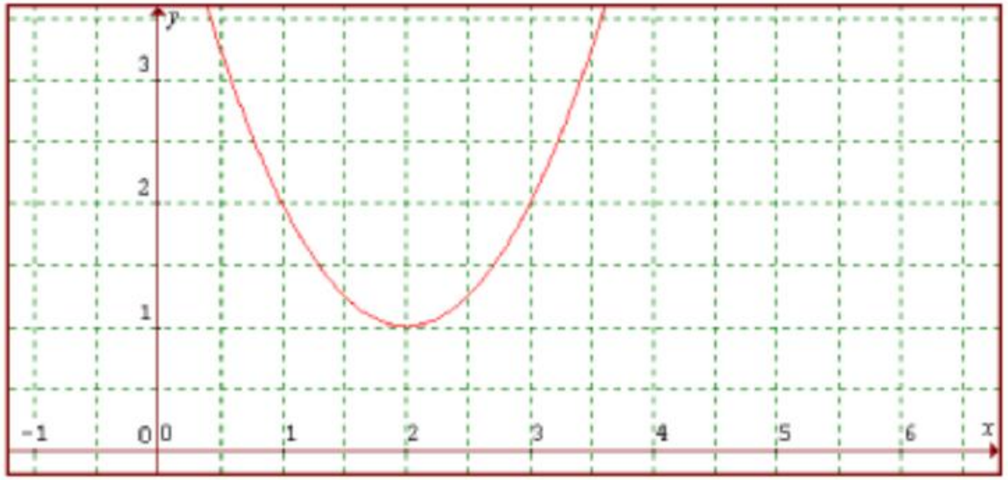


Ejercicio c

$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \text{no existen raíces}$$



El discriminante está formado por los términos que se encuentran dentro de la raíz cuadrada , o sea $b^2 - 4.a.c$

Si $b^2 - 4.a.c = 0$ la función tiene raíces reales iguales, como en el ejemplo a)

Si $b^2 - 4.a.c > 0$ la función tiene raíces reales distintas, como en el ejemplo b)

Si $b^2 - 4.a.c < 0$ la función no tiene raíces reales, como en ejemplo c)

- Hasta ahora dada la función cuadrática hemos hallado las raíces, el vértice, el eje de simetría y con dichos datos hemos analizado y graficado la función.
- Ahora vamos a reconstruir una función cuadrática conociendo sus raíces.

- Tomemos las raíces de la función del ejemplo b)

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

- Si sumamos estas raíces obtenemos:

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{3}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$$

- Comparamos los coeficientes de la función con el resultado de la suma:

$$\frac{7}{2}\;\begin{matrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\end{matrix}\;\frac{-b}{a}$$

- Si multiplicamos estas raíces obtenemos:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{2}$$

- Comparamos los coeficientes de la función con el resultado de la multiplicación:

$$\frac{6}{2}\;\begin{matrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\end{matrix}\;\frac{c}{a}$$

- De estas comparaciones deducimos que:

$a = 2$; $b = 7$ y $c = 6$

En general

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Ejercicio resuelto Reconstruir la función cuadrática sabiendo sus raíces

$$x_1 = -\frac{3}{4} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

- Sumamos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$$

- Multiplicamos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{4}} \\ \\ \boxed{\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{8}} \end{array}\right\}$$

- Buscamos el denominador común a ambas fracciones y obtenemos:

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{10}{8} \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{8}}$$

- Con estos datos deducimos que:

$$a = 8 \quad ; \quad b = 10 \quad ; \quad c = 3$$

Reconstruimos la función:

$$y = 8x^2 + 10x + 3$$