Carl B. Boyer

Historia de la matemática

Versión española de
Mariano Martínez Pérez

Alianza
Editorial

Título original:
A History of Mathematics. Esta traducción al castellano ha sido autorizada por John Wiley & Sons, Inc.

Primera edición en «Alianza Universidad Textos»: 1986
Primera reimpresión en «Alianza Universidad Textos»: 1987

© 1968 by John Wiley & Sons, Inc. Todos los derechos reservados
© Ed. cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1986, 1987
Calle Milán, 38; 28043 Madrid; teléf. 200 00 45
ISBN: 84-206-8094-X
Depósito legal: M. 35.889-1987
Fotocomposición: Fernández Ciudad, S. L.
Impresión: Hijos de E. Minuesa, S. L.
Ronda de Toledo, 24. 28005 Madrid
Printed in Spain

A la memoria de mis padres

Howard Franklin Boyer
y
Rebecca Catherine (Eisenhart) Boyer

PROLOGO

A lo largo de este siglo se han publicado numerosas historias de la matemática, muchas de ellas en inglés. Algunas son bastante recientes, tales como la de J. F. Scott, *A History of Mathematics*[1], y por lo tanto una obra nueva en este campo debería tener características que no estén presentes ya en los libros disponibles. En realidad, pocas de las historias a mano son verdaderos libros de texto, o por lo menos no lo son en el sentido americano del término, y desde luego la *History* de Scott no lo es. Parecía, pues, que había lugar para un nuevo libro, uno que se ajustara de manera más satisfactoria a mis propias preferencias, y posiblemente a las de otros.

La obra en dos volúmenes *History of Mathematics* por David Eugene Smith[2] fue escrita efectivamente «con el fin de suministrar a profesores y estudiantes un libro de texto utilizable sobre la historia de la matemática elemental», pero cubre un área demasiado extensa a un nivel matemático demasiado bajo para los modernos cursos de nivel de «college», y le faltan además problemas de tipos variados. El libro de Florian Cajori *History of Mathematics*[3] es aún una obra de referencia muy útil, pero no se adapta a la utilización en el aula, como tampoco el admirable *The Development of Mathematics*[4] de E. T. Bell. El libro de texto más adecuado y de mayor éxito hoy parece ser el de Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*[5], que he utilizado con considerable satisfacción por lo menos en una docena de cursos desde que se publicó por primera vez en 1953. En algunas ocasiones me he apartado de la ordenación de los temas en este libro, en un esfuerzo por conseguir un sentido realzado de la mentalidad histórica, y también he suplementado a veces el material con más referencias a las contribuciones de los siglos XVIII y XIX, utilizando para ello especialmente el libro de D. J. Struik *A Concise History of Mathematics*[6].

---

[1] Londres: Taylor and Francis, 1958.

[2] Boston: Ginn and Company, 1923-1925. Reeditado por Dover, New York.

[3] New York: Macmillan, 1931, 2.ª edición. Reeditado por Chelsea, New York.

[4] New York: McGraw-Hill, 1945, 2.ª edición. Hay traducción española en Fondo de Cultura Económica, México.

[5] New York: Saunders College Publishing, 1983, 5.ª edición.

[6] New York: Dover Publications, 1967, 3.ª edición. Hay traducción española editada en México.

El lector de este libro, sea simplemente un aficionado, un estudiante o un profesor que esté dando un curso sobre historia de la matemática, encontrará que el nivel de conocimientos matemáticos que se presuponen corresponden aproximadamente a los de un primer ciclo de una Facultad de Matemáticas, pero el material también puede ser estudiado con provecho por lectores con una preparación matemática más fuerte o más débil. Cada capítulo viene seguido por una lista de ejercicios clasificados aproximadamente en tres categorías. Los primeros de la lista consisten en cuestiones de tipo ensayo que tratan de comprobar la capacidad del lector para organizar y expresar con sus propias palabras el material que se ha discutido en ese capítulo. A continuación siguen algunos ejercicios relativamente fáciles que piden las demostraciones de algunos de los teoremas mencionados en el capítulo o su aplicación a situaciones variadas.

Por último, suele haber algunos ejercicios señalados con una estrella que o bien son más difíciles o bien exigen métodos especiales que pueden no ser conocidos por todos los estudiantes o todos los lectores. Los ejercicios no forman parte de ninguna manera de la exposición general, y el lector puede omitirlos sin pérdida de continuidad.

En el texto aparecen diseminadas aquí y allá referencias a notas de pie de página, generalmente bibliográficas, y a continuación de cada capítulo hay una lista de lecturas recomendadas. Se incluyen algunas referencias a la vasta literatura periódica disponible en este campo, porque creemos que ya no es demasiado temprano, a este nivel, para introducir a los estudiantes en la gran riqueza de material que puede encontrarse en las buenas bibliotecas. Las bibliotecas menores, de Facultad o de Universidad, probablemente no puedan suministrar todas estas fuentes, pero en cualquier caso es bueno que los estudiantes sean conscientes de que hay dominios del saber que están más allá de los confines de su propio «campus». También se incluyen referencias a obras en idiomas extranjeros, pese al hecho de que algunos estudiantes, esperemos que no muchos, pueden ser incapaces de leer ninguno de ellos. Aparte de suministrar importantes fuentes adicionales para los que conozcan algún otro idioma, a nivel de lectura al menos, la inclusión de referencias en otros idiomas puede ayudar a romper el provincianismo lingüístico que, a la manera de los avestruces, se refugia en la impresión errónea de que todo lo que vale la pena apareció publicado o ha sido traducido al inglés.

Este libro se distingue del texto disponible que más éxito ha tenido, y que ya hemos mencionado anteriormente, en una adhesión más estricta al orden cronológico de los hechos y en que subraya de una manera más enérgica los elementos puramente históricos. Siempre está presente la tentación de que, en una clase de historia de la matemática, la finalidad fundamental es la de enseñar matemática, y que, en consecuencia, cualquier desviación de las normas matemáticas usuales es un pecado mortal, mientras que un error histórico es simplemente venial.

Por lo que a mí respecta, debo decir que me he esforzado en evitar tal actitud, y la finalidad del libro es la de presentar la historia de la matemática con toda la fidelidad posible, no sólo en lo que se refiere a la estructura matemática y a la exactitud en sí, sino también a la perspectiva y al detalle históricos. Sería una verdadera locura esperar que en un libro de este tipo cada fecha y cada coma

decimal sea absolutamente correcta. Es de esperar, sin embargo, que los errores e inadvertencias que hayan podido quedar después de las pruebas de imprenta no violenten el sentido de la historia, en un sentido amplio, ni la perspectiva correcta de los conceptos matemáticos. No podríamos subrayar todo lo enérgicamente que sería necesario el hecho de que este volumen único no pretende de ninguna manera presentar la historia de la matemática en su integridad. Tal empresa exigiría el esfuerzo concertado de todo un equipo análogo al que produjo el cuarto volumen de *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Moritz Cantor en 1908, avanzando la obra hasta el 1799. En una obra de ambiciones más modestas como ésta, el autor debe juzgar cuidadosamente a la hora de decidir la selección de los materiales que va a incluir, resistiéndose, aunque de mala gana, a la tentación natural de citar la obra de todo matemático que haya contribuido al desarrollo de su ciencia de una manera más o menos importante; raro será el lector que no note aquí y allá lo que puede considerar como omisiones excesivas. En particular, el último capítulo sólo intenta apuntar a algunas de las características más notables del siglo XX. En este campo de la historia de la matemática, probablemente lo que más sería de desear es que apareciera un nuevo Felix Klein que llevara a cabo con respecto a nuestro siglo el mismo proyecto que Klein ensayó para el siglo XIX, pero que no vivió lo suficiente como para darle fin.

Una obra publicada es en cierto sentido como un iceberg, porque lo que es visible es sólo una pequeña parte del total. Ningún libro sale a la luz hasta que el autor ha prodigado en él generosamente su tiempo, y hasta que ha recibido ánimo y apoyo de otros, demasiado numerosos para poderlos mencionar individualmente. Las deudas comienzan, en mi caso, con los muchos estudiantes entusiastas a los que he enseñado la historia de la matemática, principalmente en el Brooklyn College, pero también en la Yeshiva University, la Universidad de Michigan, la Universidad de California (Berkeley) y la Universidad de Kansas. En la Universidad de Michigan, gracias principalmente al interés del profesor Phillip S. Jones, en el Brooklyn College, gracias a la ayuda del Decano Walter H. Mais y de los profesores Samuel Borofsky y James Singer, tuve la ocasión de ver reducidas mis tareas pedagógicas para poder trabajar en el manuscrito de este libro. Amigos y colegas procedentes del campo de la historia de la matemática, entre los que se cuentan el profesor Dirk J. Struik, del Massachusetts Institute of Technology; el profesor Kenneth O. May, de la Universidad de Toronto; el profesor Howard Eves, de la Universidad de Maine, y el profesor Morris Kline, de la Universidad de New York, han hecho muchas observaciones útiles durante la preparación del libro, observaciones que agradecemos mucho. Los materiales que aparecen en libros y artículos de otros autores los hemos expropiado libremente, con escasos reconocimientos aparte de una fría referencia bibliográfica, y quiero aprovechar la ocasión, por lo tanto, para expresar a todos estos autores mi más calurosa gratitud. Tanto las bibliotecas como los editores han sido de gran ayuda al suministrar información e ilustraciones necesarias en el texto; ha sido, en particular, un placer el trabajar con el equipo de la editorial John Wiley and Sons. El mecanografiado de la copia final, así como de gran parte del difícil manuscrito preliminar, fue llevado a cabo con gran esmero y sin perder el buen humor por Mrs. Hazel Stanley de Lawrence, Kansas. Por último, tengo que expresar mi más profunda gratitud a mi

comprensiva esposa, Dr. Marjorie N. Boyer, por su paciencia al tolerar la desorganización provocada por el nacimiento de otro libro aún en la familia.

Brooklyn, New York
Enero 1968

CARL B. BOYER

INDICE

Capítulo I. LOS ORIGENES PRIMITIVOS

1. El concepto de número. 2. Bases de numeración primitivas. 3. El lenguaje numérico y los orígenes de la numeración. 4. El origen de la geometría. **19**

Capítulo II. EGIPTO

1. Los primeros documentos. 2. El sistema de notación jeroglífica. 3. El papiro de Ahmes. 4. Las fracciones unitarias, 5. Las operaciones aritméticas. 6. Problemas algebraicos. 7. Problemas geométricos. 8. Una razón trigonométrica. 9. El papiro de Moscú. 10. Las deficiencias de la matemática egipcia. **29**

Capítulo III. MESOPOTAMIA

1. Los documentos cuneiformes. 2. La numeración posicional. 3. Las fracciones sexagesimales. 4. Las operaciones fundamentales. 5. Problemas algebraicos. 6. Las ecuaciones cuadráticas. 7. Ecuaciones cúbicas. 8. Las ternas pitagóricas. 9. Areas de polígonos. 10. Geometría como aritmética aplicada. 11. Imperfecciones matemáticas. **47**

Capítulo IV. JONIA Y LOS PITAGORICOS

1. Los orígenes del mundo griego. 2. Tales de Mileto. 3. Pitágoras de Samos. 4. El pentagrama pitagórico. 5. El misticismo numérico. 6. Aritmética y cosmología. 7. Los números figurados. 8. La teoría de proporciones. 9. El sistema de numeración ático. 10. El sistema de numeración jónico. 11. Aritmética y logística. **71**

Capítulo V. LA EPOCA HEROICA

1. Centros de actividad. 2. Anaxágoras de Clazomene. 3. Los tres problemas clásicos. 4. La cuadratura de las lúnulas. 5. Las proporciones continuas. 6. Hipias de Ellis. 7. Filolao y Arquitas de Tarento. 8. La duplicación del cubo. 9. Los inconmensurables. 10. La sección áurea. 11. Las paradojas de Zenón. 12. El razonamiento deductivo. 13. El álgebra geométrica. 14. Demócrito de Abdera. **95**

Capítulo VI. LA EPOCA DE PLATON Y ARISTOTELES

1. Las siete artes liberales. 2. Sócrates. 3. Los sólidos platónicos. 4. Teodoro de Cirene. 5. La aritmética y la geometría platónicas. 6. Los orígenes del análisis. 7. Eudoxo de Cnido. 8. El método de exhausción. 9. La astronomía matemática. 10. Menecmo. 11. La duplicación del cubo. 12. Dinostrato y la cuadratura del círculo. 13. Autólico de Pitania. 14. Aristóteles. 15. El final del período Helénico. **119**

Capítulo VII. EUCLIDES DE ALEJANDRIA

1. El autor de los *Elementos*. **2.** Otras obras. **3.** La finalidad de los *Elementos*. **4.** Definiciones y postulados. **5.** El contenido del Libro I. **6.** El álgebra geométrica. **7.** Los libros III y IV. **8.** La teoría de proporciones. **9.** La teoría de números. **10.** Números primos y perfectos. **11.** Los inconmensurables. **12.** La geometría de los sólidos. **13.** Los libros apócrifos. **14.** La influencia de los *Elementos*. **141**

Capítulo VIII. ARQUIMEDES DE SIRACUSA

1. El asedio de Siracusa. **2.** La ley de la palanca. **3.** El principio hidrostático. **4.** El *Arenario*. **5.** La medida del círculo. **6.** La trisección del ángulo. **7.** El área de un segmento parabólico. **8.** El volumen de un segmento de paraboloide. **9.** El segmento esférico. **10.** *Sobre la esfera y el cilindro*. **11.** El *Libro de los Lemas*. **12.** Los sólidos semirregulares y la trigonometría. **13.** *El Método*. **14.** El volumen de la esfera. **15.** La recuperación de *El Método*. **165**

Capítulo IX. APOLONIO DE PERGA

1. Obras perdidas. **2.** La reconstrucción de las obras perdidas. **3.** El problema de Apolonio. **4.** Ciclos y epiciclos. **5.** Las *Cónicas*. **6.** Los nombres de las secciones cónicas. **7.** El cono de dos hojas. **8.** Las propiedades fundamentales. **9.** Diámetros conjugados. **10.** Tangentes y división armónica. **11.** El lugar geométrico determinado por tres y cuatro rectas. **12.** Intersecciones de cónicas. **13.** Máximos y mínimos. Tangentes y normales. **14.** Cónicas semejantes. **15.** Los focos de las cónicas. **16.** Sobre el uso de las coordenadas. **189**

Capítulo X. LA TRIGONOMETRIA Y LAS TECNICAS DE MEDICION GRIEGAS

1. La trigonometría primitiva. **2.** Aristarco de Samos. **3.** Eratóstenes de Cirene. **4.** Hiparco de Nicea. **5.** Menelao de Alejandría. **6.** El *Almagesto* de Ptolomeo. **7.** El círculo de 360 grados. **8.** El cálculo de las tablas. **9.** La astronomía de Ptolomeo. **10.** Otras obras de Ptolomeo. **11.** Optica y astrología. **12.** Herón de Alejandría. **13.** El principio de mínima distancia. **14.** El declinar de la matemática griega. **211**

Capítulo XI. RENACIMIENTO Y OCASO DE LA MATEMATICA GRIEGA

1. La matemática aplicada. **2.** Diofanto de Alejandría. **3.** Nicómaco de Gerasa. **4.** La *Aritmética* de Diofanto. **5.** Los problemas diofánticos. **6.** El lugar de Diofanto en la historia del álgebra. **7.** Pappus de Alejandría. **8.** La *Colección*. **9.** Algunos teoremas de Pappus. **10.** El problema de Pappus. **11.** El *Tesoro del Análisis*. **12.** Los teoremas de Pappus-Guldin. **13.** Proclo de Alejandría. **14.** Boecio. **15.** El final del período alejandrino. **16.** La *Antología Griega*. **17.** Los matemáticos bizantinos del siglo VI. **233**

Capítulo XII. CHINA E INDIA

1. Los documentos más antiguos. **2.** Los *Nueve Capítulos*. **3.** Los cuadrados mágicos. **4.** Los numerales a base de varillas. **5.** El ábaco y las fracciones decimales. **6.** Los valores de π en China. **7.** El álgebra y el método de Horner. **8.** Los matemáticos del siglo XIII. **9.** El triángulo aritmético. **10.** La matemática primitiva en la India. **11.** Los *Sulvasūtras*. **12.** Los *Siddhāntas*. **13.** Aryabhata. **14.** El sistema de numeración hindú. **15.** El símbolo para el cero. **16.** La trigonometría hindú. **17.** El método de multiplicación hindú. **18.** La «división larga». **19.** Brahmagupta. **20.** La fórmula de Brahmagupta. **21.** La teoría de ecuaciones indeterminadas. **22.** Bhaskara. **23.** El *Lilavati*. **24.** Ramanujan. **257**

Capítulo XIII. LA HEGEMONIA ARABE

1. Las conquistas árabes. **2.** La «Casa de la Sabiduría». **3.** *Al-jabr.* **4.** Las ecuaciones cuadráticas. **5.** El padre del álgebra. **6.** La fundamentación geométrica. **7.** Problemas algebraicos. **8.** Un problema de Herón. **9.** Abd Al-Hamid Ibn-Turk. **10.** Thabit Ibn-Qurra. **11.** Los numerales árabes. **12.** La trigonometría árabe. **13.** Abu'l-Wefa y Al-Karkhi. **14.** Al-Biruni y Alhazen. **15.** Omar Khayyam. **16.** El postulado de las paralelas. **17.** Nasir Eddin. **18.** Al-Kashi. **293**

Capítulo XIV. LA EUROPA MEDIEVAL

1. De Asia a Europa. **2.** La matemática bizantina. **3.** La Epoca Oscura. **4.** Alcuino y Gerberto. **5.** El siglo de las traducciones. **6.** La propagación de los numerales hindu-arábigos. **7.** El *Liber abaci.* **8.** La sucesión de Fibonacci. **9.** Una resolución de una ecuación cúbica. **10.** Teoría de números y geometría. **11.** Jordano Nemorario. **12.** Campano de Novara. **13.** El saber del siglo XIII. **14.** La cinemática medieval. **15.** Thomas Bradwardine. **16.** Nicole Oresme. **17.** La «latitud de las formas». **18.** Las series numéricas. **19.** El ocaso del saber medieval. **319**

Capítulo XV. EL RENACIMIENTO

1. La época de los humanistas. **2.** Nicolás de Cusa. **3.** Regiomontano. **4.** La aplicación del álgebra a la geometría. **5.** Una figura de transición. **6.** El *Triparty* de Nicolás Chuquet. **7.** La *Summa* de Luca Pacioli. **8.** Leonardo da Vinci. **9.** Las álgebras germánicas. **10.** El *Ars magna* de Cardano. **11.** La resolución de la ecuación cúbica. **12.** La resolución de la ecuación cuártica por Ferrari. **13.** Las cúbicas irreducibles y los números complejos. **14.** Robert Recorde. **15.** Nicolás Copérnico. **16.** Georg Joachim Rheticus. **17.** Pierre de la Ramée. **18.** El *Algebra* de Bombelli. **19.** Johannes Werner. **20.** La teoría de la perspectiva. **21.** La cartografía. **347**

Capítulo XVI. PRELUDIO A LA MATEMATICA MODERNA

1. François Viète. **2.** El concepto de parámetro. **3.** El arte analítica. **4.** Las relaciones entre las raíces y los coeficientes en una ecuación. **5.** Thomas Harriot y William Oughtred. **6.** De nuevo el método de Horner. **7.** Trigonometría y prostafairesis. **8.** La resolución trigonométrica de ecuaciones. **9.** John Napier. **10.** La invención de los logaritmos. **11.** Henry Briggs. **12.** Jobst Bürgi. **13.** La matemática aplicada y las fracciones decimales. **14.** La notación algebraica. **15.** Galileo Galilei. **16.** Los valores de π. **17.** Reconstrucción de la obra de Apolonio *Sobre tangencias.* **18.** El análisis infinitesimal. **19.** Johannes Kepler. **20.** *Las dos nuevas ciencias* de Galileo. **21.** Galileo y el infinito. **22.** Bonaventura Cavalieri. **23.** La espiral y la parábola. **385**

Capítulo XVII. LA EPOCA DE FERMAT Y DESCARTES

1. Los matemáticos más importantes de la época. **2.** El *Discours de la méthode.* **3.** La invención de la geometría analítica. **4.** La aritmetización de la geometría de nuevo. **5.** El álgebra geométrica. **6.** La clasificación de curvas. **7.** Rectificación de curvas. **8.** La identificación de cónicas. **9.** Normales y tangentes. **10.** Las concepciones geométricas de Descartes. **11.** Los lugares geométricos de Fermat. **12.** La geometría analítica multidimensional. **13.** Las diferenciaciones de Fermat. **14.** Las integraciones de Fermat. **15.** Gregory de St. Vincent. **16.** La teoría de números. **17.** Teoremas de Fermat. **18.** Gilles Persone de Roberval. **19.** Evangelista Torricelli. **20.** Nuevas curvas. **21.** Girard Desargues. **22.** La geometría proyectiva. **23.** Blaise Pascal. **24.** El cálculo de probabilidades. **25.** La cicloide. **423**

Capítulo XVIII. UN PERIODO DE TRANSICION

1. Philippe de Lahire. **2.** Georg Mohr. **3.** Pietro Mengoli. **4.** Frans van Schooten. **5.** Jan de Witt. **6.** Johann Hudde. **7.** René François de Sluse. **8.** El reloj de péndulo. **9.** Involutas y evolutas. **10.** John Wallis. **11.** *Sobre las secciones cónicas.* **12.** La *Arithmetica Infinitorum.* **13.** Christopher Wren. **14.** Las fórmulas de Wallis. **15.** James Gregory. **16.** La serie de Gregory. **17.** Nicolaus Mercator y William Brouncker. **18.** El método de las tangentes de Barrow. **465**

Capítulo XIX. NEWTON Y LEIBNIZ

1. La obra temprana de Newton. **2.** El teorema binomial. **3.** Las series infinitas. **4.** El *Método de Fluxiones*. **5.** Los *Principia*. **6.** Leibniz y el triángulo armónico. **7.** El triángulo diferencial y las series infinitas. **8.** El cálculo diferencial. **9.** Simbolismo, determinantes y números imaginarios. **10.** El álgebra de la lógica. **11.** La ley de los inversos de los cuadrados. **12.** Teoremas sobre cónicas. **13.** La óptica y la teoría de curvas. **14.** Las coordenadas polares y otros tipos de coordenadas. **15.** El método de Newton y el paralelogramo de Newton. **16.** La *Arithmetica Universalis*. **17.** Los últimos años. **493**

Capítulo XX. LA ERA DE LOS BERNOULLI

1. La familia Bernoulli. **2.** La espiral logarítmica. **3.** Probabilidades y series. **4.** La regla de l'Hospital. **5.** El cálculo exponencial. **6.** Los logaritmos de los números negativos. **7.** La paradoja de San Petersburgo. **8.** Abraham De Moivre. **9.** El teorema de De Moivre. **10.** Roger Cotes. **11.** James Stirling. **12.** Colin Maclaurin. **13.** La serie de Taylor. **14.** La controversia en torno al *The Analyst*. **15.** La regla de Cramer. **16.** Las transformaciones de Tschirnhaus. **17.** La geometría analítica tridimensional. **18.** Michel Rolle y Pierre Varignon. **19.** La matemática en Italia. **20.** El postulado de las paralelas. **21.** Las series divergentes. **523**

Capítulo XXI. LA EPOCA DE EULER

1. La vida de Euler. **2.** Los logaritmos de los números negativos de nuevo. **3.** La fundamentación del análisis. **4.** Las series infinitas. **5.** Series convergentes y divergentes. **6.** La vida de D'Alembert. **7.** Las identidades de Euler. **8.** D'Alembert y la idea de límite. **9.** La teoría de ecuaciones diferenciales. **10.** Los Clairaut. **11.** Los Riccati. **12.** La teoría de probabilidades. **13.** La teoría de números. **14.** Los libros de texto. **15.** La geometría sintética. **16.** La geometría analítica tridimensional. **17.** Lambert y el postulado de las paralelas. **18.** Bezout y la teoría de la eliminación. **553**

Capítulo XXII. LOS MATEMATICOS DE LA REVOLUCION FRANCESA

1. La época de las revoluciones. **2.** Los matemáticos más importantes. **3.** Publicaciones anteriores a 1789. **4.** Lagrange y la teoría de determinantes. **5.** El Comité de Pesos y Medidas. **6.** Condorcet y la educación. **7.** Monge como administrador y como maestro. **8.** La geometría descriptiva y analítica. **9.** Los libros de texto. **10.** Lacroix y la geometría analítica. **11.** El Organizador de la Victoria. **12.** La metafísica del cálculo y de la geometría. **13.** La *Géometrie de position*. **14.** Las transversales. **15.** La *Géometrie* de Legendre. **16.** Las integrales elípticas. **17.** La teoría de números. **18.** La teoría de funciones. **19.** El cálculo de variaciones. **20.** Los multiplicadores de Lagrange. **21.** Laplace y la teoría de probabilidades. **22.** Mecánica celeste y operadores. **23.** Los cambios políticos. **589**

Capítulo XXIII. EL PERIODO DE GAUSS Y CAUCHY

1. Los primeros descubrimientos de Gauss. **2.** La representación gráfica de los números complejos. **3.** El teorema fundamental del álgebra. **4.** El álgebra de las congruencias. **5.** La ley de reciprocidad y la frecuencia de los números primos. **6.** Los polígonos regulares constructibles. **7.** La astronomía y la ley de mínimos cuadrados. **8.** Funciones elípticas. **9.** Vida y obra de Abel. **10.** La teoría de determinantes. **11.** Jacobianos. **12.** Las revistas matemáticas. **13.** La teoría de funciones de variable compleja. **14.** Los fundamentos del cálculo infinitesimal. **15.** Bernhard Bolzano. **16.** Los criterios de convergencia. **17.** La geometría. **18.** La matemática aplicada. **627**

Capítulo XXIV. LA EPOCA HEROICA DE LA GEOMETRIA

1. Los teoremas de Brianchon y de Feuerbach. **2.** La geometría de la inversión. **3.** La geometría proyectiva de Poncelet. **4.** La notación abreviada de Plücker. **5.** Las coordenadas homogéneas. **6.** Coordenadas de rectas y dualidad. **7.** El renacimiento de la matemática inglesa. **8.** Cayley y la geometría *n*-dimensional. **9.** La geometría en Alemania. **10.** Lobachewsky y Ostrogradsky. **11.** La geometría no euclídea. **12.** Los Bolyai. **13.** La geometría riemanniana. **14.** Espacios de dimensión superior. **15.** El programa de Erlangen, de Klein. **16.** El modelo hiperbólico de Klein. **657**

Capítulo XXV. LA ARITMETIZACION DEL ANALISIS

1. La teoría de series de Fourier. **2.** La teoría analítica de números. **3.** Los números trascendentes. **4.** La inquietud acerca de los fundamentos del análisis. **5.** El teorema de Bolzano-Weierstrass. **6.** La definición de número real. **7.** El análisis de Weierstrass. **8.** El concepto de «cortadura» de Dedekind. **9.** El concepto de límite. **10.** La influencia de Gudermann. **11.** La juventud de Cantor. **12.** La idea de «potencia» de un conjunto infinito. **13.** Propiedades de los conjuntos infinitos. **14.** La aritmética transfinita. **15.** La crítica de Kronecker a la obra de Cantor. **685**

Capítulo XXVI. LA APARICION DEL ALGEBRA ABSTRACTA

1. La Edad de Oro de la matemática. **2.** La matemática en Cambridge. **3.** Peacock, el «Euclides del álgebra». **4.** Hamilton y los cuaterniones. **5.** Grassmann y Gibbs. **6.** Cayley y la teoría de matrices. **7.** El álgebra de Sylvester. **8.** La teoría de invariantes de formas cuadráticas. **9.** Boole y el análisis de la lógica. **10.** El álgebra de Boole. **11.** De Morgan y los Peirce. **12.** La trágica vida de Galois. **13.** La teoría de Galois. **14.** La teoría de cuerpos. **15.** Frege y la definición de número cardinal. **16.** Los axiomas de Peano. **709**

Capítulo XXVII. ASPECTOS DEL SIGLO VEINTE

1. La naturaleza de la matemática. **2.** La teoría de funciones de Poincaré. **3.** Matemática aplicada y topología. **4.** Los problemas de Hilbert. **5.** El teorema de Gödel. **6.** Los números trascendentes. **7.** Los fundamentos de la geometría. **8.** La teoría de espacios abstractos. **9.** Los fundamentos de la matemática. **10.** Intuicionismo, formalismo y logicismo. **11.** Integración y teoría de la medida. **12.** La topología conjuntista. **13.** La vía de la abstracción creciente en álgebra. **14.** La teoría de probabilidades. **15.** La aparición de las computadoras. **16.** El concepto de estructura matemática. **17.** Bourbaki y la «nueva matemática». **741**

Bibliografía general **774**

Apéndice: Tabla cronológica **781**

Indice analítico **793**

Capítulo I
LOS ORIGENES PRIMITIVOS

¿Has traído ante mí a un hombre que no sabe contar sus dedos?

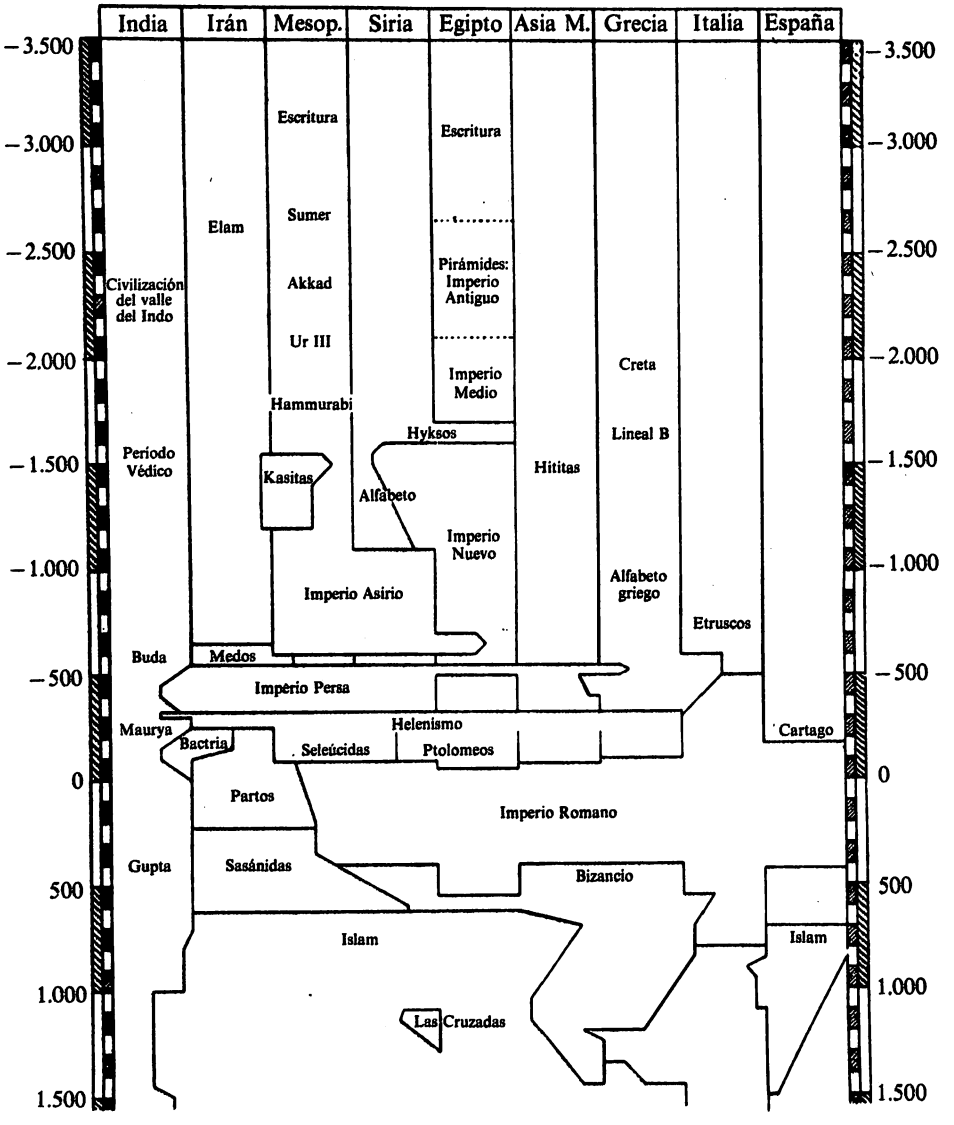
Del *Libro de los Muertos*

1. El concepto de número

Los matemáticos del siglo XX llevan a cabo una actividad intelectual muy sofisticada que no resulta fácil de definir, pero una gran parte de lo que hoy se conoce como matemática es el resultado de un pensamiento que originalmente se centró en los conceptos de número, magnitud y forma. Las definiciones de la matemática al estilo antiguo, tales como la de que es «la ciencia del número y de la magnitud», ya no son válidas hoy, pero sí que sugieren los orígenes que han tenido las diversas ramas de la matemática. Las nociones primitivas relacionadas con los conceptos de número, magnitud y forma se pueden hacer remontar a los primeros días de la raza humana, e incluso pueden encontrarse ya indicios de conceptos matemáticos en formas de vida que probablemente han precedido en muchos millones de años al género humano. Darwin, en su *Descent of Man* (1871), hace notar que algunos de los animales superiores tienen facultades tales como memoria y alguna forma de imaginación, y actualmente resulta incluso más claro que la capacidad para distinguir número, tamaño, orden y forma, aspectos rudimentarios todos ellos de un cierto sentido matemático, no son propiedad exclusiva del género humano. Experimentos llevados a cabo con cuervos y cornejas, por ejemplo, han demostrado que por lo menos algunos pàjaros pueden distinguir entre conjuntos que contengan hasta cuatro elementos[1]. Una cierta conciencia de las diferencias de formas que se hallan en su medio ambiente se presenta de una manera clara en muchos organismos inferiores, y todo esto tiene ya cierta afinidad con el interés del matemático por la forma y la idea de relación.

Durante un cierto tiempo se pensó que la matemática se refería directamente al mundo de nuestra experiencia sensible, y sólo en el siglo XIX se liberó la matemática pura de las limitaciones que implican las observaciones de la naturaleza. Está totalmente claro, no obstante, que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre, y si es válido el principio biológico de la «supervivencia de los mejor adaptados», entonces la supervivencia

[1] Véase Levi Conant, *The Number Concept. Its Origin and Development* (1923). Cf. H. Kalmus, «Animals as Mathematicians», *Nature*, 202 (1964), págs. 1156-1160.



Esquema cronológico que representa el desarrollo de algunas civilizaciones antiguas y medievales. (Reproducido, con permiso, de O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*.)

de la raza humana probablemente no deja de estar relacionada con el desarrollo de conceptos matemáticos por el hombre. En un principio, las nociones primitivas de número, magnitud y forma pueden haber estado relacionadas más bien con diferencias y contrastes que con semejanzas, tales como son la diferencia entre un lobo y muchos, la desigualdad en tamaño entre un pececillo y una ballena, el contraste entre la redondez de la luna y la derechura de un pino. Después, y de una manera gradual, debe haber surgido, a partir de la confusión de un gran número de

experiencias desordenadas, la constatación de que hay ciertas igualdades o semejanzas, y de esta conciencia de las semejanzas, tanto en el número como en la forma, nacieron la matemática y la ciencia en general. Las diferencias mismas parecen estar apuntando ya a las semejanzas, puesto que el contraste que se observa entre un lobo y muchos, entre una oveja y un rebaño, entre un árbol y un bosque, viene a sugerir que un lobo, una oveja y un árbol tienen algo en común, su unidad. De la misma manera se puede llegar a darse cuenta de que algunos otros grupos de cosas, como son los pares, pueden ponerse en correspondencia biunívoca: las manos pueden emparejarse con los pies, con los ojos, con las orejas o con los agujeros de la nariz. Este reconocimiento de una propiedad abstracta que tienen en común ciertos grupos, y a la que nosotros llamamos número, representa ya una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna. Es completamente improbable que un descubrimiento como éste haya sido la obra de un hombre individual ni de una única tribu; más probablemente debió ser una especie de conciencia gradual que pudo haberse producido dentro del desarrollo cultural humano tan tempranamente al menos como el uso del fuego, hace unos 400.000 años probablemente. El hecho de que el desarrollo del concepto de número fue efectivamente un largo y lento proceso viene sugerido por el dato de que algunas lenguas, incluido el griego, han conservado en su gramática una distinción tripartita entre uno, dos y más de dos, mientras que la mayor parte de las lenguas actuales hacen sólo la distinción dual en el «número» gramatical entre singular y plural. Evidentemente nuestros antepasados muy primitivos contaban al principio sólo hasta dos, y cualquier conjunto que sobrepasara este nivel quedaba degradado a la condición de «muchos». Hay todavía en la actualidad muchos pueblos primitivos que cuentan objetos reuniéndolos en grupos de dos objetos cada uno.

2. Bases de numeración primitivas

La conciencia del número se hizo al fin lo suficientemente extendida y clara como para que se llegase a sentir la necesidad de expresar esta propiedad de alguna manera, al principio presumiblemente sólo en un lenguaje simbólico. Los dedos de la mano pueden usarse fácilmente para representar un conjunto de dos, tres, cuatro o cinco objetos, y si no de uno, ello fue debido a que el número uno no era reconocido generalmente al principio como un «verdadero número». Por medio de los dedos de las dos manos se podían representar colecciones de hasta diez elementos, y usando los dedos de manos y pies podía uno remontarse hasta veinte. Cuando el uso de los dedos resultaba ya inadecuado, podían utilizarse pequeños montones de piedras para representar una correspondencia biunívoca con los elementos de otro conjunto, y cuando el hombre primitivo empleaba este sistema de representación, a menudo amontonaba las piedras por grupos de cinco, debido a que antes se había familiarizado con los quíntuplos de objetos por observación de su propia mano o pie. Como hizo observar Aristóteles hace ya largo tiempo, lo extendido que se halla actualmente el uso del sistema decimal no es sino la consecuencia del accidente anatómico de que la mayor parte de nosotros nacemos con diez dedos en las manos y otros diez en los pies. Desde un punto de vista

estrictamente matemático resulta en cierto modo un inconveniente el que el hombre de Cro-Magnon y sus descendientes no tuvieran o bien cuatro o seis dedos en cada mano.

Aunque históricamente el hecho de contar con los dedos, es decir, la práctica de contar de cinco en cinco o de diez en diez, parece haber hecho acto de presencia más tarde que la de contar de dos en dos y de tres en tres, sin embargo los sistemas quinario y decimal desplazaron de una manera casi invariable a los esquemas binario y ternario. Un estudio hecho sobre varios cientos de tribus de indios norteamericanos, por poner un ejemplo, ha demostrado que casi un tercio de ellas usaban la base decimal, y aproximadamente otro tercio había adoptado un sistema quinario o quinario-decimal; menos de un tercio tenía un esquema binario, y los que utilizaban un sistema ternario constituían menos del 1 por 100 del grupo estudiado. El sistema vigesimal, con una base igual a 20, se presentaba en un 10 por 100 aproximadamente de las tribus[2].

Los montones de piedras constituyen un mecanismo demasiado efímero para conservar información, y en vista de ello el hombre prehistórico a veces registraba un número cortando muescas en un palo o en un trozo de hueso. Pocos de estos testimonios se han conservado hasta hoy, pero en Checoslovaquia se descubrió un hueso procedente de un cachorro de lobo, en el que aparecen 55 incisiones bastante profundas distribuidas en dos series, la primera con 25 y la segunda con 30, y en cada serie las incisiones están distribuidas en grupos de cinco. Los descubrimientos arqueológicos tales como éste nos suministran la evidencia de que la idea de número es mucho más antigua que los descubrimientos tecnológicos, tales como el uso de los metales o de los vehículos de ruedas; es ampliamente anterior a la civilización y a la escritura, tal como se las entiende usualmente, ya que los utensilios con significado numérico tales como el hueso que hemos descrito han sobrevivido de un período de hace unos 30.000 años. Se puede encontrar un elemento de evidencia adicional acerca de las primitivas ideas numéricas del hombre en nuestro lenguaje diario; parece seguro, por ejemplo, que nuestras palabras «once» y «doce» significaron originalmente «uno más» y «dos más», respectivamente, indicando una primitiva dominancia del concepto decimal. Sin embargo, se ha sugerido también que posiblemente la palabra indogermánica para «ocho» se derivaba de una forma dual para «cuatro», y que el nombre latino *novem* para «nueve» puede estar relacionado con *novus* (nuevo), en el sentido de que era el comienzo de una nueva secuencia. Probablemente estas palabras puedan interpretarse en el sentido de sugerir la persistencia de una escala cuaternaria u octonaria durante algún tiempo, de la misma manera que el *quatre-vingt* francés de hoy aparece como un vestigio de un sistema vigesimal antiguo.

3. El lenguaje numérico y los orígenes de la numeración

Lo que distingue de manera más notable al hombre del resto de los animales es el lenguaje articulado, lenguaje cuyo desarrollo fue esencial para el nacimiento del

[2] W. C. Eels, «Number Systems of North American Indians», *American Mathematical Monthly*, 20 (1913), pág. 263. Véase también D. J. Struik, «Stone Age Mathematics», *Scientific American*, 179 (diciembre 1948), págs. 44-49.

pensamiento matemático abstracto. Sin embargo, las palabras para expresar ideas numéricas aparecieron muy lentamente; los *signos* para representar números precedieron con toda probabilidad a las *palabras* para representar números, simplemente porque es mucho más fácil cortar muescas en un palo que establecer una frase bien modulada para identificar un número concreto. Si el problema del lenguaje no hubiera sido tan difícil, los sistemas rivales del sistema decimal podrían haber hecho mayores progresos. La base cinco, por ejemplo, fue una de las primeras en dejar tras ella alguna evidencia escrita tangible, pero para la época en que el lenguaje se formalizó ya de una manera completa, el diez le había ganado la partida. Las lenguas modernas están construidas casi sin excepción sobre la base de numeración diez, de manera que un número como el diecisiete, por ejemplo, no se describe como cinco y cinco y dos, sino como diez y siete. La tardanza, a lo largo del desarrollo del lenguaje, en conseguir cubrir abstracciones tales como el número, se puede ver claramente también en el hecho de que las expresiones verbales numéricas primitivas se refieren invariablemente a colecciones específicas concretas, tales como «dos peces» o «dos mazas» en vez de simplemente «dos», y sólo más tarde alguna de esas frases se vería adoptada de una manera convencional para representar a todos los conjuntos de dos objetos. La tendencia natural del lenguaje a desarrollarse de lo concreto a lo abstracto se ve en muchas medidas de longitud actuales (las de origen antiguo, no las decimales): la talla de un caballo puede medirse en «palmos», y las palabras «pie», «codo», «pulgada», «vara», se han derivado en muchos casos, por ejemplo, de partes del cuerpo humano fáciles de utilizar como unidades de medida.

