TEMA 11 Movimiento acelerado

Resultado de aprendizaje: *Analiza el movimiento en línea recta mediante los conceptos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea, para su aplicación en la resolución de ejercicios prácticos.*

Aceleración media e instantánea

Suponga que algo se está moviendo a velocidad constante y luego la velocidad cambia. Semejante cambio de velocidad se denomina **aceleración**.

La **aceleración** es la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo.

La aceleración media es análoga a la velocidad media, es decir, es el cambio de velocidad dividido entre el tiempo que toma realizar ese cambio:

Aceleración media en x de una partícula en movimiento rectilíneo

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Cambio en la componente x de la velocidad

Intervalo de tiempo

En el SI, se mide en **metros por segundo al cuadrado** (**m/s²**). Además, como la velocidad es una cantidad vectorial, *también lo es la aceleración*.

El término aceleración se aplica tanto para reducciones como para aumentos de velocidad. La reducción de la velocidad suele conocerse como *desaceleración*.

Cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su rapidez. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena.

PUNTO DE CONTROL:

Si un automóvil te rebasa a velocidad constante, ¿cuál es su aceleración?

PUNTO DE CONTROL:

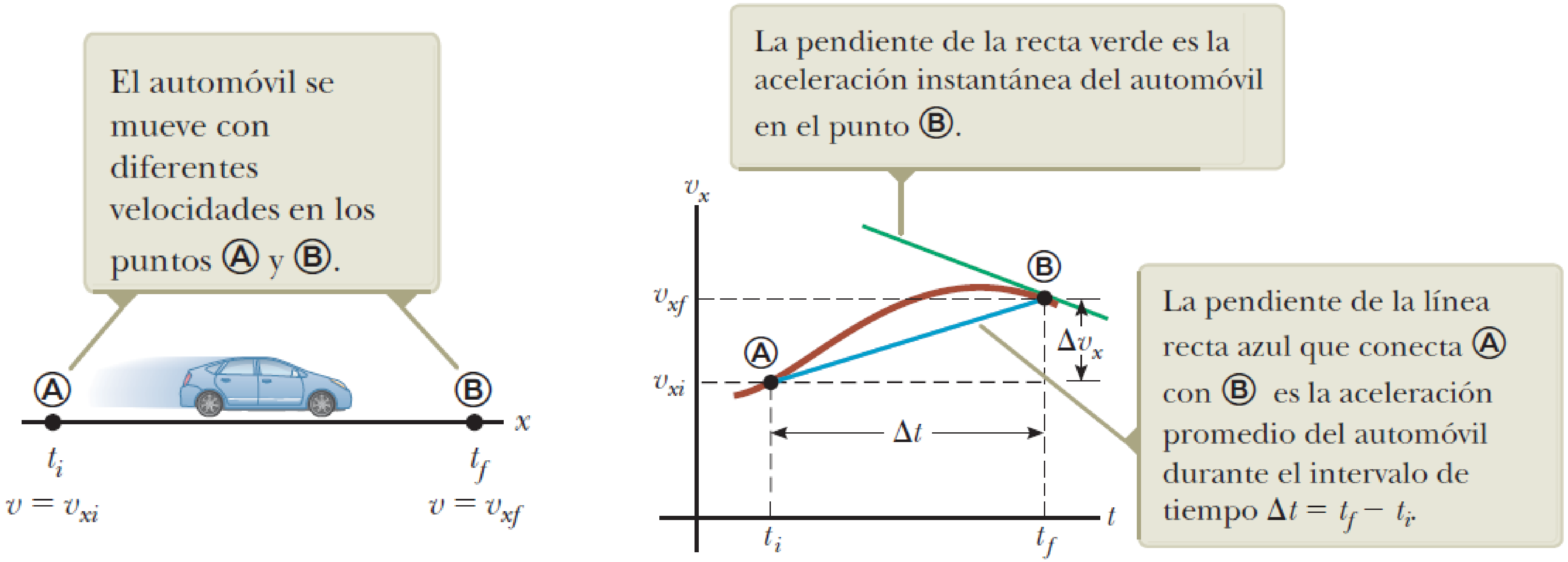
Si un automóvil viaja hacia el Este y luego frena, ¿cuál es la dirección de la aceleración? (a) hacia el Este, (b) hacia el Oeste, (c) ni al Este ni al Oeste.

