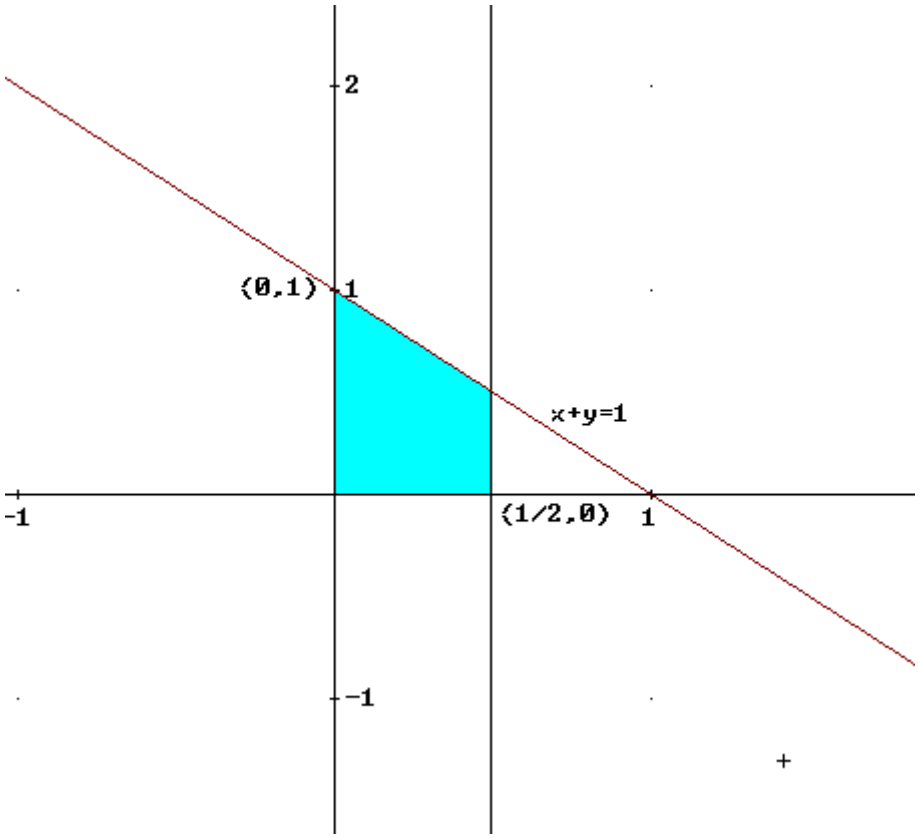
45. Calcular, mediante coordenadas cartesianas, las siguientes integrales:

(a) $\iint_D dxdy$ siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \leq x \leq \frac{1}{2}, y + x \leq 1, y \geq 0\right\}$



Observando el dibujo, lo más cómodo es parametrizar el recinto de la siguiente forma

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

Así nuestra integral resulta

$$\iint_D dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^{1-x} dy]\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\, dx = x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Este valor coincide además con el área del recinto (puedes calcularla con las fórmulas básicas de cálculo de áreas de figuras regulares, pues el recinto está formado por un triángulo y un rectángulo); pero esto ya lo sabíamos, porque una el área de un recinto D es precisamente $\iint_D \ dxdy$

(b) $\iint_D \ x^3y \ dxdy$ siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, y + x \leq 1, y \geq 0\right\}$

Como el recinto es el mismo, parametrizamos de igual forma la integral (sólo cambia el integrando)

$$\iint_D \ x^3y \ dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^{1-x} x^3y \ dy] \, dx$$

Realizamos primero la integral indefinida respecto de la variable y calculando una primitiva