Los miles de años que necesitó el hombre para extraer los conceptos abstractos de situaciones concretas repetidas son testigo de las dificultades que se han debido encontrar y superar para establecer unas bases, incluso muy primitivas, para la matemática. Además, todavía hay una gran cantidad de cuestiones sin respuesta relativas al origen de la matemática; usualmente se supone que esta ciencia apareció para responder a necesidades prácticas del hombre, pero hay estudios antropológicos que sugieren la posibilidad de un origen alternativo. Se ha sugerido[3] que el arte de contar pudo aparecer en conexión con ciertos rituales religiosos primitivos y que el aspecto ordinal precedió al concepto cuantitativo. En los ritos ceremoniales que escenifican los mitos de la creación era necesario llamar a los participantes a escena en un orden preciso y determinado, y quizá la numeración se inventó para resolver este problema. Si son correctas las teorías del origen ritual de la numeración, entonces el concepto de número ordinal puede haber precedido al de número cardinal. Por otra parte, un origen de este tipo tendería a apuntar a la posibilidad de que la numeración surgiera en un origen local único, para extenderse después a otros lugares de la tierra. Este punto de vista, aunque está aún lejos de estar bien establecido, estaría en armonía con la división ritual de los números enteros en pares e impares, considerando a los primeros como femeninos y a los segundos como masculinos; clasificaciones de este tipo fueron conocidas por las civilizaciones de todos los rincones de la tierra, y los

[3] Véase A. Seidenberg, «The Ritual Origin of Counting», *Archive for History of Esact Sciences*, 2 (1962), págs. 1-40.

mitos relativos a los números machos y hembras han tenido una persistencia muy notable.

El concepto de número natural es uno de los más antiguos de la matemática, y sus orígenes se pierden entre la bruma de la antigüedad prehistórica. El concepto de fracción racional, en cambio, se desarrolló relativamente tarde y, en general, no estuvo estrechamente relacionado con el sistema elaborado por el hombre para los enteros. Entre las tribus primitivas no parece haber existido prácticamente ninguna necesidad de usar fracciones; para las necesidades cuantitativas usuales el hombre puede elegir, en la práctica, unidades lo suficientemente pequeñas como para evitar la necesidad de usar fracciones. Y, por lo tanto, no hubo tampoco un progreso ordenado y lineal de las fracciones binarias a las quinarias y finalmente a las decimales, sino que los decimales fueron esencialmente producto de la época moderna de la matemática y no del período antiguo.

4. El origen de la geometría

Las afirmaciones que se hagan acerca de los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente arriesgadas y conjeturales, ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura. Sólo durante la última media docena de milenios, de un largo proceso que puede haber cubierto miles de milenios, ha sido capaz el hombre de poner por escrito sus pensamientos y aquello que quería dejar registrado. Así pues, en lo que se refiere a los datos correspondientes a la época prehistórica, nos vemos obligados a depender de interpretaciones que se basan en los pocos utensilios que se han conservado, de la evidencia que puede suministrar la antropología actual y de la extrapolación conjetural hacia atrás hecha a partir de los documentos que se han conservado. Herodoto y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor. Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo. Aristóteles sostenía en cambio que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. Nosotros podemos considerar que los puntos de vista de Herodoto y de Aristóteles representan dos teorías opuestas acerca de los orígenes de la matemática, la primera defendiendo un origen basado en una necesidad práctica, y la segunda un origen basado en el ocio y el ritual sacerdotal. El hecho de que a los geómetras egipcios se les llamase a veces «los tensadores de la cuerda» (o agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquiera de las dos teorías, porque las cuerdas se usaron indudablemente tanto para bosquejar los planos de los templos como para reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos. No podemos rechazar con seguridad ni la teoría de Herodoto ni la de Aristóteles sobre los motivos que condujeron a la matemática, pero lo que sí está bien claro es que los dos subestimaron la edad de dicha ciencia. El hombre neolítico puede haber

disfrutado de escaso tiempo de ocio y haber tenido pocas necesidades de utilizar la agrimensura, y sin embargo sus dibujos y diseños revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental. Además, ciertas sucesiones sencillas de diseños, tales como el de la figura 1.1, sugieren una especie de teoría de

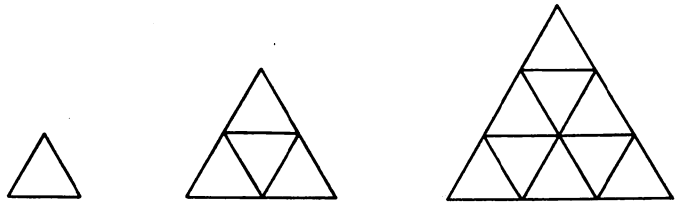


Figura 1.1

grupos aplicada, así como también algunas proposiciones geométricas y aritméticas. El dibujo permite ver inmediatamente que las áreas de los triángulos están entre sí como los cuadrados de sus lados, o bien, contando los triángulos, que las sumas de los números impares consecutivos, empezando por el uno, son todas ellas cuadrados perfectos. No hay documentos disponibles de la época prehistórica, y por lo tanto es imposible seguir la pista a la evolución de la matemática de un diseño concreto a un teorema conocido, pero no obstante las ideas son como esporas muy resistentes, y a veces el presunto origen de un concepto puede no ser más que la reaparición de una idea mucho más antigua que había permanecido en estado latente.

El interés del hombre prehistórico por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima frecuentemente al matemático actual. Nos gustaría pensar que por lo menos algunos de los geómetras primitivos realizaba su trabajo sólo por el puro placer de hacer matemáticas y no como una ayuda práctica para la medición, pero hay otras alternativas. Una de ellas es la de que la geometría, lo mismo que la numeración, tuviera su origen en ciertas prácticas rituales primitivas. Los resultados geométricos más antiguos descubiertos en la India constituyen lo que se llamó los *Sulvasutras* o «reglas de la cuerda»; se trata de relaciones muy sencillas que al parecer se utilizaban en la construcción de altares y de templos. Se suele pensar que las motivaciones geométricas de los «tensadores de la cuerda» en Egipto eran más prácticas que las de sus colegas en la India, pero se ha sugerido[4] que ambas geometrías, tanto la egipcia como la hindú, pudieron derivarse de una fuente común, una especie de protogeometría que estaría relacionada con algunos ritos primitivos más o menos de la misma manera en que la ciencia se desarrolló a partir de la mitología y la filosofía de la teología. Debemos tener presente, sin

[4] A. Seidenberg, «The Ritual Origin of Geometry», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), págs. 488-527.

embargo, que la teoría del origen de la geometría en una secularización de prácticas rituales, no está en absoluto bien establecida. El desarrollo de la geometría puede haberse visto estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura como por un sentimiento estético de diseño y orden. Nosotros sólo podemos hacer conjeturas acerca de qué fue lo que impulsó a los hombres de la Edad de Piedra a contar, a medir y a dibujar esquemas geométricos, pero lo que sí está claro es que los orígenes de la matemática son más antiguos que las civilizaciones más antiguas. Ir más lejos e identificar categóricamente un origen concreto en el espacio o en el tiempo, sin embargo, sería tanto como tomar equivocadamente conjetura por historia. Lo mejor, pues, es dejar en suspenso la decisión sobre este tema y avanzar hacia un terreno más seguro de la historia de la matemática, tal como se le encuentra en los primeros documentos escritos que han llegado hasta nosotros.

Bibliografía

Conant, Levi: *The Number Concept. Its Origin and Development* (New York: Macmillan, 1923).

Eels, W. C.: «Number Systems of North American Indians», *American Mathematical Monthly*, **20** (1913), 263.

Kalmus, H.: «Animals as Mathematicians», *Nature*, **202** (1964), 1156-1160.

Menninger, Karl: *Zahlwort und Ziffer; Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2.ª ed. (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.).

Seidenberg, A.: «The Ritual Origin of Geometry», *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1962), 488-527.

——= «The Ritual Origin of Counting», *Archive for History of Exact Sciences*, **2** (1962), 1-40.

Smeltzer, Donald: *Man and Number* (New York: Emerson Books, 1958).

Smith, D. E.: *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols., ed. rústica, New York: Dover, 1958).

Smith, D. E., y Jekuthiel Ginsburg: *Numbers and Numerals* (Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1958).

Struik, D. J.: «Stone Age Mathematics», *Scientific American*, **179** (diciembre 1948), 44-49.

Ejercicios

1. Descríbase el tipo de evidencia sobre la que se basa el panorama de la matemática prehistórica que hemos expuesto, mencionando algunos ejemplos concretos.
2. ¿Que evidencia hay, si es que hay alguna, de que la matemática comenzase con la aparición del hombre? ¿Cree usted que la matemática es anterior al hombre?
3. Hágase una lista de posibles evidencias tomadas del lenguaje usual, relativas al empleo ocasional de bases distintas de diez.
4. ¿Qué ventajas y qué desventajas tienen respectivamente las bases de numeración dos, tres, cuatro, cinco, diez, veinte y sesenta? ¿Cree usted que estas consideraciones pudieron influir en el hombre primitivo a la hora de elegir una base?
5. Si usted tuviera que elegir una base de numeración, ¿cuál sería?, ¿por qué?
6. ¿Qué cree usted que apareció primero, los nombres para los números o los símbolos para los números? ¿Por qué?

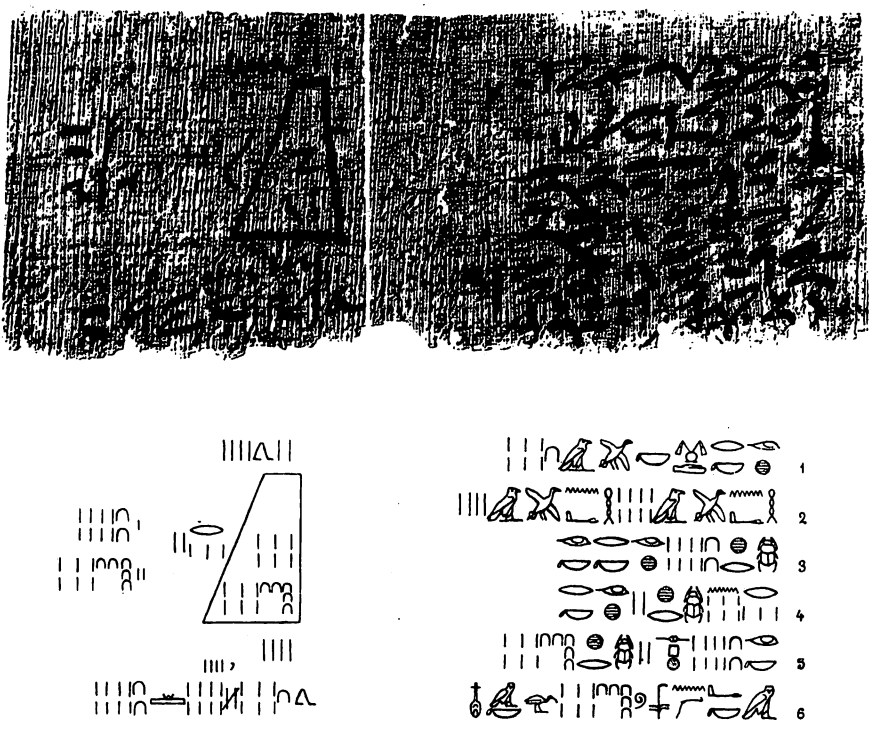
7. ¿Por qué hay tan pocas huellas de escalas de numeración entre el seis y el nueve?
8. ¿Cuáles cree usted que fueron las primeras figuras geométricas, plana y sólida respectivamente, que fueron estudiadas de una manera consciente y sistemática? ¿Por qué?
9. ¿Qué cree usted que influyó más en el surgir de la geometría primitiva, un interés por la astronomía o una necesidad de agrimensura? Explíquese.
10. ¿Cuáles de las siguientes divisiones del tiempo debía conocer verosímilmente el hombre prehistórico: el año, el mes, la semana, el día, la hora? Explíquese el porqué.

Capítulo II
EGIPTO

> Sesostris... dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes... Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre... el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar, por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida... A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia.
>
> *Herodoto*

1. Los primeros documentos

Es costumbre dividir el pasado de la humanidad en eras y períodos en relación con los distintos niveles culturales y sus características; estas divisiones resultan útiles, aunque debemos tener siempre presente que se trata sólo de unos marcos superpuestos arbitrariamente para nuestra conveniencia y que las compartimentaciones en el tiempo que nos indican no son de ninguna manera aisladas y estancas. La Edad de Piedra, ese largo período que precedió al uso de los metales, no tuvo un final abrupto y definido; de hecho, el tipo de cultura que representaba tuvo una duración mucho más larga en Europa que en algunas regiones de Asia y de Africa. El nacimiento de las civilizaciones que se caracterizaron por el uso de los metales tuvo lugar en un principio en los grandes valles fluviales, como son los que nos encontramos en Egipto, Mesopotamia, India y China, y debido a ello nos referiremos a la parte inicial del período ya propiamente histórico como la «etapa potámica». Los registros cronológicos correspondientes a las civilizaciones de los valles de los ríos Indo y Yangtze son muy inseguros, pero en cambio se dispone de una información bastante fiable acerca de los pueblos que vivieron a lo largo del Nilo y en el «creciente fértil» de los ríos Eufrates y Tigris. Antes de que finalizara el cuarto milenio a.C. ya se utilizaba una forma primitiva de escritura tanto en Mesopotamia como en el valle del Nilo. Y allí fue donde, por medio de un proceso continuo de convencionalización, los primitivos textos pictográficos evolucionaron para dar lugar a una ordenación lineal de símbolos más sencillos. En Mesopotamia, donde la arcilla es abundante, se escribía con una varilla en forma de prisma triangular sobre las tablillas de arcilla blanda, imprimiendo en ellas marcas en forma de cuña; estas tablillas se cocían a continuación en hornos o simplemente se secaban al calor del sol. Este tipo de escritura se conoce con el nombre de escritura cuneiforme (de la palabra latina *cuneus* para «cuña»), debido a la forma de cada una de las señales individuales. El significado que se quería transmitir por medio de la escritura cuneiforme venía determinado por el diseño que formaba la disposición de las marcas en forma de cuña. Los documentos en cuneiforme presentan un alto grado de permanencia y a ello se debe el que se hayan conservado muchos miles de estas tablillas desde la antigüedad, y de ellas muchas datan de hace unos 4.000



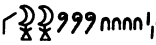
Reproducción (*arriba*) de un fragmento del Papiro de Moscú que presenta el problema del volumen de un tronco de pirámide cuadrada, junto con su transcripción al jeroglífico (*abajo*).

años. Naturalmente sólo una pequeña parte de ellas se refieren a cuestiones que tengan algo que ver con la matemática. Por otra parte, hay que tener en cuenta que hasta hace un siglo aproximadamente el mensaje transmitido por las tablillas cuneiformes permanecía mudo, ya que no había sido descifrada aún esta escritura. Durante 1870 se hicieron progresos importantes en la interpretación de la escritura cuneiforme, gracias al descubrimiento de que el Behistum Cliff nos ofrece una crónica trilingüe de la victoria de Darío sobre Cambises, estando escritas las tres versiones distintas en persa, elamita y babilonio. El conocimiento del persa suministró de esta forma la clave para poder leer el asirio, lenguaje que estaba ya estrechamente relacionado con el babilonio más antiguo. Incluso después de este importante descubrimiento, el desciframiento y análisis de las tablillas de contenido matemático progresó muy lentamente, y hasta el segundo cuarto del siglo XX no se tuvo un panorama claramente definido de las contribuciones matemáticas de la antigua Mesopotamia, lo cual se debe en gran parte a los trabajos pioneros de Fr. Thureau-Dangin en Francia y de Otto Neugebauer en Alemania y en los Estados Unidos[1].

[1] Véase, por ejemplo, O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik* (Berlín: Springer, 1934). Para una exposición más general en inglés, véase su libro *The Exact Sciences in Antiquity* (1957).

2. El sistema de notación jeroglífica

Los documentos escritos egipcios tuvieron en cambio más suerte que los babilonios en cierto sentido, ya que la Piedra de Rosetta, trilingüe también y que jugó un papel análogo al que desempeñaría más tarde el Behistum Cliff, había sido descubierta ya en 1799 durante la expedición napoleónica a Egipto. Esta lápida, relativamente grande, fue encontrada en Rosetta, antiguo puerto próximo a Alejandría, y contiene un mismo texto en tres escrituras distintas: griego, demótico y jeroglífico. Conociendo el griego, Champollion en Francia y Thomas Young en Inglaterra hicieron rápidos progresos en el desciframiento de la escritura jeroglífica (es decir, «talla sagrada») egipcia. Por fin era posible leer las inscripciones que aparecen talladas en todas las tumbas y monumentos egipcios, aunque tales documentos ceremoniales no sean, desde luego, la mejor fuente de información en lo que se refiere a los conocimientos matemáticos. El sistema de numeración jeroglífico egipcio fue descifrado fácilmente; el principio en que se basa, tan antiguo como las pirámides por lo menos, data de hace unos 5.000 años y está estructurado, como podía esperarse, en una escala numérica de base 10. Utilizando un sencillo esquema iterativo y con ayuda de un conjunto de símbolos distintos para cada una de las primeras media docena de potencias de diez, pueden tallarse en piedra, madera u otros materiales los nombres correspondientes a números mayores que un millón. Un palote vertical aislado representa una unidad, un arco se usa para el 10, una especie de lazo que recuerda una C mayúscula representa el 100, una flor de loto para el 1.000, un dedo doblado para el 10.000, un tipo de pez parecido a una lota para 100.000 y una figura humana de rodillas y con los brazos por alto (quizá una especie de Dios de lo Infinito) para representar 1.000.000. Repitiendo convenientemente estos símbolos puede escribirse, por ejemplo, el número 12.345, de la forma



A veces los dígitos aparecen ordenados de menor a mayor de izquierda a derecha, y otras veces en columna verticalmente; por otra parte, los símbolos mismos aparecen ocasionalmente con su orientación invertida, de manera que el lazo que representa al 100 puede presentar su convexidad hacia la izquierda o hacia la derecha, por ejemplo.

Las inscripciones egipcias nos revelan una sorprendente familiaridad con números grandes desde una fecha muy antigua; por ejemplo, en un museo de Oxford se conserva una maza real de hace más de 5.000 años, en la que aparece registrado un número de 120.000 prisioneros y de 1.422.000 cabras capturadas[2]. Estos números pueden muy bien estar exagerados por razones de prestigio político, pero por otras consideraciones resulta claro, sin embargo, que los egipcios solían ser notablemente exactos al contar y medir. Las pirámides muestran un grado tan elevado de precisión, tanto en su construcción misma como en su orientación, que en torno a ellas se han desarrollado leyendas infundadas. La sugerencia, por ejemplo, de que la razón del perímetro de la base de la Gran Pirámide (de Khufu o

[2] J. E. Quibell, *Hierakonpolis* (Londres: B. Quatrich, 1900). Véase especialmente la lámina 26B.

de Cheops) a la altura se hizo conscientemente igual a 2π resulta claramente inconsistente con lo que conocemos de la geometría de los egipcios[3]. Sin embargo, tanto las pirámides como los pasillos en su interior están orientados con tal precisión que incluso se han hecho intentos de calcular su fecha de construcción a partir de la velocidad conocida con que cambia de posición la estrella polar.

Los egipcios se interesaron muy pronto por la astronomía y observaron que la inundación anual del valle del Nilo tenía lugar poco después de la llamada salida heliacal de Sirio, la estrella α de la constelación del Canis Maior, es decir, cuando Sirio sale por el Este justo antes que el Sol. Observando que estas salidas heliacales de Sirio, el heraldo de la crecida, estaban separadas por 365 días, consiguieron establecer los egipcios un buen calendario solar que constaba de doce meses de treinta días cada uno y de cinco días festivos extra. Pero este calendario civil resultaba ser demasiado corto en un cuarto de día, y así las estaciones avanzaban más o menos un día cada cuatro años, hasta que, al cabo de un ciclo de 1.460 años las estaciones volvían a estar sincronizadas con el calendario. Dado que, como sabemos por el escritor romano Censorino, autor del *De die natale* (238 d.C.), el calendario egipcio estaba de acuerdo con las estaciones el año 139 d.C., se ha sugerido por extrapolación hacia atrás que el calendario debió ser instituido en el año 4241 a.C., exactamente tres ciclos completos antes. Cálculos más precisos basados en el hecho de que el año no tiene exactamente $365\frac{1}{4}$ días, han modificado la fecha anterior al año 4228 a.C., pero otros historiadores creen que la extrapolación hacia atrás más allá de dos ciclos no ofrece garantías, y sugieren por lo tanto un origen del calendario situado hacia el año 2773 a.C.

3. El papiro de Ahmes

La cantidad de información matemática que podemos obtener de las piedras talladas encontradas en las tumbas y los templos y de los calendarios es evidentemente muy limitada, y el panorama de las contribuciones egipcias que tendríamos sería extremadamente incompleto si tuviéramos que depender solamente de materiales ceremoniales y astronómicos. La matemática consiste en muchas otras cosas que el contar y medir, que son justamente los aspectos que se destacan en las inscripciones jeroglíficas. Afortunadamente disponemos de otras fuentes de información; hay un cierto número de papiros egipcios que, de una manera o de otra, han conseguido sobrevivir a los estragos del tiempo durante más de tres milenios y medio. El más extenso de los que contienen información matemática es un rollo de papiro de unos 30 cm. de alto y casi 6 m. de largo, que está depositado actualmente en el British Museum (excepto unos pocos fragmentos que conserva el Brooklyn Museum). Este papiro fue comprado en 1858 en una ciudad comercial del Nilo por un anticuario escocés, Henry Rhind, de donde deriva el nombre de Papiro Rhind con que se le conoce usualmente o, no tan a menudo, como el Papiro de Ahmes, en honor del escriba que lo copió hacia el 1650 a.C.[4].

[3] Noel F. Wheeler, «Pyramids and Their Purpose», *Antiquity*, 9 (1935), págs. 5-21, 161-189, 292-304.

[4] Hay dos buenas ediciones en inglés de este papiro: una por T. E. Peet, publicada en Londres en

Este escriba nos dice que el material se deriva de un prototipo del Imperio Medio, de entre el 2000 y el 1800 a.C., y es posible que parte de estos conocimientos provengan en realidad de Imhotep, el casi legendario arquitecto y médico del faraón Zoser, que dirigió la construcción de su pirámide hace casi 5.000 años. En cualquier caso, la matemática egipcia parece haberse estancado durante unos 2.000 años después de unos comienzos prometedores.

Tanto los numerales como el resto del material que aparece en el Papiro Rhind no están escritos en la forma jeroglífica que hemos visto más arriba, sino en una escritura más cursiva, que se adapta mejor al uso del pincel y la tinta sobre las hojas de papiro previamente tratadas, escritura que se conoce como hierática (o «sagrada», para distinguirla de la forma aún posterior llamada escritura demótica o popular). El sistema de numeración sigue siendo, desde luego, decimal, pero el tedioso principio repetitivo de la numeración jeroglífica se ve reemplazado por la introducción de cifras o signos especiales para representar los dígitos y los múltiplos de las potencias de diez. El cuatro, por ejemplo, no se suele ver ya representado por cuatro barras o palotes verticales, sino por una barra horizontal, y el siete no se escribe como siete palotes, sino como una cifra única 𓆐 que recuerda la forma de una hoz. En notación jeroglífica el número veintiocho se escribía como 𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺, mientras que en hierática es simplemente 𓏺𓏺𓏺𓏺 . Nótese que la cifra 𓏺𓏺 que representa al dígito de orden menor, ocho (o dos cuatros), aparece a la izquierda en vez de a la derecha. Este principio de notación cifrada, introducido por los egipcios hace unos 4.000 años y utilizado en el Papiro Rhind, representó una contribución importante a los sistemas de numeración, y es uno de los factores que hace que el sistema que utilizamos hoy en día sea un instrumento tan eficaz como es.

4. Las fracciones unitarias

Los hombres de la Edad de Piedra no tenían necesidad de usar fracciones, pero al alcanzarse un nivel cultural más avanzado durante la Edad del Bronce, parece haber aparecido por primera vez la necesidad de un concepto más o menos vago de fracción y de un sistema de notación capaz de representar fracciones. En las inscripciones jeroglíficas egipcias nos encontramos, en efecto, con una notación especial para las fracciones unitarias, es decir, para las fracciones que tienen como numerador la unidad. Lo que nosotros llamamos el inverso de un número natural se representaba colocando simplemente sobre la expresión que designaba a este número un signo oval alargado; por ejemplo, la fracción $\frac{1}{8}$ vendría representada por 𓏺𓏺𓏺𓏺, y $\frac{1}{20}$ se escribía en jeroglífico como 𓎆. En el sistema de notación hierático que aparece en los papiros, el óvalo alargado se reemplaza por un punto que viene colocado encima de la cifra que represente al número en cuestión (o sobre la cifra más a la derecha en el caso del inverso de un número con varios dígitos). Así, en el

1923, y la otra por A. B. Chace y otros, publicada en dos volúmenes en Oberlin, Ohio, en 1927-1929. El volumen I de esta última contiene una extensa exposición general de la matemática egipcia por R. C. Archibald, una traducción con comentarios del Papiro de Ahmes y una bibliografía muy amplia de artículos sobre la matemática egipcia.

Papiro de Ahmes, por ejemplo, la fracción $\frac{1}{8}$ viene representada por  , y $\frac{1}{20}$ aparece escrita en la forma  . Estas fracciones unitarias se utilizaban ya con gran virtuosismo en la época de Ahmes, pero en cambio las fracciones en general parecen haber sido un verdadero enigma para los egipcios; con la fracción $\frac{2}{3}$ parecían sentirse cómodos, ya que tenían un símbolo hierático especial para representarla, el  ; y, de una manera un poco más general, usaban a veces signos especiales para las fracciones del tipo $n/(n+1)$, complementarias a la unidad de las fracciones unitarias. A la fracción $\frac{2}{3}$ le asignaban los egipcios un papel tan especial en sus cálculos aritméticos que para calcular un tercio de un número ¡hallaban primero los dos tercios y luego calculaban la mitad del resultado! Conocían y utilizaban el hecho de que los dos tercios de la fracción unitaria $1/p$ es igual a la suma de las dos fracciones unitarias $1/2p$ y $1/6p$, y sabían también, obviamente, que el doble de la fracción unitaria $1/2p$ es la fracción unitaria $1/p$. Sin embargo, parece como si, aparte de la fracción 2/3, los egipcios consideraran las fracciones generales propias de la forma m/n, con m menor que n, no como una «cosa» elemental y simple, sino como parte de un proceso incompleto. Donde nosotros consideramos hoy $\frac{3}{5}$ como una fracción propia irreducible, los escribas egipcios la trataban como reducible a la suma de las tres fracciones unitarias $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{15}$. Para facilitar la reducción de las fracciones propias «mixtas» a una suma de fraciones unitarias, el Papiro Rhind comienza con una tabla en la que se expresa $2/n$ como suma de fracciones unitarias para todos los valores impares de n desde 5 a 101. El equivalente de $\frac{2}{5}$ es, según el papiro, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{15}$; $\frac{2}{11}$ se descompone en $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{66}$; y $\frac{2}{15}$ se expresa como $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{30}$. La última línea de la tabla descompone[5] $\frac{2}{101}$ en $\frac{1}{101}$ y $\frac{1}{202}$ y $\frac{1}{303}$ y $\frac{1}{606}$. No está nada claro por qué se prefería una descomposición a otra de las muchas posibles (infinitas, de hecho, si no se ponen limitaciones). Se ha sugerido que algunas de las descomposiciones en la tabla de $2/n$ podían estar obtenidas utilizando lo equivalente a la fórmula

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

o bien

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}$$

Sin embargo, ninguno de estos métodos da la combinación que aparece en la tabla para $\frac{2}{15}$. Recientemente se ha sugerido[6] que en la mayor parte de los casos la

[5] Una lista de las descomposiciones en fracciones de $2/n$ desde $n=5$ a $n=101$ se puede ver en B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), y en Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, vol. 1, *Vorgeschichte und Ägypten* (1958). Una explicación clara y detallada de las fracciones egipcias puede verse también en O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*. Estas tres obras dan todas ellas excelentes resúmenes de la matemática egipcia.

[6] Véase O. Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, págs. 74 y sigs.

elección venía motivada por la preferencia de los egipcios por las fracciones que se derivan de las fracciones «naturales» $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ tomando sucesivamente la mitad. Así, si uno quiere expresar $\frac{2}{15}$ como suma de fracciones unitarias, podría muy bien empezar por tomar la mitad de $\frac{1}{15}$ y después ver si al resultado $\frac{1}{30}$ se le puede sumar otra fracción unitaria que dé como resultado $\frac{2}{15}$, o bien podría usar la conocida relación

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}$$

para llegar al mismo resultado $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. Uno de los problemas del Papiro Rhind menciona expresamente este segundo método para calcular los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, y afirma que se puede proceder análogamente para otras fracciones. Pasajes como éste nos demuestran que los egipcios eran conscientes en algún sentido de las reglas y métodos generales que están por encima y a la vez van más allá del caso concreto que se tiene a mano, y esto representa ciertamente un paso importante en el desarrollo de la matemática. Para la descomposición de $\frac{2}{5}$ en fracciones unitarias el procedimiento de hallar la mitad no es conveniente, pero si comenzamos con $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$ nos encontramos con la descomposición dada por Ahmes $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. En el caso de $\frac{2}{7}$ podemos aplicar el método de hallar la mitad dos veces consecutivas a $\frac{1}{7}$ para llegar al resultado $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$, y también por particiones sucesivas obtenemos la descomposición de Ahmes $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$. La auténtica obsesión egipcia en hallar la mitad y tomar un tercio queda bien patente en la última línea de la tabla $2/n$, para $n=101$, pues no nos parece nada claro en absoluto por qué la descomposición $2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/2\cdot 3\cdot n$ es mejor que la $1/n+1/n$. Quizá uno de los objetos de la descomposición de $2/n$ era el de llegar a fracciones unitarias menores que $1/n$ salvo una de ellas.

5. Las operaciones aritméticas

La tabla de $2/n$ en el Papiro de Ahmes viene seguida por una breve tabla de $n/10$, para n de 1 a 9, en la que de nuevo estas fracciones se expresan en términos de las fracciones favoritas unitarias y de la fracción $\frac{2}{3}$; por ejemplo, la fracción $\frac{9}{10}$ aparece descompuesta en $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$. Ahmes había comenzado su obra asegurando que en ella se contenía «el estudio completo y detallado de todas las cosas... y el conocimiento de todos los secretos», y en consecuencia la parte principal del material, a continuación de las tablas de $2/n$ y de $n/10$, consiste en una colección de 84 problemas muy variados. Los seis primeros piden efectuar el reparto de una, dos, seis, siete, ocho o nueve hogazas de pan entre diez hombres, y en ellos el escriba hace uso de la tabla de fracciones $n/10$ que acaba de dar. ¡En el primer problema el escriba se mete en unos líos considerables para mostrar que es correcto dar a cada uno de los diez hombres un décimo de hogaza! Véase el razonamiento: si un hombre recibe $\frac{1}{10}$ de hogaza dos hombres recibirán $\frac{2}{10}$, es decir, $\frac{1}{5}$, y cuatro hombres recibirán $\frac{2}{5}$ de hogaza o bien $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ de hogaza, y por lo tanto ocho hombres recibirán $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$ de hogaza o bien $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, y ocho hombres más dos hombres, los diez iniciales, recibirán entre todos $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ de hogaza, es

decir, la hogaza completa; Ahmes parece haber tenido a su disposición algo equivalente a nuestro mínimo común múltiplo, lo que le permitía completar la comprobación. En la división de 7 hogazas entre diez hombres, el escriba podría haber tomado $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ de hogaza para cada uno, pero la predilección por $\frac{2}{3}$ le lleva a elegir en cambio la expresión $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ de hogaza para cada uno[7].

La operación aritmética fundamental en Egipto era la suma, y nuestras operaciones de multiplicación y división se hacían en la época de Ahmes por sucesivas «duplicaciones» o «mediaciones». Nuestra propia palabra «multiplicación» (de «múltiple») viene a sugerir, de hecho, el proceso mismo que seguían los egipcios: para multiplicar, digamos, 69 por 19 se procedía a sumar 69 consigo mismo (duplicación) para obtener 138, entonces se sumaba este resultado consigo mismo, lo que da 276, que duplicado de nuevo da 552, y duplicando una vez más resulta 1.104, que es igual obviamente a 16 veces 69; pero como $19=16+2+1$, el resultado de multiplicar 69 por 19 es $1.104+138+69$, es decir; 1.311. A veces se efectuaba a lo largo del proceso de golpe una multiplicación por diez, ya que se trata de una operación muy natural en notación jeroglífica de base diez. La multiplicación de combinaciones de fracciones unitarias formaba parte también de la aritmética egipcia; así, por ejemplo, el problema 13 del Papiro de Ahmes pide calcular el producto de $\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$ por $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, y se da el resultado correcto $\frac{1}{8}$. Para efectuar una división el proceso de duplicación se invierte, y es el *divisor* el que se duplica sucesivamente en vez del *multiplicando*. De los cálculos que aparecen en los problemas de Ahmes se deduce que los egipcios habían conseguido desarrollar un alto grado de virtuosismo en el manejo del proceso de duplicación y del concepto de fracción unitaria. El problema 70 pide calcular el cociente de dividir 100 por $7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, y el resultado $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$ se obtiene de la manera siguiente: duplicando sucesivamente el divisor obtenemos, en primer lugar $15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, después $31+\frac{1}{2}$ y finalmente 63, que es 8 veces el divisor. Por otra parte, los $\frac{2}{3}$ del divisor se sabe que es igual a $5+\frac{1}{4}$, y en consecuencia al multiplicar el divisor por $8+4+\frac{2}{3}$ se obtendrá un total de $99\frac{3}{4}$, que es $\frac{1}{4}$ menos del producto deseado 100, y aquí hay que hacer un hábil ajuste: como 8 veces el divisor dio 63, se sigue que al multiplicar el divisor por $\frac{2}{63}$ se obtendrá como resultado $\frac{1}{4}$; por otro lado, sabemos por la tabla de fracciones $2/n$ que $\frac{2}{63}$ es igual a $\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$, luego el cociente buscado es $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$. Este procedimiento hace uso, de pasada, del principio conmutativo de la multiplicación, con el que evidentemente estaban familiarizados los egipcios.

Muchos de los problemas de Ahmes muestran un conocimiento de la manipulación de proporciones equivalente a lo que se suele llamar una «regla de tres»: El problema 72 pide calcular el número de hogazas de pan de «fuerza» 45 que son equivalentes a 100 hogazas de «fuerza» 10, y la solución que se da es de $100/10\times 45$ ó 450 hogazas. En los problemas relativos a pan o a cerveza, la «fuerza» o *pesu* es el recíproco de la densidad en grano, que es el cociente del número de hogazas o de unidades de volumen en su caso, dividido por la cantidad de grano empleado. Los problemas sobre pan y cerveza son muy frecuentes en el

[7] Para más detalles véase R. J. Gillings, «Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus», *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), págs. 61-69.

Papiro de Ahmes: el problema 63, por ejemplo, pide dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de tal manera que las cantidades que reciba cada uno estén en la proporción continua $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$. La solución se halla calculando la razón de 700 a la suma de las fracciones de la proporción; en este caso, al dividir 700 por $1+\frac{3}{4}$ o, lo que es lo mismo, al multiplicar 700 por el inverso del divisor, que es $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$, se obtiene el resultado 400; tomando ahora los $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de 400 se tienen las raciones de pan pedidas.

6. Problemas algebraicos

Los problemas egipcios que hemos comentado más arriba los podemos clasificar como aritméticos, pero hay otros que caen dentro de un grupo al que puede aplicársele con propiedad el nombre de algebraicos. Estos últimos no se refieren a objetos concretos y específicos como pan o cerveza, ni tampoco piden el resultado de operaciones con número conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido; a este número desconocido o incógnita se le llama «aha» o montón. El problema 24, por ejemplo, pide calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19; la solución que da Ahmes no es la que podría verse en los libros de texto modernos, sino que es característica de un procedimiento que conocemos hoy como el «método de la falsa posición» o «regula falsi». En este método se supone un valor concreto para el montón, lo más probable es que sea incorrecto, y se efectúan con dicho número las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda de la igualdad; a continuación se compara el resultado de estas operaciones con el resultado que debería haberse obtenido, y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta. En el problema 24 que hemos mencionado se toma como valor de prueba para la incógnita el 7, de manera que $x+\frac{1}{7}x$ toma el valor 8 en lugar del correcto que debía ser 19, pero en vista de que $8(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=19$, tenemos que multiplicar 7 por $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ para obtener el valor correcto del montón; Ahmes halla la respuesta correcta $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ y «comprueba» su resultado mostrando que si a $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ le suma uno un séptimo de él mismo, es decir, $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, se obtiene efectivamente 19. Aquí nos encontramos con otra etapa significativa en el desarrollo de la matemática, ya que una comprobación puede considerarse como un caso muy simple de demostración, en cierto sentido. Aunque Ahmes usaba generalmente el método de la falsa posición en los problemas análogos al que acabamos de ver, hay un problema, el número 30, en el que la ecuación $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$ se resuelve factorizando el primer miembro y dividiendo después 37 por $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$, lo que da como resultado $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Muchos de los cálculos de «aha» en el Papiro Rhind eran evidentemente ejercicios para que practicasen los jóvenes estudiantes, y así, aunque una gran parte de ellos son de tipo práctico, en algunos casos parece claro que el escriba tenía en la mente rompecabezas o pasatiempos matemáticos al escribirlos. Por ejemplo, en el problema 79 se dice solamente «siete casas, 49 gatos, 343 ratones, 2.401 espigas de trigo, 16.807 medidas de grano». Se supone que el escriba se refería a un

problema, probablemente bien conocido ya, en el que en cada una de siete casas hay siete gatos cada uno de los cuales se come siete ratones, cada uno de los cuales se habría comido siete espigas de grano, cada una de las cuales habría producido a su vez siete medidas de grano. El problema no pide calcular evidentemente lo que sería una respuesta práctica, como cuál sería el número de medidas de grano que se han conseguido salvar, puesto que es un dato, sino la absurda e inútil suma del número de casas más el de gatos, ratones, espigas de trigo y medidas de grano. Esta pizca de humor en el Papiro de Ahmes parece constituir un antepasado remoto de la conocida canción infantil:

Según iba a St. Ives
encontré a un hombre con siete esposas;
cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a St. Ives?

7. Problemas geométricos

El historiador griego Herodoto nos dice que el hecho de que todos los años, con ocasión del desbordamiento del Nilo, se borraran las lindes de los campos fue el que acentuó la necesidad de los agrimensores. Las habilidades de los «tensadores de la cuerda» egipcios fueron admiradas, como sabemos, por Demócrito, matemático notable él mismo y uno de los fundadores de la teoría atómica, aunque hoy día sus logros nos parecen haber sido valorados excesivamente, en parte como resultado de la admirable precisión en la construcción de las pirámides. Se ha dicho frecuentemente que los antiguos egipcios estaban ya familiarizados con el teorema de Pitágoras, pero lo cierto es que en los papiros que han llegado hasta nosotros no hay ningún indicio de ello. Sí hay, sin embargo, varios problemas geométricos importantes en el Papiro de Ahmes; el problema 51 de Ahmes muestra que para calcular el área de un triángulo isósceles hay que tomar la mitad de lo que nosotros llamaríamos la base y multiplicarlo por la altura. Ahmes justificaba este método para calcular el área sugiriendo que el triángulo isósceles se podría considerar como formado por dos triángulos rectángulos, uno de los cuales puede desplazarse cambiando de posición de manera que entre los dos triángulos se forme un rectángulo. En el problema 52 se trata análogamente el caso del trapecio isósceles, considerando el caso particular en que la base mayor es 6, la menor 4 y la distancia entre ellas es 20; Ahmes toma la semisuma de las dos bases, «de manera que se convierta en un rectángulo», y la multiplica por 20 para hallar el área. En este tipo de transformaciones, en las que se convierten triángulos isósceles y trapecios en rectángulos, podemos ver ya los comienzos de una especie de teoría de congruencia y de la idea de demostración en geometría, pero los egipcios no desarrollaron más estos principios. Un defecto importante en su geometría radica en la falta de una distinción clara y precisa entre las relaciones que son exactas y las que son sólo aproximadas; una escritura de contrato procedente de Edfu que ha llegado hasta

nosotros y que data de un período posterior a Ahmes en unos 1.500 años, nos ofrece ejemplos de áreas de triángulos, trapezoides, rectángulos y otros cuadriláteros más generales; la regla para calcular el área de un cuadrilátero cualquiera consiste en tomar el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos. A pesar de que esta regla es groseramente incorrecta, el autor del documento deduce de ella un curioso corolario igualmente incorrecto, a saber, que el área de un triángulo es igual a la semisuma de dos de sus lados por la mitad del tercer lado. Este es un ejemplo sorprendente de búsqueda de relaciones entre figuras geométricas, así como de un uso primitivo de la idea del cero reemplazando a una magnitud geométrica.

El método egipcio para hallar el área del círculo se ha venido considerando desde hace mucho tiempo como uno de los progresos más notables de la época; en el problema 50 el escriba Ahmes admite que el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de lado 8 unidades. Si comparamos esta manera de proceder con la que se obtiene de la fórmula moderna $A=\pi r^2$, nos encontramos con que la regla egipcia es equivalente a tomar como valor de π 3,16 ó aproximadamente $3\frac{1}{6}$, que es sin duda una aproximación muy aceptable; pero de nuevo aquí carecemos de cualquier indicio que nos permita suponer que Ahmes fuera consciente de que las áreas de su círculo y su cuadrado no eran *exactamente* iguales. Es posible que el problema 48 nos dé una pista sobre la manera como los egipcios se vieron conducidos a su sencilla receta para calcular el área del círculo: en este problema el escriba parece construir un octógono a partir de un cuadrado de lado nueve unidades dividiendo cada lado en tres partes iguales y suprimiendo después los cuatro triángulos rectángulos isósceles que quedan en las esquinas, cada uno de los cuales tiene área igual a $4\frac{1}{2}$ unidades; entonces el área del octógono, que no difiere mucho de la del círculo inscrito en el cuadrado inicial, es de 63 unidades, la cual a su vez no difiere demasiado del área de un cuadrado de lado ocho unidades. El hecho de que el número $4(8/9)^2$ jugó realmente un papel comparable al de nuestra constante π parece confirmarse por la regla egipcia para hallar la circunferencia de un círculo, según la cual la razón del área de un círculo a su circunferencia es la misma que la razón del área del cuadrado circunscrito a su perímetro. Esta sorprendente observación correcta representa una relación geométrica de una importancia matemática y de una precisión mucho mayores que la de la relativamente buena aproximación de π. El grado de precisión conseguido en un cálculo aproximado no es, evidentemente, una buena medida ni del progreso matemático ni arquitectónico, y no se debería subrayar excesivamente este aspecto de la matemática egipcia. En cambio, el descubrimiento por parte de los egipcios de relaciones mutuas entre figuras geométricas frecuentemente se ha pasado por alto, y sin embargo es precisamente ahí donde llegaron a aproximarse más en su actitud a la de sus ilustres sucesores los griegos. En la matemática egipcia no nos encontramos con ningún teorema ni demostración formal, pero lo que sí es cierto es que algunas de las comparaciones geométricas que se hicieron en el valle del Nilo, tales como las que se refieren a las áreas y perímetros de círculos y cuadrados que hemos visto, están entre las primeras propiedades exactas relativas a figuras curvilíneas que se han formulado a lo largo de la historia.