En algunas situaciones el valor de la aceleración promedio puede ser diferente durante distintos intervalos de tiempo. Por lo tanto, es útil definir la **aceleración instantánea** como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero.

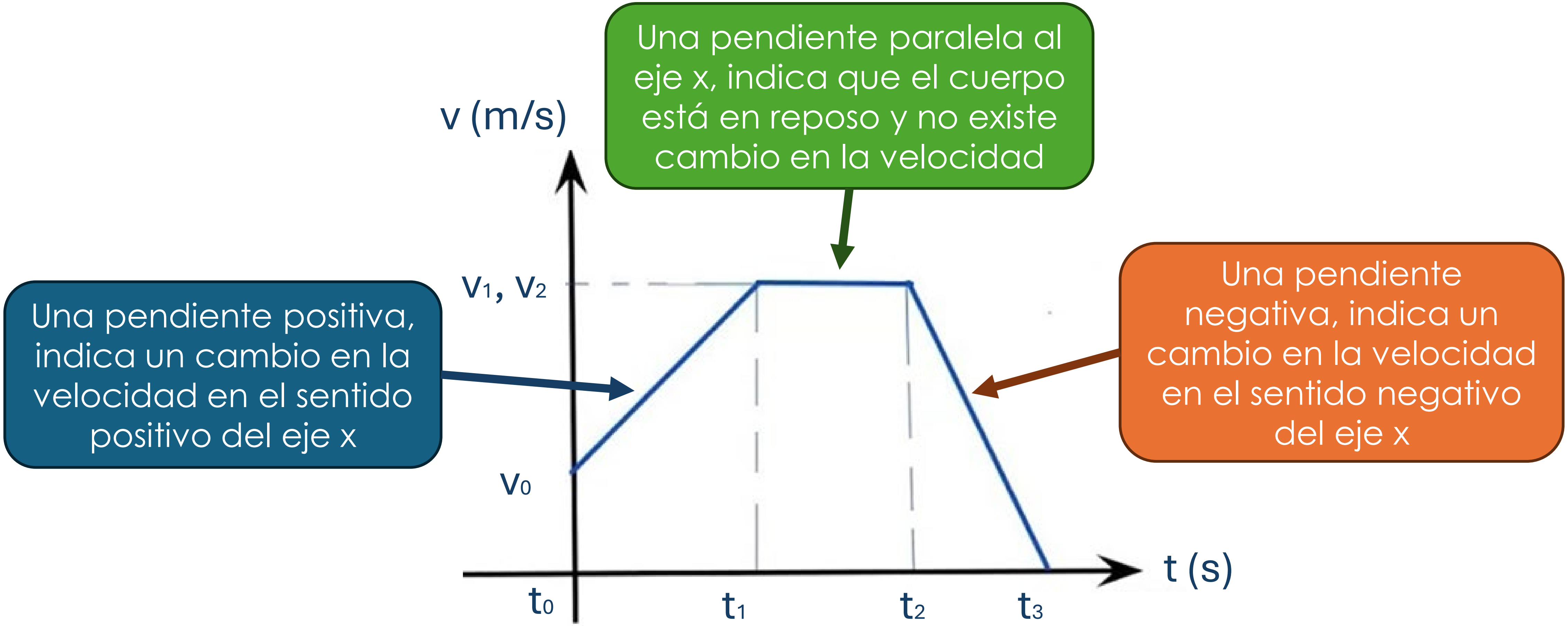
La **aceleración instantánea en x** de una partícula en MRU…

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

… es igual al límite de la aceleración media en x cuando el intervalo de tiempo tiende a 0.



Cuando existe aceleración, las gráficas de velocidad en función del tiempo (v-t) varían, y **la pendiente de la recta representa la aceleración promedio**.