$$\int \ x^3y \ dy = x^3 \int \ y \ dy = x^3 \frac{y^2}{2}$$

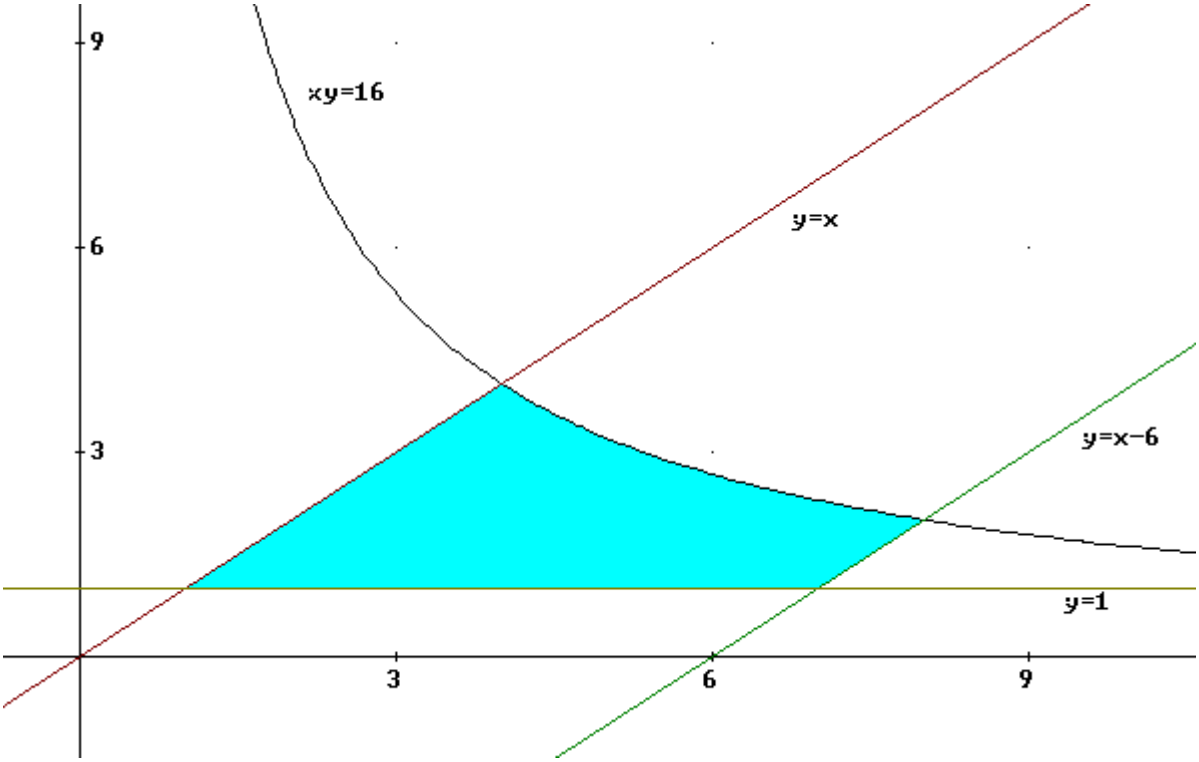
Así nuestra integral resulta

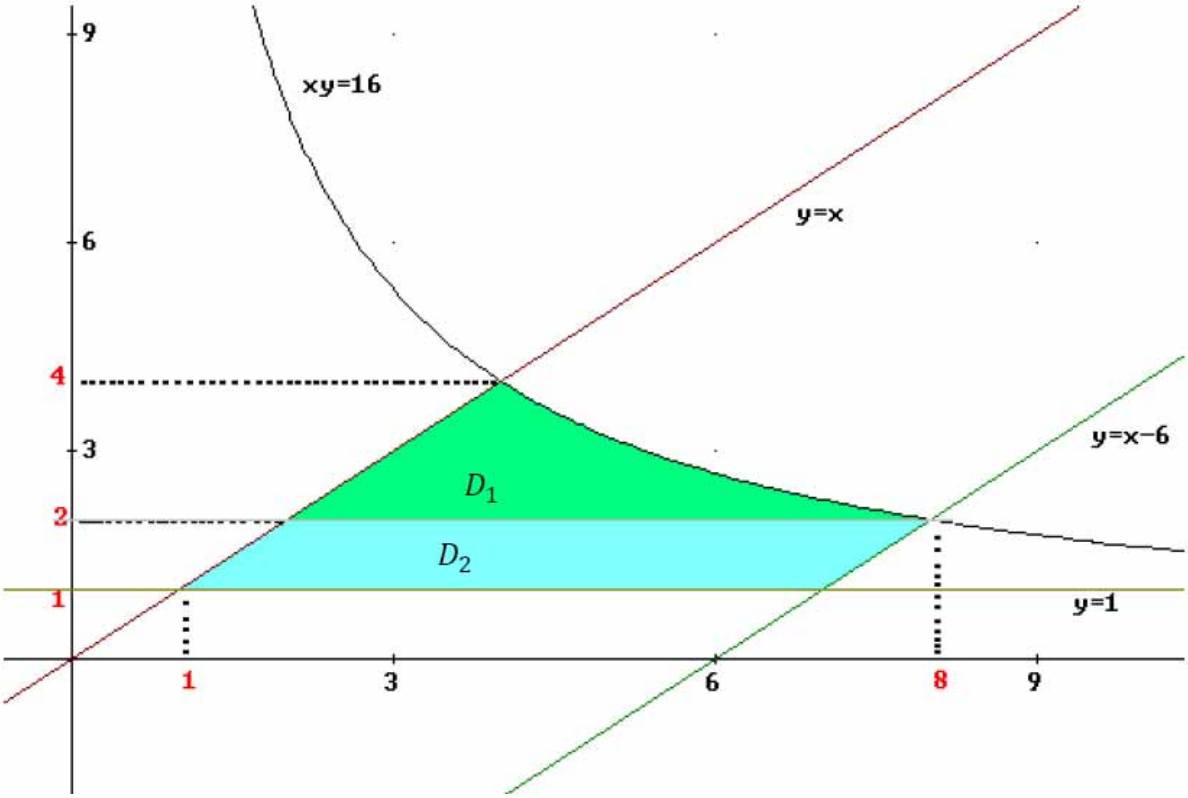
$$\iint_D \ x^3y \ dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^{1-x} x^3y \ dy] \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \frac{(1-x)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^3(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 - 2x^4 + x^5)dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{12}\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^4 \, 8} - \frac{1}{2^5 \, 5} + \frac{1}{2^6 12} = \frac{11}{2^8 \, 15} = \frac{11}{3840}$$