8. Una razón trigonométrica

El problema 56 del Papiro Rhind presenta un interés especial porque contiene lo que podríamos llamar unos rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides un problema esencial era el de mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, y puede haber sido este problema el que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo. En la tecnología moderna se acostumbra medir la pendiente de una línea recta por medio de la razón entre «la subida» y «el avance»; en Egipto, en cambio, se solía utilizar la inversa de esta razón, denominándola por la palabra «seqt» y que significa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. Así pues, el seqt correspondía, salvo en lo que se refiere a las unidades de medida, al «desplome» que usan hoy los arquitectos para medir la pendiente hacia el interior de un muro. La unidad de longitud que usaban los egipcios para medir en vertical era el «codo», mientras que al medir distancias horizontales utilizaban la «mano», de las que había siete en un «codo». Por lo tanto, el seqt de la cara de una pirámide era la razón del «avance» a la «subida», medido el primero en manos y la segunda en codos. El problema 56 pide calcular el seqt de una pirámide que mide 250 codos de altura y cuya base tiene 360 codos de lado. El escriba divide primero 360 por 2 y a continuación divide el resultado por 250, obteniendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$, medido todo en codos; por último multiplica este resultado por 7 y da el valor del seqt como $5\frac{1}{25}$ manos por codo. En otros problemas sobre pirámides del Papiro de Ahmes el seqt resulta ser de $5\frac{1}{4}$, lo cual está algo más de acuerdo con el caso de la gran pirámide de Cheops, que mide 440 codos de lado de la base y 280 de altura, cuyo seqt es por tanto de $5\frac{1}{2}$ manos por codo.

Como hemos mencionado ya, hay muchas leyendas sobre presuntas relaciones geométricas entre las distintas dimensiones de la gran pirámide, algunas de las cuales son obviamente falsas. Por ejemplo, la historia de que el perímetro de la base se planeó de manera que fuese precisamente igual a la circunferencia cuyo radio es la altura de la pirámide, no concuerda con lo que nos dice Ahmes. La razón del perímetro a la altura es ciertamente muy próxima a $\frac{44}{7}$, que es el doble de $\frac{22}{7}$, aproximación de π muy usada modernamente, pero hay que recordar que el valor que se deduce para π de los cálculos de Ahmes es algo menor que $3\frac{1}{6}$ y no $3\frac{1}{7}$. Un rollo de papiro que data de la dinastía XII, el Papiro de Kahun, que se conserva en Londres, nos confirma que el valor de Ahmes también lo utilizaban otros escribas egipcios, según podemos ver en un problema en el que se calcula el volumen de un cilindro multiplicando la altura por el área de la base, área que se halla siguiendo exactamente la regla de Ahmes.

9. El Papiro de Moscú

La mayor parte de nuestra información acerca de la matemática egipcia proviene del Papiro de Ahmes o de Rhind, el documento matemático más extenso

que nos ha llegado del antiguo Egipto, pero disponemos además de otras fuentes[8]. Aparte del Papiro de Kahun ya mencionado, hay un Papiro de Berlín del mismo período, dos tablillas de madera de Akhmim (El Cairo) de hacia el 2000 a.C., un rollo de piel que contiene listas de fracciones unitarias y que data del final del período de los Hyksos, y otro importante papiro conocido por el nombre de Papiro Golenischev o de Moscú, que fue comprado en Egipto el año 1893. El Papiro de Moscú es casi tan largo como el Papiro Rhind, cerca de seis metros, pero su anchura es sólo la cuarta parte, unos siete centímetros y medio; está escrito por un escriba desconocido de la dinastía XII (ca. 1890 a.C.). de una manera más descuidada que la obra de Ahmes, y contiene veinticinco problemas resueltos, la mayor parte de ellos de la vida corriente y que no se diferencian mucho de los de Ahmes excepto en dos casos que tienen una importancia especial. Acompañando al problema 14 del Papiro de Moscú aparece una figura que parece representar (bastante defectuosamente por cierto) un trapecio isósceles (véase la fig. 2.1), pero los cálculos asociados con esta figura indican que en realidad se trata de un tronco de pirámide cuadrangular. Encima y debajo de la figura aparecen los signos que representan 2 y 4 respectivamente, y dentro de la figura los símbolos hieráticos para 6 y 56. El desarrollo de los cálculos revela que lo que se pide en el problema es

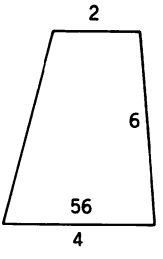


Figura 2.1

calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular de altura 6 unidades, siendo las aristas que constituyen los lados de las bases superior e inferior de 2 y 4 unidades respectivamente. Las instrucciones que va dando el escriba conducen a elevar al cuadrado los números 2 y 4 y añadirle a la suma de estos dos cuadrados el producto de 2 por 4, cuyo resultado es 28; por último se multiplica este resultado por un tercio de 6, y el escriba concluye con las consabidas palabras: «Ves, es 56; lo has calculado correctamente.» Es decir, que lo que se ha ido haciendo ha sido calcular el volumen del tronco de pirámide de acuerdo con la fórmula moderna $V=h(a^2+ab+b^2)/3$, donde h es la altura y a y b los lados de las bases cuadradas. Esta fórmula no aparece escrita en ninguna parte, pero es evidente que la manera de proceder que indica era conocida por los egipcios. Y si uno considera $b=0$, como se hace en el contrato de Edfu, la fórmula se reduce a la conocida expresión para el volumen de una pirámide, un tercio del área de la base

[8] Una buena exposición de estas otras fuentes puede verse en la obra de Archibald citada en la nota 4.

por la altura. No se sabe cómo llegaron los egipcios a estos resultados, pero parece muy posible que la regla para el volumen de la pirámide tuviera un origen experimental, y quizá también para el volumen del tronco, aunque no es tan fácil. Para este último parece más probable una explicación de base teórica, y se ha sugerido que los egipcios pudieron proceder aquí de una manera análoga a como hicieron en los casos del triángulo isósceles y del trapecio isósceles, es decir, pudieron haber descompuesto al menos mentalmente el tronco de pirámide en paralelepípedos, prismas y pirámides[9]. Reemplazando las pirámides y prismas por bloques rectangulares iguales, se pueden agrupar estos bloques de manera que hacen plausible la fórmula egipcia. Se podría haber comenzado, por ejemplo, con una pirámide de base cuadrada y con su vértice exactamente en la vertical de uno de los vértices de la base; entonces una descomposición obvia de su tronco consistiría en descomponerlo en cuatro partes como se indica en la figura 2.2, un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es b^2h, dos prismas triangulares, de

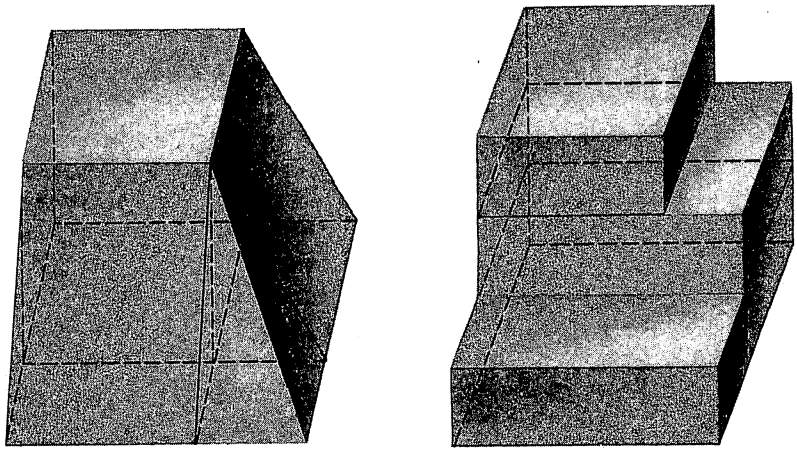


Figura 2.2

volumen $b(a-b)h/2$ cada uno de ellos, y por último una pirámide de volumen $(a-b)^2h/3$. Los dos prismas se pueden recombinar en un paralelepípedo rectángulo de dimensiones b, $a-b$ y h, y la pirámide se puede considerar como un paralelepípedo rectángulo de dimensiones $a-b$, $a-b$ y $h/3$. Cortando los dos paralelepípedos más altos de manera que todas las alturas sean $h/3$, se pueden ordenar fácilmente los bloques de manera que formen tres capas, cada una de altura $h/3$, y que tengan como áreas de sus bases a^2, ab y b^2 respectivamente.

El problema 10 del Papiro de Moscú presenta un problema de interpretación más difícil que el problema 14. Aquí el escriba pide el área de la superficie de lo que parece ser una cesta de diámetro $4\frac{1}{2}$, y procede en sus cálculos como si estuviera

[9] Véase Van der Waerden, *Science Awakening*, pág. 35. Cf. R. J. Gillings, «The Volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egypt», *Mathematics Teacher*, 57 (1964), págs. 552-555.

usando lo equivalente de la fórmula $S=(1-\frac{1}{9})^2(2x)\cdot x$, donde x vale $4\frac{1}{2}$, obteniendo como resultado final 32 unidades. Teniendo en cuenta que $(1-\frac{1}{9})^2$ es la aproximación egipcia para $\pi/4$, el resultado 32 podría corresponder a la superficie de una semiesfera de diámetro $4\frac{1}{2}$, y ésta fue la interpretación que se le dio al problema en 1930[10]. Un resultado tal como éste, anticipándose en más de 1.500 años a los cálculos más antiguos conocidos del área de la esfera, habría sido asombroso, y parece, de hecho, haber sido demasiado bonito para ser verdad. Análisis posteriores[11] vinieron a sugerir que la «cesta» pudiera haber sido, o tenido la forma de un tejado semicilíndrico de diámetro $4\frac{1}{2}$ y longitud $4\frac{1}{2}$. En este caso el cálculo no requiere conocer más que la longitud de una semicircunferencia, y puede obtenerse con gran facilidad de manera experimental, cosa prácticamente imposible para la semiesfera. La gran concisión y oscuridad del texto hace posibles interpretaciones aún más primitivas, incluida la posibilidad de que el cálculo en cuestión no sea más que una tosca estimación del área de un techo abovedado de un granero. Eso sí, en cualquier caso parece que nos encontramos aquí con una estimación primitiva del área de una superficie curvilínea.

10. Las deficiencias de la matemática egipcia

Durante muchos años se dio por descontado que los griegos habían aprendido los rudimentos de su geometría de los egipcios, y concretamente Aristóteles pensaba que la geometría había surgido en el valle del Nilo debido a que allí los sacerdotes disponían del ocio necesario para desarrollar cualquier conocimiento teórico. Es muy probable que los griegos tomaran prestadas algunas partes de la matemática elemental de Egipto, ya que, por ejemplo, el uso de las fracciones unitarias fue persistente en Grecia y Roma, para llegar hasta el período medieval, pero evidentemente los griegos exageraron su deuda para con los egipcios, en parte sin duda por su respeto casi reverencial a la antigüedad de la cultura egipcia. El tipo de conocimientos que nos revelan los papiros egipcios que han llegado hasta nosotros es en su mayor parte de carácter práctico, y el elemento principal en todas las cuestiones es el cálculo numérico. Donde parecen entrar tímidamente algunos elementos teóricos, la finalidad perseguida parece haber sido la de facilitar o justificar las técnicas más que el conseguir un entendimiento teórico del porqué. Incluso la tan alabada en otros tiempos geometría egipcia resulta haber sido casi exclusivamente una rama de la aritmética aplicada, y donde aparecen relaciones elementales de congruencia, su finalidad parece ser la de proporcionar nuevos recursos de medición más que la de un conocimiento más profundo; las reglas de cálculo raramente se justifican, y siempre se refieren sólo a casos concretos. Los

10 Véase W. W. Struve, «Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, I (1930).

11 Véase Van der Waerden, *Science Awakening*, pág. 34. Cf., sin embargo, R. J. Gillings, «The Area of the Curved Surface of a Hemisphere in Ancient Egypt», *The Australian Journal of Science*, 30 (1967), págs. 113-116, donde el autor llega a la conclusión de que el escriba del Papiro de Moscú calculaba realmente, y de una manera correcta, en el Problema 10, la superficie curva de una semiesfera.

Papiros de Ahmes y de Moscú, nuestras dos principales fuentes de información, pudieron haber sido en su día únicamente manuales destinados a la formación de los estudiantes, pero de paso indican inevitablemente la dirección y las tendencias de la educación matemática egipcia; la evidencia adicional obtenida de las inscripciones en los monumentos, de fragmentos de otros papiros matemáticos y de documentos que se refieren a otros campos científicos próximos nos sirve sólo para confirmar la impresión general sacada de las fuentes principales. Bien es verdad que los dos papiros matemáticos más importantes que conocemos son de un período relativamente antiguo, anterior al menos en mil años a los comienzos de la matemática griega, pero lo cierto es que la matemática egipcia (como toda la cultura, en general) parece haber permanecido en un estado notablemente uniforme a lo largo de su prolongada historia. En todas sus etapas estuvo construida en torno a la operación de sumar, desventaja que dio a todas las técnicas de computación egipcias un aire primitivo peculiar, combinado a veces con una sorprendente complejidad. Se ha dicho a veces que el fértil valle del Nilo es realmente el oasis más grande del mundo incrustado en el desierto más grande del mundo; regado por uno de los ríos más caballerosos que se conocen y protegido geográficamente en su mayor parte de las invasiones extranjeras, constituyó un magnífico refugio para un pueblo pacífico que lo que más deseaba era seguir un sistema de vida tranquilo y sin problemas. El amor de los dioses benévolos, el respeto a la tradición y la preocupación por la muerte y por las necesidades de los muertos, todo ello propició un alto grado de estancamiento en la civilización y en la cultura. La geometría pudo haber sido un regalo del Nilo, como creía Herodoto, pero los egipcios sacaron poco partido del regalo; en realidad, la matemática de Ahmes era la misma que la de sus antepasados y la de sus descendientes. Para ponernos en contacto con una matemática cuyos logros acusan más las señales del progreso, tenemos que dirigir nuestra mirada a otro valle, éste más turbulento, conocido de manera genérica como Mesopotamia.

Bibliografía

Chace, A. B.; Bull, L. S.; Manning, H. P., y Archibald, R. C. (eds.): *The Rhind Mathematical Papyrus* (Oberlin, Ohio, 1927-1929, 2 vols.). Este libro contiene una bibliografía exhaustiva de obras sobre la matemática egipcia publicadas entre 1706 y 1927, así como un extenso resumen de la matemática egipcia en general.

Gillings, R. J.: «Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus», *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), 61-69. Pueden verse continuaciones en volúmenes posteriores de la misma revista.

Guggenbuhl, Laura: «Mathematics in Ancient Egypt: A Checklist», *The Mathematics Teacher*, 58 (1965), 630-634.

Neugebauer, O.: *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung* (Berlín: Springer, 1926).

——: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; ed. en rúst., Nueva York: Harper Torchbook).

Parker, R. A.: *The Calendars of Ancient Egypt* (Chicago: University of Chicago Press, 1950).

Struve, W. W.: «Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau», *Quellen and Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, **1** (1930).

Van der Waerden, B. L.: «Die Enststehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, IV (1937-1938), 359-382.

——: *Science Awakening*, trad. por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961: ed. en rúst., New York: Wiley, 1963).

Vogel, Kurt: *Vorgriechische Mathematik*, vol. I, *Vorgeschichte und Ägypten* (ed. en rúst., Hannover: Hermann Schroedel, ca. 1958).

Wheeler, Noel F.: «Pyramids and Their Purpose», *Antiquity*, **9** (1935), 5-21, 161-189, 292-304.

Ejercicios

1. Explíquese el tipo de evidencia en el que se basa nuestra valoración de la matemática egipcia. ¿Cree usted que es probable que esta valoración se vea alterada por el descubrimiento de nuevos documentos? Razónese con claridad.
2. ¿Cree usted que la astronomía fue un factor más importante que la agrimensura en el desarrollo de la matemática egipcia? Explíquese claramente.
3. ¿Qué significa etimológicamente la palabra «geometría»? ¿Se puede justificar el uso de esta palabra en base a lo que sabemos sobre el origen histórico de la materia? Explíquese claramente.
4. ¿Cuáles considera usted como las tres principales limitaciones de la matemática egipcia? Explique por qué considera precisamente éstas como las más importantes.
5. ¿Cuáles considera usted como las tres contribuciones más importantes de Egipto al desarrollo de la matemática? Explique por qué las considera importantes.
6. Escríbase el número 7.654 en forma jeroglífica egipcia. ¿En qué se diferencia esta forma de la manera en que hubiera escrito Ahmes este número?
7. Exprésese $\frac{2}{103}$ como suma de dos fracciones unitarias distintas y escríbanse éstas en notación jeroglífica egipcia. ¿En qué se diferenciarían escritas en forma hierática?
8. Resolver la ecuación $x+\frac{1}{2}x=16$ por el método de la «regula falsi». (Este es el problema 25 del Papiro de Ahmes.)
9. Resolver el siguiente problema del Papiro de Ahmes (Problema 40): Repártanse 100 hogazas de pan entre cinco hombres de tal manera que las partes correspondientes estén en progresión aritmética y que además un séptimo de la suma de las tres partes más grandes sea igual a la suma de las dos más pequeñas.
10. Resolver, a la manera egipcia, el sistema de ecuaciones $x^2+y^2=100$, $y=3x/4$, que está tomado de un papiro del antiguo Egipto que se encuentra en Berlín. (Sugerencia: úsese el método de la doble «regula falsi», partiendo de un valor supuesto de x y calculando el correspondiente valor de y de la segunda ecuación, y ajustando finalmente los valores para que se verifique la primera ecuación.)
11. Calcúlese por duplicación y mediación (es decir, hallando sucesivamente el doble y la mitad) 101 : 16, expresando el resultado en forma jeroglífica egipcia.
12. Obténgase la fórmula egipcia para el volumen del tronco de pirámide cuadrada, de una manera algebraica, a partir de la conocida fórmula del volumen de una pirámide, utilizando proporciones que se demuestran en geometría elemental. ¿Cree usted que los egipcios pudieron haber obtenido su fórmula de esta manera? Explíquese claramente.
13. ¿En qué medida es correcto decir que los egipcios conocían la fórmula para calcular el área del círculo? Explíquese claramente.
14. ¿Por qué cree usted que los egipcios prefierieron la descomposición $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ a la descomposición alternativa $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$?

15. Demuéstrese que si n es un múltiplo de tres, entonces $2/n$ puede descomponerse en suma de dos fracciones unitarias, una de las cuales es la mitad de $1/n$.
16. Demuéstrese que si n es un múltiplo de cinco, entonces $2/n$ se puede descomponer en suma de dos fracciones unitarias, una de las cuales es un tercio de $1/n$.
17. Justifíquese el método utilizado por Ahmes en la solución de su problema 63 (véase el texto).
18. Justifíquese la suposición hecha por Ahmes de que la razón del área de un círculo a su circunferencia es la misma que la razón del área del cuadrado circunscrito al perímetro de dicho cuadrado.
19. Si el seqt de una pirámide es de 5 manos y un dedo por codo, y si el lado de su base es de 140 codos, calcúlese su altura. (Este es el problema 57 del Papiro de Ahmes.) Nota: una mano es equivalente a cinco dedos.

*20. Resolver el siguiente problema utilizando el método de división egipcio (se trata del problema 31 del Papiro de Ahmes): Una cantidad y sus dos tercios y su mitad y su séptima parte juntas hacen 33. Calcúlese la cantidad. [La solución dada en el Papiro es $14+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.]

Capítulo III
MESOPOTAMIA

¿Cuánto es un dios más que el otro?

Texto astronómico de la antigua Babilonia

1. Los documentos cuneiformes

El cuarto milenio antes de nuestra era fue un período de gran desarrollo cultural, que trajo consigo el uso de la escritura, de la rueda y de los metales. Al igual que en Egipto durante la primera dinastía, que comenzó hacia finales de este maravilloso milenio, también en el valle de Mesopotamia había ya por esa época un alto nivel de civilización. Allí habían construido los sumerios sus casas y sus templos decorados con cerámica artística y con mosaicos que formaban diseños geométricos, mientras poderosos gobernantes unían los principados locales para formar un imperio que pudo así llevar a cabo grandes obras públicas, tales como los sistemas de canales para regar la tierra y para controlar las inundaciones. La tradición bíblica relativa al Diluvio y a Noe tuvo su contrapartida más antigua y su origen probable en las leyendas relativas al héroe sumerio Utnapischtum y a la inundación de la región entre los ríos Tigris y Eufrates, en la que los desbordamientos de los ríos eran imposibles de prever, al contrario de lo que ocurría con la inundación periódica del valle del Nilo. La Biblia nos dice que Abraham provenía de la ciudad de Ur, enclave sumerio situado donde el río Eufrates vertía sus aguas al Golfo Pérsico, ya que en aquella época los dos ríos no se unían antes de su desembocadura, como ocurre hoy. El modelo de escritura cuneiforme que habían desarrollado los sumerios durante el cuarto milenio, mucho antes de los días de Abraham, puede haber sido la primera forma de comunicación escrita, puesto que es probablemente anterior a la escritura jeroglífica egipcia, que pudo haberse derivado de ella. A pesar de que no tengan nada en común, resulta una coincidencia interesante el que los orígenes de la escritura y de los vehículos con ruedas sean más o menos contemporáneos.

Las civilizaciones mesopotámicas de la antigüedad suelen llamarse de una manera ambigua y genérica babilónicas, a pesar de que tal designación no es estrictamente correcta. La ciudad de Babilonia ni fue al principio ni tampoco fue siempre, en períodos posteriores, el centro de la cultura asociada con los dos ríos, pero lo cierto es que el uso ha sancionado el adjetivo convencional e informal de «babilónica» para la región durante el intervalo que va desde el 2000 a.C. hasta

aproximadamente el 600 a.C. Cuando Babilonia cayó en manos de Ciro de Persia el 538 a.C., la ciudad no fue destruida, pero el imperio babilónico había llegado a su fin. La matemática «babilónica» continuó desarrollándose, sin embargo, a lo largo del período seleúcida en Siria casi hasta la aparición del Cristianismo. A veces se denomina también como Caldea la región entre los dos ríos, porque los caldeos (o Kaldis), que provenían originariamente del sur de Mesopotamia, fueron dominantes sobre toda la región de los dos ríos en una cierta época, principalmente a finales del siglo VII a.C. Antiguamente, como hoy, la Tierra de los Dos Ríos fue un territorio abierto a todo género de invasiones de procedencias diversas, lo que hizo del Creciente Fértil un campo de batalla en el que la hegemonía cambiaba de manos frecuentemente. Una de las invasiones más importantes que tuvo lugar fue la de los acadios semitas mandados por Sargón el Grande (ca. 2276-2221 a.C.), quien estableció un imperio que se extendía desde el Golfo Pérsico al Sur hasta el Mar Negro por el Norte, y desde las estepas de Persia en el Este al Mar Mediterráneo por el Oeste. Bajo el reinado de Sargón comenzó un proceso gradual de absorción de la cultura indígena sumeria por los invasores, incluyendo la escritura cuneiforme. Otras invasiones y revueltas posteriores elevaron al poder político en el valle a diversas corrientes raciales en un momento u otro, entre ellas los amorritas, cassitas, elamitas, hititas, asirios, medos, persas y otros, pero lo cierto es que se conservó siempre un grado de uniformidad cultural sobre todo el territorio lo suficientemente alto como para que esté justificado el referirse a esta civilización simplemente como mesopotámica. En particular, el uso generalizado de la escritura cuneiforme impuso un fuerte lazo unificador: leyes, listas de impuestos, cuentos, lecciones escolares, cartas personales, éstos y muchos otros documentos se imprimían con una varilla en tablillas de arcilla blanda, y estas tablillas se cocían después en hornos o se endurecían simplemente secándolas al sol ardiente de la región. Estos documentos escritos fueron afortunadamente mucho menos vulnerables a los estragos del tiempo que los papiros egipcios, y así disponemos hoy de una masa de información mucho mayor sobre la matemática mesopotámica que sobre la matemática egipcia; por citar solamente un yacimiento arqueológico, el de la antigua Nippur, ha suministrado unas 50.000 tablillas, y las bibliotecas de las Universidades de Columbia, Pennsylvania y Yale, entre otras, poseen grandes colecciones de estas tablillas antiguas procedentes de Mesopotamia, algunas de ellas de contenido matemático. A pesar de esta abundancia de documentos, fue la escritura jeroglífica egipcia la primera que se descifró en la época moderna, y no la cuneiforme babilónica. A principios del siglo XIX se consiguieron algunos progresos en la lectura de la escritura babilónica, sobre todo gracias a los trabajos de Grotefend, pero fue sólo durante el segundo cuarto del siglo XX cuando empezaron a aparecer exposiciones razonablemente completas de la matemática mesopotámica en las historias de la antigüedad[1].

[1] Véase especialmente O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1957), y B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961). Véase también O. Neugebauer-A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (American Oriental Series, vol. 29, 1945). Para una buena exposición secundaria y más referencias, puede consultarse R. C. Archibald, *Oouline of the History of Mathematics* (*American Mathematical Monthly*, 56 (1949), núm. 1, supl.).

El uso primitivo de la escritura en Mesopotamia nos es conocido por el descubrimiento de cientos de tablillas de arcilla en Uruk que datan de hace unos 5.000 años. Por esta época la escritura pictográfica había alcanzado ya en su desarrollo el punto en que aparecen símbolos de forma convencionalmente estilizada para representar la mayor parte de las cosas: así  para «agua»,  para «ojo», y una combinación de los dos para representar el llanto. Lentamente y de manera gradual fue haciéndose cada vez más pequeño el número de símbolos, de tal forma que, de los 2.000 signos sumerios aproximadamente que se utilizaban al principio, sólo quedaban ya como la tercera parte cuando se produjo la conquista por los accadios, mientras que los primitivos dibujos en que consistían los pictogramas dieron paso a combinaciones de cuñas que los imitaban; por ejemplo, «agua» pasó a ser  y «ojo»  . Al principio el escriba escribía en columnas de arriba abajo y de derecha a izquierda, pero más tarde, y por obvia conveniencia, la tablilla se giró 90° en sentido contrario al de las agujas de un reloj y se escribió por filas horizontales de arriba abajo y de izquierda a derecha, tal como hacemos nosotros. El estilo o varilla con la que se escribía consistió al principio en un cilindro circular recto o, más bien, en dos cilindros de radios distintos, que se reemplazaron más tarde por un único prisma triangular. Durante la primera época de la civilización sumeria, para escribir diez unidades se presionaba verticalmente en la arcilla con el extremo del estilo, y para representar una unidad oblicuamente, utilizando siempre el estilo de menor diámetro; análogamente, una impresión oblicua con el estilo más grueso representaba 60 unidades y una impresión vertical representaba $3.600 = 60 \times 60$ unidades, y para representar números intermedios se usaban diversas combinaciones de estos símbolos básicos.

Cuando los accadios adoptaron la forma de escritura sumeria, se establecieron verdaderos diccionarios que daban las equivalencias entre las dos lenguas, y las formas de las palabras y de los numerales se hicieron menos variadas. Se han encontrado miles de tablillas de la época de la dinastía de Hammurabi aproximadamente (ca. 1800-1600 a.C.) que nos muestran un sistema de numeración ya completamente desarrollado. El sistema decimal, tan corriente en la mayoría de las civilizaciones tanto antiguas como modernas, quedó sumergido en Mesopotamia bajo un sistema de notación en el que la base fundamental era 60. Se ha escrito mucho acerca de los motivos que pudo haber tras este cambio; así, se ha sugerido que la causa pudo estar en consideraciones de tipo astronómico, o que el sistema sexagesimal pudo surgir como combinación natural de dos sistemas más primitivos, uno decimal y el otro de base seis. Lo más probable parece ser, sin embargo, que la base 60 se adoptase y se legalizase de una manera consciente por los intereses de la metrología, ya que una magnitud de 60 unidades puede dividirse fácilmente de manera exacta en dos, tres, cuatro, cinco, seis, diez, doce, quince, veinte o treinta partes iguales, lo que permite diez posibles subdivisiones exactas.

Cualquiera que haya sido su origen, el sistema de numeración sexagesimal ha disfrutado de una vida sorprendentemente larga, como se sabe, puesto que restos de él sobreviven hasta hoy, por desgracia para la uniformidad, en las unidades para medir el tiempo y los ángulos, a pesar de la base esencialmente decimal de nuestra sociedad.

2. La numeración posicional

El sistema de numeración cuneiforme de los babilonios procedía, para los números enteros pequeños, según el mismo esquema que la jeroglífica egipcia, repitiendo tantas veces como fuese necesario los símbolos para el 1 y para el 10 y, al igual que un arquitecto egipcio podía hacer tallar en la piedra el número 59 en la forma  , el escriba mesopotámico podía representar el mismo número y de manera casi idéntica sobre una tablilla de arcilla por medio de catorce señales en forma de cuña, de ellas cinco anchas y colocadas oblicuamente, en forma de «paréntesis angulares», cada una de las cuales representa diez unidades, y nueve cuñas verticales estrechas que representan cada una una unidad, todas ellas yuxtapuestas muy juntas en un grupo compacto de la forma  . Pero las analogías se terminan aquí, y más allá del número 59 los sistemas egipcio y mesopotámico difieren esencialmente. Quizá fuese la poca flexibilidad que ofrecían los materiales de escritura mesopotámicos, o bien un relámpago de intuición imaginativa, lo que hizo conscientes a los babilonios de que bastaba con sus dos símbolos para el 1 y para el 10 para poder representar cualquier número entero, por grande que fuese, sin excesivas repeticiones. Esto ocurrió hace más de 4.000 años con la invención del sistema de notación posicional, basado en el mismísimo principio que es el responsable de la eficacia de nuestro sistema de numeración actual. Es decir, que los antiguos babilonios se dieron cuenta de que sus símbolos podían representar un papel doble, triple, cuádruple, etc., simplemente asignándoles valores que dependan de su posición relativa en la representación gráfica de un número. Las cuñas que componen la expresión cuneiforme para el 59 están agrupadas estrechamente de manera que forman casi un único símbolo, de forma que espaciando adecuadamente estos grupos de cuñas se puede determinar sin ambigüedad la posición relativa, al leer de derecha a izquierda, que corresponde a las sucesivas potencias crecientes de la base, y así cada grupo tendrá entonces un «valor local» que dependerá solamente de su posición. Cuando escribimos 222 usamos tres veces la misma cifra 2, pero cada una de ellas tiene un significado distinto; el primero por la derecha representa dos unidades, el segundo dos decenas y el tercero dos centenas (es decir, dos veces el cuadrado de la base diez). De una manera exactamente análoga hacían los babilonios un uso múltiple de símbolos tales como el , y al escribir  , separando de manera clara los tres grupos de dos cuñas cada uno, lo que intentan expresar es que el grupo de la derecha representa dos unidades, el siguiente dos veces la base 60 y el del extremo de la izquierda dos veces el cuadrado de la base 60^2. Este numeral representa pues al número $2 \cdot (60)^2 + 2 \cdot 60 + 2$ (o sea, 7.322 en nuestra notación de base diez).

Disponemos de una gran cantidad de documentación primaria relativa a la matemática mesopotámica, pero es notable que la mayor parte de este material proviene de dos períodos distintos muy separados en el tiempo. Hay gran abundancia de tablillas de los primeros siglos del segundo milenio a.C. (época babilónica antigua) y también hay muchas de los últimos siglos del primer milenio a.C. (o período seleúcida). La mayor parte de las contribuciones importantes a la matemática se remontan al primer período, el más antiguo, pero hay una concreta de la que no tenemos ninguna evidencia hasta casi el 300 a.C. Se trata de lo

siguiente: los babilonios no parecen haber sido capaces, al principio, de inventar una manera clara de representar una «posición vacía» en un numeral, es decir, no dispusieron de un símbolo para el cero en su sentido no cardinal sino posicional. A veces soslayaban este importante problema dejando un espacio un poco mayor en el lugar en que debería haber ido un cero; la situación no dejaba de ser, sin embargo, poco clara, lo que traía consigo que los números 122 y 7202, por ejemplo, se escribieran de forma muy parecida, pues 𒐗 𒐗 podía significar lo mismo $2\cdot 60+2$ que $2\cdot 60^2+0\cdot 60+2$. En muchos casos el contexto en que están utilizados los números puede ayudar a eliminar la posible ambigüedad, pero lo cierto es que la falta de un símbolo para el cero, tal como el que nos permite hoy distinguir de un vistazo 22 de 202, ha tenido que suponer un grave inconveniente del sistema. Sin embargo, hacia la época de la conquista por Alejandro Magno, se inventó un signo especial, que consistía en un par de cuñas pequeñas situadas oblicuamente, para indicar una posición en la que faltaba una cifra o un lugar vacío. A partir de entonces resultaba ya fácil distinguir en escritura cuneiforme, por ejemplo, los números 𒐗 𒑰 𒐗 ó $2\cdot 60^2+0\cdot 60+2$ y 𒐗 𒐗 ó $2\cdot 60+2$.

No obstante, este símbolo cero babilónico no acabó con todas las ambigüedades ni mucho menos según parece, porque el signo en cuestión se utilizaba solamente para representar posiciones vacías intermedias entre las cifras significativas de un numeral. No se ha conservado ninguna tablilla en la que aparezca el símbolo cero en posición o posiciones terminales en un número. Esto significa que los antiguos babilonios no lograron nunca un sistema posicional completo; la posición era sólo relativa, y por tanto la expresión 𒐗 𒐗 podía representar el número $2\cdot 60+2$ o bien $2\cdot 60^2+2\cdot 60$ ó $2\cdot 60^3+2\cdot 60^2$ u otro cualquiera de los infinitos números en que intervienen sólo unidades de dos órdenes sucesivos.

3. Las fracciones sexagesimales

Si la matemática mesopotámica hubiera estado basada en la suma de números enteros y de fracciones unitarias, como lo estuvo la del valle del Nilo, el invento de la notación posicional no habría tenido una gran importancia para la época, ya que no es mucho más difícil escribir el número 98.765 en jeroglífico que en cuneiforme y, desde luego, escribirlo en cuneiforme resulta claramente más complicado que en escritura hierática. El secreto de la superioridad evidente de la aritmética y el álgebra babilónica sobre la egipcia se basa indudablemente en que «aquellos que vivían entre los dos ríos» tuvieron la feliz idea, difícil de ponderar adecuadamente, de extender el principio posicional a las fracciones y no sólo a los números enteros. Es decir, de esta manera la expresión 𒐗 𒐗 servía no sólo para representar $2\cdot 60+2$, sino también $2+2\cdot 60^{-1}$ ó $2\cdot 60^{-1}+2\cdot 60^{-2}$ o para cualquier otra forma fraccional en la que aparezcan sólo dos posiciones sucesivas. Esto significa que los babilonios tenían a su disposición toda la capacidad y simplicidad de cálculo que nos permiten hoy a nosotros las fracciones decimales modernas. Para el escriba babilonio, lo mismo que para el ingeniero actual, la suma o la multiplicación de dos números como 23,45 y 9,876 no era esencialmente más difícil que la suma o la multiplicación de los números enteros 2.345 y 9.876 y, de hecho,

los mesopotamios explotaron rápidamente y con virtuosismo este importante descubrimiento. Hay una tablilla en la colección de Yale (la núm. 7.289) que data de la época babilónica antigua y que incluye el cálculo de la raíz cuadrada de 2 con tres cifras «decimales» sexagesimales, resultado que aparece escrito en la forma . Este número puede transcribirse en caracteres modernos como 1;24,51,10, donde el punto y coma representa la separación entre la parte entera y la fraccionaria (tal como la coma decimal), y las comas se utilizan para separar las sucesivas posiciones sexagesimales; ésta es la forma standard de transcribir los numerales babilónicos y la que utilizaremos a lo largo de este capítulo para traducir los números escritos en notación sexagesimal. Este valor babilónico para $\sqrt{2}$ es igual aproximadamente a 1,414222, que difiere del verdadero valor en menos de 0,000008. Para los babilonios era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando su sistema de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

4. Las operaciones fundamentales

La eficacia de los babilonios calculando no era consecuencia únicamente de su sistema de numeración, sino que los matemáticos mesopotámicos se mostraron además extremadamente hábiles inventando métodos algorítmicos, tales como el algoritmo para aproximar raíces cuadradas que se ha atribuido posteriormente a diversos matemáticos, entre ellos los griegos Arquitas (428-365 a.C.) y Herón de Alejandría (ca. 100 d.C.), y también se encuentra a veces bajo el nombre de algoritmo de Newton. Este método babilónico es tan sencillo como eficaz: Sea $x=\sqrt{a}$ la raíz que se trata de calcular y sea a_1 una primera aproximación a esta raíz; a partir de ella calcúlese una segunda aproximación b_1 tal que verifique la ecuación $b_1=a/a_1$. Si a_1 era demasiado pequeña, entonces b_1 será demasiado grande y viceversa, y por tanto la media aritmética $a_2=a_1+b_1/2$ será sin duda una aproximación mejor. Suponiendo que a_2 es aún demasiado grande, la siguiente aproximación $b_2=a/a_2$ será demasiado pequeña, y en cualquier caso la media aritmética $a_3=a_2+b_2/2$ será un resultado mejor; es evidente que el proceso puede continuarse indefinidamente. El valor de $\sqrt{2}$ que hemos comentado, de la tablilla Yale 7.289, resulta ser igual a a_3 si partimos de $a_1=1;30$. En este algoritmo babilónico para las raíces cuadradas nos encontramos con un método iterativo que pudo haber puesto a los matemáticos de la época en contacto con los procesos infinitamente largos, pero el hecho es que éstos no persiguieron las implicaciones de tales problemas.

El algoritmo que acabamos de ver nos da lo equivalente a la aproximación de una serie binómica al tomar sus dos primeros términos, aplicado a un caso muy familiar para los babilonios. En efecto, si se desea calcular $\sqrt{a^2+b}$, la aproximación $a_1=a$ conduce a $b_1=(a^2+b)/a$ y $a_2=(a_1+b_1)/2=a+b/(2a)$, que concuerda con los dos primeros términos del desarrollo de $(a^2+b)^{1/2}$ y es una aproximación que se encuentra frecuentemente en los textos de la época babilónica antigua. A

pesar de la eficacia de esta regla para el cálculo de raíces cuadradas, los escribas mesopotámicos parecen haber preferido imitar al matemático aplicado moderno, recurriendo frecuentemente a las diversas y abundantes tablas de que disponían. De hecho, una parte importante del conjunto de tablillas cuneiformes que se han desenterrado son tablas, entre las que se incluyen tablas de multiplicar, tablas de inversos, tablas de cuadrados y cubos o de raíces cuadradas y cúbicas escritas, desde luego, en el sistema sexagesimal cuneiforme. Una de estas tablas, por ejemplo, presenta los equivalentes en cuneiforme de las entradas que aparecen en la tabla siguiente. El producto de los números de cada fila es siempre 60, la base de numeración babilónica, luego la tabla es a todas luces una tabla de inversos. La sexta línea, por ejemplo, nos dice que el inverso de 8 es $7/60+30/60^2$, pero hay que hacer observar que faltan en la tabla los inversos de 7 y de 11, debido sin duda a que los inversos de tales números «irregulares» tienen una expresión sexagesimal infinitamente larga, tal como ocurre en nuestro sistema decimal con los inversos de 3, 6, 7, 9, etc., que al desarrollarlos en forma decimal presentan un desarrollo infinitamente largo. Aquí pudieron haberse enfrentado de nuevo los babilonios con el problema del infinito, pero tampoco en este caso lo tomaron en consideración sistemáticamente. Sin embargo, disponemos de un texto al menos en el que un escriba mesopotámico parece dar dos cotas, una inferior y otra superior, para el inverso del número irregular 7, situándolo entre 0;8,34,16,59 y 0;8,34,18. Dado el dominio que mostraban en los cálculos multiposicionales, resulta exasperante no encontrar en ellos ni una sola vez el reconocimiento del simple período ternario en el desarrollo sexagesimal de $\frac{1}{7}$, descubrimiento que podría haber provocado consideraciones de series infinitas.

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

Esta claro que los babilonios manejaban las operaciones aritméticas fundamentales de una manera no muy distinta a como las utilizamos hoy y con una facilidad comparable. La división no se hacía por el pesado método de duplicación y mediación de los egipcios, sino mediante una simple multiplicación del dividendo por el inverso del divisor, usando para ello una tabla de inversos como la que hemos visto. De la misma manera que podemos hacer hoy el cociente de dividir 34 por 5 de una manera fácil multiplicando 34 por 2 y corriendo la coma decimal un lugar hacia la izquierda, los antiguos babilonios efectuaban la misma división calculando el producto de 34 por 12 y corriendo la coma sexagesimal un lugar hacia la izquierda, obteniendo el resultado correcto $6\frac{48}{60}$. Las tablas de inversos solían dar solamente, como hemos visto, los inversos de los enteros regulares, es

decir, de los que se pueden escribir como productos de doses, treses y cincos, pero se conocen algunas excepciones; hay una tabla, por ejemplo, que incluye las aproximaciones $\frac{1}{59} =$; 1,1,1 y $\frac{1}{61} =$; 0,59,0,59, que no son otra cosa, desde luego, que los análogos sexagesimales de nuestras expresiones decimales $\frac{1}{9} = 0{,}111$ y $\frac{1}{11} = 0{,}0\overline{909}$, fracciones unitarias en las que el denominador es una unidad menor y una unidad mayor que la base; parece, sin embargo, que una vez más los babilonios no se dieron cuenta de la presencia de un desarrollo periódico infinito en este caso, o por lo menos no lo consideraron importante y no le prestaron más atención[2].

Entre las tablillas que datan de la época babilónica antigua se encuentran algunas tablas que contienen las potencias sucesivas de un número dado, análogas a nuestras modernas tablas de logaritmos o, para hablar con más propiedad, de antilogaritmos. Se han encontrado tablas de este tipo exponencial (o logarítmico) en las que aparecen las diez primeras potencias para las bases 9, 16, 1,40 y 3,45, todas ellas cuadrados perfectos. El problema planteado en un cierto texto acerca de a qué potencia debe elevarse un cierto número para obtener otro número dado es equivalente a la pregunta en términos modernos de cuál es el logaritmo del segundo número en el sistema que tiene como base el primero. Las diferencias principales entre estas tablas antiguas y las nuestras, aparte de las cuestiones de lenguaje y de notación, son las de que no se utilizaba ningún número concreto sistemáticamente como una base fija para los diversos problemas, y que los huecos o saltos que separan las entradas en las tablas antiguas son mucho más grandes que en las nuestras. Y podemos añadir, además, que sus «tablas de logaritmos» no se utilizaban para los fines de simplificación del cálculo en general, sino más bien para resolver ciertos problemas muy concretos.