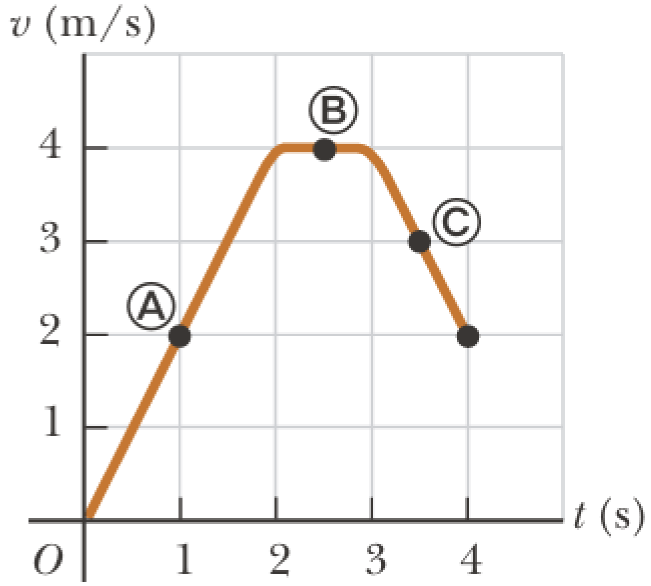
Similar al caso del MRU, el área bajo la curva, representa el desplazamiento realizado.

Ejemplo 11.1

Un matrimonio viaja en una camioneta SUV a 90 km/h por una carretera recta. Ven un accidente a lo lejos, así que el conductor disminuye su velocidad a 40 km/h en 5 s. ¿Qué aceleración media tuvo la camioneta?

Ejemplo 11.2

Un jugador de béisbol se mueve en una trayectoria recta con objeto de atrapar una pelota en vuelo bateada hacia el jardín. Su velocidad como una función del tiempo se muestra en la figura. (a) Encuentre su aceleración instantánea en los puntos A, B y C. (b) Determine el desplazamiento del jugador en los intervalos [0;2], [2,3], [3,4] y [0,4].



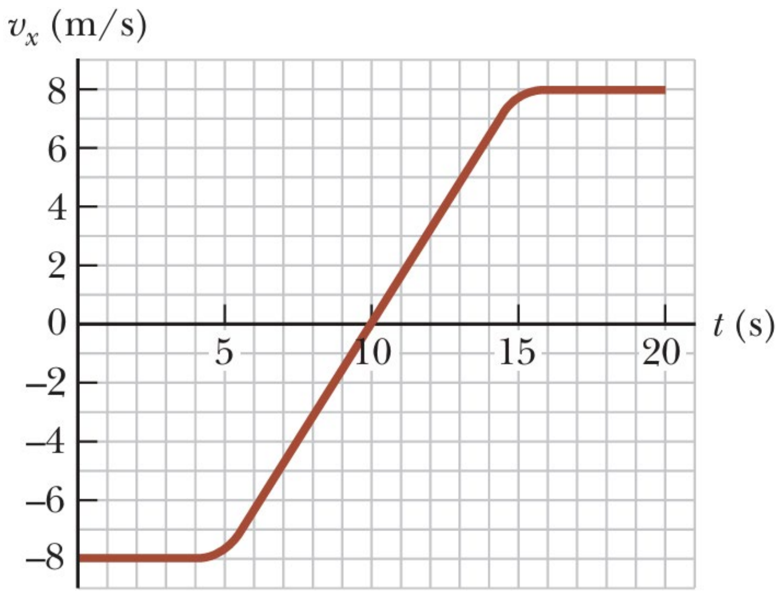
Actividades en clase

1. Un tren reduce su velocidad de 60 a 20 km/h en un tiempo de 8 s. Encuentre la aceleración en unidades del SI. ***R.: -1,39 m/s²***