(c) $\iint_D \frac{x}{y}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 16, x \geq y, x-6 \leq y, x \geq 0, y \geq 1\}$





En esta ocasión hemos dividido el recinto en dos como se ve en el dibujo para tomar con referencia fija la variable y, quedando la variable x acotada entre dos funciones de y. Así resultan integrales que se pueden resolver. Si hubiésemos invertido los papeles de las variables (la x entre valores fijos y la variable y acotada entre funciones de x, necesitamos 3 recintos diferentes y las integrales resultantes tienen un poco más de dificultad, pero también salen)

Así los recintos parametrizados son:

$$D_1\begin{cases}1\le y\le 2\\ y\le x\le y+6\end{cases}\qquad D_2\begin{cases}2\le y\le 4\\ y\le x\le \frac{16}{y}\end{cases}$$

Así nuestra integral queda:

$$\iint_{D_1}\frac{x}{y}\,dxdy+\iint_{D_2}\frac{x}{y}\,dxdy=\int_1^2\left[\int_y^{y+6}\frac{x}{y}\,dx\right]dy+\int_2^4\left[\int_y^{\frac{16}{y}}\frac{x}{y}\,dx\right]dy=$$

$$=\int_1^2\frac{1}{y}\frac{x^2}{2}\Big]_y^{y+6}\,dy+\int_2^4\frac{1}{y}\frac{x^2}{2}\Big]_y^{\frac{16}{y}}\,dy=$$