A pesar de los grandes huecos que presentan sus tablas exponenciales, los matemáticos babilónicos no dudaban en interpolar linealmente o proporcionalmente para aproximar los valores intermedios. La interpolación lineal parece haber sido un procedimiento muy corriente en la antigua Mesopotamia, y la notación posicional se prestaba admirablemente a la práctica de la regla de tres. Un ejemplo muy claro y muy interesante del uso práctico de la interpolación en tablas exponenciales puede verse en un problema en el que se pregunta cuánto tiempo tardará en doblarse una cantidad cualquiera de dinero al interés del 20 por 100 anual, y la respuesta dada es 3;47,13,20 años. Parece perfectamente claro que el escriba debió usar interpolación lineal entre los valores $(1;12)^3$ y $(1;12)^4$, siguiendo la fórmula del interés compuesto $a = P(1+r)^n$, donde r es en este caso 20 por 100 ó $\frac{12}{60}$, y consultando los valores en una tabla exponencial de potencias enteras de 1;12.

5. Problemas algebraicos

Hay una tabla de la que hacían mucho uso los babilonios y que no suele verse incluida en los textos actuales. Se trata de una tabulación de valores de $n^3 + n^2$ para

[2] Además de las referencias generales citadas en la nota 1, véase también Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (1959).

valores naturales de n y que jugó un papel esencial en el álgebra babilónica, materia ésta que alcanzó un nivel considerablemente más alto en Mesopotamia que en Egipto. Conocemos muchos problemas que aparecen en textos del período babilónico antiguo que demuestran que la resolución de la ecuación completa de segundo grado no ofrecía ninguna dificultad importante para los babilonios, dada la flexibilidad de las operaciones algebraicas que habían desarrollado. Así, podían trasponer términos en una ecuación sumando igualdades, y eliminar fracciones u otros factores multiplicando ambos miembros por cantidades iguales; sumando $4ab$ a $(a-b)^2$ lo podían transformar en $(a+b)^2$, aprovechando los muchos tipos de factorizaciones simples con los que estaban familiarizados. No utilizaban letras para representar las cantidades incógnitas porque no estaba inventado aún el alfabeto, pero las palabras mismas tales como «longitud», «anchura», «área» y «volumen» servían perfectamente para este fin. Un indicio de que estas palabras pudieron ser utilizadas en un sentido muy abstracto nos viene dado por el hecho de que los babilonios no solían mostrar ningún reparo en sumar una «longitud» a un «área», o un «área» a un «volumen», por ejemplo. Tales problemas, si los fuéramos a tomar literalmente, no tendrían ninguna relación práctica con los problemas de medida.

El álgebra egipcia se había centrado casi exclusivamente en las ecuaciones lineales, pero los babilonios las consideraron demasiado elementales como para prestarles mucha atención, evidentemente. En un cierto problema se pide el peso x de una piedra si $(x+x/7)+\frac{1}{11}(x+x/7)$ es igual a una mina; la respuesta se da diciendo simplemente que x es 48;7,30 gin, donde 60 gin hacen una mina. En otro problema que aparece en un texto de la época babilónica antigua nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas en dos incógnitas, llamadas respectivamente «el primer anillo de plata» y «el segundo anillo de plata»; si llamamos x e y a estas dos incógnitas, las ecuaciones en notación moderna son

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=1 \qquad \frac{6x}{7}=\frac{10y}{11}$$

y la solución viene expresada lacónicamente por medio de la regla

$$\frac{x}{7}=\frac{11}{7+11}+\frac{1}{72} \quad \text{y} \quad \frac{y}{11}=\frac{7}{7+11}-\frac{1}{72}$$

En otro sistema de ecuaciones se incluye en el texto parte del método de resolución; las ecuaciones son en este caso: $\frac{1}{4}$ anchura + longitud = 7 manos, y longitud + anchura = 10 manos. La solución se halla en primer lugar reemplazando cada «mano» por 5 «dedos», y observando a continuación que una anchura de 20 dedos y una longitud de 30 dedos satisfarían las dos ecuaciones. A partir de esta comprobación se calcula la solución, no obstante, por un método alternativo equivalente al de eliminación por medio de una combinación lineal; expresando todas las dimensiones en términos de manos, y llamando x e y respectivamente a la

longitud y a la anchura, las ecuaciones se convierten en $y+4x=28$ y $x+y=10$, luego restando la segunda de la primera nos queda $3x=18$, es decir, $x=6$ manos ó 30 dedos e $y=20$ dedos.

6. Las ecuaciones cuadráticas

La resolución de las ecuaciones cuadráticas completas parece haber superado en mucho la capacidad algebraica de los egipcios; en cambio, Neugebauer descubrió en 1930 que tales ecuaciones habían sido manejadas ya con gran soltura por los babilonios en algunos de los textos más antiguos que conocemos. Por ejemplo, hay un problema en el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14,30; la solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación $x^2-x=870$, y viene explicada por el escriba de la forma siguiente:

> «Toma la mitad de 1, que es 0;30, y multiplica 0;30 por 0;30, que es 0;15; suma este número a 14,30, lo que da 14,30;15. Este es el cuadrado de 29;30; ahora suma 0;30 a 29;30, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado.»

La solución babilónica es, desde luego, exactamente equivalente a la que se obtiene aplicando la fórmula $x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}+\frac{p}{2}$, que nos da una raíz de la ecuación $x^2-px=q$, y que es la fórmula cuadrática conocida por todos los escolares hoy día. En otro texto los babilonios se arreglan para reducir la ecuación $11x^2+7x=6;15$ a la forma canónica $x^2+px=q$, multiplicando primero por 11 los dos miembros para convertirla en la $(11x)^2+7(11x)=1,8;45$, que es la forma canónica salvo que la incógnita es ahora $y=11x$, y la solución en y se obtiene entonces fácilmente por medio de la regla conocida $y=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$, a partir de la cual se halla en valor de x. Este método de resolución es notable como un ejemplo de utilización de transformaciones algebraicas sencillas.

La solución de las ecuaciones cuadráticas completas de la forma $x^2+px+q=0$, donde p y q son números positivos, hubo de esperar hasta la época moderna, ya que dicha ecuación no tiene raíces positivas. Así pues, en la época antigua y medieval, e incluso a comienzos de la edad moderna, las ecuaciones cuadráticas se clasificaron en tres tipos que, reducidos a sus formas canónicas, son

$$(1)\quad x^2+px=q$$
$$(2)\quad x^2=px+q$$
$$(3)\quad x^2+q=px$$

y todos estos tipos nos los encontramos en los viejos textos babilónicos de hace unos 4.000 años. Los dos problemas que hemos mencionado más arriba pueden servir de ejemplos de los dos primeros tipos, y el tercer tipo aparece a menudo en

los textos bajo la forma de problemas en los que se trata como equivalente al sistema de ecuaciones $x+y=p$, $x\cdot y=q$. Los problemas en los que se pide hallar dos números dado su producto y, o bien su suma o su diferencia, son tan abundantes que parecen haber constituido para los antiguos, tanto babilónicos como griegos, algo así como un tipo de «forma normal» al que podían reducirse las ecuaciones cuadráticas. Transformando entonces el sistema $xy=a$, $x\pm y=b$, en el sistema de ecuaciones lineales $x\pm y=b$, $x\mp y=\sqrt{b^2\mp 4a}$, podían calcularse los valores de x e y simplemente por medio de una suma y una resta. Una tablilla cuneiforme de la colección de Yale, por ejemplo, pide resolver el sistema $x+y=6;30$, $x\cdot y=7;30$, y las instrucciones del escriba para ello son esencialmente las siguientes: Hállese primero

$$\frac{x+y}{2}=3;15$$

y a continuación

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=10;33,45$$

Entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3;3,45$$

y

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1;45$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)=3;15+1;45$$

y

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)=3;15-1;45$$

y de las dos últimas ecuaciones se obtiene fácilmente que $x=5$ e $y=1\frac{1}{2}$. Debido al hecho de que las cantidades x e y aparecen de manera simétrica en las ecuaciones dadas, es posible interpretar sus valores x e y como las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2+7;30=6;30x$. Hay otro texto babilónico con un problema en el que se pide un número que al sumarlo a su inverso da como resultado 2;0,0,33,20, lo que conduce de nuevo a una ecuación cuadrática del tercer tipo, y se tienen otra vez dos soluciones, 1;0,45 y 0;59,15,33,20.

7. Ecuaciones cúbicas

La reducción babilónica de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx=c$ a su forma normal $y^2+by=ac$ por medio de la sustitución $y=ax$, muestra el alto grado de flexibilidad que alcanzó el álgebra mesopotámica, circunstancia que unida al sistema de computación posicional explica en gran parte la superioridad de la

matemática babilónica sobre la egipcia en este sentido. En Egipto no hay ningún testimonio de resolución de ecuaciones cúbicas, mientras que en Mesopotamia conocemos muchos ejemplos. Los babilonios resolvían las cúbicas puras tales como la $x^3 = 0;7,30$ consultando directamente las tablas de cubos o raíces cúbicas en las que podía leerse sin más la solución $x = 0;30$ si aparecía en la tabla, y para valores que no aparecían en las tablas se utilizaba una simple interpolación lineal para conseguir una aproximación. Las cúbicas mixtas de la forma $x^3 + x^2 = a$ se resolvían de una manera análoga consultando las tablas disponibles en las que aparecían los valores de la suma $n^3 + n^2$ para valores enteros de n de 1 a 30; así, por ejemplo, con ayuda de estas tablas podía leerse directamente que la solución de $x^3 + x^2 = 4,12$ es $x = 6$. Para los casos un poco más generales de ecuaciones de tercer grado, tales como la $144x^3 + 12x^2 = 21$, los babilonios usaban su método de sustitución: multiplicando por 12 ambos miembros y haciendo $y = 12x$ la ecuación se convierte en la $y^3 + y^2 = 4,12$, de donde resulta $y = 6$, luego $x = \frac{1}{2}$ ó 0;30. Las cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 = c$ se pueden reducir a la forma canónica de los babilonios multiplicando ambos miembros por $\frac{a^2}{b^3}$ para obtener $\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, que ya es una cúbica de la forma standard en la incógnita $\frac{ax}{b}$, y consultando las tablas para hallar el valor de esta incógnita se puede determinar el valor de x. No se sabe si los babilonios fueron o no fueron capaces de reducir la cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx = d$ a su forma canónica; el hecho de que baste la solución de una ecuación cuadrática para reducir la cúbica general a la forma $px^2 + qx^2 = r$, de la que se obtiene fácilmente la forma canónica, como hemos visto, hace bastante probable que pudieran llevar a cabo tal reducción. Sin embargo, no hay ningún tipo de evidencia documental disponible que indique que los matemáticos mesopotámicos efectuaran realmente tal reducción de la ecuación cúbica general.

La resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas en Mesopotamia constituyó un logro notable que hay que admirar no tanto por el alto nivel de habilidad técnica puesta en juego como por el nivel de madurez y de flexibilidad de los conceptos algebraicos que intervienen en el proceso. Es muy fácil ver, con el simbolismo moderno, que la ecuación $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ es esencialmente del mismo tipo que la $y^3 + y^2 = b$, pero el conseguir darse cuenta de ello sin utilizar nuestra notación constituye un avance mucho más importante incluso para el desarrollo de la matemática que el celebrado principio posicional en aritmética, que debemos a la misma civilización. El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax^4 + bx^2 = c$ y $ax^8 + bx^4 = c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas, es decir, como ecuaciones cuadráticas en x^2 y x^4 respectivamente.

8. Las ternas pitagóricas

Los descubrimientos algebraicos de los babilonios son dignos de admiración, pero los motivos que pudiera haber tras ellos no son fáciles de entender. Se suele

admitir que casi toda la matemática y la ciencia prehelénica en general fueron completamente utilitarias, pero ¿qué situación de la vida real pudo conducir en la antigua Babilonia a problemas en los que aparecieran la suma de un número y su inverso o la diferencia entre un área y una longitud? Si el motivo era utilitario, admitámoslo, entonces hay que admitir también que el culto a lo inmediato no era tan fuerte como lo es hoy, puesto que las conexiones directas entre los fines y la práctica están lejos de ser evidentes en la matemática babilónica. Algunos documentos, como la tablilla 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia[3], sugieren que pudo muy bien haber existido una cierta tolerancia, si no incluso un estímulo, hacia la matemática cultivada por sí misma. La tablilla data del período babilónico antiguo (ca. 1900 a 1600 a.C.), y las tablas que contiene se podrían tomar fácilmente a primera vista por un registro de cuentas comerciales, pero un análisis más detallado muestra que tiene una importancia matemática mucho más profunda en relación con lo que puede considerarse como teoría de números, y que tiene que ver quizá también con una cierta forma de prototrigonometría. La Plimpton 322 es sólo una parte de una tablilla más grande, como se ve por la fractura a lo largo del borde izquierdo, y la parte que se conserva contiene cuatro columnas de números distribuidos en quince filas horizontales. La columna del extremo derecho contiene los dígitos de uno a quince, y su finalidad parece ser evidentemente sólo la de identificar el lugar en que figuran los números en las otras tres columnas, que están ordenadas de la manera siguiente:

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

La tablilla no está en tan buenas condiciones como para que se puedan leer todos los números, pero una vez descubierto sin lugar a dudas el método de construcción de la tabla, ha sido posible reconstruir a partir del contexto los pocos números que faltaban a causa de pequeñas fracturas. Para entender lo que

[3] Puede verse una descripción más completa de esta tabla en Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, págs. 36-40. También figura un buen estudio de ella en Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), págs. 35-37. Una interpretación minuciosa de las posibles motivaciones de esta tabla puede verse en D. J. de Solla Price, «The Babilonian "Pythagoream Triangle" Tablet», *Centaurus*, 10 (1964), págs. 219-231.

significaban probablemente para los babilonios los datos de la tabla, considérese un triángulo rectángulo ABC (fig. 3.1); si se interpretan los números que aparecen en la segunda y tercera columnas (de izquierda a derecha) como los lados a y c del triángulo, respectivamente, entonces la primera columna, es decir, la de la izquierda, indica en cada caso el cuadrado de la razón de c a b. Así pues, la columna del extremo izquierdo consiste en una tabla de los valores de $\sec^2 A$, aunque esto no suponga, naturalmente, que los babilonios conocieran nuestro

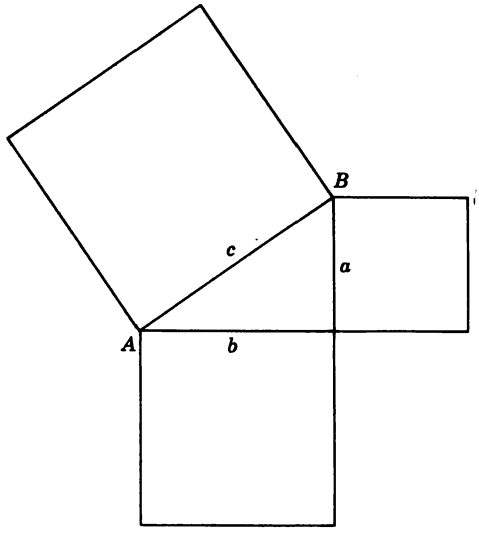
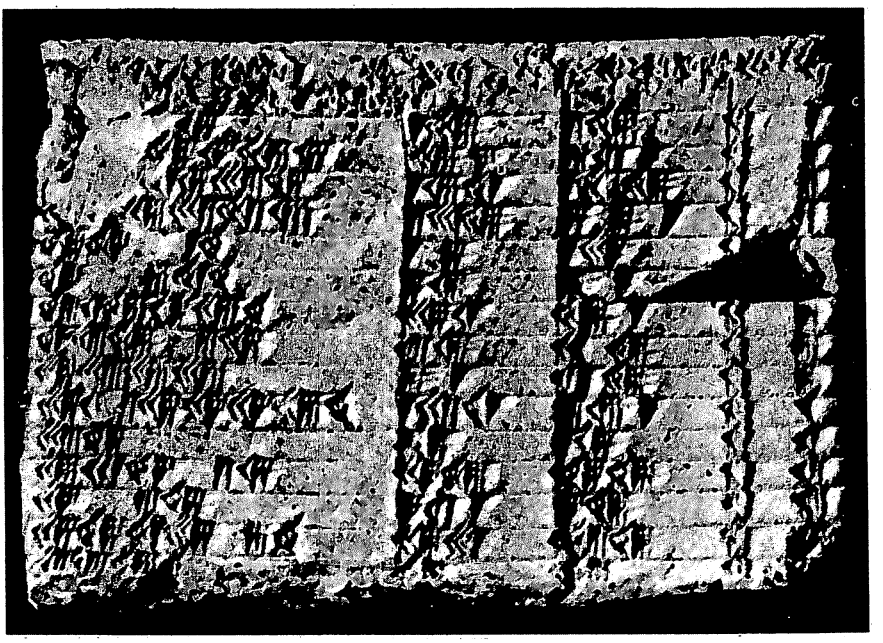


Figura 3.1

concepto de secante de un ángulo. De hecho, ni los egipcios ni los babilonios dispusieron de una medida de ángulos en el sentido moderno del término. Sin embargo, las filas de números en la Plimpton 322 no están ordenadas al azar ni mucho menos, como se podría sospechar después de echarle un vistazo; efectivamente, si sustituimos la primera coma en los números de la primera columna (la de la izquierda) por un punto y coma, es evidente que los números de esta columna van disminuyendo de una manera continua de arriba abajo. Además, el primer número es muy aproximadamente $\sec^2 45°$, y el último aproximadamente $\sec^2 31°$, mientras que los números intermedios se aproximan a los valores de $\sec^2 A$ para valores de A que van disminuyendo grado a grado desde 45° a 31°. Esta ordenación no ha podido ser, obviamente, el resultado del azar, y no sólo parece cuidadosamente planificada, sino que las dimensiones del triángulo en cada caso obedecen también a una regla concreta. Los que construyeron esta tabla debieron comenzar evidentemente por tomar dos enteros sexagesimales regulares que llamaremos p y q, con $p>q$, para formar con ellos la terna de números p^2-q^2, $2pq$ y p^2+q^2, que constituyen una terna pitagórica, como se ve fácilmente, en la que el cuadrado del mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Así pues, podemos tomar estos números como los lados del triángulo rectángulo ABC, con $a=p^2-q^2$, $b=2pq$ y $c=p^2+q^2$. Limitándose a valores de p menores que 60 y a

valores correspondientes de q tales que $1<\frac{p}{q}<1+\sqrt{2}$, es decir, a triángulos rectángulos para los que $a<b$, los babilonios probablemente descubrieron que había exactamente 38 pares posibles de valores de p y de q que satisfacen estas condiciones, y debieron construir las 38 ternas pitagóricas correspondientes. De ellas sólo aparecen incluidas en la tabla las 15 primeras, ordenadas por orden decreciente de la razón $\frac{p^2+q^2}{2pq}$, pero es probable que el escriba tuviese la intención de continuar la tabla en la otra cara de la tablilla. Se ha llegado a sugerir también[4] que la parte de la Plimpton 322 rota por su lado izquierdo y perdida debía



Plimpton 322

contener otras cuatro columnas en las que aparecerían tabulados los valores de p, q y $2pq$, así como lo que nosotros llamaríamos $\text{tg}^2 A$.

La tablilla Plimpton 322 podría dar la impresión de que es sólo un ejercicio de teoría de números, pero lo más probable es que este aspecto estuviera subordinado al problema de medir áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos. A los babilonios no les gustaba trabajar con los inversos de los números irregulares, al no poder expresarlos de una manera exacta en forma de fracciones sexagesimales, y por lo tanto se interesaron en los valores de p y q que dieran lugar a enteros regulares como lados de triángulos rectángulos de formas variadas, desde un

[4] Véanse las explicaciones dadas por Price, cuyas opiniones seguimos aquí, en el artículo citado en la nota 3.

triángulo rectángulo isósceles a otros con valores menores para la razón $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, los números que aparecen en la primera fila se obtienen a partir de $p=12$ y $q=5$, a los que corresponden los valores $a=119$, $b=120$ y $c=169$; los valores de a y c son precisamente los que aparecen en la primera fila en segundo y tercer lugar por la izquierda en la tablilla Plimpton 322, y la razón $\frac{c^2}{b^2}=\frac{28561}{14400}$ es igual al número 1;59,0,15 que figura en primera posición en esta fila[5]. En las otras 14 filas las cosas marchan de una manera análoga; los babilonios efectuaban los cálculos con tal grado de aproximación que en la décima fila aparece la razón $\frac{c^2}{b^2}$ con ocho cifras sexagesimales, lo que equivale aproximadamente a catorce cifras decimales en nuestra notación.

En la matemática babilónica es tan frecuente encontrarse con las tablas de inversos que no es sorprendente descubrir que el material de la tablilla Plimpton 322 está relacionado también con los inversos. Si tomamos $a=1$ entonces $1=(c+b)(c-b)$, de manera que $c+b$ y $c-b$ son inversos uno del otro, y si partimos de $c+b=n$, donde n es un número sexagesimal regular, entonces $c-b=\frac{1}{n}$, luego $a=1+b=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)$ y $c=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)$ constituyen una terna pitagórica racional, que se convierte en entera multiplicando todos ellos por $2n$. Todas las ternas de la tablilla Plimpton 322 se pueden obtener fácilmente por este método.

La descripción del álgebra babilónica que hemos presentado intenta ser representativa pero no exhaustiva. En las tablillas babilónicas hay otras muchas cosas, aunque ninguna tan sorprendente, desde luego, como el contenido de la tablilla Plimpton 322. Por ejemplo, en otra tablilla nos encontramos con la suma de la progresión geométrica $1+2+2^2+\cdots+2^9$, y en otra aún con la suma de la serie de los cuadrados $1^2+2^2+3^2+\cdots 10^2$. Cabe preguntarse si los babilonios conocerían las fórmulas generales que dan la suma de una progresión geométrica y la suma de los n primeros cuadrados perfectos; es muy posible que las conocieran, e incluso se ha conjeturado que quizá supieran que la suma de los n primeros cubos perfectos es igual al cuadrado de la suma de los n primeros números naturales[6]. No hay que olvidar, sin embargo, que las tablillas mesopotámicas, lo mismo que los papiros egipcios, contienen sólo casos concretos, sin ninguna formulación general.

---

[5] Vogel, en su obra *Vorgriechische Mathematik*, II, págs. 37-41, interpreta este número, al igual que los demás de la misma columna, como $\frac{a^2}{b^2}$ en vez de $\frac{c^2}{b^2}$, es decir, como $\mathrm{tg}^2\, A$ y no como $\sec^2 A$. La diferencia entre estas funciones es siempre 1, ya que $\frac{c^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{b^2}$, y lo cierto es que las cuñas que representan las unidades enteras en la columna izquierda de la Plimpton 322 han desaparecido en la mayor parte de los casos, a causa de la fractura, pero un examen minucioso de este borde de la tablilla parece dar la razón a la interpretación de esta columna como cuadrados de secantes más bien que de tangentes.

[6] Véase Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, pág. 11.

9. Areas de polígonos

Hace algunos años era una opinión generalizada la de que los babilonios habían sido mejores algebristas que los egipcios, pero que, en cambio, habían contribuido menos a la geometría. La primera mitad de esta afirmación ha quedado demostrada claramente por lo que hemos dicho más arriba, pero los intentos de apoyar la segunda mitad de la comparación suelen limitarse generalmente al problema de la medida del área del círculo o al del volumen del tronco de pirámide[7]. En el valle mesopotámico se solía calcular el área del círculo tomando tres veces el cuadrado del radio, lo cual queda muy por debajo del método egipcio en grado de aproximación. Sin embargo, ya hemos dicho que el número de decimales exactos en una aproximación de π no es en absoluto una buena medida de la talla geométrica de una civilización, y un descubrimiento reciente ha anulado incluso este débil argumento. En 1936 se desenterró una colección de tablillas procedentes de Susa, a unos trescientos kilómetros al este de Babilonia, y algunas de estas tablillas de Susa, siguiendo la persistente tendencia mesopotámica a hacer listas y tablas, compara las áreas y los cuadrados de los lados de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados. La razón del área del pentágono regular, por ejemplo, al cuadrado del lado, se da como 1;40, valor que es correcto con dos cifras exactas. Para el hexágono y el heptágono se dan como valores de estas razones 2;37,30 y 3;41 respectivamente. En la misma tablilla el escriba da el número 0;57,36 como la razón del perímetro del hexágono regular a la circunferencia circunscrita, de donde se deduce inmediatamente[8] que la aproximación de π adoptada aquí por el escriba es de 3;7,30 ó $3\frac{1}{8}$. Este valor es por lo menos tan bueno como el que adoptaron los egipcios y además aparece en un contexto más sofisticado que en Egipto, puesto que la tablilla de Susa es un buen ejemplo de comparación sistemática de figuras geométricas. Uno casi se vería tentado a considerar que en ella se refleja el auténtico origen de la geometría, pero hay que hacer notar inmediatamente que lo que interesaba a los babilonios no era tanto el contexto geométrico como las aproximaciones numéricas que utilizaban en sus medidas. La geometría no era para ellos una teoría matemática en el sentido en que lo es para nosotros, sino un cierto tipo de aritmética o álgebra aplicada en la que las figuras venían representadas por medio de números.

Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque parece muy probable que sí lo estuviesen. La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo ABC (fig. 3.2) de lados $a=60$, $b=45$ y $c=75$, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, cuyas áreas son respectivamente 8,6, 5,11;2,24,

---

[7] Véase, por ejemplo, George Sarton, *A History of Science*, vol. I (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1952), págs. 73-74.

[8] Véase Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity* (2), pág. 47.

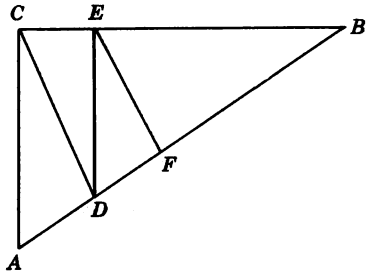


Figura 3.2

3,19;3,56,9,36 y 5,53;53,39,50,24. A partir de estos valores el escriba calcula la longitud de *AD* como 27, utilizando aparentemente un tipo de «fórmula de semejanza» que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes. Se calculan también las longitudes de los lados *CD* y *BD*, iguales respectivamente a 36 y 48, y aplicando la misma «fórmula de semejanza» a los triángulos *BCD* y *DCE* se obtiene la longitud de *CE*, igual a 21;36[9]. El texto se interrumpe bruscamente a mitad del cálculo del lado *DE*.

10. Geometría como aritmética aplicada

Los problemas de medidas constituyen el núcleo de la geometría algebraica desarrollada en el valle mesopotámico, pero un defecto importante aquí, lo mismo que en el caso de la geometría egipcia, fue el de que nunca estuvo clara la distinción entre medidas exactas y aproximadas. El área de un cuadrilátero se calculaba haciendo el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos, sin advertir que en la mayor parte de los casos ésta es sólo una burda aproximación. Por otra parte, el volumen de un tronco de cono o de pirámide se calculaba a veces tomando la media aritmética de las áreas de las dos bases y multiplicándola por la altura; en otras ocasiones se aplicaba la fórmula

$$V=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot h$$

para calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrada cuyas bases tienen como áreas a^2 y b^2. Sin embargo, en este último caso los babilonios usaban también lo equivalente a

$$V=h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

fórmula que es correcta y se reduce a la que conocían también los egipcios.

[9] Véase Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, II, págs. 78-79.

No sabemos si los resultados que conocían tanto los egipcios como los babilonios fueron descubiertos independientemente, pero en cualquier caso los de los segundos fueron decididamente más extensos que los de los primeros, tanto en geometría como en álgebra. Así, por ejemplo, el teorema de Pitágoras no aparece en ninguna forma en los documentos que nos han llegado del antiguo Egipto, mientras que las tablillas que datan incluso del período babilónico antiguo muestran que en Mesopotamia se utilizó mucho este teorema. En un texto cuneiforme de la colección de la Universidad de Yale, por ejemplo, aparece una figura que representa un cuadrado con sus diagonales, en el que está escrito el número 30 a lo largo de un lado y los números 42;25,35 y 1;24,51,10 a lo largo de una diagonal. Este último número es evidentemente la razón de las longitudes de la diagonal al lado, y está calculada con tal precisión que difiere de $\sqrt{2}$ en menos de una millonésima; este grado de exactitud del resultado fue debido únicamente al conocimiento del teorema de Pitágoras. A veces, en cálculos menos precisos, utilizaban los babilonios el valor 1;25 como una primera aproximación a esta razón. Mucho más importante, sin embargo, que el grado de precisión alcanzado en el cálculo es la constatación de que podía obtenerse la diagonal de *cualquier* cuadrado multiplicando el lado por $\sqrt{2}$. Parece ser, pues, que hubo una cierta conciencia de determinados principios generales, a pesar del hecho de que estos principios se expresaran únicamente en casos particulares.

El conocimiento del teorema de Pitágoras por los babilonios no se limitaba en absoluto al caso de los triángulos rectángulos isósceles; así, en un problema de la época babilónica antigua se considera una viga o una escalera de longitud 0;30 apoyada en una pared, y se pregunta cuánto se alejará de la base de la pared el extremo inferior de la escalera si el extremo superior desciende una distancia de 0;6 unidades; la respuesta correcta se halla utilizando el teorema de Pitágoras. Quince siglos más tarde se seguían resolviendo aún problemas análogos, a veces con algún giro nuevo, en el valle mesopotámico. Una tablilla seleúcida, por ejemplo, propone el siguiente problema: Una caña se apoya en una pared; si el extremo superior baja 3 unidades cuando el extremo inferior se separa 9 unidades de su posición inicial, ¿cuál es la longitud de la caña? La respuesta que se da es la correcta: 15 unidades.

Los antiguos textos cuneiformes que contienen problemas nos ofrecen una gran variedad de ejercicios que se podrían considerar como geométricos, pero que los babilonios probablemente consideraban más bien como de aritmética aplicada. Un problema típico de herencias pide repartir un terreno en forma de triángulo rectángulo entre seis hermanos; el área total es de 11,22,30 y uno de los catetos mide 6,30; las rectas de división deben ser equidistantes y paralelas al otro cateto del triángulo, y lo que se pide es calcular las diferencias entre las partes. Otro texto da las bases de un trapecio isósceles de 50 y 40 unidades respectivamente, así como la longitud común de los lados 30 unidades; se piden la altura y el área[10].

Los antiguos babilonios conocían también otras relaciones geométricas importantes. Sabían, como los egipcios, que la altura de un triángulo isósceles divide a la base en dos partes iguales, y por lo tanto, dada la longitud de una

[10] Pueden verse estos y otros problemas en Van der Waerden, *Science Awakening*, págs. 76-77.

cuerda en una circunferencia de radio dado, podían calcular la apotema correspondiente. También sabían que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, cosa que ignoraban los egipcios, y esta proposición suele conocerse con el nombre de Teorema de Tales, a pesar de que Tales vivió más de un milenio más tarde de la época en que los babilonios comenzaron a utilizarla. Este fenómeno de que un teorema geométrico tan conocido haya recibido un nombre inadecuado es un buen síntoma de las dificultades a la hora de valorar la influencia de la matemática prehelénica en las culturas posteriores. Las tablillas cuneiformes tienen un grado de permanencia con el que no pueden competir los documentos de otras civilizaciones, ya que ni el papiro ni el pergamino resisten con tanta facilidad los estragos del paso del tiempo. Por otra parte, los textos cuneiformes se continuaron escribiendo hasta comienzos de la Era Cristiana. El problema consiste, sin embargo, en contestar a la pregunta ¿fueron leídos estos textos por las civilizaciones vecinas, y en particular por los griegos? El centro del desarrollo matemático se desplazó de Mesopotamia al mundo griego unos siete siglos antes del comienzo de nuestra era, pero la reconstrucción de la primitiva matemática griega es una tarea arriesgada debido a que no quedan apenas documentos matemáticos anteriores a la época helenística. Es importante, por lo tanto, fijarse en las características generales de la matemática egipcia y babilónica para poder hacer al menos conjeturas plausibles relativas a las analogías que pueden presentarse entre las contribuciones prehelénicas y las actividades y actitudes de los pueblos posteriores.

11. Imperfecciones matemáticas

Hay un cierto número de deficiencias obvias en la matemática prehelénica. Tanto los papiros como las tablillas que han llegado hasta nosotros contienen únicamente problemas concretos y casos especiales, sin ningún tipo de formulación general, y cabría preguntarse incluso si estas civilizaciones primitivas se dieron cuenta realmente de los principios unificadores que constituyen el núcleo de la matemática. Un estudio un poco más a fondo de este problema presenta un panorama algo más positivo en este sentido, puesto que los cientos de problemas de tipos muy parecidos que aparecen en las tablillas cuneiformes tienen todo el aspecto de ser ejercicios que debían resolver los escolares siguiendo ciertos métodos conocidos o reglas generales. El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación de estas reglas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios; si no hubiera, de una manera o de otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo. Tan extensas colecciones de problemas semejantes no pudieron ser el resultado del azar.

Más seria quizá que la falta de formulaciones explícitas de las reglas es la ausencia de una distinción clara entre los resultados exactos y los que son sólo aproximados. El hecho de que en las tablas no aparezcan los casos en los que entran números sexagesimales irregulares parece implicar alguna forma de reconocimiento de tal distinción, pero lo cierto es que ni los egipcios ni los

babilonios parecen haberse planteado la cuestión de cuándo es exacto el cálculo del área de un cuadrilátero o de un círculo, y cuándo es sólo aproximado. Las cuestiones relativas a la solubilidad o insolubilidad de un cierto problema no parecen haberse planteado, así como tampoco se vislumbra ninguna investigación sobre la idea de lo que debe ser una demostración. La palabra misma «demostración» significó cosas diferentes según las diferentes épocas históricas y los niveles de desarrollo, y por lo tanto no deja de ser arriesgado el afirmar categóricamente que los pueblos prehelénicos no llegaron a elaborar ninguna idea de demostración, ni a sentir su necesidad. Hay indicios claros de que estos pueblos se dieron cuenta en algunos casos de que ciertos métodos para calcular áreas y volúmenes se podían justificar reduciéndolos a problemas de áreas y volúmenes más sencillos; por otra parte, los escribas prehelénicos frecuentemente comprobaban o «demostraban» sus divisiones por medio de la multiplicación inversa, y a veces comprobaban también que el método para resolver un problema era correcto, mediante una sustitución del resultado en las condiciones dadas, para poder asegurar que la respuesta era correcta. Sin embargo, lo que sí es cierto es que no se encuentra a lo largo del período prehelénico ninguna afirmación explícita que nos indique que se sintió la necesidad de demostraciones propiamente dichas, ni que muestre algún tipo de interés por las cuestiones relativas a los principios lógicos. La falta de tales testimonios es lo que ha llevado a afirmar frecuentemente que las civilizaciones prehelénicas no tuvieron una verdadera matemática, a pesar del nivel técnico evidentemente alto que muestran sus conocimientos.

Los críticos apuntan también a lo que ellos consideran como una ausencia total de abstracción en la matemática egipcia y babilónica. Es cierto que el lenguaje en que están escritos los documentos parece estar siempre muy próximo a los casos concretos, como hemos visto, pero esto también puede resultar engañoso. En muchos de los problemas mesopotámicos habría que interpretar quizá las palabras «longitud» y «anchura» tal como nosotros interpretamos las letras x e y en nuestras ecuaciones, porque los escribas que redactaron las tablillas cuneiformes muy bien pudieron recorrer el camino que va de los ejemplos concretos a abstracciones más generales; ¿cómo se podría explicar si no el hecho de que se sumen una longitud y un área? También en Egipto se utilizó una palabra para representar una cantidad desconocida, y este uso no es incompatible en absoluto con alguna forma de interpretación abstracta, tal como hacemos nosotros hoy al leer un texto en un papiro.

Las estimaciones críticas de las civilizaciones prehelénicas suelen apuntar también al hecho de que no hubo un tipo de actividad intelectual claramente discernible y con unas características de unidad comparables a la que más tarde iba a llevar el nombre de «matemática», pero también aquí es fácil ser excesivamente dogmáticos. Puede ser cierto que la geometría aún no hubiera cristalizado como algo distinto del crudo marco de las experiencias espaciales que incluían todas las cosas susceptibles de ser medidas, pero en cambio es difícil no ver en el interés que mostraron tanto egipcios como babilonios en los números y sus aplicaciones, algo muy próximo a lo que se ha conocido usualmente como álgebra en épocas posteriores.

A las culturas prehelénicas se las ha caracterizado también como completamen-

te utilitarias y, en consecuencia, con poco o ningún interés por la matemática en sí misma, pero aquí aparece de nuevo una cuestión de opinión más que una evidencia indiscutible. En aquella época, como ahora, la inmensa mayoría de la humanidad estaba preocupada únicamente por los problemas inmediatos que plantea la simple supervivencia, y el tiempo libre era sin duda mucho más escaso que hoy, pero incluso en estas condiciones difíciles se produjeron en Egipto y en Babilonia algunos tipos de problemas que llevan la marca indudable de la matemática recreativa. Si en un problema se pide hallar una suma de gatos y medidas de grano, o bien de una longitud y un área, es imposible negarle al autor o bien un cierto grado de sentido del humor o un sentido de la abstracción. Desde luego la mayor parte de la matemática prehelénica era de tipo práctico, pero se puede asegurar que no toda ella; la verdad probablemente haya que buscarla en un punto intermedio entre los extremos que han defendido recientemente dos historiadores de la matemática. Uno de ellos[11] sostiene que la matemática babilónica estaba dirigida exclusivamente a objetivos prácticos; el otro mantiene el punto de vista diametralmente opuesto de que «la matemática sumeria no fue utilizada para resolver problemas de la vida práctica, sino solamente para diversión o exultación del espíritu»[12]. El discreto lector habrá pensado ya con seguridad que no se pueden mantener impunemente estas posiciones extremas. En la práctica del cálculo, que se extendió a lo largo de más de dos milenios, las escuelas de escribas utilizaron gran cantidad de material como ejercicios, y a menudo, quizá, en plan de simple y sana diversión.

Bibliografía

Archibald, R. C.: *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª ed. (Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papers, núm. 2, Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 1949).

Bruins, E. M., y Rutten, M.: *Textes mathématiques de Suse* (París, 1961).

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Holt, 1964).

Kugler, F. X.: *Sternkunst und Sterndienst in Babel* (Münster en Westphalia: Aschendoeff, 1907-1935, 2 vols. y 3 supls.).

Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence R. I.: Brown University Press, 1957; ed. rústica, New York: Harper).

——: *Mathematische Keilschift-Texte* (Berlín: Springer, 1935-1937, 3 vols.). Este es el vol. II de *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, parte A, *Quellen*. Véanse también numerosos artículos de Neugebauer y otros en *Quellen und Studien*, parte B, *Studien*, I-IV (1928-1938).

——: *Vorgriechische Mathematik* (Berlín: Springer, 1934).

Neugebauer, O., y Sachs, A.: *Mathematical Cuneiform Texts* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1945).

Thureau-Dangin, F.: *Textes mathématiques Babyloniens* (Leiden: Brill, 1938).

---

[11] M. Cipolla, *Storia della matematica dai primordia a Leibniz* (Mozara: Società editrice siciliana, 1949), págs. 23.

[12] Citado de Ettore Bortolotti por Ettore Carruccio en su libro *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought* (Chicago: Aldines, 1964), págs. 15.

Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; ed. en rústica, New York: Wiley, 1963).
Vogel, Kurt: *Vorgriechische Mathematik*, vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (ed. en rústica, Hannover: Hermann Schroedel, ca. 1959).

Ejercicios

1. ¿Cuáles fueron en su opinión las cuatro contribuciones más importantes de los mesopotamios a la matemática? Justifique su respuesta.
2. ¿Cuáles considera usted como los cuatro defectos principales de la matemática mesopotámica? Justifique su respuesta.
3. Compárese, en cuanto a su importancia y su posible influencia en civilizaciones posteriores, la geometría y trigonometría de los babilonios con la de los egipcios.
4. Descríbanse las ventajas y desventajas relativas de los sistemas de notación numérica de los babilonios y de los egipcios.
5. Escríbase el número 10.000 en notación babilónica.
6. Escríbase el número 0,0862 en notación babilónica.
7. Utilícese el algoritmo babilónico para el cálculo de raíces cuadradas para hallar la raíz cuadrada de dos con media docena de decimales exactos, y compárese el resultado obtenido con el valor babilónico 1;24,51,10.
8. Compruébese que si $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ es 1;33,45 y $b=45$ y $c=1{,}15$, entonces a, b, c, forman una terna pitagórica.
9. Compruébese que los parámetros $p=9$, $q=4$ conducen a los valores que aparecen en la línea 5 de la tablilla Plimpton 322.
10. Demuéstrese que si p y q son números positivos tales que $p^2-q^2<2pq$, entonces $1<p/q<1+\sqrt{2}$.
11. Compárese la aproximación babilónica 3;41 para la razón del área del heptágono regular al cuadrado del lado, con el valor correcto.
12. Los babilonios estimaron la razón del área del hexágono regular al cuadrado del lado, como 2;37,30; ¿cuál es la diferencia con la razón correcta?
13. Resolver el siguiente problema de la época babilónica antigua: El área de dos cuadrados juntos es 1.000 y el lado de uno de ellos es 10 unidades menos que los $\frac{2}{3}$ del lado del otro; calcúlense los lados de los dos cuadrados.
14. Hállese, en forma de fracción sexagesimal aproximando hasta los minutos, la razón del área del pentágono regular al cuadrado del lado, y compárese el resultado obtenido con el valor 1;40 dado por los babilonios.
15. Resolver el siguiente problema de la época babilónica antigua: Un cateto de una propiedad en forma de triángulo rectángulo mide 50 unidades de longitud; paralelamente al otro cateto y a una distancia de él de 20 unidades se traza una recta que corta del triángulo un trapecio rectángulo cuya área es de 5,20 unidades. Hállense las longitudes de los dos lados paralelos de este trapecio.
16. Compruébese el antiguo resultado babilónico en el que se da como 12,48 el área de un trapecio isósceles cuyos lados miden 30 unidades y cuyas bases 14 y 50 unidades respectivamente.
17. Resolver el antiguo problema babilónico siguiente: Diez hermanos reciben conjuntamente 1;40 minas de plata, habiendo una diferencia constante entre lo que recibe cada hermano y el que le sigue; si el octavo hermano recibe 6 shekels, calcúlese cuánto le ha correspondido a cada uno. (Nota: en una mina hay 60 shekels).