2. Una superbola de 50 g que viaja a 25 m/s bota en una pared de ladrillo y rebota a 22 m/s. Una cámara de alta rapidez registra este evento. Si la bola está en contacto con la pared durante 3,5 ms, ¿cuál es la magnitud de la aceleración promedio de la bola durante este intervalo de tiempo? ***R.: $1{,}34 \times 10^4$ m/s²***

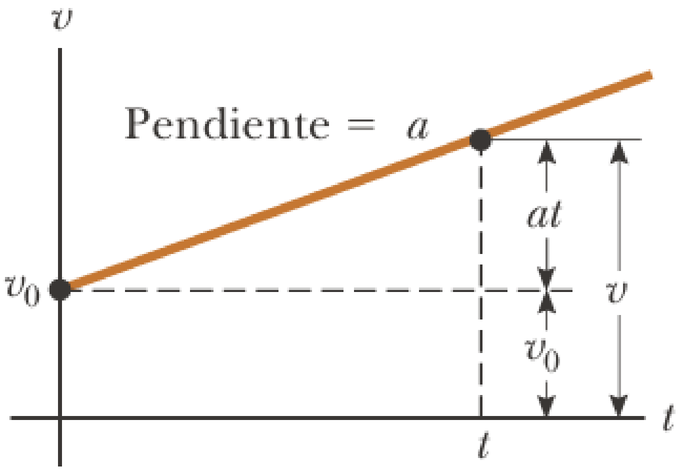
3. En la figura se muestra una gráfica velocidad-tiempo de un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (a) Trace una gráfica de la aceleración en función del tiempo. Determine la aceleración promedio del objeto en los intervalos de tiempo (b) t = 5 s a t = 15 s y (c) t = 0 a t = 20 s.

R.: (b) 1,6 m/s²; (c) 0,8 m/s²



Movimiento con aceleración constante

Muchas aplicaciones de la mecánica comprenden objetos que se mueven con aceleración constante. Este tipo de movimiento es importante ya que se aplica a numerosos objetos en la naturaleza, como un objeto en caída libre cerca de la superficie de la Tierra (suponiendo que la resistencia del aire se pueda ignorar).



Cuando un objeto se mueve con aceleración constante, la aceleración instantánea en cualquier punto en un intervalo de tiempo es igual al valor de la aceleración promedio sobre todo el intervalo.

Dado que la aceleración promedio es igual a la aceleración instantánea cuando a es constante, podemos suponer que $\bar{a} = a$, de manera que:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$

Sea $t_0 = 0$ y t_f cualquier tiempo arbitrario t, entonces se puede reescribir la ecuación anterior como:

Velocidad final de una partícula con aceleración constante

$$\boldsymbol{v_f = v_0 + at}$$

Velocidad de la partícula en $t = 0$

Tiempo

Aceleración constante de la partícula

Esta ecuación establece que la aceleración a cambia de manera continua la velocidad inicial v_0 en una cantidad at.

Dado que la velocidad aumenta o disminuye uniformemente con el tiempo, podemos expresar la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo como *el promedio aritmético de la velocidad inicial v_0 y la velocidad final v_f*:

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_0}{2}$$

Recuerde que esta expresión solo es válida cuando la aceleración es constante, caso en el cual la velocidad aumenta uniformemente.

Podemos usar el resultado anterior junto con la ecuación definitoria para la velocidad promedio para obtener una expresión para el desplazamiento de un objeto como una función del tiempo. De nuevo, elegimos $t_0 = 0$ y $t_f = t$, y por conveniencia, escribimos $\Delta x = x_f - x_0$. Esto resulta en:

$$\Delta x = \bar{v}t = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t = \frac{1}{2}(v_f + v_0)t$$

Luego, como $v_f = v_0 + at$, entonces:

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t = \frac{1}{2}v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}v_0 t$$

Desplazamiento de una partícula con aceleración constante

Tiempo

$$\boldsymbol{\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Velocidad de la partícula en $t = 0$

Aceleración constante de la partícula

Esta ecuación también puede reescribirse como $x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ para hallar la posición de la partícula en cualquier instante t.