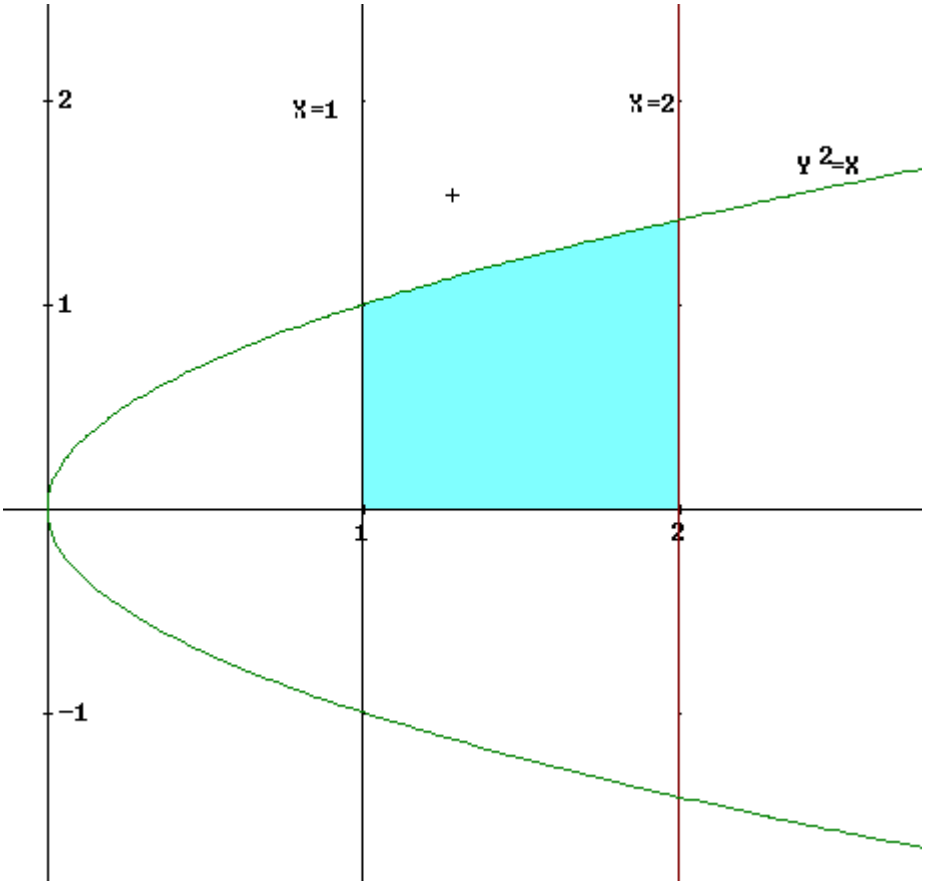
$$\frac{1}{2}\left[\int_1^2\frac{(y+6)^2}{y}dy-\int_1^2\frac{y^2}{y}dy\right]+\frac{1}{2}\left[\int_2^4\frac{(\frac{16}{y})^2}{y}dy-\int_2^4\frac{y^2}{y}dy\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_1^2(y+12+\frac{36}{y})dy-\int_1^2 y\,dy\right]+\frac{1}{2}\left[\int_2^4\frac{256}{y^3}dy-\int_2^4 y\,dy\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{y^2}{2}+12y+36\ln|y|)\Big]_1^2-\frac{y^2}{4}\Big]_1^2-\frac{1}{4}(\frac{256}{y^2})\Big]_2^4-\frac{y^2}{4}\Big]_2^4=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{27}{2}+36\ln 2)-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(16-64)-3=15+18\ln 2$$

$(d)\ \iint_D xye^{-y^2}\,dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x \le 2, 0 \le y, y^2 \le x\}$



La parametrización del recinto puede ser

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le +\sqrt{x} \end{cases}$$

Por tanto esta integral se puede resolver

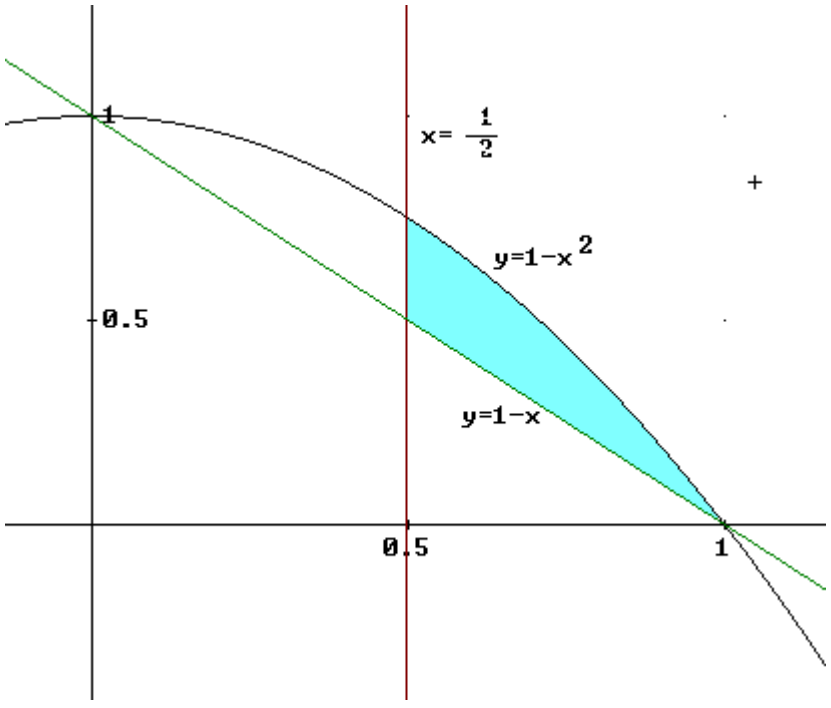
$$\int_1^2 (\int_0^{+\sqrt{x}} xye^{-y^2}\,dy)dx = \int_1^2 (x\int_0^{+\sqrt{x}} ye^{-y^2}\,dy)dx = \int_1^2 (\frac{-x}{2}\int_0^{+\sqrt{x}} (-2)ye^{-y^2}\,dy)dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-x}{2} e^{-y^2}\right]_0^{+\sqrt{x}}) dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 x e^{-x} dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = \frac{e^{-x}(1+x)}{2}\Big]_1^2 + \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = \frac{3-2e}{2e^2} + \frac{3}{4}$$