18. Hállese la longitud de la escalera del problema formulado en el texto.
19. Resuélvase el problema de los seis hermanos formulado en el texto.
20. Una tablilla babilónica antigua desenterrada en Susa pide calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden 50, 50 y 60 unidades. Resuélvase este problema.
21. Demuéstrese que la representación sexagesimal de la fracción $\frac{1}{7}$ tiene período tres. ¿Cuál es el período en su representación decimal?

*22. Otra tablilla de Susa pide calcular los lados x e y de un rectángulo sabiendo que $xy = 20{,}0$ y que $x^3 d = 14{,}48{,}53{,}20$, donde d es la longitud de una diagonal. Resolver este problema.

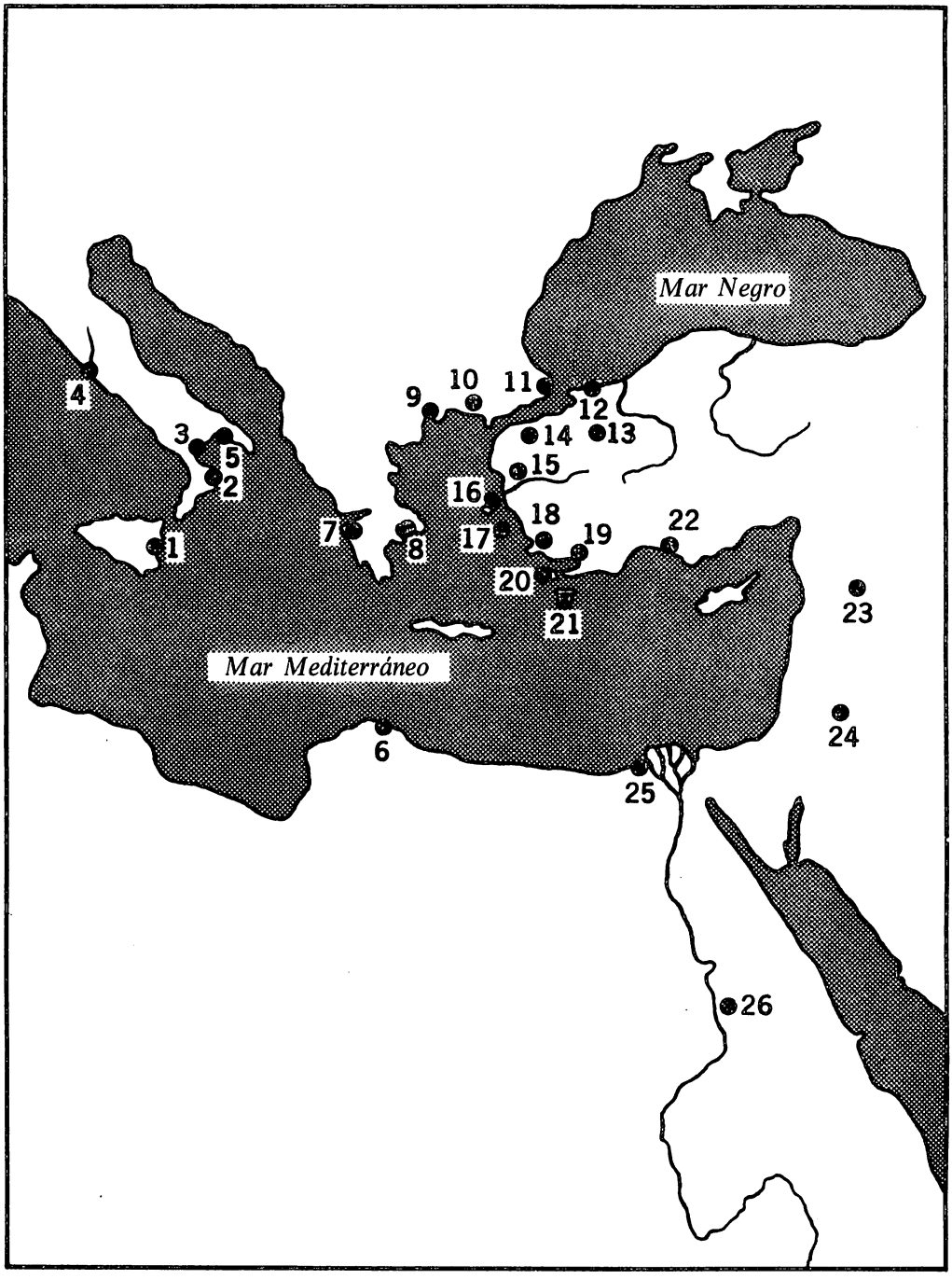
Capítulo IV
JONIA Y LOS PITAGORICOS

> Para Tales... la cuestión primaria no era *qué sabemos*, sino *cómo lo sabemos.*
>
> *Aristóteles*

1. Los orígenes del mundo griego

La actividad intelectual de las civilizaciones «potámicas» que se desarrollaron en Egipto y Mesopotamia ya había perdido impulso mucho antes de que comenzase la Era Cristiana, pero al mismo tiempo que declinaba el saber en los valles de los grandes ríos, y a la vez que el bronce iba cediendo su lugar al hierro en la fabricación de armas, comenzaron a surgir vigorosamente nuevas culturas a todo lo largo de las costas del mar Mediterráneo. Para indicar este cambio en los principales centros de la civilización, al período que va más o menos desde el 800 a.C. al 800 d.C. se le denomina a veces como la Edad Talásica (es decir, como la «edad del mar»). No hubo, desde luego, ninguna ruptura clara y definida que señalase la transición en la hegemonía intelectual desde los valles del Nilo y del Eufrates y Tigris a las costas del Mediterráneo, pues el tiempo y la historia fluyen de una manera continua y las condiciones cambiantes vienen siempre asociadas a causas que las precedieron. Los escribas egipcios y babilonios continuaron produciendo papiros y textos cuneiformes durante muchos siglos después del año 800 a.C., pero mientras tanto ya se estaba preparando, y rápidamente por cierto, una nueva civilización para tomar en sus manos la antorcha de la hegemonía cultural, no sólo en torno al Mediterráneo, sino también finalmente en los mismos valles de los grandes ríos. Para indicar de dónde provenía la fuente de la nueva inspiración, a la primera parte de la Edad Talásica se la denomina era helénica, y así a las culturas más antiguas se las conoce también como prehelénicas.

Los griegos actuales aún siguen llamándose a sí mismos helenos, continuando así la tradición del nombre utilizado por sus lejanos antepasados que se establecieron a lo largo de las costas del Mediterráneo. La historia de los griegos se remonta al segundo milenio a.C., cuando, procedentes del Norte, presionaron implacablemente como invasores desprovistos de cultura alguna; no llevaban consigo ninguna tradición matemática ni literaria, y sin embargo parecen haberse mostrado ansiosos de aprender, y no les llevó mucho tiempo el mejorar aquello que les habían enseñado. Por ejemplo, tomaron, de los fenicios quizá, un alfabeto ya existente que consistía sólo de consonantes, y le añadieron las vocales. El alfabeto parece haber tenido su origen geográfico entre los mundos babilónico y


Mar Negro
Mar Mediterráneo
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

CENTROS MATEMATICOS MAS IMPORTANTES DE LA EPOCA TALASICA

1. Siracusa	Abdera	10 (Demócrito)
2. Crotona	Alejandría	25 (Euclides, Herón, Ptolomeo, Pappus, Menelao y otros)
3. Elea	Atenas	8 (Platón, Teeteto)
4. Roma	Bizancio	11 (Proclo)
5. Tarento	Calcedonia	12 (Xenócrates)
6. Cirene	Calcis	23 (Iámblico)
7. Ellis	Chios	16 (Hipócrates)
8. Atenas	Cnido	20 (Eudoxo)
9. Estagira	Crotona	2 (Pitágoras)
10. Abdera	Cirene	6 (Teodoro, Eratóstenes)
11. Bizancio	Cícico	14 (Calipo)
12. Calcedonia	Elea	3 (Parménides, Zenón)
13 Nicea	Ellis	7 (Hipias)
14. Cícico	Gerasa	24 (Nicómaco)
15. Pérgamo	Mileto	19 (Tales)
16. Chíos	Nicea	13 (Hiparco)
17. Samos	Perga	22 (Apolonio)
18. Esmirna	Pérgamo	15 (Apolonio)
19. Mileto	Rodas	21 (Eudemo, Gémino)
20. Cnido	Roma	4 (Boecio)
21. Rodas	Samos	17 (Pitágoras, Conón, Aristarco)
22. Perga	Esmirna	18 (Teón)
23. Calcis	Estagira	9 (Aristóteles)
24. Gerasa	Siena	26 (Eratóstenes)
25. Alejandría	Siracusa	1 (Arquímedes)
26. Siena	Tarento	5 (Pitágoras, Arquitas, Filolao y otros)

egipcio, posiblemente en la región de la península del Sinaí, pasando en primer lugar por un largo proceso de reducción drástica en el número de símbolos cuneiformes o hieráticos. Este alfabeto se difundió por las nuevas colonias, griegas, romanas y cartaginesas, a través de las actividades de los mercaderes; se supone que algunos de los rudimentos del cálculo viajaron también siguiendo las mismas rutas, pero las partes más esotéricas de la matemática, con un carácter sacerdotal, pudieron no divulgarse. Poco tiempo más tarde, sin embargo, los mercaderes, negociantes y pensadores griegos viajaban ya directamente a los antiguos centros del saber en Egipto y Babilonia, donde establecieron contacto con la matemática prehelénica, entre otras cosas. Ahora bien, no se mostraron dispuestos simplemente a recibir y continuar las antiguas tradiciones, sino que se apropiaron literalmente de la materia de una manera tan sistemática que no tardó en adquirir en sus manos una forma radicalmente distinta, dando como resultado lo que iba a ser, desde sus comienzos, la matemática griega.

Los primeros Juegos Olímpicos se celebraron el año 776 a.C., y por esa época se había desarrollado ya una maravillosa literatura griega, como ponen en evidencia las obras, un poco posteriores, de Homero y Hesiodo. De la matemática griega de la época no sabemos nada; probablemente se quedó rezagada con respecto al desarrollo de las formas literarias, que se prestan mejor evidentemente a su continuidad por tradición oral. Habían de pasar casi otros dos siglos antes de que conozcamos ni una palabra, ni siquiera indirectamente, sobre la matemática griega. Y entonces, durante el siglo VI a.C., aparecen dos hombres, Tales y Pitágoras, que seguramente jugaron el mismo papel con respecto a la matemática que Homero y Hesiodo con respecto a la literatura. La mayor parte de las cosas que diremos en este capítulo se refieren a Tales y a Pitágoras, pero es necesaria una advertencia previa: Homero y Hesiodo son unas figuras que aparecen ciertamente envueltas en la penumbra, pero por lo menos disponemos de una tradición consistente que le atribuye ciertas obras maestras literarias que, transmitidas al principio de una manera oral de generación en generación, finalmente se copiaron y se conservaron para la posteridad. Tales y Pitágoras son también unas figuras un tanto indefinidas históricamente, aunque no tanto como Homero y Hesiodo, pero en lo que se refiere a su obra intelectual, el paralelismo con Homero y Hesiodo cesa por completo; no nos ha quedado ninguna obra maestra matemática de ninguno de los dos, y ni siquiera está comprobado ni mucho menos que ni Tales ni Pitágoras compusieran jamás una obra tal. Lo que pueden haber hecho tenemos que reconstruirlo nosotros sobre la base de una tradición, no demasiado fidedigna por cierto, que creció en torno a las figuras de estos dos matemáticos griegos primitivos. Se les atribuyen ciertas frases clave, tales como la de «Conócete a ti mismo», atribuida a Tales, y la de que «Todo es número», en el caso de Pitágoras, pero casi nada más en concreto. Sin embargo, las primeras exposiciones griegas de la historia de la matemática, que desgraciadamente no han llegado hasta nosotros, atribuían a Tales y a Pitágoras un cierto número de descubrimientos matemáticos muy concretos. En este capítulo vamos a exponer esas contribuciones, pero el lector debe tener en cuenta que tal exposición está basada en una tradición ciertamente muy persistente, pero no en ningún documento histórico conocido.

El mundo griego tuvo su centro geográfico durante muchos siglos en la región

situada entre los mares Egeo y Jónico, pero la civilización helénica no estuvo en absoluto localizada allí exclusivamente. Se han encontrado asentamientos griegos que datan de hacia el 600 a.C. dispersos a lo largo de casi toda la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo, y fue precisamente en ciertos lugares de estos «alrededores» del mundo griego donde surgió la nueva corriente de la matemática. A este respecto es preciso señalar que los colonizadores costeros, y especialmente los que se instalaron en Jonia tenían, entre otras, dos ventajas: en primer lugar tenían el espíritu atrevido e imaginativo típico de los exploradores y pioneros, y en segundo lugar estaban en un contacto más estrecho con los dos grandes valles fluviales de los que podía venir el conocimiento, por su proximidad. Tales de Mileto (ca. 624-548 a.C.) y Pitágoras de Samos (ca. 580-500 a.C.) tenían además otra ventaja: estaban en situación de viajar a los centros del antiguo saber y adquirir allí información de primera mano relativa a la astronomía y a la matemática. Se dice que en Egipto aprendieron geometría, y en Babilonia, bajo el ilustrado rey caldeo Nabucodonosor, Tales tomó contacto probablemente con las tablas y otros instrumentos astronómicos. Una tradición muy conocida asegura que el año 585 a.C. Tales sorprendió a sus conciudadanos prediciendo el eclipse solar que tuvo lugar ese año, pero el carácter histórico de esta tradición es muy cuestionable, en primer lugar porque un eclipse de sol sólo es visible desde una pequeña parte de la superficie terrestre, y en segundo lugar porque no parece probable que hubiera en Babilonia en aquella época tablas de eclipses solares tan perfectas que hubieran permitido a Tales hacer tal predicción; es muy probable en cambio que el «gnomon» o reloj de sol llegara a Grecia procedente de Babilonia, y también quizá la clepsidra procedente de Egipto. Los griegos no dudaron en ningún caso en adoptar elementos de otras culturas extrañas, de lo contrario no hubieran podido aprender nunca tan rápidamente cómo avanzar más lejos que sus predecesores, pero lo cierto es que todo lo que tocaron lo mejoraron.

2. Tales de Mileto

Lo que se sabe realmente sobre la vida y la obra de Tales es bien poco. Las fechas de su nacimiento y su muerte se calculan a partir del hecho de que el eclipse del año 585 a.C. probablemente ocurrió cuando Tales estaba en la flor de la edad, digamos que alrededor de los cuarenta años, y de que al parecer a su muerte tenía setenta y ocho años. Sin embargo, las serias dudas que se tienen acerca de la autenticidad de la historia del eclipse hacen que estas extrapolaciones sean arriesgadas, y debilitan nuestra confianza acerca de los descubrimientos atribuidos a Tales. La opinión antigua es unánime en considerar a Tales como un hombre excepcionalmente inteligente y como el primer filósofo, el primero de los Siete Sabios griegos, por acuerdo general, considerándolo además como «discípulo de los egipcios y de los caldeos», hipótesis completamente plausible. La proposición que ahora conocemos como teorema de Tales, es decir, la de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, muy bien la pudo aprender Tales

durante sus viajes a Babilonia, pero la tradición va más lejos, no obstante, y le atribuye algún tipo de demostración de este teorema. Por este motivo se ha aclamado a Tales frecuentemente como el primer matemático auténtico, es decir, como el padre de la organización deductiva de la geometría. Esta tradición o leyenda se vio adornada al añadirse a este teorema otros cuatro de los que también se dice que fueron demostrados por Tales:

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
2. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

No hay, desde luego, ningún documento antiguo que pueda aportarse como prueba evidente de estos descubrimientos, pero aun así la tradición ha sido, como decimos, persistente. Lo más que nos podemos acercar a una evidencia fiable sobre este punto se deriva de una fuente que data de unos mil años después de la época de Tales. Un discípulo de Aristóteles llamado Eudemo de Rodas (fl. ca. 320 a.C.) escribió una historia de la matemática, obra que se perdió más tarde, pero antes de su desaparición alguien hizo un resumen de parte al menos de dicha historia; el original de este resumen también se perdió, pero durante el siglo V de nuestra era el filósofo neoplatónico Proclo (410-485) incluyó parte de la información que contenía ese resumen en las primeras páginas de su *Comentario sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides*. A continuación de unas observaciones introductorias sobre el origen de la geometría en Egipto, el *Comentario* de Proclo nos informa de que Tales

> «... fue en primer lugar a Egipto, y de allí introdujo este estudio en Grecia. Descubrió por sí mismo muchas proposiciones, e instruyó a sus sucesores en los principios en que se basan muchas otras, siendo su método de ataque en algunos casos más general y en otros más empírico»[1].

Es principalmente en esta cita de tercera mano en lo que se apoyan los reconocimientos de Tales como el primer matemático griego. Más adelante en su *Comentario* Proclo, basándose de nuevo en Eudemo, atribuye a Tales los cuatro teoremas que hemos mencionado más arriba. Hay algunas otras referencias a Tales dispersas por las antiguas fuentes, pero la mayor parte de ellas describen sus actividades de carácter más práctico: Diógenes Laercio, seguido por Plinio y Plutarco, nos cuenta que Tales midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra

[1] La traducción está tomada de la obra de T. L. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), vol. I, pág. 128. Véase también Ivor Thomas (ed.), *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (1939-1941), vol. I, pág. 147.

proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura[2]. El historiador Herodoto nos cuenta de nuevo la historia de la predicción del eclipse solar por Tales; Aristóteles nos dice que Tales hizo una fortuna alquilando todas las almazaras durante un año en que la cosecha de aceitunas prometía ser abundante, y hay aún otras leyendas en las que se pinta a Tales como un mercader de sal, como un observador de las estrellas, como un defensor del celibato o como un hábil hombre de estado. Este tipo de informaciones no nos suministran, sin embargo, ninguna evidencia más acerca de si Tales ordenó un cierto número de teoremas geométricos en forma deductiva o no. La historia en la que se nos cuenta cómo calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes no nos permite asegurar nada, porque los principios en que se basa tal cálculo eran conocidos ya desde antiguo en Egipto y en Mesopotamia. Estas historias no nos permiten zanjar la atrevida conjetura de que Tales fuese el creador de la geometría deductiva, pero en cualquier caso sí podemos decir que Tales es el primer hombre en la historia al que se le han atribuido descubrimientos matemáticos concretos[3]. Nosotros sabemos que los babilonios conocían ya una gran cantidad de resultados matemáticos desde más de un milenio antes de la época de Tales, y, sin embargo, entre los griegos mismos se reconocía que Tales había hecho determinados progresos concretos. Parece razonable suponer, por lo tanto, a la luz de la información que nos transmite Proclo, que Tales contribuyó en algún sentido a la vía de la organización racional. Está casi universalmente admitido hoy que fueron los griegos los que añadieron el elemento de estructura lógica a la geometría, pero la cuestión importante aquí es la de si esta etapa crucial la llevó a cabo Tales mismo u otros matemáticos posteriores, quizá tanto como dos siglos más tarde; sobre este punto no tenemos más remedio que aplazar cualquier decisión final hasta que dispongamos de evidencia adicional sobre el desarrollo de la matemática griega.

3. Pitágoras de Samos

Pitágoras es una figura a duras penas menos controvertida que la de Tales, puesto que se vio envuelta aún más a fondo por la leyenda y por una especie de culto casi religioso. Tales se había dedicado a asuntos de la vida práctica, mientras que Pitágoras fue más bien una especie de profeta y de místico nacido en Samos, una de las islas del Dodecaneso próxima a Mileto, la patria de Tales. A pesar de que algunas historias nos presentan a Pitágoras como discípulo de Tales, es improbable que se diera tal circunstancia en vista del medio siglo aproximadamente de diferencia de edades. Que sus intereses eran parecidos en algún sentido se deduce fácilmente del hecho de que Pitágoras también viajó a Egipto y Babilonia, e incluso posiblemente a la India; durante estas largas peregrinaciones debió asimilar

[2] Para una exposición más completa véase Heath, *op. cit.*, vol. I, págs. 128-140.

[3] B. L. van der Waerden, en su obra *Science Awakening*, pág. 80, acepta la conjetura de que Tales debió utilizar el método deductivo; en cambio, O. Neugebauer, en su *Exact Sciences in Antiquity*, págs. 142-143 y 148, la rechaza.

evidentemente no sólo conocimientos matemáticos y astronómicos, sino también mucho bagaje religioso. Dicho sea de paso, Pitágoras fue casi exactamente contemporáneo de Buda, de Confucio y de Lao-Tse, de manera que su siglo constituyó una época crítica en el desarrollo de la religión tanto como en el de la matemática. A su regreso al mundo griego Pitágoras se estableció en Crotona en la costa sudeste de lo que hoy es Italia, pero que en aquella época era conocida como la Magna Grecia; allí fundó una sociedad secreta que se parecía algo a un culto órfico, excepto por sus bases matemáticas y filosóficas.

El hecho de que Pitágoras haya quedado para nosotros como una figura tan oscura es debido en parte a la pérdida de documentos de la época, porque sabemos que en la antigüedad se escribieron varias biografías de Pitágoras, incluida una por Aristóteles, pero todas ellas se han perdido. Otra dificultad además para identificar claramente la figura de Pitágoras radica en el hecho de que la orden fundada por él era de un tipo comunal y secreto; tanto los conocimientos como las propiedades eran mantenidos en régimen de comunidad, y por lo tanto no se podía atribuir un descubrimiento a ningún miembro concreto de la escuela. Lo mejor es, pues, no hablar de la obra de Pitágoras, sino más bien de las contribuciones de los pitagóricos, aunque en la antigüedad se solían atribuir todas ellas al maestro.

La escuela de pensamiento pitagórica era conservadora desde el punto de vista político, y se regía por un código de conducta muy estricto. A los miembros de la secta se les imponía un severo régimen vegetariano, al parecer debido a que el pitagorismo aceptaba la doctrina de la metempsícosis o de la transmigración de las almas, con el resultado de que no debería ser sacrificado ningún animal ante el temor de que pudiera ser la nueva morada del alma de un amigo muerto; entre otros tabús de la escuela estaba la prohibición de comer judías (o, quizá más exactamente, lentejas). Probablemente la característica más sorprendente de la orden pitagórica era la confianza que mostraba en la prosecución de los estudios filosóficos y matemáticos como base moral para la dirección de la vida. Las palabras mismas «filosofía» (o «amor por la sabiduría») y «matemática» (o «aquello que se aprende») se suponen acuñadas por Pitágoras para describir sus actividades intelectuales. Se dice que impartía dos tipos de enseñanza distintos, uno solamente para los miembros de la orden o escuela, y el otro para el resto de la comunidad ciudadana, y podemos suponer que donde presentaba Pitágoras cualquier tipo de contribución a la matemática que pudiera haber hecho, era en las lecciones de la primera categoría. Después de hablarnos en la cita anterior de la obra geométrica de Tales, continúa diciendo Proclo:

> «Pitágoras, que vino después de él, transformó esta ciencia en una forma de educación liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de proporciones y la construcción de las figuras cósmicas»[4].

Incluso si no aceptamos estas afirmaciones en un sentido literal, es evidente que los pitagóricos jugaron un importante papel, posiblemente el papel crucial, en la

[4] Véase Ivor Thomas, *op. cit.*, vol. I, pág. 149. Cf. también Heath, *op. cit.*, vol. I, pág. 141, y Van der Waerden, *op. cit.*, pág. 90.

historia de la matemática griega. En Egipto y Mesopotamia los elementos de la aritmética y de la geometría se reducían en principio a ejercicios de aplicación de métodos numéricos a problemas específicos, relativos bien a cerveza, a pirámides o a herencias de terrenos, con muy poco de estructuración intelectual y quizá nada que se pareciera a una discusión filosófica de los principios. A Tales se le suele considerar como el primero que abrió un camino en esta dirección, aunque la tradición apoya los puntos de vista de Eudemo y de Proclo de que el verdaderamente nuevo énfasis en la matemática fue debido de una manera principal a los pitagóricos; con ellos la matemática se relacionó más estrechamente con el puro amor por la sabiduría que con las exigencias de la vida práctica, y desde entonces permanece viva hasta hoy esta tendencia. Hasta dónde llegaron los pitagóricos en esta dirección no está claro en absoluto, y hay al menos un eminente historiador[5] que considera que ninguna de las informaciones que atribuyen descubrimientos matemáticos importantes a Pitágoras es histórica. Es realmente difícil separar la historia y la leyenda en todo lo que se refiere a este hombre, ya que significó tantas cosas distintas para el pueblo llano, el filósofo, el astrónomo, el matemático, el enemigo irreconciliable de las judías, el santo, el profeta, el hacedor de milágros, el mago, el charlatán, etc. Que fue una de las figuras más influyentes en la historia de su época es difícil negarlo, puesto que sus seguidores, fueran engañados o inspirados, extendieron sus creencias por la mayor parte del mundo griego. La purificación del alma de los pitagóricos se conseguía en parte a través de un estricto régimen físico y en parte mediante ritos que recuerdan los de los adoradores de Orfeo y de Dionisos, pero las armonías y misterios de la filosofía y de la matemática eran también partes esenciales de este ritual. Nunca antes ni después ha jugado la matemática un papel tan importante en la vida y en la religión como entre los pitagóricos. Por lo tanto, si es imposible atribuir descubrimientos concretos a Pitágoras mismo, e incluso de manera colectiva a los pitagóricos, es muy importante, sin embargo, el llegar a entender el tipo de actividad matemática en que se ocupaba la escuela, según la tradición.

4. El pentagrama pitagórico

Se dice que el lema de la escuela pitagórica era el de «Todo es número». Si recordamos que los babilonios habían asociado ya medidas numéricas a las cosas que los rodeaban, desde los movimientos de los cielos al valor de sus esclavos, podemos percibir en este lema pitagórico una fuerte afinidad mesopotámica. El mismo teorema al que aún sigue asociado el nombre de Pitágoras procede de los babilonios con toda probabilidad; se ha sugerido, como justificación del nombre de Teorema de Pitágoras, que los pitagóricos fueron los primeros en dar una demostración, pero esta conjetura no la podemos comprobar. Las leyendas que aseguran que Pitágoras sacrificó un buey (o cien bueyes, según otras versiones) al descubrir el teorema o su demostración, son completamente inverosímiles en vista de las reglas vegetarianas de la escuela, y además se repiten con el mismo carácter

[5] Véase O. Neugebauer, *op. cit.*, pág. 148.

increíble en conexión con varios otros teoremas. Es muy razonable suponer que los primeros miembros de la escuela pitagórica estuvieran familiarizados con las propiedades geométricas que conocían los babilonios, pero cuando en el sumario de Eudemo-Proclo se les atribuye la construcción de las «figuras cósmicas», es decir, de los poliedros regulares, hay razones para dudarlo. El cubo, el octaedro y el dodecaedro pudieron haber sido observados quizá en las formas de algunos cristales naturales, tales como los de la pirita o sulfuro de hierro, pero en el libro XIII de los *Elementos* aparece un escolio en el que se nos dice que los pitagóricos sólo conocían tres de los poliedros regulares: el tetraedro, el cubo y el dodecaedro. El conocimiento de este último resulta muy plausible por el descubrimiento de un dodecaedro etrusco de piedra cerca de Padua, que data de antes del 500 a.C.; no es en absoluto improbable, por lo tanto, que los pitagóricos conocieran algunas de las propiedades del pentágono regular, incluso aunque no tuvieran noticia de la existencia del octaedro y del icosaedro. La figura de la estrella de cinco puntas que se forma al trazar las cinco diagonales de una cara pentagonal de un dodecaedro regular, parece haber sido una especie de símbolo de la escuela pitagórica; el pentágono estrellado ya había aparecido anteriormente en el arte babilónico, y es posible que también aquí nos encontremos con un lazo de conexión entre la matemática prehelénica y la pitagórica.

Una de las cuestiones más debatidas de la geometría pitagórica se refiere a la construcción y propiedades del pentagrama o pentágono estrellado. Si comenzamos por un pentágono regular $ABCDE$ (fig. 4.1) y trazamos las cinco diagonales, éstas se cortarán en los puntos $A'B'C'D'E'$ que forman otro pentágono regular. Observando que el triángulo BCD', por ejemplo, es semejante al triángulo isósceles BCE, y teniendo en cuenta también los varios pares de triángulos congruentes que

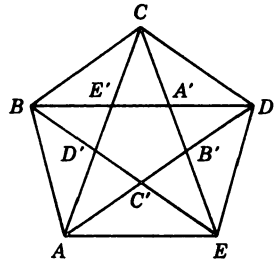


Figura 4.1

aparecen en la figura, resulta fácil ver que los puntos $A'B'C'D'E'$ sobre las diagonales las dividen de una manera sorprendente. En cada caso, uno de estos puntos divide a una diagonal en dos segmentos distintos y tales que la razón de la diagonal completa al mayor de los dos segmentos es la misma que la de éste al segmento menor. Esta subdivisión de la diagonal es la conocida «sección áurea» de un segmento, pero este nombre no se utilizó hasta un par de milenios más tarde, más o menos por la misma época en que Kepler escribía líricamente:

> «La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya.»

Este tipo de subdivisión pronto se hizo tan familiar a los antiguos griegos que no se sintió la necesidad de ningún nombre descriptivo especial para designarla, y así el nombre de «la división de un segmento en media y extrema razón» se vio sustituido en general por el más sencillo y lacónico de «la sección».

Una de las propiedades importantes de «la sección» es la de que es, por así decirlo, «auto-reproductiva», es decir, que si un punto P_1 divide en media y extrema razón a un segmento RS (fig. 4.2), con RP_1 la parte más larga, y si sobre RP_1 tomamos el punto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, entonces el segmento RP_1 queda subdividido a su vez en media y extrema razón por el punto P_2. Si tomamos de nuevo un punto P_3 sobre RP_2 tal que $RP_3 = P_1P_2$, entonces el segmento RP_2 quedará dividido por P_3

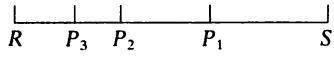


Figura 4.2.

en media y extrema razón; este procedimiento iterativo puede repetirse tantas veces como se quiera, y el resultado que se va obteniendo es un segmento cada vez más pequeño RP_n dividido en media y extrema razón por un punto P_{n+1}. No sabemos si los primitivos pitagóricos se darían cuenta o no de este proceso interminable o si sacaron consecuencias importantes de él, en caso afirmativo. Ni siquiera podemos contestar con seguridad a la cuestión más básica de si los pitagóricos de hacia el 500 a.C. sabían dividir un segmento dado en media y extrema razón o no, pero la probabilidad de que efectivamente supieran y lo hicieran parece ser alta. La construcción que se requiere es equivalente a la resolución de una ecuación cuadrática; para demostrarlo, sea $RS = a$ y $RP_1 = x$ en la figura 4.2; entonces se verifica, por la propiedad de la sección áurea, $a : x = x : (a - x)$, de donde, multiplicando medios y extremos, obtenemos la ecuación $x^2 = a^2 - ax$. Esta es una ecuación cuadrática del tipo 1, de las estudiadas en el capítulo III, y Pitágoras pudo muy bien haber aprendido de los babilonios cómo resolver algebraicamente esta ecuación. Sin embargo, si a es un número racional, entonces no existe ningún número racional x que satisfaga la ecuación; pero ¿se dio cuenta Pitágoras de este hecho? Parece muy dudoso. Quizá, en lugar del tipo de solución algebraica babilónica, los pitagóricos adoptaron un método geométrico análogo al que nos encontramos en los *Elementos* de Euclides, II. 11 y VI. 30. Para dividir un segmento AB en media y extrema razón, en primer lugar construye Euclides el cuadrado $ABCD$ del lado AB (fig. 4.3), divide AC en dos partes iguales mediante el punto E, traza el segmento EB y extiende el segmento CEA hasta F, de manera que $EF = EB$ y, por último, obtiene el punto buscado H completando el cuadrado $AFGH$; se comprueba que H nos resuelve el problema mostrando fácilmente que $AB : AH = AH : HB$. El saber concretamente qué clase de solución utilizaron los pitagóricos para construir la sección áurea, si es que realmente utilizaron alguna, sería muy

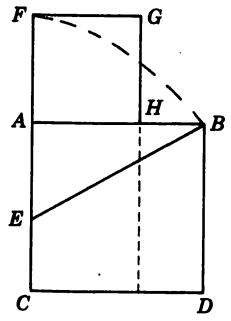


Figura 4.3

importante para clarificar el problema general relativo al nivel y a las características de la matemática griega presocrática, puesto que si la matemática pitagórica comenzó inspirada por la babilónica, con la consiguiente fe explícita en que todo es número, entonces ¿cómo y cuándo se produjo el fenómeno del cambio de dirección que condujo al énfasis tan conocido sobre la geometría pura que domina firmemente ya en los tratados clásicos?

5. El misticismo numérico

Se ha solido mantener el punto de vista de que la mayor parte del material que aparece en los dos primeros libros de los *Elementos* se debe a los pitagóricos, lo que supondría un alto grado de madurez, que implicaría a su vez un desarrollo muy rápido de la matemática a partir de la época de Tales y de Pitágoras. Este punto de vista exige un acto de fe en lo que se ha venido llamando el «milagro griego», según el cual unos recién llegados a la escena mediterránea, de escaso nivel cultural, dominaron el material heredado de sus vecinos y lo elevaron rápidamente a cotas más altas, estableciendo de paso el marco esencialmente deductivo para los teoremas. En años recientes se han manifestado serias dudas sobre esta concepción tradicional por parte de algunos historiadores que llaman la atención sobre los conceptos relativamente primitivos que dominan la aritmética pitagórica. Si, por poner un ejemplo, el matemático pitagórico más importante de comienzos del siglo IV a.C., Arquitas de Tarento (428-365 a.C.), podía afirmar que sólo la aritmética, y no la geometría, podía dar demostraciones satisfactorias[6], parecería haber poco fundamento para situar la aparición del método axiomático en geometría entre los pitagóricos anteriores a esta época en uno o dos siglos. Se puede argumentar, desde luego, por otra parte, que Arquitas representaba solamente uno de los puntos de vista posibles, insistiendo en una numerología pitagórica ortodoxa que otros ya habían abandonado o modificado. Ciertamente hubo posturas que fueron cambiando en la astronomía pitagórica, y podemos suponer que en la matemática debieron darse también cambios comparables.

[6] Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pág. 148.

El misticismo numérico no fue precisamente una creación original de los pitagóricos; por ejemplo, el número siete ha sido destacado desde antiguo por un temor reverente, probablemente debido a que son siete las estrellas errantes o planetas, de los que se derivó la semana, y por lo tanto nuestros nombres para los días de la semana. Los pitagóricos no fueron en absoluto los únicos que imaginaron que los números impares tenían características machos y los pares hembras, con la consecuencia accesoria (y no exenta de prejuicios) que encontramos tan tardíamente como en Shakespeare, de que «hay algo de la divinidad en los números impares». Muchas civilizaciones primitivas compartieron diversos aspectos de esta numerología, pero los pitagóricos llevaron el culto a los números a su extremo, basando en él tanto su filosofía como su método de vida. Para ellos, el número uno es el generador de los números y el número de la razón; el número dos es el primer número par o hembra y el número de la opinión; tres es el primer número macho propiamente dicho o el número de la armonía, estando compuesto como lo está de la unidad y de la diversidad; cuatro es el número de la justicia o de la retribución, e indica el arreglo de cuentas; cinco es el número del matrimonio, unión de los dos primeros números macho y hembra propiamente dichos, y seis es el número de la creación. Cada número, a su vez, tenía sus propiedades especiales, pero el más sagrado de todos era el número diez o *tetractis*, ya que representaba el número del universo, incluyendo la suma de todas las posibles dimensiones geométricas. Un punto único es el generador de las dimensiones, dos puntos determinan una recta de dimensión uno, tres puntos no alineados determinan un triángulo o área de dimensión dos, y cuatro puntos no coplanarios determinan un tetraedro o volumen de dimensión tres, y, por tanto, la suma de los números que representan todas las dimensiones es el venerado número diez. Hay que considerar como un tributo a la abstracción en la matemática pitagórica el hecho de que la veneración por el número diez no estuviera dictado evidentemente por la anatomía de las manos o pies del hombre.

6. Aritmética y cosmología

La geometría mesopotámica no había sido mucho más que el número aplicado a la extensión espacial. Parece que al principio debiera haber sido casi lo mismo con los pitagóricos, pero hay una modificación importante. En Egipto el dominio numérico había incluido los números naturales y las fracciones unitarias; entre los babilonios había incluido el campo de todas las fracciones racionales, mientras que en Grecia la palabra número se usaba sólo para los enteros positivos. A las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros, y así la matemática griega de los primeros tiempos venía a estar frecuentemente más próxima a la matemática «moderna» de hoy que a la aritmética usual de hace unas generaciones. Tal como lo expresaba más tarde Euclides (*Elementos* V. 3), «Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo». Este punto de vista que centra su atención en la conexión entre pares de números tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número

como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida; la aritmética podría ser concebida ahora como una disciplina intelectual a la vez que una técnica, y la transición a tal punto de vista parece haber tenido lugar en la escuela pitagórica. Si hemos de confiar en la tradición, entonces los pitagóricos no sólo establecieron la aritmética como una rama de la filosofía, sino que parecen haberla considerado como la base de una posible unificación de todos los aspectos del mundo en torno a ellos. Por medio de diagramas formados por puntos o unidades extensas asociaron el número a la extensión geométrica, lo cual condujo a su vez a una aritmética de los cielos. Filolao (muerto hacia el 390 a.C.), un pitagórico tardío que compartía la veneración por la *tetractis* o década, escribía que eran «grande, todopoderosa y generadora de todo, comienzo y guía tanto de la vida divina como de la terrestre»[7]. Esta concepción del número diez como el número perfecto, el símbolo de la salud y la armonía, parece haber sido al menos en parte la inspiradora del primer sistema astronómico no geocéntrico. Filolao suponía que en el centro del universo había un fuego central alrededor del cual giraban uniformemente la tierra y los siete planetas (incluidos el sol y la luna); en vista de que este cuadro elevaba sólo a nueve el número de los cuerpos celestes aparte de la esfera de las estrellas fijas, el sistema de Filolao, suponía además la existencia de un décimo cuerpo, una «contra-tierra» alineada siempre con la tierra y con el fuego central y con el mismo período de revolución diaria en torno a dicho fuego central que la tierra. El sol giraba alrededor del fuego central con un período de un año, y las estrellas fijas permanecían estacionarias, mientras que la tierra mantenía durante su movimiento el mismo hemisferio deshabitado hacia el fuego central, de manera que los hombres no podían ver nunca ni el fuego central ni la contra-tierra. La hipótesis del movimiento circular uniforme que formularon por primera vez los pitagóricos, iba a dominar el pensamiento astronómico durante más de 2000 años, y precisamente Copérnico, casi 2000 años más tarde, aceptó esta hipótesis sin discusión, y se refirió concretamente a los pitagóricos para demostrar que su teoría del movimiento de la tierra no era tan nueva ni revolucionaria.

7. Los números figurados

Lo concienzudamente que entretejieron los pitagóricos la idea de número en su pensamiento puede ilustrarse muy bien por su interés en los números figurados. Aunque no se pueda formar ningún triángulo con menos de tres puntos, sí es posible construir triángulos con un número de puntos mayor, como con seis, diez o quince puntos (véase la fig. 4.4). Los números tales como tres, seis, diez, quince y, en general, los números dados por la fórmula

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[7] Véase, para una exposición especialmente extensa del pitagorismo, Eduard Zeller, *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates* (1881), vol. I, págs. 306-533. Acerca de la *tetractis* véase concretamente págs. 428 y sig. Una descripción más extensa del papel de la *tetractis* puede verse en Thomas Taylor, *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans* (Los Angeles, 1934), págs. 180-188, pero este libro debe leerse con cierta prudencia crítica.

recibieron el nombre de números triangulares, y el diseño triangular que representa al número diez, la sagrada tetractis, rivalizó en veneración con el pentágono en la teoría de números pitagórica. Había además muchas otras categorías de números

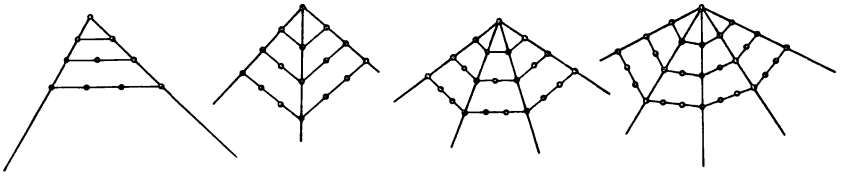


Figura 4.4

privilegiados, desde luego; los sucesivos números cuadrados se obtenían sumando las sucesiones $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$, en las que cada uno de los números impares que aparecen sumados se consideraba como una distribución de puntos en forma de «gnomon» (el antiguo reloj de sol babilónico) situado a lo largo de dos lados contiguos del cuadrado de puntos anterior (véase la fig. 4.4). De aquí la palabra gnomon (relacionada en un principio con la palabra para «saber») pasó a verse asociada a los mismos números impares. La suma de una sucesión de números pares de la forma $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$ da lugar a lo que los griegos llamaron un «número oblongo», cada uno de los cuales es el doble de un número triangular. Las distribuciones de puntos pentagonales representan los números pentagonales, que vienen dados por la sucesión

$$N=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$$

y los números hexagonales se obtienen a su vez de la sucesión

$$N=1+5+9+\cdots+(4n-3)=2n^2-n$$

y así, de una manera análoga, se van obteniendo los números poligonales de todos los órdenes. Este proceso se puede extender fácilmente, desde luego, a distribuciones de puntos en el espacio tridimensional, obteniéndose entonces los números poliédricos. Se dice que Filolao, entusiasmado con estas ideas, mantenía que

> «Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser concebido ni conocido.»