Por último, podemos obtener una expresión que no contenga el tiempo despejando t de la ecuación $v_f = v_0 + at$ y sustituyendo en la ecuación $\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_0)t$, lo que resulta en:

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_0)\left(\frac{v_f - v_0}{a}\right) = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

Luego, al despejar v_f, se obtiene:

Velocidad final de una partícula con aceleración constante

Desplazamiento de la partícula

$$\boldsymbol{v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x}$$

Aceleración constante de la partícula

Velocidad de la partícula en $t = 0$

De esta manera, hemos hallado ecuaciones que implican variables del **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** (**MRUA**). Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema que implique movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula.

La siguiente tabla resume todas las ecuaciones del MRUA y sus variables:

Ecuación	Cantidades que incluye			
$v_f = v_0 + at$	t	v_f		a
$\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_0)t$	t	v_f	Δx	
$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	t		Δx	a
$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$		v_f	Δx	a

Para la resolución de problemas relacionados se sugiere la siguiente estrategia:

1. Leer cuidadosamente el problema, trazar un bosquejo y escribir en él los datos.
2. Establecer los tres parámetros conocidos y los dos desconocidos; cuidando los signos y las unidades.
3. Seleccionar la ecuación que más se adecúe en función de los datos.
4. Sustituir las cantidades y resolver la ecuación.

Ejemplo 11.3
Una lancha de motor parte del reposo y alcanza una velocidad de 15 m/s en un tiempo de 6 s. ¿Cuál era su aceleración y cuán lejos viajó?

Ejemplo 11.4

Un automóvil de carreras que parte del reposo acelera a un ritmo constante de 5 m/s^2. (a) ¿Cuál es la velocidad del automóvil después de que ha recorrido 100 pies? (b) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

Ejemplo 11.5

Un avión aterriza en la cubierta de un portaaviones con una velocidad inicial de 90 m/s y se detiene por completo en una distancia de 100 m. Encuentre la aceleración y el tiempo necesario para detenerlo.

Ejemplo 11.6

Una persona conduce su vehículo con rapidez constante de 15 m/s y pasa por un cruce escolar, donde el límite de velocidad es de 10 m/s. En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está detenido en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3 m/s^2.(a) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? (b) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? (c) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

Actividades en clase

1. En una prueba de frenado, un vehículo que viaja a 60 km/h se detiene en un tiempo de 3 s. ¿Cuáles fueron la aceleración y la distancia de frenado? ***R.: -5,56 m/s^2; 25 m***

2. Un camión recorre 40 m en 8,5 s mientras disminuye su velocidad de manera uniforme a una velocidad final de 2,8 m/s. (a) Encuentre la rapidez original del camión. (b) Determine su aceleración. ***R.: (a) 6,61 m/s; (b) -0,448 m/s^2***

3. Un tren viaja por una vía recta a 20 m/s cuando el maquinista aplica el freno, lo que resulta en una aceleración de 21 m/s^2 mientras el tren está en movimiento. ¿Cuál es la distancia que recorre el tren durante un intervalo de tiempo de 40 s iniciando en el instante que se aplica el freno? ***R.: 200 m***

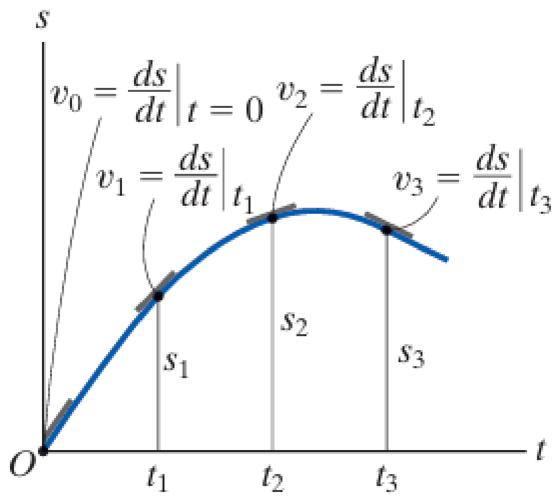
4. Un avión aterriza con una rapidez de 100 m/s y puede acelerar a una razón máxima de -5 m/s^2 conforme llega al reposo. (a) Desde el instante en que el avión toca la pista, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario antes de que pueda llegar al reposo? b) ¿Puede este avión aterrizar en el aeropuerto de una isla tropical pequeña donde la pista tiene una longitud de 0,8 km? ***R.: (a) 20 s; (b) no***