Donde la primitiva de la última integral se ha calculado por partes haciendo (puede comprobarlo el alumno)

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} \end{cases}$$

(e) $\iint_D (2x-1)e^{x^2+y}\, dxdy$ siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x + y \geq 1, x \geq \frac{1}{2}, y + x^2 \leq 1\right\}$



Observando de nuevo el dibujo tenemos una parametrización fácil del recinto

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1-x \le y \le 1-x^2 \end{cases}$$

Así nuestra integral quedaría

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\int_{1-x}^{1-x^2} (2x-1)e^{x^2+y}\, dy)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2} \int_{1-x}^{1-x^2} e^{y}\, dy)dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2}\, e^{y}]_{1-x}^{1-x^2})dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2}\, e^{1-x^2}dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2}\, e^{1-x}dx =$$

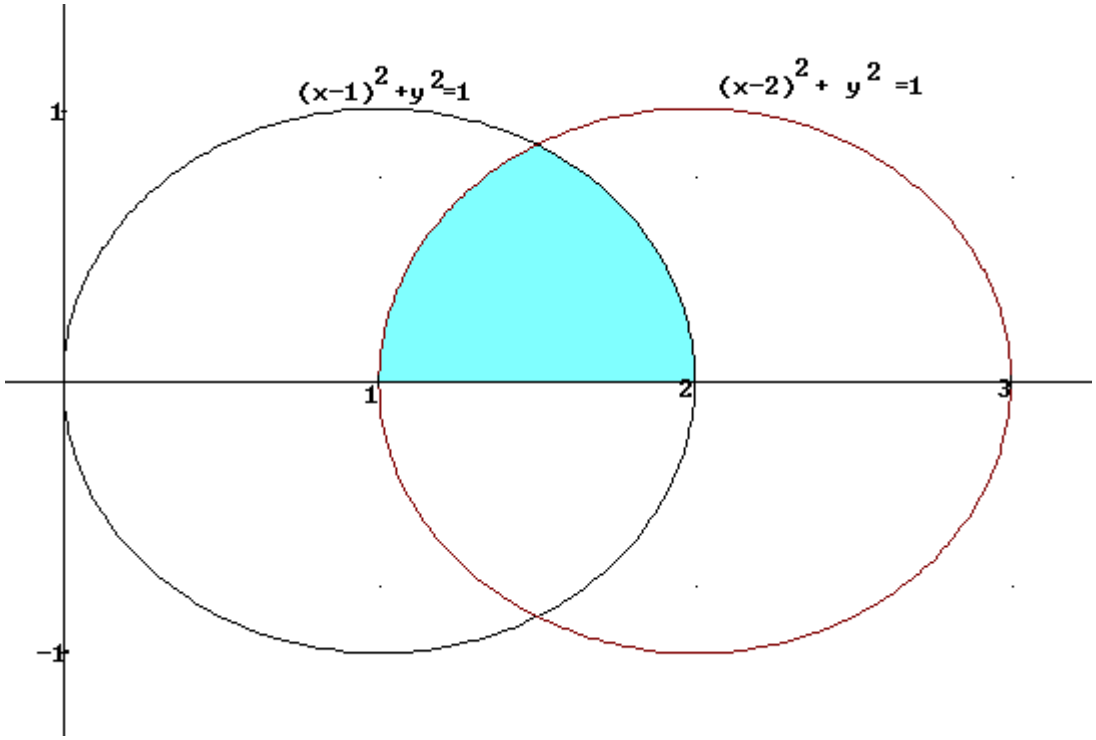
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2+1-x^2}\, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2+1-x}\, dx =$$