Esta afirmación de Filolao parece haber sido una especie de dogma de la escuela pitagórica, y así aparecieron historias acerca del descubrimiento de algunas leyes simples de la música por Pitágoras, a quien se atribuye el haberse dado cuenta por vez primera de que si las longitudes de las cuerdas vibrantes se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, tales como la de dos a tres (para la quinta) o como la de tres a cuatro (para la cuarta), entonces los tonos producidos serán armoniosos. En otras palabras, si una cuerda emite la nota C al

ser tañida, entonces una cuerda análoga de longitud doble emitirá la nota C una octava más baja, y los tonos entre estas dos notas los emitirán cuerdas cuyas longitudes vengan dadas por razones intermedias: 16:9 para la D, 8:5 para la E, 3:2 para la F, 4:3 para la G, 6:5 para la A y 16:15 para la B, en orden ascendente. Aquí nos encontramos quizá con las primeras leyes cuantitativas de la acústica, y probablemente incluso con las más antiguas de todas las leyes cuantitativas de la física. Los pitagóricos primitivos hicieron gala de una imaginación tan audaz que extrapolaron rápidamente sus resultados para sacar la conclusión de que los cuerpos celestes emitían análogamente en sus movimientos tonos armoniosos, la «armonía de las esferas». La ciencia pitagórica, en general, al igual que la matemática pitagórica, parece haber sido una curiosa mezcla de pensamiento riguroso y de especulación fantástica. La teoría que afirma la esfericidad de la tierra se le ha atribuido frecuentemente a Pitágoras, pero, caso de ser correcta tal atribución, lo que no sabemos es si esta conclusión[8] estaba basada en la observación física (quizá de constelaciones nuevas observadas por Pitágoras en sus viajes hacia el Sur) o simplemente en la imaginación. La idea misma de que el universo es un «cosmos», es decir, un todo armoniosamente ordenado, parece haber sido también una contribución pitagórica relacionada con la anterior, idea que, en su época, bien poca base podía tener en la observación directa, pero que ha resultado ser enormemente fructífera para el desarrollo de la astronomía. Cuando nos sonreímos al conocer las antiguas fantasías numéricas, deberíamos ser al mismo tiempo conscientes del impulso que estas fantasías dieron al desarrollo tanto de la matemática como de la ciencia en general; de hecho, los pitagóricos estuvieron sin duda entre los primeros que creyeron que los fenómenos de la naturaleza podrían entenderse por medio de la matemática.

8. La teoría de proporciones

Proclo, citando quizá del libro de Eudemo, atribuye a Pitágoras dos descubrimientos matemáticos concretos: 1) la construcción de los poliedros regulares, y 2) la teoría de proporciones, y aunque es discutible hasta qué punto tenemos que tomar esta afirmación literalmente, es muy probable al menos que refleje correctamente la dirección del pensamiento pitagórico. La teoría de proporciones encaja claramente en el marco general de los primitivos intereses matemáticos de los griegos, y no es difícil encontrar una probable fuente de inspiración; sabemos que Pitágoras aprendió en Mesopotamia tres medias, la aritmética, la geométrica y la subcontraria (llamada más tarde armónica), así como la «proporción áurea» que relaciona dos de ellas: el primero de dos números es a su media aritmética como su media armónica es al segundo de ellos. Esta relación es la esencia del algoritmo babilónico para el cálculo de raíces cuadradas, luego la información es por lo

[8] La tradición que atribuye la idea de una tierra esférica a los pitagóricos se ha visto cuestionada por algunos autores. Véase W. A. Heidel, *The Frame of the Ancient Greek Maps with a Discussion of the Sphericity of the Earth* (New York: Amer. Geog. Soc., 1937).

menos plausible. En algún momento, sin embargo, los pitagóricos generalizaron este esquema añadiéndole siete medias nuevas para reunir un total de diez: Si b es la media entre a y c, con $a<c$, entonces las tres cantidades están relacionadas por una de las diez ecuaciones siguientes:

$$(1)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a} \qquad (6)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$$

$$(2)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b} \qquad (7)\ \frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$$

$$(3)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c} \qquad (8)\ \frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$$

$$(4)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a} \qquad (9)\ \frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$$

$$(5)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a} \qquad (10)\ \frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$$

Las tres primeras ecuaciones son, obviamente, las ecuaciones que nos definen las medias aritmética, geométrica y armónica respectivamente.

Es difícil asignar una fecha al estudio pitagórico de las medias, y lo mismo pasa con respecto a la clasificación de los números. El estudio de las proporciones o igualdades de razones sin duda debió formar parte al principio de la aritmética o teoría de números pitagórica, aunque más tarde las cantidades a, b y c que figuran en tales proporciones debieron ser consideradas ya probablemente como magnitudes geométricas, pero el período durante el cual tuvo lugar el cambio no está claro. Además de los números poligonales que ya hemos mencionado y de la clasificación de los números en pares e impares, los pitagóricos introdujeron en algún momento los conceptos de número impar-impar y par-impar, según que el número en cuestión fuera el producto de dos números impares o de un par y un impar, y así se reservó a veces el nombre de número par para las potencias enteras de dos, y hacia la época de Filolao o incluso antes parece haber adquirido su importancia la distinción entre números primos y compuestos. Speusipo, sobrino de Platón y sucesor suyo a la cabeza de la Academia, afirmaba que el diez era «perfecto» para los pitagóricos debido a que, entre otras cosas, es el entero n más pequeño para el cual hay exactamente tantos números primos como compuestos entre 1 y n. En ocasiones a los números primos se les llamó también lineales, en vista de que la única manera de representarlos por puntos es en una sola dimensión, y los neopitagóricos excluían generalmente al dos de la lista de los primos basándose en la idea de que el uno y el dos no son en realidad verdaderos números, sino sólo los generadores de los números impares y pares respectivamente. La primacía de los números impares sobre los pares se suponía establecida, entre otras causas, por el hecho de que impar + impar = par, mientras que par + par sigue siendo par.

Se le ha atribuido a los pitagóricos la regla para la formación de ternas

pitagóricas dada por $\frac{m^2-1}{2}$, m, $\frac{m^2+1}{2}$, con m un entero impar, pero en vista de que esta regla está tan estrechamente relacionada con los ejemplos babilónicos, quizá no se trate de un descubrimiento independiente. También se atribuyen a los pitagóricos, aunque la época en cuestión es dudosa, las definiciones de número perfecto, abundante y deficiente, según que la suma de los divisores propios de dicho número sea igual, mayor o menor que el número mismo. Según esta definición, el número perfecto más pequeño es 6, seguido de 28. Es probable que estas definiciones fueran ya un desarrollo tardío en el pensamiento pitagórico, como sugiere la temprana veneración del número diez y no del seis. Si esto es así, entonces la teoría de los «números amigos», relacionada con la anterior, debió ser también un desarrollo tardío. Dos números naturales a y b se llaman «números amigos» si a es igual a la suma de los divisores propios de b y b es la suma de los divisores propios de a; el par más pequeño con esta propiedad está formado por los números 220 y 284.

9. El sistema de numeración ático

El cuadro de la matemática pitagórica que acabamos de presentar está basado en su mayor parte en informaciones de comentaristas que vivieron muchos siglos más tarde y que estaban, casi sin excepción, interesados principalmente en los aspectos filosóficos del pensamiento. Aunque parece perfectamente verosímil suponer, de acuerdo con los comentaristas, que fueron los pitagóricos los principales responsables de la concepción abstracta e intelectual que transformó la matemática en una disciplina liberal, sin embargo, el nivel de sofisticación durante los siglos VI y V a.C. pudo no haber sido tan alto como el que le atribuye la tradición. Tiene que haber resultado demasiado tentador para los seguidores tardíos de una escuela filosófica tal como la pitagórica el exagerar los logros del fundador y de los primeros miembros de la secta. Es muy probable que durante las primeras etapas del pitagorismo estuvieran presentes ciertos elementos primitivos que no pasaron a la historia, aunque es obvio también que la actitud hacia la matemática que representaban los pitagóricos fue, casi con toda seguridad, atípica dentro del pensamiento griego considerado globalmente. Los helenos se hicieron famosos como hábiles mercaderes y negociantes, y por lo tanto tuvo que haber un nivel inferior de la aritmética o del cálculo numérico que pudiera satisfacer las necesidades de la gran mayoría de los ciudadanos griegos. Este tipo de actividad numérica quedaría en todo caso muy por debajo del campo de atención de los filósofos, y no es lógico esperar que en sus bibliotecas se encontraran exposiciones de aritmética práctica. Así, pues, si no han llegado hasta nosotros ni siquiera fragmentos de las posibles obras pitagóricas más sofisticadas, está claro que no sería razonable esperar que los manuales de matemática comercial hubieran resistido los estragos del paso del tiempo. Por lo tanto, no podemos decir a esta distancia cómo se efectuaban los procesos ordinarios de la aritmética en Grecia hace 2.500 años; lo mejor y casi lo único que podemos hacer es describir los sistemas de numeración que parecen haber sido utilizados.

En términos generales parecen haber existido dos sistemas de numeración principales en Grecia: uno de ellos, probablemente el más antiguo, recibe el nombre de sistema de notación «ático» o «herodiánico», mientras que al otro se le conoce como sistema «jónico» o «alfabético». Ambos sistemas para representar los números naturales se basan en una escala de base diez, pero el primero es el más primitivo, ya que consiste en un simple esquema iterativo que se encuentra ya en la numeración jeroglífica egipcia anterior a ésta y también en los numerales romanos posteriores. En el sistema ático los números de uno a cuatro se representaban por medio de palotes verticales repetidos; para el cinco se adoptó un símbolo nuevo que era la primera letra Π (o Γ) de la palabra usada para el cinco, *pente*. (Hay que advertir que en aquella época se utilizaban únicamente las letras mayúsculas, tanto en las obras literarias como en la matemática, mientras que las letras minúsculas fueron inventadas a finales de la edad antigua o comienzos del período medieval.) Para los números del seis al nueve el sistema ático combinaba el símbolo Γ con palotes unitarios, de manera que ocho, por ejemplo, se escribía como ΓIII. Para las potencias enteras positivas de la base diez se utilizaban las letras iniciales de las palabras correspondientes, Δ para *deka* (diez), H para *hekaton* (cien), X para *khilioi* (mil) y M para *myrioi* (diez mil). Excepto en la forma de los símbolos, el sistema ático se parece mucho al romano, pero tenía una ventaja: mientras que en el mundo latino se adoptaron símbolos especiales para 50 y para 500, los griegos escribían estos números combinando las letras para 5, 10 y 100, de manera que 50 venía representado por ⊐ ó 5 por 10, y 500 por ⊓ ó 5 por 100. Análogamente escribían ⊓ para 5.000 y ⊐ para 50.000; así pues, el número 45.678, por ejemplo, se escribiría en notación ática de la forma MMMM⊓⊓H⊐ΔΔΓIII

10. El sistema de numeración jónico

El sistema de notación ático (conocido también como herodiánico debido a que aparece descrito en un fragmento atribuido a Herodiano, un gramático del siglo II), aparece en inscripciones de diversas fechas que van del 454 al 95 a.C.[9], pero a comienzos de la época alejandrina, aproximadamente durante el reinado de Ptolomeo Filadelfo, se vio desplazado por el sistema jónico o alfabético para los numerales. Sistemas alfabéticos análogos fueron utilizados en una u otra época por varios pueblos semíticos, incluidos los hebreos, sirios, arameos y árabes, así como por otros no semíticos tales como los godos, pero estos sistemas parecen haber sido adoptados por influencia de la notación griega. El sistema jónico probablemente se utilizaba ya durante el siglo V a.C., e incluso quizá tan temprano como en el siglo VIII a.C.; una de las razones para situar los orígenes de este sistema de notación relativamente pronto es la de que este esquema requiere 27 letras del alfabeto, nueve para los enteros menores que 10, nueve para los múltiplos de 10 menores que 100 y nueve para los múltiplos de 100 menores que 1.000. Ahora bien, el alfabeto griego clásico contiene sólo 24 letras, y por lo tanto se hizo uso de un

[9] Véase Heath, *op. cit.*, vol. I, pág. 30, y también James Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884).

alfabeto más antiguo que incluía tres letras arcaicas adicionales, la **F** (vau, digamma o stigma), la **Ϙ** (koppa) y la **Ϡ** (sampi), para establecer la siguiente asociación entre letras y números:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	F	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Μ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
Ξ	Ο	Π	Ϙ	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Y como las tres letras arcaicas ocuparon en este esquema para los numerales las mismas posiciones que tenían en el alfabeto más antiguo, se ha sugerido que quizá se introdujo el sistema jónico antes de que fueran abandonadas estas tres letras, es decir, hacia el siglo VIII a.C. Este punto de vista resulta, sin embargo, menos convincente si nos paramos a considerar el largo intervalo de tiempo transcurrido entre esta hipotética introducción y el triunfo final del sistema en el siglo III a.C.[10]. La ventaja obvia de concisión que tiene el sistema alfabético debería haber conducido a una adopción más rápida de este sistema que no con el retraso mencionado de medio milenio. El cifrado del sistema de notación jónico guarda esencialmente la misma relación con la numeración ática que la hierática egipcia con la jeroglífica más complicada, donde la superioridad de la escritura cursiva estuvo muy clara para los escribas desde antiguo.

Después de la introducción de las letras minúsculas en Grecia, la asociación entre letras y números quedó de la forma siguiente:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Como estas formas son las más familiares hoy, las usaremos en lo que sigue. Para los nueve primeros múltiplos de 1.000 se adoptaron en el sistema jónico las nueve primeras letras del alfabeto, de nuevo, en un uso al menos parcial del principio posicional, pero para mayor claridad y en evitación de ambigüedades estas letras iban precedidas por un acento

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ϛ	,ζ	,η	,θ
1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000

Dentro de este sistema puede escribirse fácilmente cualquier número menor que 10.000 con sólo cuatro símbolos; por ejemplo, el número 8.888 vendría escrito como *,ηωπη*, o bien simplemente como *ηωπη*, ya que el acento a veces se omitía cuando el contexto no admitía duda. El uso de las mismas letras para los miles que

[10] Para una discusión más completa y referencias adicionales, véase C. B. Boyer, «Fundamental Steps in the Development of Numeration», *Isis*, 35 (1944), págs. 153-168.

para las unidades debería haber sugerido a los griegos el principio posicional completamente desarrollado para la aritmética decimal, pero el hecho es que no parecieron apreciar las ventajas de este paso. Que tenían este principio más o menos en la cabeza es evidente no sólo por el uso repetido de las letras α a θ para las unidades y los millares, sino también por el hecho de que los símbolos se ordenan por orden de magnitud, desde el menor a la derecha al mayor a la izquierda. Al llegar al número 10.000, que para los griegos señalaba el comienzo de una nueva manera de contar o categoría numérica, en un sentido parecido a como hacemos nosotros al separar los miles de las potencias menores por un punto, el sistema de notación jónico griego adoptaba un principio multiplicativo. Una expresión que representa a un número de 1 a 9.999, si aparece escrita encima de la letra M o a continuación de ella, separada del resto del número por un punto, representa el producto de dicho número por 10.000, la miriada griega. Así, el número $88_1888.888$ vendría escrito como $M,\eta\omega\pi\eta \cdot \eta\omega\pi\eta$. Si se necesitaban números aún más grandes podía aplicarse el mismo método a la doble miriada, $100_1000.000$ ó 10^8.

El sistema de notación griego antiguo para los enteros no era excesivamente incómodo, y servía eficazmente para los fines a que estaba destinado, pero donde el sistema mostraba sus puntos débiles era en el tratamiento de las fracciones. Los griegos se vieron tentados a usar principalmente las fracciones unitarias, como los egipcios, y tenían un sistema muy sencillo para representarlas; escribían simplemente el denominador y le colocaban a su derecha un acento o señal diacrítica para distinguirla del entero correspondiente. Así, por ejemplo, $\frac{1}{34}$ aparecería como $\lambda\delta'$, expresión que podría confundirse, desde luego, con la representación del número $30\frac{1}{4}$, pero el contexto o el uso de palabras adicionales podía ayudar a clarificar la situación sin ambigüedades. En los siglos posteriores se generalizó el uso de las fracciones ordinarias y de las sexagesimales, pero esto lo estudiaremos más adelante en conexión con la obra de Arquímedes, de Ptolomeo y de Diofanto, pues ahí nos encontraremos ya con documentos que, aunque no provengan en realidad de la época de estos hombres directamente, son copias de obras escritas por ellos, situación completamente diferente de la que se refiere a los matemáticos del período helénico.

11. Aritmética y logística

La historia de la matemática durante la época de Tales y de los Pitagóricos depende necesariamente en alto grado de conjeturas e inferencias, puesto que los documentos de la época se han perdido todos como hemos dicho. A este respecto, nuestros conocimientos de la matemática griega del 600 al 450 a.C. son mucho más inseguros que los que tenemos sobre el álgebra babilónica o la geometría egipcia de hacia el 1700 a.C. No han sobrevivido ni siquiera aparatos matemáticos de la Grecia arcaica; es evidente que debió utilizarse algún tipo de mesa para calcular o ábaco para efectuar las operaciones aritméticas, pero la forma del aparato y su funcionamiento tenemos que inferirla del ábaco romano y de algunas referencias dispersas por los autores griegos. Herodoto, que escribía en la primera mitad del

siglo V a.C., nos dice que al calcular con piedrecillas, lo mismo que al escribir, los griegos movían la mano de izquierda a derecha, mientras que los egipcios lo hacían de derecha a izquierda. Un vaso cerámico un poco posterior nos muestra a un cobrador de tributos con un tablero para cuentas que se utilizaba no sólo para los múltiplos decimales enteros de un dracma, sino también para subdivisiones fraccionarias no decimales; comenzando por la izquierda, las sucesivas columnas representan las miriadas, miles, cientos y decenas de dracmas respectivamente, con los símbolos utilizados en notación herodiánica; a continuación, siguiendo a la columna de las unidades para dracmas aparecen las columnas para los óbolos (seis óbolos igual a un dracma), para medios óbolos y para los cuartos de óbolo. Aquí podemos ver la hábil manera como evitaban las civilizaciones antiguas el uso excesivo de fracciones: simplemente subdividían las unidades de longitud, peso y moneda de una manera tan eficaz que podían calcular en términos de múltiplos enteros de las subdivisiones. Esta es sin duda la explicación de la gran popularidad de que gozaron en la antigüedad las subdivisiones duodecimales y sexagesimales, puesto que en este campo el sistema decimal presenta notables desventajas; las fracciones decimales se usaron raramente, ya fuera por los griegos o por otros pueblos occidentales, hasta el período del Renacimiento. El ábaco se puede adaptar con facilidad a cualquier sistema de numeración o a cualquier combinación de sistemas; es probable que el extendido uso del ábaco se deba, al menos en parte, al desarrollo sorprendentemente tardío de un sistema de notación posicional coherente para los enteros y las fracciones. A este respecto la época pitagórica contribuyó poco o nada al progreso; el punto de vista de los pitagóricos parece haber sido tan decididamente filosófico y abstracto que los detalles técnicos del cálculo apenas les interesaron. Estas técnicas fueron relegadas a una disciplina independiente llamada «logística», que trataba de la numeración y el cálculo aplicado a las cosas y no de la esencia y las propiedades de los números en sí, que eran las cuestiones de las que se ocupaba la aritmética. Es decir, que los antiguos griegos hicieron una distinción clara entre el mero cálculo por un lado y lo que se conoce hoy en América como teoría de números (y en Inglaterra como aritmética superior) por el otro. La cuestión de si una separación tan marcada fue una desventaja o no para el desarrollo histórico de la matemática puede ser discutible, pero lo que no es fácil negarle a los matemáticos jónicos y pitagóricos primitivos es el papel principal en la construcción de la matemática como disciplina racional y liberal. Por esta razón a Tales se le llama a veces el primer matemático y a Pitágoras se le suele conocer como el padre de la matemática. Hasta qué punto podemos aceptar tales estimaciones de una manera literal, en vista de la ausencia de evidencia documental que las apoye, dependerá de nuestro grado de confianza en la tradición. Es evidente que la tradición puede ser bastante engañosa, pero es raro que esté completamente equivocada.

Bibliografía

Allman, G. J.: *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dublin University Press, 1889).

Clagett, Marshall: *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard-Schuman, ca. 1955, 2.ª ed. en rústica, New York: Collier, 1966).

Dantzig, Tobias: *The Bequest to the Greeks* (New York: Scribner's, 1955).
Freeman, Kathleen: *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948).
Gow, James: *A Short History of Greek Mathematics* (reed., New York: Hafner, 1923).
Heath, T. L.: *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.).
——: *Manual of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1931; ed. en rústica, New York: Dover, 1963).
Loria, Gino: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (París: Gauthier-Villars, 1929).
Michel, Paul-Henri: *De Pythagore à Euclide* (París, 1950).
Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; ed. en rústica, New York: Harper).
Tannery, Paul: *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (París, 1887).
Thomas, Ivor (ed.): *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (2 vols., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941).
Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; ed. en rústica, New York: Wiley, 1963).
Zeller, Eduard: *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates*, trad. S. F. Alleyne (London: Longmans, Green, 1881, 2 vols.).

Ejercicios

1. Demuestre dos de los teoremas atribuidos a Tales y explique razonadamente si cree usted o no que Tales pudo haber utilizado un razonamiento análogo.
2. Demuéstrese el teorema de Pitágoras. ¿Cree usted que Pitágoras pudo utilizar el mismo método? Explíquese claramente.
3. Se dice que Teon de Esmirna, un neoplatónico y neopitagórico del siglo II, descubrió que la suma de dos números triangulares consecutivos da como resultado un número cuadrado. Demuéstrese este teorema.
4. ¿Cuáles son los cuatro primeros números heptagonales (correspondientes a polígonos regulares de siete lados)?
5. Escríbanse los números 3.456 y 4.567 y su suma en la primitiva notación ática griega y también en el sistema jónico o alfabético.
6. Demuéstrese que si tres números a, b, c, están en progresión aritmética en este mismo orden, y si A, B, C, son sus respectivos inversos, entonces B es la media armónica de A y C.
7. Filolao llamaba al cubo una «armonía geométrica», debido a los números de sus caras, vértices y aristas. Justifíquese este nombre a la luz de la teoría de proporciones pitagórica.
8. Demuéstrese que 1.184 y 1.210 son números amigos.
9. Demuéstrese, a la manera de los pitagóricos, que un número oblongo es la suma de dos números triangulares iguales.
10. Demuéstrese cuidadosamente que las diagonales de un pentágono regular, al cortarse, quedan divididas en media y extrema razón.
11. Constrúyase un pentágono regular, dado el lado, utilizando solamente regla y compás.
12. Constrúyase un pentágono regular, dada su diagonal, utilizando solamente regla y compás.
13. Constrúyase un pentágono regular inscrito en un círculo dado, utilizando solamente regla y compás.

14. Todos los números poligonales son de la forma $P_m = an^2 + bn$, donde m es el número de lados y n es el orden. Utilícese este hecho para calcular a y b para los números octogonales ($m = 8$) y compruébese geométricamente para $n = 3$.
15. Calcúlese el quinto número pentagonal y el sexto hexagonal.
16. ¿Es un número heptagonal el 4.567? Justifíquese la respuesta.
17. Demuéstrese que si $a > b > c$, entonces las tres ecuaciones

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}, \qquad \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

definen b como la media aritmética, geométrica y armónica respectivamente de a y c.

*18. Todos los números poliédricos son de la forma $P_m = an^3 + bn^2 + cn$, donde m es el número de caras y n es el orden. Usese este hecho para hallar a, b, c, para los números tetraédricos ($m = 4$) y compruébese geométricamente para $n = 4$.

*19. Los números poliédricos se forman añadiendo sucesivos números poligonales del mismo tipo. Muéstrese cómo se puede generalizar este procedimiento para definir los números politopales en el espacio n-dimensional general y hállense tres números politopales no triviales.

Capítulo V
LA EPOCA HEROICA

Antes preferiría descubrir una causa que ganar el reino de Persia.

Demócrito

1. Centros de actividad

La historia de los orígenes de la matemática griega se tiene que centrar necesariamente en las llamadas escuelas jónica y pitagórica, y en los representantes principales de cada una de ellas, Tales y Pitágoras, aunque la reconstrucción de su pensamiento se basa solamente en informaciones fragmentarias y en tradiciones elaboradas durante los siglos posteriores. En cierta medida la situación continúa siendo la misma a lo largo del siglo V a.C. No nos ha quedado prácticamente ningún documento matemático, ni científico en general, anterior a la época de Platón en el siglo IV a.C. Sin embargo, durante la segunda mitad del siglo V circularon persistentemente informaciones bastante coherentes relativas a un pequeño grupo de matemáticos que, según toda evidencia, estaban profundamente interesados en algunos problemas que fueron la base de la mayor parte de los desarrollos posteriores de la geometría. Por lo tanto, nos referiremos a este período bajo el nombre de la «Epoca Heroica de la Matemática», puesto que raramente antes ni después se ha enfrentado el hombre con problemas matemáticos de una importancia tan fundamental con tan pocas herramientas. La actividad matemática ya no se centró como antes de una manera casi exclusiva en aquellas dos regiones que constituían más o menos los límites opuestos del mundo griego, sino que floreció a lo largo y a lo ancho del Mediterráneo. En lo que es hoy el sur de Italia vivieron Arquitas de Tarento (que nació hacia el 428 a.C.) e Hipaso de Metaponto (que floreció hacia el 450 a.C.); en Abdera de Tracia nos encontramos a Demócrito (que nació aproximadamente el 460 a.C.); más cerca del centro del mundo griego, en la península del Atica, vivía Hipias de Ellis (que nació también en torno al 460 a.C.), y en las proximidades de Atenas vivieron, en diversas épocas de esta crítica segunda mitad del siglo V a.C., tres pensadores originarios de otras regiones del mundo heleno: Hipócrates de Chios (fl. ca. 430 a.C.), Anaxágoras de Clazomene (†428 a.C.) y Zenón de Elea (fl. ca. 450 a.C.). La obra de estos siete matemáticos nos permitirá dar una descripción de los cambios fundamentales que tuvieron lugar en la matemática un poco antes del 400 a.C.

2. Anaxágoras de Clazomene

El siglo V a.C. constituyó un período crucial en la historia de la civilización del mundo occidental, ya que se inició con la derrota de los invasores persas de Grecia y se cierra con la victoria de Esparta sobre Atenas. Entre estos dos sucesos memorables se desarrolló la esplendorosa Epoca de Pericles, con su apogeo literario y artístico. La prosperidad y la atmósfera intelectual de Atenas durante la mayor parte de este siglo contribuyeron a atraer a pensadores de todas partes del mundo griego, y se logró de esta manera una especie de síntesis de diversas tendencias. De Jonia llegaron hombres como Anaxágoras, con una mentalidad práctica; del sur de Italia vinieron otros, como Zenón, con inclinaciones más metafísicas. Demócrito de Abdera mantenía una concepción materialista del mundo, mientras que Pitágoras defendía en la Magna Grecia una actitud idealista tanto en ciencia como en filosofía. En Atenas podían encontrarse entonces seguidores entusiastas tanto de las antiguas como de las nuevas ramas del saber, que iban de la cosmología a la ética. Se vivía allí inmerso en un atrevido espíritu de libertad de investigación que a veces entraba en conflicto con las costumbres establecidas; así, en particular, Anaxágoras fue encarcelado en Atenas por impiedad, por afirmar que el sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como todo el Peloponeso, y que la luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba su luz del sol. Anaxágoras es un buen representante del espíritu de investigación racional de que hablábamos, puesto que consideraba como el fin de su vida el estudio de la naturaleza del universo, determinación que le llegaba heredada de la antigua tradición jónica de la que Tales había sido fundador. El entusiasmo intelectual de Anaxágoras lo compartieron muchos de sus paisanos por medio de la lectura de uno de sus libros, *Sobre la Naturaleza*, primer best-seller científico en el mundo, que podía comprarse en Atenas por sólo un dracma.

Anaxágoras fue maestro de Pericles, que consiguió al fin que su mentor fuera liberado de la cárcel. Sócrates se vio atraído en su juventud por las ideas científicas de Anaxágoras, pero el «tábano» ateniense encontró al fin menos satisfactoria la concepción naturalista jónica que la búsqueda de las verdades éticas.

La ciencia griega había echado sus raíces en un tipo de curiosidad altamente intelectualizada, que se hace contrastar a veces con el carácter de inmediatez utilitaria del pensamiento prehelénico; Anaxágoras representaba claramente la motivación griega típica, el deseo de conocer. También en matemáticas la actitud griega difería radicalmente de la de las culturas potámicas anteriores; aquí el contraste se pudo ver ya de una manera clara al estudiar las contribuciones atribuidas generalmente a Tales y a Pitágoras, y continúa haciéndose notar en las informaciones que tenemos, más fiables esta vez, sobre lo que ocurría en Atenas durante la época heroica. Anaxágoras era, en principio, más un filósofo de la naturaleza que un matemático, pero su mente inquisidora le llevó a participar también en el estudio de problemas matemáticos; así, Plutarco nos cuenta que Anaxágoras, mientras estaba en prisión, se ocupó del problema de la cuadratura del círculo, y aquí nos encontramos con la primera mención de un problema que

iba a fascinar a los matemáticos durante más de 2.000 años[1]. No tenemos más detalles relativos al origen del problema ni a las reglas que lo regían, pero algo más tarde se sobreentendía ya que el cuadrado buscado, de área exactamente igual a la del círculo, había de ser construido utilizando la regla y el compás únicamente. Aquí podemos ver un tipo de matemática muy distinta de la de los egipcios y los babilonios, en la que ya no se trata de la aplicación de una ciencia de los números a una faceta de la vida práctica, sino de una cuestión puramente teórica en la que el papel fundamental lo juega la sutil distinción entre la mayor o menor precisión de un proceso aproximado y la exactitud de pensamiento. El problema matemático del que al parecer se ocupó en esta ocasión Anaxágoras no tenía más interés para el ingeniero que los otros problemas físicos que planteó acerca de la estructura última de la materia. En el mundo griego la matemática estaba más estrechamente relacionada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria, y esta afinidad ha persistido hasta hoy.

3. Los tres problemas clásicos

Anaxágoras murió el año 428 a.C., el mismo año que nacía Arquitas, exactamente un año antes del nacimiento de Platón y un año después de la muerte de Pericles. Se dice que Pericles murió de la peste que se llevó quizá como una cuarta parte de la población ateniense, y la profunda impresión que produjo esta catástrofe fue probablemente el origen de un segundo problema matemático famoso (si no es más antiguo aún). Según las informaciones que nos han llegado, se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; obviamente el altar había aumentado ocho veces su volumen en vez de dos. Este es, según la leyenda, el origen del problema de la «duplicación del cubo», que se suele conocer también desde entonces como el «problema de Delos»: dada la arista de un cubo, construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero. Por la misma época circuló aún por Atenas un tercer problema famoso: dado un ángulo arbitrario, construir, con regla y compás únicamente, un ángulo igual a un tercio del ángulo dado. Estos tres problemas, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo han sido conocidos desde entonces como «los tres problemas clásicos (o famosos)» de la antigüedad. Más de 2.200 años más tarde se iba a demostrar que todos estos tres problemas eran insolubles utilizando únicamente la regla y el compás. No obstante, la parte mejor de la matemática griega y también buena parte del pensamiento matemático muy posterior vino motivada por los esfuerzos para lograr lo

[1] Véase E. W. Hobson, *Squaring the Circle* (ca. 1913), pág. 14. Esta obra ha sido reeditado varias veces. La exactitud de la afirmación de Plutarco en este contexto ha sido cuestionada recientemente. Sobre la obra de Anaxágoras véase D. E. Gershenson y D. A. Greenberg, *Anaxagoras and the Birth of Physics* (New York: Blaisdell, 1964).

imposible o, si estos esfuerzos fracasaban, para modificar las reglas del problema; la «Epoca Heroica» fracasó en su objetivo inmediato, respetando las reglas fijadas, pero los esfuerzos realizados se vieron coronados con un éxito brillante desde otros puntos de vista.

4. La cuadratura de las lúnulas

Hipócrates de Chios era algo más joven que Anaxágoras y provenía de la misma parte aproximadamente del mundo griego. Este Hipócrates no debe confundirse con su contemporáneo más famoso, el médico Hipócrates de Cos; tanto Cos como Chios son islas del archipiélago del Dodecaneso, pero Hipócrates de Chios abandonó hacia el 430 a.C. su patria para trasladarse a Atenas en su condición de mercader. Según nos cuenta Aristóteles, Hipócrates se mostró menos hábil que Tales y perdió su dinero en Bizancio por un fraude, aunque otros dicen que fue atacado y robado por los piratas. En cualquier caso la víctima nunca lamentó más tarde el incidente, considerándolo más bien como una suerte, porque a consecuencia de él se dedicó al estudio de la geometría, en el que cosechó notables éxitos; una historia, en fin, típica de la «Epoca Heroica». Proclo nos informa de que Hipócrates escribió unos «Elementos de Geometría», anticipándose en más de un siglo a los conocidos *Elementos* de Euclides; sin embargo, el texto de Hipócrates se ha perdido, lo mismo que otro que al parecer fue escrito por Leon, un personaje asociado más tarde a la escuela platónica, pero el libro de Hipócrates lo llegó a conocer aún Aristóteles. De hecho, hay que decir ya que no ha sobrevivido ningún tratado matemático del siglo V, pero lo que sí conocemos es un fragmento sobre Hipócrates que Simplicio (fl. ca. 520) dice haber copiado literalmente de la *Historia de la Matemática* de Eudemo (perdida también). Este breve pasaje, lo más próximo a una fuente original de la matemática de la época que conocemos, describe una parte de la obra de Hipócrates que se refiere a la cuadratura de las lúnulas. Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos; parece evidente pues, que el problema de la cuadratura de las lúnulas debió surgir del de la cuadratura del círculo, y el fragmento de Eudemo atribuye a Hipócrates, de hecho, el siguiente teorema:

> «Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases. »

La información transmitida por Eudemo afirma que Hipócrates demostró esto demostrando en primer lugar que dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros. Hipócrates adopta aquí los conceptos y el lenguaje de la teoría de proporciones, que jugó un papel tan importante en el pensamiento pitagórico; de hecho, algunos creen que Hipócrates se hizo pitagórico. La escuela pitagórica de Crotona fue suprimida (posiblemente por su carácter secreto, o quizá más bien debido a sus tendencias políticas conservadoras), pero la dispersión de sus seguidores por todo el mundo griego sólo sirvió para extender la influencia de la escuela, influencia que afectó sin duda a Hipócrates de una manera directa o indirecta.

El teorema de Hipócrates sobre los círculos y los cuadrados circunscritos parece ser la primera afirmación precisa sobre la medida de figuras curvilíneas en el mundo griego. Eudemo creía, al parecer, que Hipócrates había dado una demostración del teorema, pero lo cierto es que en aquella época (digamos hacia el 430 a.C.) una demostración rigurosa parece muy improbable, ya que la teoría de proporciones se encontraba casi con toda seguridad en una etapa de su desarrollo que la hacía aplicable únicamente a magnitudes conmensurables. La demostración que da Euclides en XII. 2, proviene de Eudoxo, un matemático que vivió a medio camino entre Hipócrates y Euclides. Sin embargo, dado que gran parte del material contenido en los dos primeros libros de Euclides pudo derivarse de los pitagóricos, parecería razonable suponer que las formulaciones al menos contenidas en gran parte de los libros III y IV de los *Elementos* provengan de la obra de Hipócrates. Por otra parte, si Hipócrates consiguió dar efectivamente una demostración de su teorema sobre los círculos, puede haber sido el responsable de la introducción del método indirecto de demostración en la matemática; es decir, la razón entre dos círculos o bien es igual a la razón entre los cuadrados construidos sobre sus diámetros o no lo es, luego por una *reductio ad absurdum* a partir de la segunda de las dos posibilidades quedaría demostrada la única alternativa posible.

A partir de su teorema sobre los círculos consiguió fácilmente Hipócrates la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de la matemática. Comenzó con un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles y sobre la base (la hipotenusa) construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo (fig. 5.1). Como los segmentos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus

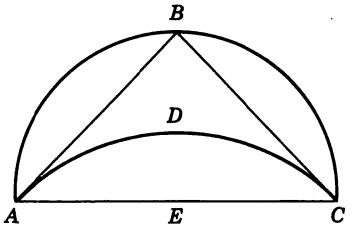


Figura 5.1

bases, a partir del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo se obtiene que la suma de los dos segmentos circulares menores es igual al segmento circular mayor. Por lo tanto, la diferencia entre el semicírculo de diámetro AC y el segmento $ADCE$ será igual al triángulo ABC; es decir, la lúnula $ABCD$ es exactamente igual al triángulo ABC, y como el triángulo ABC es igual al cuadrado construido sobre la mitad de AC, se ha conseguido la cuadratura de la lúnula[2].

Eudemo nos describe también la cuadratura de otra lúnula por Hipócrates,

[2] Puede verse una excelente exposición de las cuadraturas de Hipócrates en B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), págs. 131 y sigs.

lúnula que se obtiene a partir de un trapecio isósceles *ABCD* inscrito en un círculo y tal que el cuadrado construido sobre la base o lado más largo *AD* sea igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los tres lados iguales más cortos *AB*, *BC* y *CD* (fig. 5.2). Entonces, si se construye sobre el lado *AD* un segmento circular *AEDF* semejante a los que determinan los tres lados iguales en el círculo, la lúnula *ABCDE* es igual al trapecio *ABCDF*.

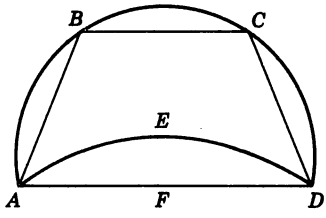


Figura 5.2

Un hecho que nos garantiza que pisamos un terreno relativamente firme desde el punto de vista histórico al describir las cuadraturas de las lúnulas por Hipócrates, es el de que hay otros escritores además de Simplicio que nos hablan de estos resultados. Simplicio vivió en el siglo VI, y depende en sus fuentes no sólo de Eudemo (fl. ca. 320 a.C.), sino también de Alejandro de Afrodisia (fl. ca. 200 d.C.), uno de los principales comentaristas de Aristóteles. Alejandro describe otras dos cuadraturas además de las que hemos mencionado más arriba: 1) Si construimos tres semicírculos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo isósceles (fig. 5.3), entonces la suma de las lúnulas que se forman sobre los catetos es igual al triángulo. 2) Si construimos sobre el diámetro de un semicírculo como base un trapecio isósceles con los otros tres lados iguales (fig. 5.4), y si se construyen sobre estos tres lados tres semicírculos, entonces el trapecio

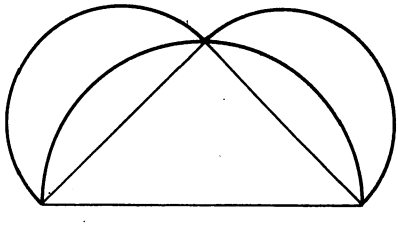


Figura 5.3

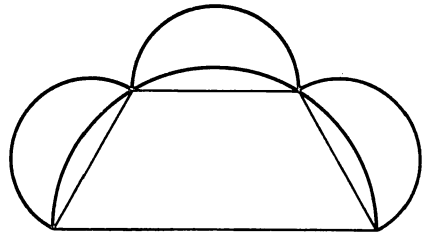


Figura 5.4

es igual a la suma de cuatro figuras curvilíneas: las tres lúnulas iguales y un semicírculo sobre uno de los tres lados iguales del trapecio. De la segunda de estas cuadraturas se sigue que si pudieran cuadrarse las lúnulas en cuestión entonces podría cuadrarse también el semicírculo, y por lo tanto el círculo. Esta conclusión parece haber animado a Hipócrates y a sus contemporáneos y seguidores inmediatos a continuar trabajando en esta línea con la esperanza de conseguir al fin cuadrar el círculo.

5. Las proporciones continuas

Las cuadraturas de Hipócrates tienen una gran importancia, no tanto como intentos dirigidos a la cuadratura del círculo cuanto como reflejo del nivel de la matemática de la época, ya que nos muestran hasta qué punto dominaban los matemáticos atenienses de la época las transformaciones de áreas y las proporciones. En particular, no tenían evidentemente ninguna dificultad en convertir un rectángulo de lados a y b en un cuadrado, lo que requería hallar la media proporcional o geométrica entre los segmentos a y b; es decir, que si debía verificarse la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, los geómetras de la época sabían construir fácilmente el segundo x. Era natural, pues, que estos mismos geómetras intentaran generalizar el problema al de *interpolar dos medias* entre dos magnitudes dadas a y b; es decir, dados dos segmentos a y b, intentaran construir otros dos segmentos x e y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Se dice que Hipócrates fue el primero en reconocer que este problema es equivalente al de la duplicación del cubo si tomamos $b = 2a$, ya que entonces la proporción continua conduce, por eliminación de y, a la conclusión de que $x^3 = 2a^3$.

Hay tres interpretaciones distintas de las consecuencias que debió sacar Hipócrates de sus cuadraturas de las lúnulas. Algunos lo han acusado de creer que podría cuadrar todas las lúnulas y, por tanto, también el círculo; otros creen que conocía perfectamente las limitaciones que podía tener su obra, dado que sólo consideraba algunos tipos de lúnulas muy concretos. Y hay, por último, al menos un historiador que ha sostenido que Hipócrates sabía muy bien que no había conseguido cuadrar el círculo, pero que intentó engañar a sus conciudadanos haciéndoles creer que lo había logrado[3]. Hay algunas otras cuestiones menores, además, relativas a las contribuciones de Hipócrates a la matemática, tales como la de que se le ha atribuido, aunque con cierta inseguridad, el uso de las letras en las figuras geométricas por vez primera. Es interesante hacer observar que, mientras que Hipócrates hizo progresos en dos de los tres problemas famosos, no parece haberse ocupado de la trisección del ángulo, problema estudiado un poco más tarde por Hipias de Ellis.

6. Hipias de Ellis

Durante la segunda mitad del siglo V a.C. floreció en Atenas un grupo de maestros profesionales muy distintos de los pitagóricos. A los discípulos de Pitágoras les había sido prohibido aceptar ningún tipo de pago por compartir sus conocimientos con los demás, mientras que los sofistas, que así se llamaban estos maestros, se ganaban la vida abiertamente enseñando a sus conciudadanos, y no

[3] Véase el artículo «Hippocrates» de Björnbo en Pauly-Wissowa, *Real-Enzyklopädie der klassischen Altertumwissenschaft*, vol. VIII, pág. 1796.

sólo en cuestiones intelectualmente honradas, sino también en el arte de «hacer que lo peor parezca lo mejor». Hasta cierto punto la acusación de superficialidad dirigida contra los sofistas era merecida, pero esto no debiera ocultar el hecho de que los sofistas solían estar informados ampliamente sobre muy diversos temas, y de que algunos de ellos hicieron contribuciones importantes al saber de su época. Entre estos últimos estaba Hipias, natural de Ellis y que desarrolló su actividad en Atenas durante la segunda mitad del siglo V a.C. Se trata de uno de los primeros matemáticos de los que tenemos información sobre él en los diálogos de Platón. En estos diálogos podemos ver, por ejemplo, que Hipias se jactaba de haber ganado más dinero que cualesquiera otros dos sofistas juntos. Se dice que escribió mucho, desde matemáticas a oratoria, pero no ha sobrevivido ninguna de sus obras, y también que tenía una notable memoria, que era hábil en multitud de oficios manuales y presumía también de un inmenso saber. A este Hipias (pues era un hombre muy corriente entonces en Grecia) parece que se debe la introducción en la matemática de la primera curva aparte de la circunferencia y la recta. Proclo y otros comentaristas le atribuyen la invención de la curva que se conoce desde entonces como trisectriz o cuadratriz de Hipias[4]; esta curva se dibuja de la manera siguiente: Considérese un cuadrado $ABCD$ (fig. 5.5) en el que el lado AB se traslada con velocidad uniforme desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con DC,

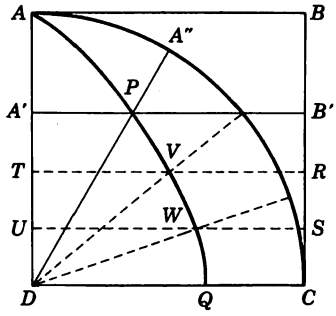


Figura 5.5

mientras que, durante el mismo intervalo de tiempo, el lado DA gira uniformemente en el sentido de las agujas de un reloj desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con DC. Si las posiciones de los dos segmentos móviles en un instante cualquiera vienen dadas por $A'B'$ y DA'' respectivamente, y si P es el punto de intersección de $A'B'$ con DA'', entonces el lugar geométrico de P a lo largo del movimiento será la trisectriz de Hipias, la curva APQ en la figura. Una vez construida esta curva es posible hacer fácilmente la trisección de un ángulo cualquiera. Sea, por ejemplo, PDC el ángulo a trisecar; simplemente tenemos que dividir en tres partes iguales los segmentos $B'C$ y $A'D$ por medio de los puntos R, S, T y U; si las rectas TR y US cortan respectivamente a la trisectriz en V y W,

[4] Puede verse una excelente exposición en Kathlenn Freeman, *The Pre-Socratic Philosophers. A Companion to Diels, Fragmente der Vorsokratiker* (1949), págs. 381-391. Véase también el artículo sobre Hipias en Pauly-Wissowa, *op. cit.*, vol. VIII, págs. 1707 y sigs.

entonces las rectas *DV* y *DW* dividirán al ángulo *PDC* en tres partes iguales, en virtud de la propiedad que define a la trisectriz.