Movimiento con aceleración variable

Cuando el movimiento de una partícula es variable, su posición, velocidad y aceleración no pueden describirse mediante una sola función matemática continua a lo largo de toda la trayectoria. En su lugar, se requerirá una serie de funciones para especificar el movimiento en diferentes intervalos.

Si se puede trazar una gráfica del movimiento que relacione dos de las variables x, v, a, t, entonces esta gráfica puede utilizarse para construir gráficas subsecuentes que relacionen otras dos variables, puesto que las variables están relacionadas por las relaciones diferenciales:

$$v = \frac{dx}{dt}; \;\; a = \frac{dv}{dt}; \;\; a\,dx = v\,dv$$



Con frecuencia ocurren varias situaciones.

La relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración se indica a continuación:

- Al derivar la función de posición se puede hallar la función de velocidad.
- Al derivar la función de posición dos veces, da como resultado la función de aceleración.
- Al derivar la función de velocidad se puede hallar la función de aceleración;
- Al integrar la función de velocidad, da como resultado el desplazamiento.
- Al integrar la función de aceleración se puede hallar la función de velocidad;
- Al integrar la función de aceleración dos veces, da como resultado la función de desplazamiento.

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dx^2}{d^2t} = a$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\int v\,dt = \Delta x$$

$$\int a\,dt = v$$

$$\int\int a\,dt = \Delta x$$

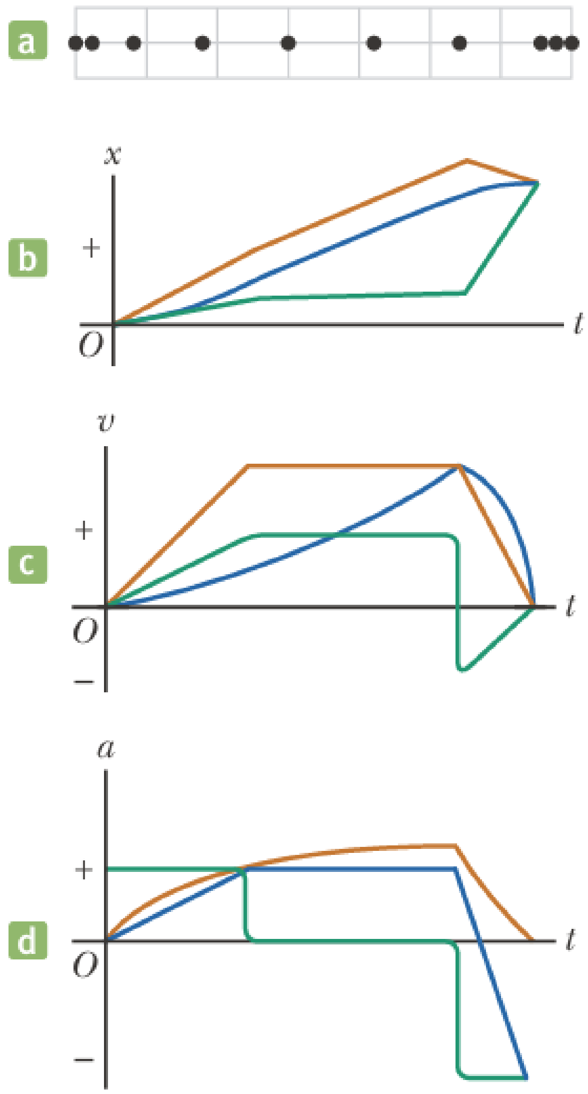
PUNTO DE CONTROL:

La figura a es un diagrama tomado de una imagen con múltiples flashes de un disco de hockey que se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal. Las imágenes trazadas están separadas por intervalos de tiempo iguales, y la primera y la última muestran el disco en reposo.