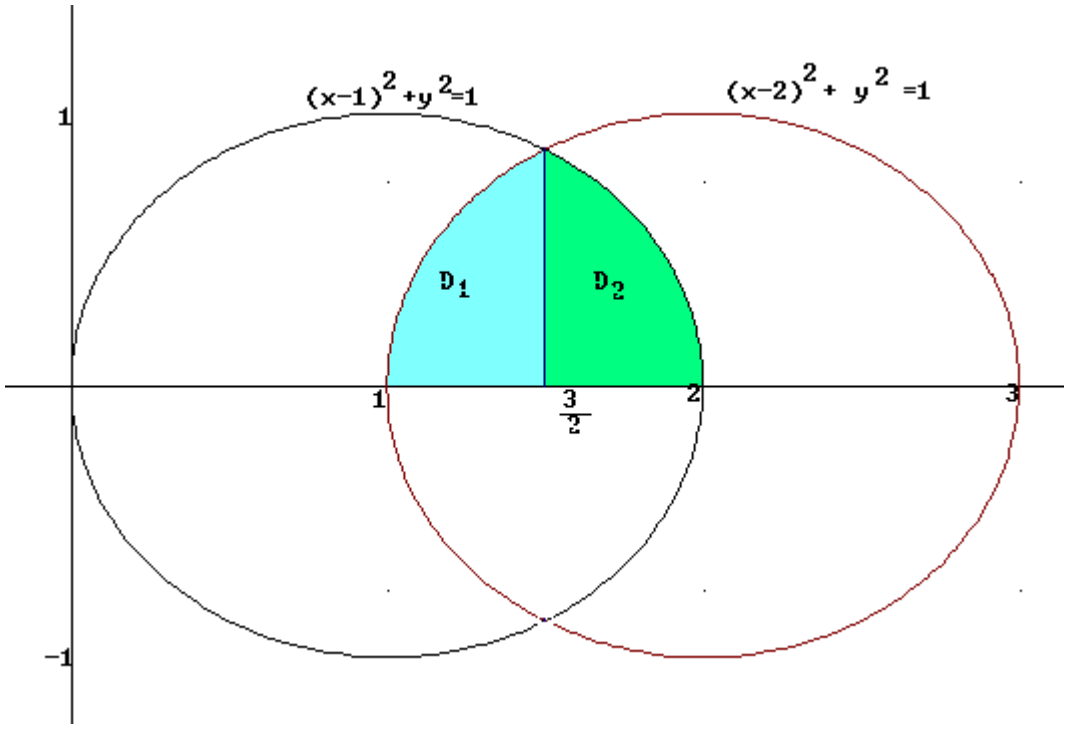
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e \quad dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2+1-x}\, dx =$$

$$e \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)\, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((2x-1)e^{x^2+1-x}\, dx =$$

$$e \quad (x^2-x)]_{\frac{1}{2}}^{1} - e^{x^2+1-x}]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{-3e}{4} + e^{\frac{3}{4}}$$

(f) $\iint_D y\,dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$





los recintos parametrizados son:

$$D_1\begin{cases} 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 \le y \le +\sqrt{1-(x-2)^2} \end{cases} \qquad D_2\begin{cases} \frac{3}{2} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le +\sqrt{1-(x-1)^2} \end{cases}$$

$$\iint_{D_1} y\,dxdy + \iint_{D_2} y\,dxdy = \int_1^{\frac{3}{2}} [\int_0^{+\sqrt{1-(x-2)^2}} y\,dy]\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 [\int_0^{+\sqrt{1-(x-1)^2}} y\,dy]\,dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{y^2}{2}\Big]_0^{+\sqrt{1-(x-2)^2}} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{y^2}{2}\Big]_0^{+\sqrt{1-(x-1)^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} (-3 - x^2 + 4x)dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^2 (-x^2 + 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-3x - \frac{x^3}{3} + 2x^2)\Big]_1^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(-\frac{x^3}{3} + x^2)\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \cdots$$

(Termine el alumno las operaciones y así practica)