La curva de Hipias se la suele conocer también como «la cuadratriz», dado que puede ser utilizada además para cuadrar el círculo. Es imposible para nosotros decidir si Hipias mismo era consciente o no de esta aplicación; algunos historiadores han conjeturado que Hipias sí conocía este método de cuadratura, pero que no fue capaz de justificarlo, y como esta misma cuadratura por medio de la curva de Hipias fue dada más tarde y de una manera detallada por Dinostrato, nos ocuparemos de ella en el próximo capítulo.

Hipias fue contemporáneo de Sócrates (†399 a.C.) y disponemos de una imagen muy poco halagüeña de él debida a la pluma de Platón, que nos lo presenta como un sofista típico, insustancial, vanidoso y codicioso. Se dice que Sócrates describía a Hipias como elegante y erudito, pero jactancioso y superficial, y Platón satiriza en su diálogo *Hipias* su ostentación de conocimientos. Jenofonte, por su parte, incluye en su *Memorabilia* una imagen desfavorable de Hipias como un hombre que se consideraba a sí mismo un experto en todo, desde la historia y la literatura a la ciencia y los oficios manuales; sin embargo, para juzgar estas informaciones con cierta imparcialidad debemos tener en cuenta que Platón y Jenofonte se mostraron opuestos de una manera irreconciliable a los sofistas en general. Conviene recordar también que tanto Protágoras, el «padre de los sofistas», como Sócrates, que encabezó la oposición a este movimiento, mostraron cierta hostilidad por la matemática y la ciencia en general. Platón nos presenta el contraste entre las personalidades de Hipias y de Sócrates, pero se podría conseguir casi el mismo contraste comparando a Hipias con otro de sus contemporáneos, el matemático pitagórico Arquitas de Tarento.

7. Filolao y Arquitas de Tarento

Se dice que Pitágoras se retiró a Metaponto hacia el final de su vida y que murió allí en torno al año 500 a.C.; la tradición sostiene que no dejó ninguna obra escrita, pero sus ideas fueron divulgadas por un gran número de discípulos fervorosos. El centro inicial del grupo en Crotona tuvo que ser abandonado cuando un grupo político rival de Síbaris sorprendió y asesinó a muchos de los dirigentes, pero los que consiguieron escapar a la masacre llevaron consigo las doctrinas de la escuela a otras regiones del mundo griego. Entre los que recibieron instrucción de estos refugiados estaba Filolao de Tarento, a quien se atribuye el haber escrito la primera exposición del pitagorismo, para lo cual habían conseguido permiso al fin, según cuentan las historias, con objeto de que pudieran restaurar sus fortunas perdidas. Parece ser que éste fue el libro en el que Platón obtuvo sus conocimientos sobre la escuela pitagórica. El misticismo numérico que era tan característico de la hermandad lo compartía evidentemente Filolao, y de esta obra suya se derivó en gran parte la tradición mística relativa a la *tetractis*, así como el conocimiento de la cosmología pitagórica. El esquema cósmico filolaico parece haberse visto modificado por dos pitagóricos posteriores, Ecfanto e Hicetas, que abandonaron el fuego central y la contratierra, y explicaban el día y la noche situando a la tierra en rotación en el centro del universo. También parece haber

sufrido algunas modificaciones el extremado culto a los números de Filolao, sobre todo a manos de Arquitas, uno de los discípulos de Filolao en Tarento.

La secta pitagórica había ejercido una fuerte influencia intelectual sobre toda la Magna Grecia, en la que se mezclaban aspectos políticos que podrían caracterizarse en terminología moderna como propios de una especie de «internacional reaccionaria», o quizá mejor como un cruce entre orfismo y francmasonería. En Crotona los aspectos políticos eran especialmente perceptibles, pero en los centros pitagóricos circundantes, tales como Tarento, el impacto era intelectual principalmente. Arquitas creía firmemente en la eficacia del número; su gobierno de la ciudad, que le concedió poderes autocráticos, fue al parecer justo y mesurado, ya que consideraba a la razón como una fuerza dirigida al mejoramiento social. Fue elegido también general durante muchos años, en los que nunca fue derrotado; y a pesar de estas solemnes actividades públicas se dice que era bondadoso y amante de los niños, para los que inventó al parecer el juguete llamado «carraca de Arquitas», y probablemente también una paloma mecánica hecha de madera, para diversión de los pequeños.

Arquitas continuó dentro de la más pura tradición pitagórica al situar la aritmética por encima de la geometría, pero su entusiasmo por los números tenía ya menos de la componente religiosa y mística que nos hemos encontrado antes en Filolao. Arquitas escribió sobre las aplicaciones de las medias aritmética, geométrica y subcontraria a la música, y probablemente fue Filolao o Arquitas el responsable del cambio de nombre de esta última al de «media armónica»; entre sus afirmaciones en este contexto estaba la observación de que entre dos números enteros que estén en la razón $n:(n+1)$ no puede haber ningún entero que sea su media geométrica. Arquitas prestó mucha más atención que sus predecesores a la música, considerando que esta materia debería jugar un papel más importante que el de la literatura en la educación de los niños; entre sus conjeturas musicales hay una que atribuye las diferencias en el tono a las velocidades variables en el movimiento que resulta del flujo que origina el sonido. Arquitas parece haber prestado también una atención considerable al papel de la matemática en la educación, y a él se le ha atribuido la clasificación de las cuatro ramas del «quadrivium» matemático: la aritmética, que estudia los números en reposo; la geometría, que estudia las magnitudes en reposo; la música, que estudia los números en movimiento, y la astronomía, que estudia las magnitudes en movimiento. Estas cuatro materias, junto con el «trivium», que consiste en la gramática, la retórica y la dialéctica, y que Aristóteles hacía remontar hasta Zenón, constituyeron más tarde, durante la Edad Media, las llamadas siete artes liberales. Así pues, el papel relevante que ha jugado más tarde la matemática en la educación se debe en no escasa medida a Arquitas.

8. La duplicación del cubo

Es muy probable que Arquitas tuviera acceso a algún tratado anterior sobre los elementos de la matemática y, de hecho, el proceso iterativo para el cálculo de raíces cuadradas que se conoce a veces con el nombre de Arquitas había sido utilizado mucho antes en Mesopotamia. No obstante, sabemos que a Arquitas se le

deben también algunos resultados originales importantes. Su contribución más sorprendente fue, sin duda, una solución tridimensional del problema de Delos, que se puede explicar de la manera más fácil, aunque sea muy anacrónicamente desde luego, utilizando el lenguaje de la geometría analítica moderna. Sea a la arista del cubo que hay que duplicar, y considérense tres circunferencias de radio a con centro en el punto $(a, 0, 0)$ y situadas cada una de ellas en un plano perpendicular a uno de los ejes de coordenadas. Por la circunferencia perpendicular al eje Ox trácese el cono circular de vértice el origen (0, 0, 0); por la circunferencia situada sobre el plano Oxy considérese el cilindro circular recto de eje paralelo al eje Oz, y hágase girar por último la circunferencia situada en el plano Oxz alrededor del eje Oz para engendrar así un toro. Las ecuaciones de estas tres superficies son, respectivamente, $x^2=y^2+z^2$, $2ax=x^2+y^2$ y $(x^2+y^2+z^2)=4a^2(x^2+y^2)$; estas tres superficies se cortan en un punto cuya coordenada x es igual a $a\cdot\sqrt[3]{2}$, y, por lo tanto, este segmento es exactamente la arista buscada del cubo.

El éxito de Arquitas nos parece aún más impresionante si tenemos en cuenta que consiguió su solución de manera sintética, sin ayuda de coordenadas. Sin embargo, la contribución más importante de Arquitas a la matemática puede haber sido su intervención ante el tirano Dionisio para salvarle la vida a su amigo Platón; este último permaneció durante toda su vida profundamente afectado por la veneración pitagórica por los números y la geometría, y la supremacía de Atenas en el mundo matemático del siglo IV a.C. se derivó principalmente del entusiasmo de Platón, el «hacedor de matemáticos». Antes de ocuparnos del papel de Platón es necesario discutir, sin embargo, la obra de uno de los pitagóricos primitivos, un disidente, según algunos indicios, llamado Hipaso.

Hipaso de Metaponto o de Crotona, aproximadamente contemporáneo de Filolao, parece haber sido inicialmente un pitagórico que fue expulsado más tarde de la hermandad, según se dice. Una tradición cuenta que los pitagóricos le erigieron un monumento funerario como si ya hubiera muerto, mientras que otra historia más conocida nos dice que su apostasía se vio castigada con su muerte en el mar, ahogado durante un naufragio. La causa exacta de la ruptura se desconoce, en parte al menos, debido a la regla que obligaba al secreto, pero se han sugerido tres posibilidades. Según una de ellas, Hipaso debió ser expulsado a causa de su insubordinación política, por haber encabezado un movimiento democrático contrario a las conservadoras reglas pitagóricas. Una segunda tradición atribuye la expulsión de Hipaso a revelaciones que hizo, relativas a la geometría del pentágono regular o del dodecaedro, quizá la construcción de alguna de estas dos figuras. Y, por último, una tercera explicación sostiene que la expulsión estuvo relacionada con la divulgación de un descubrimiento matemático que tuvo una enorme importancia por sus consecuencias devastadoras para la filosofía pitagórica, a saber, la existencia de magnitudes inconmensurables.

9. Los inconmensurables

Uno de los principios fundamentales del pitagorismo era el de que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos

del hombre, es explicable en términos de *arithmos*, es decir, de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, los diálogos de Platón nos informan de que la comunidad matemática griega se vio grandemente sorprendida por un descubrimiento que prácticamente demolía las bases de la fe pitagórica en los números enteros. Este descubrimiento fue el de que incluso dentro de la geometría misma los números naturales y sus razones resultaban inadecuados para dar cuenta de algunas propiedades fundamentales, incluso muy sencillas; no bastaban, por ejemplo, para comparar la diagonal de un cuadrado, de un cubo o de un pentágono regular con su lado o arista respectivamente. Tales parejas de segmentos son inconmensurables, por muy pequeña que sea la unidad de medida elegida. No sabemos con exactitud cuándo y cómo se hizo este descubrimiento, pero lo que sí es cierto es que se ha gastado mucha tinta en apoyar una u otra hipótesis. Las antiguas razones a favor de un origen hindú de este descubrimiento[5] carecen de base, y también parece haber pocas probabilidades de que Pitágoras mismo llegase a conocer el problema de la inconmensurabilidad. La sugerencia más plausible es la de que el descubrimiento fuera hecho por los pitagóricos tardíos hacia mediados del siglo V a.C.[6]. Algunos historiadores se lo atribuyen concretamente a Hipaso de Metaponto durante la primera parte del tercer cuarto del siglo V a.C.[7], mientras que otros lo sitúan aproximadamente medio siglo más tarde.

Las circunstancias que rodearon al primer reconocimiento de la existencia de segmentos inconmensurables son tan inseguras como la fecha en que se hizo el descubrimiento. Se suele admitir que este reconocimiento tuvo lugar en conexión con la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles, y Aristóteles menciona una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado, indicando que se basaba en la distinción entre lo par y lo impar[8]. Tal demostración es fácil de reconstruir. Sean d y s la diagonal y el lado de un cuadrado y supongamos que son conmensurables, es decir, que la razón d/s es racional e igual a p/q, donde p y q son enteros sin factores comunes; ahora bien, se sabe por el teorema de Pitágoras que $d^2 = s^2 + s^2$, luego $(d/s)^2 = p^2/q^2 = 2$, o bien $p^2 = 2q^2$; por lo tanto, p^2 debe ser un número par, luego p ha de ser par a su vez. En consecuencia, q debe ser impar. Sea $p = 2r$; sustituyendo en la ecuación $p^2 = 2q^2$ tenemos $4r^2 = 2q^2$, luego $q^2 = 2r^2$, y por lo tanto q^2 debe ser par, y así q ha de ser necesariamente par. Sin embargo, como se vio antes, q tenía que ser impar, y ningún entero puede ser a la vez par e impar. Se sigue, por lo tanto, por el método de demostración indirecta, que la hipótesis de que d y s eran conmensurables es falsa.

---

[5] Véase Heinrich Vogt, «Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationales gekannt?», en *Bibliotheca Mathematica* (3), 7 (1906-1907); págs. 6-23, y también Leopold von Schroeder, *Pythagoras und die Inder* (Leipzig, 1884).

[6] Véase especialmente Heinrich Vogt, «Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4 Jahrhunderts», en *Bibliotheca Mathematica* (3), 10 (1910), págs. 97-155, así como el artículo del mismo autor, «Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen», en *Bibliotheca Mathematica* (3), 14 (1914), págs. 9-29. Véase también Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), vol. 1, pág. 157.

[7] Véase el excelente artículo de Kurt von Fritz, «The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum», en *Annals of Mathematics* (2), 46 (1945), págs. 242-264.

[8] Véase H. G. Zeuthen, «Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles», en *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. Forhandlinger*, 1915, págs. 333-362.

10. La sección áurea

El grado de abstracción en la demostración que acabamos de ver es tan alto que la posibilidad de que ésta fuera la base del descubrimiento original de los inconmensurables ha sido, con toda razón, cuestionada. Hay, sin embargo, otros caminos por los que pudo llegarse al descubrimiento de este fenómeno; entre ellos está el de la simple observación de que, si trazamos las cinco diagonales de un pentágono regular, estas diagonales forman otro pentágono regular más pequeño (fig. 5.6), y a su vez las diagonales de este segundo pentágono forman un tercer

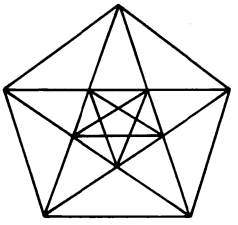


Figura 5.6

pentágono regular que es más pequeño aún. Este proceso puede continuarse indefinidamente, con el resultado de que vamos obteniendo pentágonos que llegan a ser tan pequeños como queramos, y que nos llevan a la conclusión de que la razón de la diagonal al lado en un pentágono regular no es una razón racional. La irracionalidad de esta razón es, de hecho, una consecuencia del razonamiento que presentamos en conexión con la figura 4.2, en el que se mostraba que la sección áurea se repetía una y otra vez indefinidamente. ¿Fue quizá esta propiedad la que condujo al descubrimiento, posiblemente por Hipaso, del fenómeno de la existencia de parejas de segmentos inconmensurables? No ha quedado ningún documento que nos permita resolver esta cuestión, pero la sugerencia es al menos muy plausible. Si es éste el caso, no habría sido $\sqrt{2}$, sino $\sqrt{5}$ el que reveló por primera vez la existencia de magnitudes inconmensurables, puesto que la solución de la ecuación $a:x=x:(a-x)$ conduce a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ como la razón del lado del pentágono regular a la diagonal. La razón de la diagonal de un cubo a su arista es $\sqrt{3}$, y también aquí el espectro de lo inconmensurable asoma su feo rostro.

Una demostración geométrica bastante parecida a la de la razón de la diagonal de un pentágono regular a su lado, se puede obtener también para la razón de la diagonal al lado en un cuadrado. Dado su cuadrado $ABCD$ (fig. 5.7), si llevamos sobre la diagonal AC un segmento $AP=AB$ y en P levantamos la perpendicular PQ, entonces la razón de CQ a PC será la misma que la razón de AC a AB. Y si llevamos de nuevo sobre CQ un segmento $QR=QP$ y construimos RS perpendicular a QC, la razón de la hipotenusa o diagonal al lado será otra vez la misma que antes. Como se ve, este proceso también puede continuarse indefinidamente,

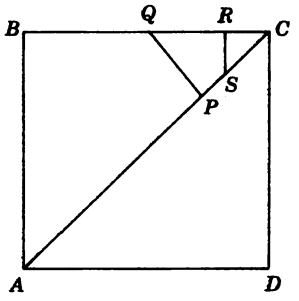


Figura 5.7

proporcionando así una demostración de que no puede encontrarse ninguna unidad de longitud, por pequeña que sea, tal que la diagonal y el lado del cuadrado sean conmensurables con respecto a esa unidad de longitud.

11. Las paradojas de Zenón

La doctrina pitagórica de que «los números constituyen el universo entero» se encontraba ahora enfrentada a un problema realmente muy serio, pero que no era el único, ya que a la vez la escuela tuvo que hacer frente también a los argumentos que proponían sus vecinos los eleáticos, un movimiento filosófico rival del de los pitagóricos. Los filósofos jónicos del Asia Menor ya habían intentado buscar un primer principio para todas las cosas. Tales creyó encontrarlo en el agua, pero otros conjeturaron que el elemento básico tendría que ser el aire o el fuego. Los pitagóricos habían tomado, en cambio, una dirección más abstracta al suponer que era el número en toda su plural multiplicidad la sustancia básica que se oculta tras los fenómenos; este atomismo numérico, tan bellamente ilustrado en la geometría de los números figurados, fue precisamente sobre el que se centró el ataque de los seguidores de Parménides de Elea (fl. ca. 460 a.C.). El principio fundamental de los eleáticos era el de la unidad y permanencia del Ser, punto de vista que contrastaba profundamente con las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio. El más conocido de los discípulos de Parménides fue Zenón de Elea (fl. ca. 450 a.C.), que propuso una serie de argumentos para demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y de divisibilidad; el método adoptado por Zenón era el método dialéctico, anticipándose así a Sócrates en el uso de este método indirecto de razonamiento que consiste en partir de las premisas que defiende el oponente para terminar reduciéndolas a un absurdo.

Los pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes, pero tanto el espacio como el tiempo tienen también otra propiedad, que es más fácil de intuir que de definir, conocida como «Continuidad». Los elementos últimos que forman una pluralidad se suponía, por una parte, que tenían las características de la unidad geométrica, el punto, y por otra, las características de las unidades numéricas o de los números. Aristóteles nos describe el punto pitagórico como «una unidad dotada de posición»

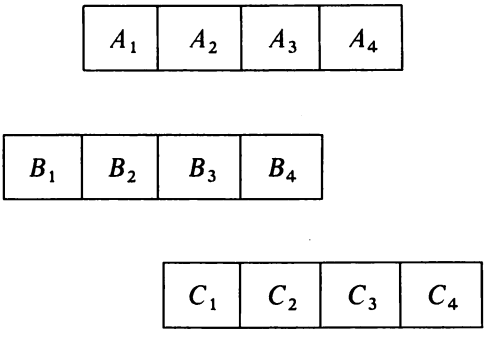
o como «una unidad considerada en el espacio». Se ha sugerido[9] que fue contra este punto de vista contra el que Zenón dirigió sus paradojas, de las que las más conocidas y las que más se citan son las que se refieren a la imposibilidad del movimiento. Tal como han llegado hasta nosotros, transmitidas por Aristóteles entre otros, cuatro de ellas parecen haber sido las que causaron más dificultades: 1) la de la *Dicotomía*, 2) la de *Aquiles*, 3) la de la *Flecha*, y 4) la del *Estadio*. La primera afirma que antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer en primer lugar la mitad de esta distancia, pero aún antes de recorrer ésta deberá recorrer el primer cuarto de la distancia inicial, y antes aún el primer octavo, y así indefinidamente a través de una cantidad infinita de subdivisiones. El corredor que quiere iniciar su carrera debe realizar un número infinito de etapas sin ninguna primera en un tiempo finito; pero es obviamente imposible agotar una colección infinita y, por lo tanto, el mismísimo comienzo del movimiento es imposible. La segunda de las paradojas es parecida a la primera, salvo que ahora la subdivisión indefinida es en sentido progresivo en vez de regresivo; aquí nos encontramos a Aquiles «el de los pies ligeros» compitiendo en una carrera con una tortuga a la que se ha dado una ventaja inicial, y en la paradoja se trata de demostrar que Aquiles, por muy velozmente que corra, no podrá alcanzar ni, por supuesto, adelantar nunca a la tortuga, por muy lentamente que ésta se mueva. Pues para cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña, y cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos, y así el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.

Tanto el argumento de la *Dicotomía* como el del *Aquiles* sostienen que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de la subdivisibilidad indefinida del espacio y del tiempo; los argumentos de la *Flecha* y del *Estadio* tratan de demostrar en cambio que el movimiento es igualmente imposible si hacemos la hipótesis opuesta, es decir, la de que la subdivisibilidad del espacio y del tiempo termina en indivisibles. En la *Flecha* sostiene Zenón que un objeto moviéndose en el aire siempre ocupa un espacio igual a sí mismo, y que lo que siempre ocupa un lugar igual a sí mismo no puede estar en movimiento; por lo tanto, la flecha está en reposo en todos los instantes durante su vuelo, luego su movimiento no es más que una ilusión.

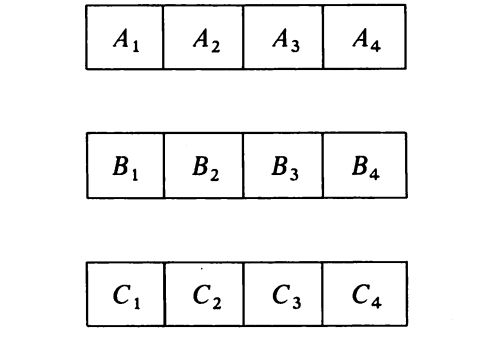
Entre las más controvertidas de las paradojas sobre el movimiento, y más difícil de describir, está la del *Estadio*, pero en todo caso el argumento puede formularse más o menos de la manera siguiente: sean A_1, A_2, A_3, A_4, cuatro cuerpos de igual tamaño en reposo; sean B_1, B_2, B_3, B_4, cuerpos del mismo tamaño que los A y que se mueven hacia la derecha uniformemente de manera que cada B adelanta a cada A exactamente en un instante, es decir, en el más pequeño intervalo de tiempo posible, o indivisible de tiempo. Sean ahora C_1, C_2, C_3, C_4, cuerpos también del mismo tamaño que los A y los B, y que se mueven uniformemente hacia la

[9] Véase Paul Tannery, *La géométrie grecque* (1887), págs. 217-261. Para un punto de vista diferente véase B. L. van der Waerden, «Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik», *Mathematische Annalen*, 117 (1940), págs. 141-161.

izquierda con respecto a los A, de manera que cada uno de los C adelanta a uno de los A en un instante indivisible de tiempo. Supongamos que en un instante dado los cuerpos en cuestión ocupan las siguientes posiciones relativas:



Entonces, al cabo del intervalo de un instante, es decir, al cabo de una subdivisión indivisible de tiempo, las posiciones serán las siguientes:



Está claro, pues, que mientras tanto C_1 habrá adelantado a dos de los B, y por lo tanto el instante transcurrido ha sido dividido en dos partes iguales, y así no puede ser el intervalo de tiempo mínimo, puesto que podemos tomar como nueva unidad de tiempo más pequeña el intervalo durante el cual C_1 adelanta a uno solo de los B.

Los argumentos de Zenón[10] parecen haber tenido una profunda influencia en el desarrollo de la matemática griega, comparable a la del descubrimiento de los inconmensurables, con el cual pueden haber estado relacionados. Originariamente en los círculos pitagóricos se representaban las magnitudes por medio de pequeñas piedrecillas o «cálculos», palabra de la que se deriva la que utilizamos para las operaciones de «calcular», pero para la época de Euclides ha habido ya un cambio total en el punto de vista; las magnitudes no aparecen ya en general asociadas a

[10] La bibliografía disponible sobre las paradojas es enorme. Entre los tratamientos históricos con más información está el de Florian Cajori, «History of Zeno's Arguments on Motion», en el *American Mathematical Monthly*, 22 (1915), págs. 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297. Para las fuentes originales véase *Zeno of Elea*, texto, traducción y notas de H. D. P. Lee (1936).

números o a su representación por medio de piedrecillas, sino por medio de segmentos. El dominio del número siguió conservando las propiedades características de lo discreto, pero el mundo de las magnitudes continuas (que incluía la mayor parte de la matemática prehelénica y pitagórica) era una cosa separada del número y tenía que ser tratada, por lo tanto, mediante métodos puramente geométricos. Parecía que era la geometría más bien que los números lo que regía el mundo; ésta fue quizá la conclusión más profunda y de más largo alcance de toda la Epoca Heroica, y no parece exagerado decir que ello se debió en gran medida a dos hombres: Zenón de Elea e Hipaso de Metaponto.

12. El razonamiento deductivo

Durante mucho tiempo se creyó que el elemento deductivo había sido introducido en la matemática por Tales, pero recientemente se ha atacado esta tesis argumentando que la matemática de los siglos VI y V a.C. era todavía demasiado primitiva para dar lugar a una contribución de este tipo tan fundamental. Los historiadores que apoyan este punto de vista suelen referirse a los argumentos de Zenón y de Hipaso como unas de las posibles causas motivadoras del enfoque deductivo. Ciertamente las dudas y problemas que surgieron en este contexto pudieron haber constituido un buen caldo de cultivo para el crecimiento del método deductivo, y sería perfectamente razonable considerar el final del siglo V a.C. como un *terminus ante quem* para la forma racional deductiva de la matemática con la que hoy día estamos tan familiarizados. Puede ser interesante, sin embargo, al llegar a este punto, señalar que se han formulado diversas conjeturas para intentar explicar las causas que llevaron a la transformación de las reglas matemáticas empíricas de los pueblos prehelénicos en la estructura deductiva formal que aparece por primera vez en Grecia. Algunos han sugerido[11] que el mismo Tales debió darse cuenta ya a lo largo de sus viajes de las discrepancias que aparecían en la matemática prehelénica, tales como las diferentes reglas para calcular el área de un círculo en Egipto y en Babilonia, entre otras, y que en consecuencia tanto él como sus sucesores inmediatos vieron claramente la necesidad de utilizar un método estrictamente racional. Otros, más conservadores, prefieren situar los orígenes de la forma deductiva de la matemática mucho más tarde, quizá incluso tan tarde como a comienzos del siglo IV a.C., a continuación del descubrimiento de los inconmensurables[12]. Hay aún otras opiniones que encuentran la causa de esta transformación fuera de la matemática. Una de ellas, por ejemplo, considera que fue el desarrollo sociopolítico de las ciudades-estado griegas, lo que dio lugar al nacimiento de la dialéctica como método intelectual, y en consecuencia a la necesidad de una base racional tanto para la matemática como para otro tipo de estudios. Otra sugerencia no muy alejada de ésta es la de que el método deductivo pudo haber surgido de la lógica en los repetidos intentos

[11] Véase van der Waerden, *Science Awakening* (1961), pág. 89.

[12] Así, por ejemplo, Neugebauer en su libro *The Exact Sciences in Antiquity*, págs. 148-149.

de convencer a un oponente de una conclusión determinada, buscando premisas que esté dispuesto a admitir y de las que se siga necesariamente tal conclusión[13].

13. El álgebra geométrica

Bien sea que el método deductivo apareciera en la matemática en el siglo VI o en el siglo IV a.C., y que el fenómeno de la inconmensurabilidad se descubriera antes o después del 400 a.C., de lo que no cabe la menor duda es de que en la época de Platón la matemática griega había sufrido ya cambios drásticos. La dicotomía abierta entre número y magnitud continua exigía un nuevo planteamiento del álgebra babilónica que habían heredado los pitagóricos; los viejos problemas en los que, dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, se pedía hallar dichos lados, tendrían que ser tratados de una manera muy diferente que mediante los algoritmos numéricos de los babilonios. Había que construir un «álgebra geométrica» que generalizase y ocupase el lugar de la vieja «álgebra aritmética», y en este nuevo álgebra ya no se podrían sumar segmentos a áreas o áreas a volúmenes; de ahora en adelante tendría que haber una homogeneidad estricta de los términos en las ecuaciones, y las formas canónicas mesopotámicas, $x \cdot y = A$, $x \pm y = b$ deberían ser interpretadas geométricamente. La conclusión obvia a la que puede llegar el lector eliminando y es la de que hay que construir sobre un segmento b un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda del área dada A en el cuadrado de lado x o (en el caso del signo menos en la segunda ecuación) se quede corto con respecto al área A en un cuadrado de lado x (fig. 5.8). De esta forma los griegos consiguieron resolver

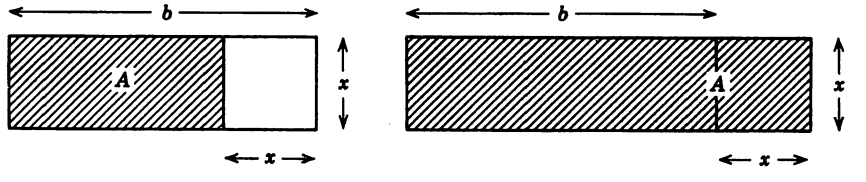


Figura 5.8

las ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de «aplicación de áreas», parte del álgebra geométrica que aparece tratada de una manera muy completa en los *Elementos* de Euclides. Por otra parte, y éste es un fenómeno de una gran importancia, la inseguridad provocada por las magnitudes inconmensurables condujo a evitar en lo posible las razones en la matemática elemental. Así, la ecuación lineal $ax = bc$, por ejemplo, pasó a considerarse como la expresión de la igualdad de las áreas ax y bc más bien que como una proporción o igualdad entre las dos razones $a:b$ y $c:x$ y, en consecuencia, al construir en este

[13] Véase Arpád Szabó, «Anfänge des euklidischen Axiomensystems», en el *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960), págs. 37-106.

caso la cuarta proporcional x lo que se hacía usualmente era construir un rectángulo $OCDB$ de lados $OB=b$ y $OC=c$ (fig. 5.9) y llevar sobre OC un segmento $OA=a$. Completando el rectángulo $OAEB$ y trazando la diagonal OE que corta a CD en P, se ve claramente que CP es el segmento x buscado, puesto que el rectángulo $OARS$ tiene área igual a la del rectángulo $OCDB$. De hecho, Euclides no aborda en los *Elementos* el difícil tema de la proporcionalidad hasta el Libro V.

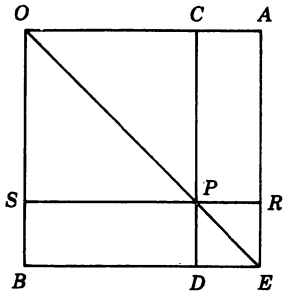


Figura 5.9

El álgebra geométrica griega sorprende a veces al lector moderno como excesivamente artificial y difícil, pero para aquellos que la utilizaron y que sin duda llegaron a manejar sus operaciones con soltura, debió parecer una herramienta muy cómoda probablemente. La propiedad distributiva $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ tuvo que resultar indudablemente mucho más obvia para un escolar griego que para un estudiante actual que aborda el álgebra por primera vez, ya que el primero podía dibujar fácilmente las áreas de los rectángulos que aparecen en el teorema, el cual afirma simplemente que el rectángulo determinado por a y por la suma de los segmentos b, c y d es igual a la suma de los rectángulos determinados por a y por cada uno de los segmentos b, c y d tomados por separado (fig. 5.10). Y, de nuevo, el caso de la identidad $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, resulta evidente de la figura que muestra los tres cuadrados y los dos rectángulos iguales que aparecen en la identidad (fig. 5.11), y para el caso de una diferencia de dos cuadrados $a^2-b^2=$

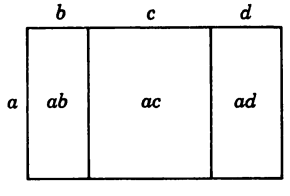


Figura 5.10

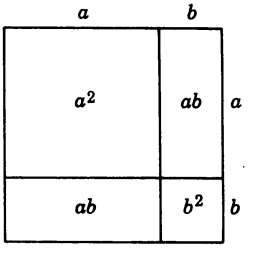


Figura 5.11

$(a+b)(a-b)$, puede representarse análogamente por medio de una figura (fig. 5.12). Con regla y compás pueden construirse fácilmente sumas, diferencias, productos y cocientes de segmentos. Tampoco las raíces cuadradas ofrecen ninguna dificultad

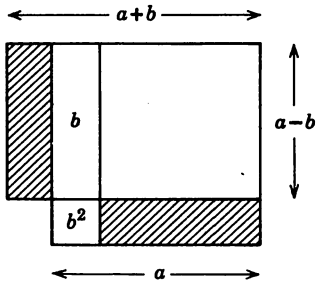


Figura 5.12

en el álgebra geométrica; si se desea construir un segmento x tal que $x^2 = ab$, simplemente hay que seguir el procedimiento que se encuentra en los textos actuales de geometría elemental: se trazan sobre una recta ABC los segmentos contiguos $AB = a$ y $BC = b$ (fig. 5.13); con diámetro AC se traza una semicircunfe-

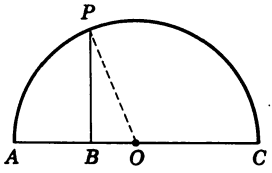


Figura 5.13

rencia de centro O, y en B se levanta la perpendicular BP a AC, que es el segmento buscado. Es interesante observar que también aquí la demostración que da Euclides, siguiendo probablemente en la línea de la primitiva desconfianza de las razones, hace uso de las áreas y no de proporciones. Si llamamos en nuestra figura $PO = AO = CO = r$ y $BO = s$, entonces lo que dice Euclides esencialmente es que $x^2 = r^2 - s^2 = (r+s)\cdot(r-s) = ab$.

14. Demócrito de Abdera

La Epoca Heroica de la matemática produjo una media docena de grandes figuras, entre las cuales tenemos que incluir a un hombre que es más conocido como filósofo materialista que como matemático. En efecto, Demócrito de Abdera (ca. 460 a.C.-ca. 370 a.C.) se hizo famoso como uno de los defensores de una teoría atómica materialista, pero en su época adquirió también una cierta reputación como geómetra. Se dice que viajó más que ninguno de sus contemporáneos, a Atenas, a Egipto y a Mesopotamia, e incluso a la India posiblemente, asimilando todo el saber de que era capaz, pero sus propios logros en matemáticas fueron tales que se jactaba de que ni siquiera los «tensadores de la cuerda» en Egipto consiguieron superarlo. Demócrito escribió un cierto número de obras matemáti-

cas, ninguna de las cuales ha llegado hasta nosotros, pero sí conocemos los títulos de unas pocas: «Sobre los Números», «Sobre la Geometría», «Sobre Tangencias», «Sobre proyecciones» y «Sobre los irracionales». Su fama llegó a ser tan grande que durante los siglos posteriores se le atribuyeron incorrectamente muchos tratados de química y de matemáticas; en particular, las antiguas obras de alquimia de un cierto pseudo-Demócrito no deben atribuirse a nuestro abderita, pero en cambio otros libros como «Sobre los pitagóricos», «Sobre el Orden del Mundo» y «Sobre la Etica» muy bien pueden haber sido auténticos. El material científico que presentaba Demócrito era claro, al parecer, pero arropado con un estilo literario; de él escribió Cicerón que sus obras eran más poéticas aún que las de los poetas. Sin embargo, de la masa de escritos que se cree se debían a Demócrito, sólo han sobrevivido unas pocas palabras.

La clave de la matemática de Demócrito hay que buscarla sin duda en su teoría física del atomismo. Según él, todos los fenómenos hay que explicarlos en términos de átomos infinitamente pequeños e infinitamente variados tanto en forma como en tamaño, de una dureza que los hace impenetrables y que se mueven sin cesar en el espacio vacío infinito. La creación del mundo en que vivimos, y también de otros en cantidad innumerable, no fue sino el resultado de una ordenación o coagulación de los átomos en grupos que tienen ciertas analogías. Esta teoría no era nueva, puesto que la había formulado ya anteriormente Leucipo, y así los adversarios de Demócrito (que eran muchos) lo acusaron de plagio de otros pensadores, entre los que se incluía a Anaxágoras y a Pitágoras. El atomismo físico de Leucipo y Demócrito pudo haber estado inspirado realmente por el atomismo geométrico de los pitagóricos, y no es nada sorprendente que los problemas matemáticos en los que se interesó principalmente Demócrito fueran de los que parecen exigir alguna forma de planteamiento con ayuda de infinitésimos. Los egipcios, por ejemplo, sabían ya que el volumen de una pirámide es un tercio del producto del área de la base por la altura, pero una demostración de este hecho estaba casi con toda seguridad fuera de su alcance, puesto que requiere un punto de vista próximo al cálculo. Arquímedes escribía más tarde que este resultado era debido a Demócrito, pero que éste no consiguió demostrarlo rigurosamente; esta situación plantea un verdadero rompecabezas, ya que si Demócrito añadió algo en este punto al conocimiento de los egipcios, tiene que haber sido evidentemente algún tipo de demostración, aunque fuese incorrecta. Quizá lo que demostró Demócrito es que un prisma triangular puede descomponerse en tres pirámides triangulares que tienen, dos a dos, igual altura e igual área de la base, de lo que pudo deducir el conocido resultado egipcio a partir de la hipótesis de que dos pirámides de bases iguales y la misma altura son iguales.

Esta última hipótesis sólo puede justificarse por la aplicación de técnicas infinitesimales. Si suponemos, por ejemplo, las dos pirámides de bases y alturas iguales descompuestas en una cantidad infinita de secciones transversales infinitamente delgadas y en correspondencia biunívoca (artificio que se suele conocer como «principio de Cavalieri», en honor a este geómetra italiano del siglo XVII), entonces la hipótesis anterior aparece justificada. Tal atomismo geométrico difuso pudo muy bien ser la base del pensamiento de Demócrito, pero esto no lo podemos afirmar con toda certeza. En cualquier caso, después de las paradojas de Zenón y

del descubrimiento de los inconmensurables, tales razonamientos basados en una infinidad de infinitésimos ya no eran aceptables, y, en consecuencia, Arquímedes podía muy bien afirmar, y con razón, que Demócrito no había logrado dar una demostración rigurosa. La misma afirmación sería válida con respecto al teorema, que Arquímedes también atribuye a Demócrito, que dice que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro circunscrito: este resultado probablemente lo consideraba Demócrito como un corolario al teorema relativo a la pirámide, puesto que el cono es esencialmente una pirámide cuya base es un polígono regular con un número infinito de lados.

El atomismo geométrico de Demócrito tropieza inmediatamente con ciertos problemas. Si la pirámide o el cono, por ejemplo, están formados por una cantidad infinita de secciones triangulares o circulares infinitamente delgadas paralelas a la base, y si consideramos dos de estas láminas adyacentes cualesquiera, inmediatamente surge una paradoja: si las secciones adyacentes tienen igual área, entonces, puesto que todas las secciones son iguales, la totalidad formará un prisma o un cilindro y no una pirámide o un cono respectivamente. Y si, en cambio, las secciones adyacentes son desiguales, entonces la totalidad formará una pirámide escalonada o un cono escalonado y no la figura de superficie lisa que uno tiene en la mente. Este problema no difiere demasiado de las dificultades que aparecen en conexión con los inconmensurables y con las paradojas del movimiento. Quizá analizase Demócrito las dificultades encontradas aquí en su obra «Sobre los Irracionales», pero no tenemos ninguna manera de saber en qué dirección iban sus planteamientos. Su extremada impopularidad en las dos escuelas filosóficas dominantes durante el siglo siguiente, las de Platón y Aristóteles, pudo muy bien haber favorecido lamentablemente el desprecio por las ideas de Demócrito. No obstante, podemos resumir lo más importante de la herencia matemática de la Epoca Heroica en seis problemas: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la razón entre magnitudes inconmensurables, las paradojas sobre el movimiento, y la validez de los métodos infinitesimales. En buena medida estos seis problemas los podemos asociar, aunque no de una manera exclusiva, con los seis hombres considerados en este capítulo: Hipócrates, Arquitas, Hipias, Hipaso, Zenón y Demócrito. Otras épocas iban a producir un despliegue de talentos comparable, pero quizá nunca más se iba a volver a ver una época atacando tan audazmente tantos y tan fundamentales problemas matemáticos con tan escasos recursos metodológicos. Por esta razón es por la que hemos llamado al período de la matemática griega que va de Anaxágoras a Arquitas la Epoca Heroica.

Bibliografía

Allman, G. J.: *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dulin University Press, 1889).
Cajori, Florian: «History of Zeno's Arguments on Motion», *American Mathematical Montly*, **22** (1915), 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297.
Freeman, Kathleen: *The Pre-Socratic Philosophers*, 2.ª ed. (Oxford: Blackwell, 1949).
Gow, James: *A Short History of Greek Mathematics* (reed., New York, Hafner, 1923).

Heath, T. L.: *History of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1921, 2 vols.).
Hobson, E. W.: *Squaring the Circle* (Cambridge, ca. 1913).
Lee, H. D. P. (ed.): *Zeno of Elea* (Cambridge: Cambridge University Press, 1936).
Michel, Paul-Henri: *De Pythagore à Euclide* (París: Société d'Edition «Les Belles Lettres», 1950).
Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence R. I.: Brown University Press, 1957; en rústica, New York: Harper).
Szabó, Arpád: «The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms», *Scripta Mathematica*, **27** (1964), 27-48, 113-139.
Tannery, Paul: *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (París, 1887).
Thomas, Ivor (ed.): *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941, 2 vols.).
Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening* (trad. Arnold Dresden, New York: Oxford University Press, 1961; ed. en rústica, New York, Wiley, 1963).
Von Fritz, Kurt: «The Discovery of Inconmmensurability by Hippasus of Metapontum», *Annals of Mathematics* (2), **46** (1945), 242-264.