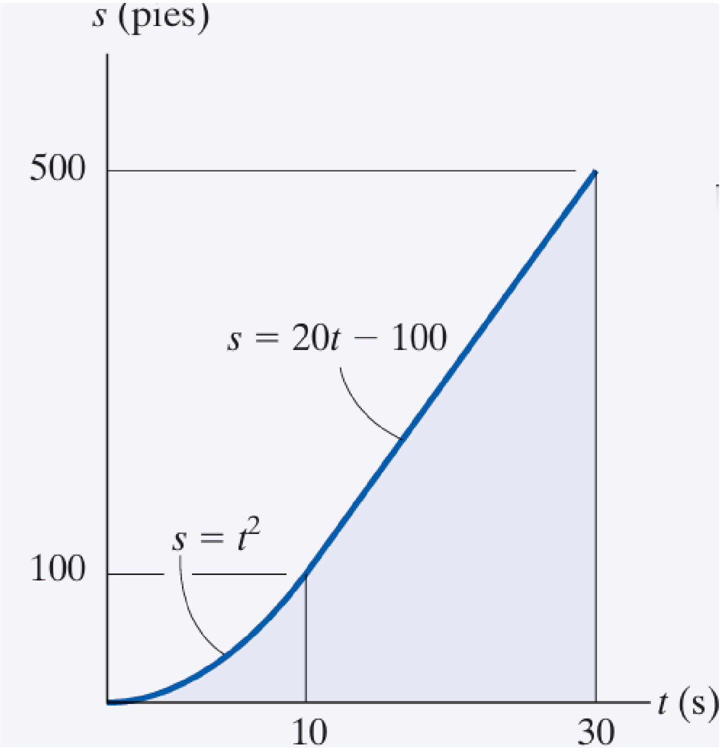
(a) En la figura b, ¿cuál gráfica a color muestra mejor la posición del disco como una función del tiempo?

(b) En la figura c, ¿cuál gráfica a color muestra mejor la velocidad del disco como una función del tiempo?

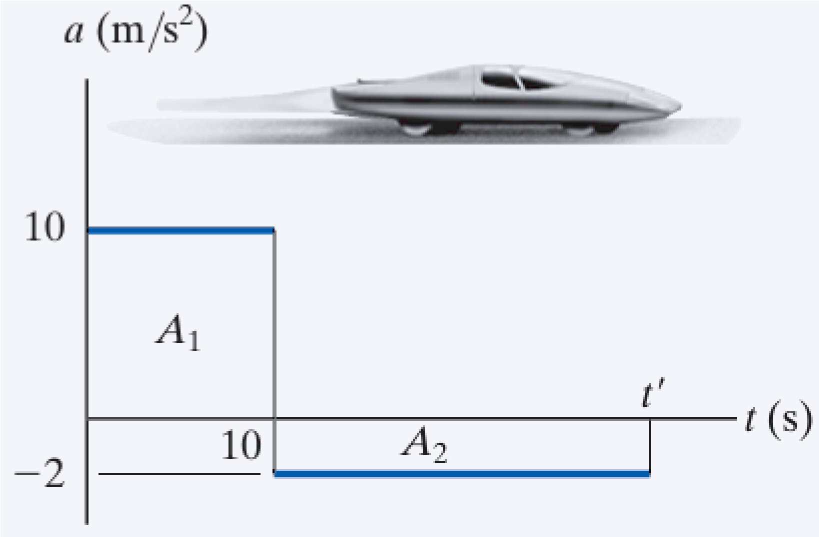
(c) En la figura d, ¿cuál gráfica a color muestra mejor la aceleración del disco como una función del tiempo?



Ejemplo 11.7
Una bicicleta rueda a lo largo de una carretera recta de modo que la gráfica de la figura describe su posición. Construya las gráficas de v-t y a-t en el intervalo $0 \leq t \leq 30$ s.



Ejemplo 11.8
El automóvil de la figura arranca del reposo y viaja a lo largo de una pista recta de modo que acelera a 10 m/s^2 durante 10 s y luego desacelera a 2 m/s^2. (a) Trace las gráficas de v-t y s-t. (b) Determine el tiempo t' necesario para detener el automóvil. (c) ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil?

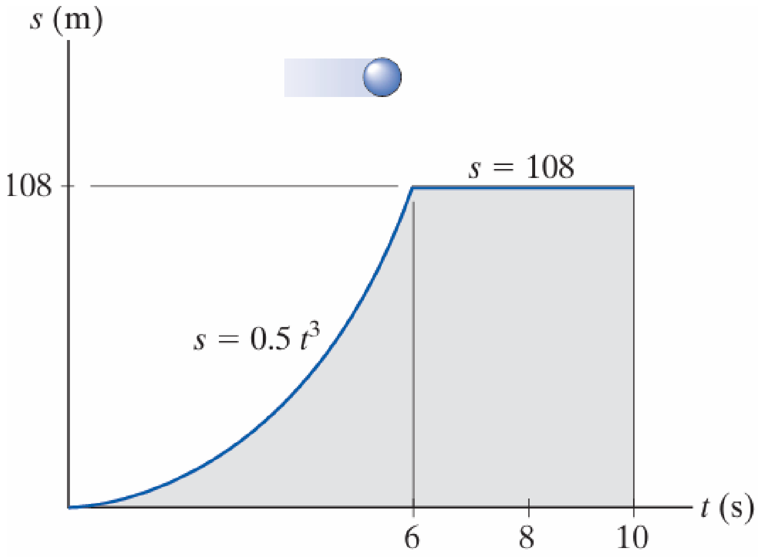


Ejemplo 11.9

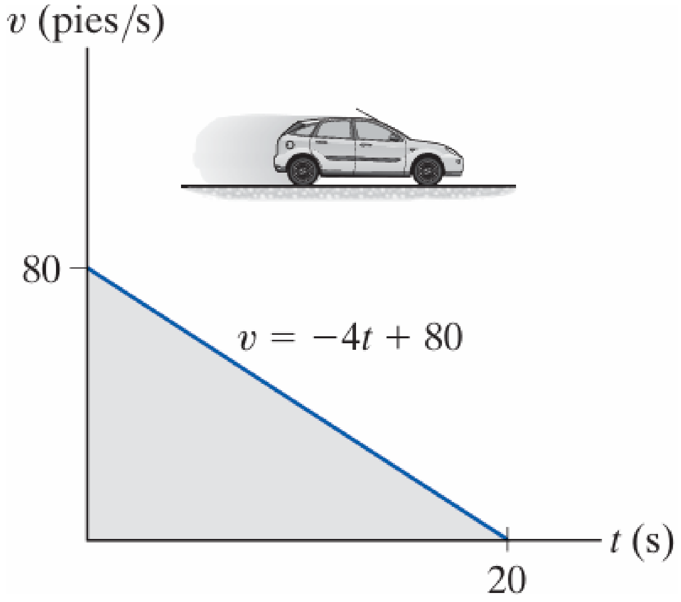
La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en pies y t en segundos. Determine (a) el tiempo al cual la velocidad será cero, (b) la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo, (c) la aceleración de la partícula en ese tiempo, (d) la distancia recorrida por la partícula desde t = 4 s hasta t = 6 s.

Actividades en clase

1. La partícula viaja a lo largo de una pista recta de modo que la gráfica de s-t describe su posición. Trace la gráfica de v-t para el mismo intervalo.



2. Una vagoneta viaja a lo largo de una carretera recta a una velocidad descrita por la gráfica. Trace las gráficas de s-t y a-t durante el mismo periodo. Considere $x = 0$ cuando $t = 0$.



3. El "dragster" arranca del reposo y su velocidad es la descrita por la gráfica. Trace la gráfica de s-t durante el intervalo de tiempo 0 ≤ t ≤ 15 s. También, determine la distancia total recorrida durante este intervalo.