Ejercicios

1. Justifíquense las dos cuadraturas de lúnulas atribuidas por Alejandro de Afrodisia a Hipócrates.
2. Dibújese un ángulo de 60° y utilícese la trisectriz de Hipias para dividir dicho ángulo en siete partes iguales.
3. Demuéstrese cuidadosamente que los segmentos en que quedan divididas las diagonales de un pentágono regular al cortarse son inconmensurables con las diagonales mismas.
4. ¿Cuál cree usted que se descubrió primero, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ ó de $\sqrt{5}$? Justifíquese la respuesta en términos de evidencia histórica.
5. Construir el segmento x tal que $ax=b^2$ utilizando solamente la regla y el compás, donde a y b son segmentos dados arbitrarios.
6. Dados los segmentos a y b, construir x e y tales que $x+y=a$, $x\cdot y=b^2$, utilizando sólo la regla y el compás.
7. Dados los segmentos a, b, c, construir x e y tales que $x-y=a$, $xy=b\cdot c$.
8. Resolver la ecuación $x^2+ax=b^2$ construyendo un segmento x que satisfaga la condición dada.
9. Dado un segmento unidad (es decir, de longitud 1), construir a partir de él otro segmento de longitud $\sqrt{3+\frac{4}{5}}$.
10. Demostrar que la ecuación de la trisectriz de Hipias en coordenadas polares es $\pi r \operatorname{sen}\theta = 2a\theta$. Dibújese la rama principal de esta curva para $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ y dígase por qué Hipias no dibujó esta rama completa.
11. Las diagonales de un hexágono regular ¿son inconmensurables con el lado? Explíquese con todo detalle, indicando si se podría haber llegado a esa conclusión en la antigüedad.

*12. Complétense todas las etapas necesarias para demostrar que la construcción de Arquitas permite duplicar el cubo.

Capítulo VI
LA EPOCA DE PLATON Y ARISTOTELES

De buena gana ardería hasta morir como Faetón, si éste fuera el precio por alcanzar el sol y conocer su forma, su tamaño y la sustancia de que está hecho.

Eudoxo

1. Las siete artes liberales

La Epoca Heroica se extiende a lo largo de la última parte del siglo V a.C. y, como hemos visto, de ese período queda poco que pueda servir como evidencia directa de la evolución de la matemática. Las historias de Herodoto y de Tucídides y las obras dramáticas de Esquilo, de Eurípides y de Aristófanes han sobrevivido en parte, pero apenas se conserva una línea de lo que escribieron los matemáticos de la época. Los documentos matemáticos de primera mano que proceden del siglo IV a.C. son casi tan escasos, pero esta escasez se compensa en gran medida por las informaciones procedentes de los filósofos que estaban *au courant* de la matemática de su época. Nos ha llegado la mayor parte de la obra de Platón y la mitad aproximadamente de la obra de Aristóteles; guiándonos por los escritos de estos dos líderes intelectuales del siglo IV a.C. podemos presentar una exposición mucho más segura de lo que ocurrió en su día, que no la que pudimos reconstruir de la Epoca Heroica.

En el capítulo anterior incluimos a Arquitas entre los matemáticos de la Epoca Heroica, pero en cierto sentido es ya realmente una figura de transición en la matemática durante el período de Platón. Arquitas estaba entre los últimos pitagóricos, tanto en sentido literal como en sentido figurado. El podía creeer aún que el número tenía una importancia total en la matemática y en la vida, pero la ola del futuro estaba elevando ya a la geometría al lugar hegemónico dentro de la matemática, principalmente a causa del problema de la inconmensurabilidad. Por otra parte, Arquitas había establecido, según se dice, el cuadrivium, formado por la aritmética, geometría, música y astronomía, como el núcleo de una educación liberal, y en esto sus puntos de vista iban a dominar gran parte del pensamiento pedagógico hasta nuestros días. Las siete artes liberales, que permanecieron como un leitmotiv durante casi dos milenios, estaban constituidas por el cuadrivium de Arquitas y el trivium formado por la gramática, la retórica y la dialéctica de Zenón. Así pues, se puede decir con justicia que los matemáticos de la Epoca Heroica fueron en gran medida los responsables de la dirección que tomaron las tradiciones



Platón y Aristóteles en la «Escuela de Atenas», de Rafael.

educativas occidentales, especialmente tal como fueron transmitidas por los grandes filósofos del siglo IV a.C.[1].

2. Sócrates

El siglo IV a.C. se abre con la muerte de Sócrates, un filósofo que adoptó el método dialéctico de Zenón y rechazó en cambio el pitagorismo de Arquitas. Sócrates reconocía que en su juventud se había visto atraído por cuestiones tales como por qué la suma $2+2$ era igual al producto $2 \cdot 2$, y también por la filosofía natural de Anaxágoras, pero cuando se convenció de que ni la matemática ni la ciencia en general podían llegar a satisfacer su deseo de conocer la esencia de las cosas, se entregó únicamente a la búsqueda del bien, que lo iba a caracterizar definitivamente.

En el *Fedón* de Platón, el diálogo en el que se describen de una manera tan bella las últimas horas de Sócrates, podemos ver qué dudas metafísicas tan profundas obstaculizaron el interés de Sócrates por la matemática o la ciencia natural:

> «No consigo convencerme de que, cuando se añade uno a uno, el uno al que se ha efectuado la adición se convierte en dos, o bien que las dos unidades reunidas y juntas hacen dos a causa de la adición. No puedo entender cómo, cuando están separadas una de la otra, cada una de ellas era uno y no dos, y ahora, cuando se las junta, la mera yuxtaposición o reunión de ellas sea la causa de que se conviertan en dos»[2].

Así pues, la influencia de Sócrates en el desarrollo de la matemática debió ser insignificante, si es que no fue incluso negativa. Esto hace aún más sorprendente el hecho de que fuera su discípulo y admirador Platón el que se convirtiera en el inspirador de la matemática del siglo IV a.C. En este capítulo nos centraremos en los descubrimientos matemáticos de una media docena de hombres que vivieron entre la muerte de Sócrates en el 399 a.C. y la muerte de Aristóteles en el 322 a.C. Estos seis matemáticos cuya obra vamos a comentar (además de la de Platón y Aristóteles) son Teodoro de Cirene (fl. ca. 390 a.C.), Teeteto († 369 a.C.), Eudoxo de Cnido (†ca. 355 a.C.), Menecmo (fl. ca. 350 a.C.) y su hermano Dinostrato (fl. ca. 350 a.C.), y Autólico de Pitania (fl. ca. 330 a.C.).

3. Los sólidos platónicos

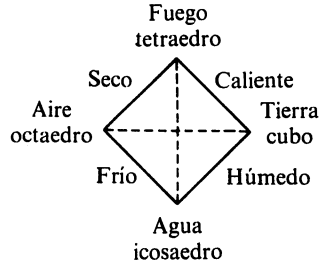
Estos seis matemáticos ya no estuvieron diseminados por todo el mundo griego como había ocurrido con los del siglo V a.C., sino que estuvieron asociados más o

---

[1] Sin embargo, el reconocimiento definitivo de este grupo concreto de las siete artes liberales sólo se consiguió en el siglo IV de nuestra era, y la división establecida entre ellas en el trivium y el cuadrivium solamente se impuso de manera tradicional con el renacimiento carolingio. Según Marshall Clagett, en su libro *Greek Science in Antiquity*, 2.ª ed., New York, Collier (1966), pág. 185, el uso de la palabra latina *quadrivium* parece provenir de Boecio (ca. 480-524).

[2] *Dialogues of Plato* (1875), vol. I, págs. 476-477.

menos estrechamente a la Academia de Platón en Atenas. A pesar de que Platón no hizo por sí mismo ninguna contribución específica excepcional en lo que se refiere a los resultados matemáticos de tipo técnico, fue, sin embargo, el verdadero centro de la actividad matemática de la época e inspiró y dirigió personalmente su desarrollo. Se dice que sobre las puertas de su escuela estaba escrito el lema: «No entre aquí nadie que ignore la geometría», y efectivamente, su entusiasmo por esta materia lo llevó a ser conocido no como matemático, sino como «hacedor de matemáticos». Parece bastante claro que el alto aprecio que tenía Platón por la matemática no provenía de Sócrates; de hecho, los primeros diálogos platónicos raramente se refieren a la matemática. El que convirtió a Platón a un punto de



vista matemático fue sin duda Arquitas, amigo suyo al que visitó en Sicilia el año 388 a.C. Quizá fue allí donde tuvo noticia de la existencia de los cinco sólidos regulares, que se solían asociar con los cuatro elementos de Empédocles en un esquema cósmico que fascinó a los hombres durante siglos. Es posible que fuera la veneración pitagórica por el dodecaedro, lo que condujo a Platón a considerar a este poliedro, el quinto y último sólido regular, como el símbolo del universo. Platón expuso sus ideas sobre los sólidos regulares en el *Timeo*, un diálogo que lleva el nombre del pitagórico que hace de interlocutor principal; lo que no sabemos es si Timeo de Locri existió realmente o si lo inventó Platón como un personaje mediante el cual podría expresar las ideas pitagóricas que aún estaban vivas en lo que es hoy la Italia del sur. Los poliedros regulares han sido llamados a menudo «cuerpos cósmicos» o «sólidos platónicos», precisamente por la manera como los aplica Platón en el *Timeo* para explicar científicamente los fenómenos. A pesar de que este diálogo, escrito probablemente cuando Platón tenía ya casi setenta años, nos proporciona la primera evidencia concreta de la asociación de los cuatro elementos con los sólidos regulares, es posible que mucho de esta fantasía sea debido a los pitagóricos. Proclo atribuye la construcción de las figuras cósmicas a Pitágoras, pero el escoliasta Suidas afirma que fue Teeteto, el amigo de Platón nacido hacia el 414 a.C. e hijo de uno de los más ricos patricios del Atica, el primero que escribió sobre ellos. Un escolio de fecha desconocida al Libro XIII de los *Elementos* de Euclides nos informa de que a los pitagóricos se deben sólo tres de los cinco sólidos regulares, y que el octaedro y el icosaedro se conocieron gracias a Teeteto. Parece probable, en cualquier caso, que Teeteto debió hacer uno de los estudios más sistemáticos de los cinco poliedros regulares hasta el momento, y que a él se deba probablemente el teorema fundamental que dice que hay cinco y sólo

cinco poliedros regulares. Quizá sea también él el responsable de los cálculos de las razones de las aristas de los sólidos regulares al radio de la esfera circunscrita, que aparecen en el último libro de los *Elementos*.

Teeteto era aún relativamente joven cuando murió en Atenas el año 369 a.C. a causa de las heridas recibidas en una batalla contra los corintios y de disentería, y el diálogo platónico que lleva su nombre fue un tributo conmemorativo de Platón a su amigo muerto. En el diálogo, que se supone tiene lugar unos treinta años antes, Teeteto discute con Sócrates y con Teodoro la naturaleza de las magnitudes inconmensurables. Se supone que esta discusión debió tomar aproximadamente la forma que nos encontramos al comienzo del libro X de los *Elementos*, donde se establecen distinciones no sólo entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables, sino también entre aquellas que, siendo inconmensurables en longitud, son o no son conmensurables en cuadrado. Por ejemplo, los radicales tales como $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son inconmensurables en longitud, pero son conmensurables en cuadrado, puesto que sus cuadrados están en la razón de 3 a 5; en cambio, las magnitudes $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ y $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ son inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado.

4. Teodoro de Cirene

El diálogo que escribió Platón en memoria de su amigo Teeteto contiene además información sobre otro matemático al que admiraba Platón y que contribuyó al desarrollo temprano de la teoría de las magnitudes inconmensurables. Al dar cuenta del descubrimiento, entonces reciente, de lo que hoy llamaríamos la irracionalidad de $\sqrt{2}$, nos dice Platón en el *Teeteto* que su maestro Teodoro de Cirene, de quien también fue alumno Teeteto, fué el primero que demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos desde el 3 al 17, ambos incluidos. No se sabe cómo lo hizo, ni tampoco por qué se detuvo en 17; en cualquier caso, la demostración podría haber sido construida siguiendo las mismas líneas de la que da Aristóteles para $\sqrt{2}$ y que aparece interpolada en las versiones posteriores del Libro X de los *Elementos*. Las referencias que tenemos en obras históricas antiguas indican que Teodoro hizo algunos descubrimientos en geometría elemental que aparecieron más tarde incorporados en los *Elementos* de Euclides, pero las obras originales de Teodoro se han perdido.

5. La aritmética y la geometría platónicas

La importancia de Platón en la historia de la matemática deriva en gran parte de su papel como inspirador y director de otros matemáticos, pero quizá a él personalmente se deba la distinción neta y clara que hizo la antigua Grecia entre aritmética (en el sentido de teoría de números) y logística (o técnica de la computación). Platón consideraba a la logística como conveniente para el

comerciante o para el hombre de guerra, que «debe aprender el arte de los números o no sabrá cómo desplegar sus tropas». El filósofo, en cambio, debe ser un aritmético «porque tiene que conseguir salir del mar del cambio para establecer contacto con el verdadero ser». Además, dice Platón en la *República*, «la aritmética tiene un efecto muy grande y enaltecedor al obligar a la mente a razonar sobre el número abstracto». Son tan elevados los pensamientos de Platón acerca del número, que alcanzan los dominios de lo místico y, aparentemente, de lo fantástico. En el último libro de la *República* se refiere a un número al que llama «el señor de los mejores y de los peores nacimientos»; se ha especulado mucho acerca de este «número platónico», y una teoría afirma que este número es el $60^4 = 12_1960.000$, que era importante ya en la numerología babilónica y que probablemente le fue transmitido a Platón por los pitagóricos. En las *Leyes* se da como número de ciudadanos de un estado ideal el de 5.040 (es decir, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$); a este número a veces se le llama «número nupcial» platónico, y hay varias teorías que intentan dar una explicación de lo que tenía Platón en la mente al respecto.

Lo mismo que en la aritmética había para Platón un abismo que separaba los aspectos teóricos de los calculísticos, también en la geometría abrazó la causa de la matemática pura frente a las concepciones materialistas del artesano o del técnico. Plutarco nos habla en su *Vida de Marcelo* de la indignación de Platón ante el uso de artificios mecánicos en geometría; al parecer, Platón consideraba tal uso como «la simple corrupción y aniquilación del bien que encierra la geometría, volviendo así vergonzosamente su espalda a los objetos incorpóreos de la inteligencia pura». En consecuencia, puede haber sido en gran medida Platón el responsable de la restricción predominante en las construcciones geométricas griegas a aquellas que pueden realizarse con regla y compás únicamente. La razón para esta limitación no es probable que haya sido la de la sencillez de los instrumentos utilizados para construir rectas y circunferencias, sino más bien la de la simetría de estas configuraciones: cualquiera de los infinitos diámetros de un círculo es un eje de simetría de la figura, y cualquier punto de una recta extendida indefinidamente puede considerarse como un centro de simetría de la recta, lo mismo que cualquier recta perpendicular a la recta dada es un eje de simetría de esta recta. La filosofía platónica, con su casi divinización de las ideas, tenía que conceder de manera natural un papel privilegiado a la recta y a la circunferencia entre todas las figuras geométricas. De una manera análoga Platón glorificó también al triángulo; las caras de los cinco poliedros regulares no eran para Platón simplemente triángulos, cuadrados o pentágonos, sino que, por ejemplo, cada una de las cuatro caras del tetraedro estaba formada por seis triángulos rectángulos más pequeños, que se obtienen al trazar las tres alturas del triángulo equilátero o cara en cuestión; así pues, el tetraedro regular quedaba descompuesto en 24 triángulos rectángulos escalenos en cada uno de los cuales la hipotenusa es el doble que uno de los catetos; el octaedro regular queda descompuesto de una manera análoga en $8 \cdot 6 = 48$ triángulos del mismo tipo, y el icosaedro en $20 \cdot 6 = 120$ triángulos. De la misma forma, el hexaedro o cubo estaba constituido por 24 triángulos rectángulos isósceles obtenidos al trazar las diagonales de las seis caras, en cada una de las cuales se forman cuatro triángulos rectángulos.

Al dodecaedro le había asignado Platón un papel especial como representante

del universo, diciendo de una manera críptica que «Dios lo usó para el todo» (*Timeo*, 55c)[3]. Platón consideraba al dodecaedro como formado por 360 triángulos rectángulos escalenos, que se obtienen al trazar en cada cara pentagonal las cinco diagonales y las cinco medianas, de manera que cada una de las 12 caras queda descompuesta en 30 triángulos rectángulos. La asociación de los cuatro primeros poliedros regulares con los cuatro elementos del universo tradicionales proporcionó a Platón en el *Timeo* una bella teoría unificada de la materia según la cual todo está construido a base de triángulos rectángulos ideales, y la fisiología en su totalidad, así como las ciencias de la materia inerte, están basadas en el *Timeo* en el funcionamiento de estos triángulos; el crecimiento normal del cuerpo de un animal, por ejemplo, se explica de la manera siguiente:

> «Cuando la constitución de la criatura en su totalidad es todavía joven y los triángulos de sus partes constituyentes están aún, como si dijéramos, recién salidos de la fábrica, sus juntas están firmemente entrelazadas... Así pues, como los triángulos cualesquiera que componen los alimentos y la bebida... son más viejos y más débiles que los suyos propios, con sus triángulos recién hechos los corta y saca el mejor partido de ellos, y esto es lo que provoca que el animal crezca.»

En la vejez, en cambio, los triángulos que forman el cuerpo están ya tan flojos por el uso que «ya no pueden cortar a su imagen los triángulos del alimento que toman, sino que resultan divididos fácilmente por los intrusos que proceden del exterior», y la criatura se consume y decae[4].

6. Los orígenes del análisis

A Pitágoras se le atribuye el mérito de haber erigido la matemática en una materia liberal, pero fue Platón el más influyente en convertir el tema en una parte esencial del curriculum necesario para la educación del hombre de estado. Influenciado quizá por Arquitas, añadiría Platón a las materias que componían originalmente el cuadrivium un tema nuevo, la estereometría, ya que creía que no se había puesto énfasis suficiente en la geometría de los sólidos. Platón discutió también los fundamentos de la matemática, clarificó algunas de las definiciones y reorganizó las hipótesis de partida, subrayando de paso que los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan. Los pitagóricos habían definido el punto como «una unidad dotada de posición», pero Platón prefirió considerarlo como el comienzo de una línea. La definición de una línea como «longitud sin anchura» parece haber tenido su origen en la escuela de Platón, lo mismo que la idea de que una línea recta es «la que yace igualmente con respecto a todos sus puntos», y en la aritmética Platón subrayó no sólo la distinción entre números pares e impares, sino también las categorías «par por par», «impar por par» e «impar por impar». Por

[3] Las referencias a los diálogos de Platón, tanto así como en otros lugares, están tomadas, salvo que se advierta lo contrario, de Plato, *Dialogues*, trad. por Benjamín Jowett (Oxford, 1871, 4 vols.).

[4] *Timeo* 81b-81d. La traducción es de F. M. Cornford, *Plato's Cosmology* (1937), pág. 329.

otra parte, aunque se dice que Platón contribuyó también a los axiomas de la matemática, lo cierto es que desconocemos cuáles eran sus ideas al respecto.

Hay muy pocos resultados matemáticos concretos que se atribuyan directamente a Platón. La fórmula para construir ternas pitagóricas $(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$, donde n es un número natural cualquiera, lleva el nombre de Platón, pero se trata simplemente de una versión un poco modificada de un resultado que ya conocían los babilonios y los pitagóricos. Probablemente es más auténtica y más significativa la atribución del llamado método analítico a Platón. En las demostraciones de la matemática deductiva uno comienza con lo que le viene dado, ya sea en general en los axiomas y postulados o de una manera más concreta en los problemas a mano y, procediendo paso a paso, uno consigue llegar a la afirmación que se trataba de demostrar. Platón parece haber sido el primero en señalar que a veces es conveniente desde un punto de vista pedagógico invertir el proceso, sobre todo cuando la cadena de razonamiento de las premisas a la conclusión no es en principio natural y obvia. Uno podría comenzar así por la proposición que hay que demostrar y deducir de ella una conclusión que se sabe se verifica. Si podemos entonces invertir las etapas de esta cadena de razonamiento, el resultado será una legítima demostración de la proposición dada. No es probable que Platón fuera el primero que se diera cuenta de la eficacia del punto de vista analítico, ya que cualquier investigación preliminar de un problema viene a ser equivalente a esto, pero lo que sí hizo probablemente Platón fue formalizar este procedimiento, y quizá darle el nombre de análisis o método analítico.

Aún se discute agriamente el papel de Platón en la historia de la matemática. Algunos[5] lo consideran como un pensador excepcionalmente profundo e incisivo, mientras que otros lo pintan como un flautista de abigarrados colores que seducía a los hombres a apartarse de los problemas del mundo diario y los embarcaba en especulaciones inútiles[6]. En cualquier caso, pocos podrán atreverse a negar que Platón tuvo una enorme influencia en el desarrollo de la matemática. La Academia Platónica en Atenas se convirtió en el centro matemático del mundo, y de esta escuela fue de donde salieron los principales maestros e investigadores a mediados del siglo IV a.C. De ellos, el más grande fue Eudoxo de Cnido (408?-355? a.C.), un hombre que en su día fue discípulo de Platón y que se convirtió en el matemático y astrónomo más famoso de la época.

7. Eudoxo de Cnido

A veces nos encontramos con la frase «la reforma platónica de la matemática», y a pesar de que la palabra «reforma» parece que tendiese a exagerar los cambios que tuvieron lugar, lo cierto es que la obra de Eudoxo tuvo tal importancia que la palabra «reforma» no resulta improcedente en absoluto. Durante la juventud de Platón el descubrimiento de los inconmensurables había producido un verdadero

[5] Véase, por ejemplo, François Laserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (1964).

[6] Lancelot Hogben, *Science for the Citizen* (New York, 1938), pág. 64. Véase también George Sarton, *A History of Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1952), vol. I, págs. 431 y sigs.

escándalo lógico, al ser la causa de la ruina de toda la teoría de proporciones. Dos cantidades, tales como la diagonal y el lado de un cuadrado, son inconmensurables cuando no tienen una razón tal como la de un número natural a otro; pero ¿cómo puede uno comparar entonces las razones entre magnitudes inconmensurables? Si Hipócrates demostró realmente que dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros (lo cual es más que dudoso), debió tener alguna manera de manejar proporciones o igualdades de razones. No sabemos cómo pudo proceder ni si se anticipó en algún sentido a Eudoxo, que fue quien dio una definición nueva y universalmente aceptada de la igualdad de dos razones. Parece ser que los griegos habían hecho uso previamente de la idea de que cuatro cantidades están en proporción, $a:b=c:d$, si las dos razones $a:b$ y $c:d$ tienen la misma resta mutua o «antiphairesis»; es decir, si la menor en cada una de las dos razones cabe en la mayor el mismo número entero de veces, y el resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces, y el nuevo resto cabe en el anterior el mismo número entero de veces y así sucesivamente. Esta definición sería difícil de utilizar (estrictamente hablando imposible, al dar lugar a un proceso indefinido), y así el descubrimiento por Eudoxo de la teoría de proporciones que se utiliza en el Libro V de los *Elementos* de Euclides fue un éxito brillante. La palabra «razón» representaba en la matemática griega un concepto esencialmente indefinido, puesto que la «definición» de razón de Euclides como un cierto tipo de relación en tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo pronto se mostró insuficiente. Mucho más importante es, en cambio, la afirmación de Euclides en el sentido de que de dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra; ésta es esencialmente una formulación del llamado «Axioma de Arquímedes», propiedad que Arquímedes mismo atribuía a Eudoxo. Así pues, la idea de razón de Eudoxo excluye el cero y clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento, por ejemplo, no puede compararse en términos de razón con un área, ni un área puede compararse con un volumen.

A continuación de estas observaciones preliminares sobre razones, da Euclides en la definición 5 del Libro V la famosa formulación de Eudoxo:

> «Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente»[7].

Es decir, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y sólo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n, si $ma<nb$ entonces $mc<nd$, o si $ma=nb$ entonces $mc=nd$, o bien si $ma>nb$ entonces $mc>nd$.

La definición de igualdad de dos razones de Eudoxo no se diferencia mucho del

[7] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, ed. por T. L. Heath (Cambridge, 1908, 3 vols.), vol. II, pág. 114.

procedimiento de los productos cruzados que utilizamos hoy para las fracciones, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, procedimiento que equivale a una reducción a común denominador. Para demostrar que $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{4}{8}$, por ejemplo, multiplicamos el 3 y el 6 por 4, con los resultados 12 y 24, y después multiplicamos 4 y 8 por 3, obteniendo el mismo par de números 12 y 24. Podríamos haber utilizado como multiplicadores 7 y 13, obteniendo el par 21 y 42 en el primer caso y 52 y 104 en el segundo, y como 21 es menor que 52, así también 42 es menor que 104 (hemos intercambiado aquí los términos segundo y tercero en la definición de Eudoxo para ponerla de acuerdo con las operaciones tal como se usan hoy, pero relaciones análogas se verifican en uno u otro caso). Nuestro ejemplo aritmético no hace justicia a la sutileza y profundidad de las ideas de Eudoxo, ya que su aplicación a este caso es trivial. Para obtener una mejor apreciación del verdadero valor de su definición sería conveniente reemplazar a, b, c, d, por raíces de números o, mejor aún, tomar como a y b esferas y como c y d los cubos construidos sobre los radios de estas esferas: en este caso la multiplicación cruzada no tiene sentido, y la aplicabilidad de la definición de Eudoxo está muy lejos de resultar obvia. De hecho, hay que hacer notar que, hablando estrictamente, la definición en cuestión no está muy alejada de las distintas definiciones de número real que se dieron a finales del siglo XIX, puesto que lo que hace es separar la clase de los números racionales $\frac{m}{n}$ en dos subclases, según que $ma \leqslant nb$ o $ma > nb$, lo que genera una cortadura en el sentido de Dedekind. Como hay una cantidad infinita de números racionales, los griegos se encontraron de nuevo cara a cara, por asociación, con el concepto que tanto deseaban evitar, el de conjunto infinito, pero ahora ya era posible al menos dar demostraciones satisfactorias de los teoremas en los que fuera necesario utilizar proporciones.

8. El método de exhausción

Uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por los inconmensurables quedaba resuelto con éxito gracias a la imaginación de Eudoxo, pero aún quedaba otro problema importante sin resolver: el de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas, y también aquí parece haber sido Eudoxo quien dio la clave de la solución. Los matemáticos anteriores habían sugerido ya que lo mejor que uno podía intentar era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la curvilínea, pero lo que no sabían era cómo cerrar el razonamiento, ya que la idea de límite les era desconocida y lo seguiría siendo durante más de dos milenios. Según Arquímedes, fue Eudoxo el que dio el lema que lleva ahora el nombre de Arquímedes, y que se suele conocer como Axioma de Arquímedes, que sirve de base al método de exhausción, el equivalente griego del cálculo integral. Este lema o axioma afirma que, dadas dos magnitudes que tengan una razón (es decir, que

sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero), entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. Esta propiedad excluía totalmente un oscuro razonamiento que había aparecido a veces en el pensamiento griego, relativo a segmentos indivisibles o infinitésimos constantes. También excluía la comparación de los llamados «ángulos de contingencia» o «ángulos corneados» (formados por una curva C y su tangente T en un punto P de C) con los ángulos rectilíneos usuales, ya que un ángulo corneado parecía ser una magnitud distinta de cero y que no satisfacía, sin embargo, el axioma de Eudoxo al compararlo con los ángulos rectilíneos.

A partir del axioma de Eudoxo o de Arquímedes es muy fácil demostrar, por medio de una *reductio ad absurdum*, la proposición que constituye la base del *método de exhausción* griego:

> «Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano»[8].

Esta proposición, a la que nos referiremos con el nombre de «propiedad de exhausción», es equivalente a la proposición moderna que dice que si M es una magnitud dada, ε es otra magnitud del mismo tipo arbitraria, dada también, y r es un número tal que $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$, entonces podemos encontrar un entero positivo N tal $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo número natural $n > N$. Es decir, la propiedad de exhausción es equivalente a la afirmación que, en términos modernos, nos asegura que $\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Los griegos hicieron un uso esencial de esta propiedad para demostrar teoremas acerca de las áreas y volúmenes de figuras curvilíneas, y así Arquímedes, en particular, atribuye a Eudoxo la primera demostración satisfactoria de que el volumen de un cono es igual a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura, afirmación que parece indicar que el método de exhausción fue descubierto por Eudoxo. Si esto es así, entonces es a Eudoxo y no a Hipócrates a quien debemos probablemente las demostraciones euclídeas de los teoremas que se refieren a áreas de círculos y a volúmenes de esferas. Como sabemos, ya se había sugerido anteriormente que el área del círculo se podría llegar a agotar inscribiendo en él un polígono regular y aumentando después indefinidamente su número de lados, pero fue el método de exhausción de Eudoxo el primero que hizo de este método un procedimiento completamente riguroso. Hay que advertir que el nombre de «método de exhausción» no lo utilizaron los antiguos griegos, sino que es una desafortunada invención moderna introducida en el siglo XVII por Gregory de St. Vincent (1584-1667), pero se ha hecho de uso tan generalizado en la historia de la matemática que nosotros también lo utilizaremos. Como ilustración de la manera en que Eudoxo probablemente aplicó ya este

[8] Véanse los *Elements of Euclid* (ed. por T. L. Heath, reimpresión por Dover, New York, 1956, 3 vols.), vol. III, pág. 14. El axioma sigue siendo válido, desde luego, si la mitad se cambia por un tercio, un cuarto o cualquier otra parte propia fija.

método, vamos a dar aquí la demostración, en una forma un poco modernizada en lo que se refiere a la notación, del teorema que afirma que las áreas de dos círculos son entre sí como las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros. La demostración, tal como la da Euclides en los *Elementos*, Libro XII, prop. 2, es probablemente la misma de Eudoxo.

Sean dos círculos c y C, de diámetros d y D y áreas a y A. Se trata de demostrar que $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. La demostración la podremos obtener si procedemos de una manera indirecta y refutamos las otras dos posibilidades que podrían darse, es decir, que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ y que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. Supongamos, pues, en primer lugar que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$; entonces existirá una magnitud $a' < a$ tal que $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$; tomemos $a - a'$ como magnitud prefijada $\varepsilon > 0$. Inscribamos ahora en los círculos c y C dos polígonos regulares del mismo número de lados n, y sean p_n y P_n sus áreas respectivas; consideremos las áreas intermedias que quedan fuera de los polígonos, pero dentro de los círculos, formadas por n segmentos circulares cada una (fig. 6.1). Si duplicamos el número de

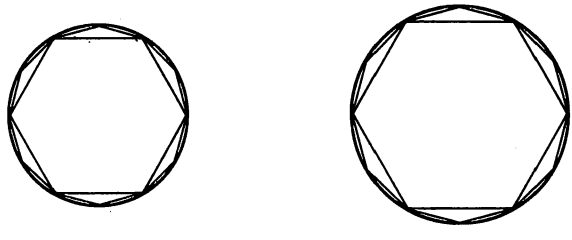
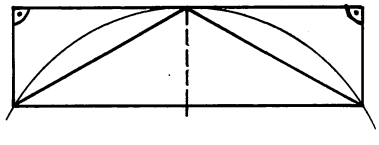


Figura 6.1

lados es obvio que de estas áreas intermedias sustraemos más de su mitad; en consecuencia, y por la propiedad de exhausción, las áreas intermedias pueden irse reduciendo al duplicar sucesivamente el número de lados (es decir, haciendo n cada



vez mayor), hasta que se tenga $a - p_n < \varepsilon$, y entonces, dado que $a - a' = \varepsilon$, tendremos que $p_n > a'$. Ahora bien, se sabe por teoremas anteriores que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$, y como habíamos supuesto que $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ resulta que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$; por lo tanto, si $p_n > a'$ como hemos demostrado, deberá ser también $P_n > A$, pero como P_n es el área de un polígono *inscrito* en el círculo de área A, es obvio que P_n no puede ser mayor que A. Como una conclusión falsa implica una premisa falsa, hemos refutado así la

posibilidad de que fuera $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. De una manera análoga podemos refutar la posibilidad de que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$, estableciendo en definitiva el teorema de que las áreas de los círculos son entre sí como las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros.

9. La astronomía matemática

La propiedad que acabamos de demostrar parece haber sido el primer teorema preciso relativo a la medida de figuras curvilíneas conocido, y apunta a Eudoxo como el verdadero padre del cálculo integral, la máxima contribución a la matemática hecha por los miembros de la Academia platónica. Por otra parte, hay que decir que Eudoxo no fue en absoluto solamente matemático, y, de hecho, en la historia de la ciencia en general se le conoce más bien como el creador de la astronomía propiamente científica. Se dice que Platón había propuesto a sus discípulos que intentaran dar una representación geométrica de los movimientos del Sol, de la Luna y de los cinco planetas conocidos. Evidentemente, se suponía de una manera tácita que los movimientos resultantes tendrían que estar compuestos únicamente de movimientos circulares uniformes básicos, pero, a pesar de esta restricción, Eudoxo consiguió dar para cada uno de los siete cuerpos celestes una representación satisfactoria por medio de un sistema compuesto por esferas concéntricas con centros en el centro de la Tierra y de radios variables, en el que cada esfera giraba uniformemente alrededor de un eje fijo con respecto a la superficie de la esfera siguiente en tamaño, de menor a mayor. Así pues, para cada planeta dio Eudoxo un sistema conocido por sus sucesores como «sistema de las esferas homocéntricas», y más tarde Aristóteles combinó estos esquemas geométricos en la bien conocida cosmología peripatética de las esferas cristalinas, que dominó en el pensamiento astronómico durante casi 2.000 años.

Eudoxo fue sin duda el matemático más importante de la Epoca Helénica, pero todas sus obras se han perdido[9]. Es posible que la estimación aristotélica de la circunferencia de la Tierra en unos 400.000 estadios, o 40.000 millas, se deba a Eudoxo, puesto que Arquímedes nos dice que Eudoxo había calculado que el diámetro del Sol era nueve veces el de la Tierra. Con su esquema astronómico vio Eudoxo que podía describir, por medio de una combinación de movimientos circulares, los lazos que trazan los planetas en su movimiento a lo largo de sus órbitas, usando para ello una curva conocida como el «hipopede» o grillete de caballo: esta curva, que recuerda a un ocho dibujado sobre una superficie esférica, se obtiene como intersección de una superficie esférica con la de un cilindro de diámetro menor que el radio de la esfera y tangente a ella interiormente, y era una de las pocas curvas nuevas que aceptaron los griegos. En aquella época había

[9] Véase, para una exposición extensa y autorizada de lo que probablemente hizo Eudoxo, O. Becker, «Eudoxus-Studien», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, II (1933), págs. 311-333, 369-387; III (1936), págs. 236-244, 370-410.

únicamente dos maneras de definir curvas: 1) por medio de combinaciones de movimientos uniformes, y 2) como intersecciones de superficies geométricas conocidas; el hipopede de Eudoxo es un buen ejemplo de una curva que se puede obtener de cualquiera de estas dos maneras. Proclo, que escribía unos 800 años después de la época de Eudoxo, nos informa de que Eudoxo contribuyó al parecer con muchos teoremas generales a la geometría y aplicó el método platónico del análisis al estudio de *la sección* (probablemente la sección áurea), pero lo cierto es que los dos pilares principales en los que se basa la fama de Eudoxo siguen siendo la teoría de proporciones y el método de exhausción.

10. Menecmo

A Eudoxo tenemos que recordarlo en la historia de la matemática no sólo por su propia obra, sino también por la de sus discípulos. En Grecia hubo siempre un fuerte lazo de continuidad de la tradición de maestro a discípulo. Así, Platón aprendió de Arquitas, de Teodoro y de Teeteto, y la influencia platónica se transmitió a su vez a través de Eudoxo a los hermanos Menecmo y Dinostrato, que destacaron ambos en matemáticas. Ya vimos en el capítulo anterior que Hipócrates de Chios había demostrado que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudieran encontrar, y fuera permitido utilizarlas, curvas que tuvieran la propiedad expresada en la proporción continua $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, y recordamos a este propósito que los griegos sólo disponían de los dos métodos ya mencionados para obtener nuevas curvas. Así pues, fue un éxito notable por parte de Menecmo el descubrimiento de que había curvas a mano con la propiedad deseada. De hecho, había toda una familia de curvas adecuadas, que se podía obtener todas por el mismo método, a saber, cortando un cono circular recto por un plano perpendicular a un elemento o generatriz del cono; es decir, lo que se le atribuye a Menecmo es precisamente el descubrimiento de las curvas que recibieron más tarde los nombres de elipse, parábola e hipérbola.

De todas las líneas curvas que pueden observarse en la vida diaria, aparte de las circunferencias y las rectas, la elipse es quizá la más frecuente, ya que se presenta aparentemente siempre que observamos una circunferencia oblicuamente o bien al aserrar oblicuamente un tronco cilíndrico. Sin embargo, el descubrimiento original de la elipse por parte de Menecmo parece haber sido hecho como un mero subproducto de la investigación en la que lo que se buscaba realmente eran la parábola y la hipérbola, que presentaban las propiedades necesarias para resolver el problema de Delos. Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja y que forme un ángulo recto en el vértice (es decir, que sus generatrices formen con el eje un ángulo de 45°), descubrió Menecmo que al cortar el cono por un plano perpendicular a uno de sus elementos o generatrices, la curva de intersección es tal que su ecuación, hablando en términos de la geometría analítica moderna, puede escribirse en la forma $y^2=lx$, donde l es una constante que depende únicamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. No sabemos exactamente

cómo obtuvo Menecmo esta propiedad, pero lo cierto es que depende exclusivamente de algunos teoremas de geometría elemental. Efectivamente, sea el cono ABC y sea EDG la curva que se obtiene al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D al elemento ADC del cono (fig. 6.2). Entonces, por un punto cualquiera

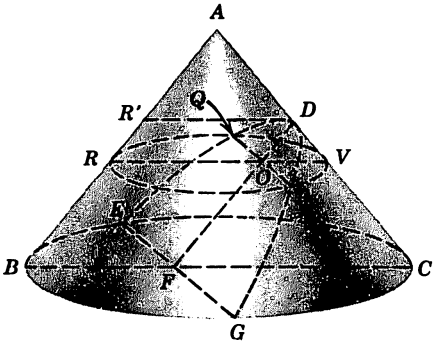


Figura 6.2

P de la curva pasa un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia $PVQR$, siendo Q el otro punto de intersección de la curva (la parábola) con esta circunferencia. Por razones de simetría se tiene que $PQ \perp RV$ en el punto O, y por lo tanto OP es la media proporcional entre RO y OV. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos OVD y BCA se obtiene que $\frac{OV}{DO} = \frac{BC}{AB}$, y de la semejanza de los triángulos $R'DA$ y ABC, que $\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB}$. Si tomamos $OP = y$ y $OD = x$ como coordenadas del punto P, entonces tenemos que $y^2 = RO \cdot OV$, o, sustituyendo,

$$y^2 = R'D \cdot OV = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

En vista de que los segmentos AR', BC y AB son los mismos para todos los puntos P de la curva $EQDPG$, podemos escribir la ecuación de la curva o «sección del cono rectángulo» como $y^2 = lx$, donde l es una constante que iba a denominarse más tarde el «latus rectum» de la curva. De una manera análoga podemos obtener una ecuación de la forma $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$ para una «sección de un cono acutángulo» y una de la forma $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$ para una «sección de un cono obtusángulo», donde a y b son constantes y el plano de corte es perpendicular en cualquier caso a una generatriz del cono circular acutángulo u obtusángulo respectivamente.

Parece ser que Menecmo obtuvo estas propiedades de las secciones cónicas, entre otras, y en vista de que todo este material muestra un gran parecido con la

utilización de coordenadas, tal como hemos puesto de relieve más arriba, algunos historiadores han sostenido que Menecmo conocía ya en cierta forma la geometría analítica[10]. Esta opinión es escasamente justificable, puesto que Menecmo ciertamente no podía ser consciente del hecho de que una ecuación arbitraria en dos indeterminadas determina una curva. De hecho, la idea general de una ecuación en cantidades indeterminadas fue ajena al pensamiento griego, y precisamente fueron las limitaciones en la notación algebraica las que obstaculizaron, más que ninguna otra causa, el que los griegos llegaran a conseguir una geometría analítica propiamente dicha.

11. La duplicación del cubo

Menecmo no podía prever la gran cantidad de bellas propiedades que el futuro se iba a encargar de descubrir en sus curvas. El había dado con las cónicas como resultado de una afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema de la duplicación del cubo. Utilizando notación moderna puede obtenerse fácilmente la solución de la manera siguiente: desplazando el plano de corte (fig. 6.2) paralelamente a sí mismo podemos obtener una parábola de «latus rectum» dado arbitrariamente; así pues, si queremos duplicar un cubo de arista a construiremos dos parábolas como secciones del cono rectángulo, una de «latus rectum» a y la otra de «latus rectum» $2a$. Si situamos entonces estas dos parábolas con vértices en el origen de coordenadas O y con ejes los ejes de coordenadas Oy y Ox, respectivamente, el otro punto de intersección de las dos parábolas tendrá coordenadas (x, y) que satisfacen la proporción continua $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ (fig. 6.3), es decir, $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$, $y = a \cdot \sqrt[3]{4}$; así pues, la abscisa x es la arista del cubo buscado.

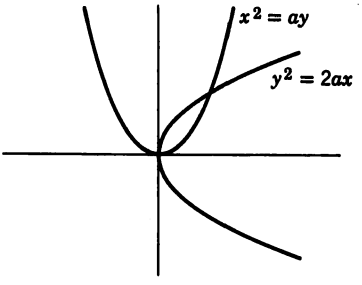


Figura 6.3

[10] Véase J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940), págs. 117-119, y H. G. Zeuthen, «Sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité», *Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger Oversigt*, 1888, págs. 127-144.

Es probable que Menecmo supiera también que la duplicación del cubo se puede conseguir igualmente utilizando una hipérbola rectangular y una parábola. Si situamos en un mismo sistema de coordenadas la parábola de ecuación $y^2 = \frac{a}{2}x$ y la hipérbola $xy = a^2$, entonces el punto de intersección tendrá por coordenadas $x = a\sqrt[3]{2}$, y $y = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, luego la coordenada x será la arista del cubo de volumen doble buscado. Probablemente Menecmo conociera muchas de las propiedades de las cónicas que hoy nos son tan familiares, incluidas las de las asíntotas de la hipérbola, lo que le habría permitido sin duda operar con las expresiones equivalentes a las ecuaciones modernas que hemos utilizado más arriba. Proclo nos dice que Menecmo fue uno de los que «perfeccionó la totalidad de la geometría», pero lo cierto es que poco es lo que sabemos sobre su obra concreta. Sí sabemos que Menecmo fue uno de los maestros de Alejandro Magno, y la leyenda atribuye a Menecmo la célebre respuesta a la pregunta de su real discípulo acerca de si existía algún atajo para acceder a la geometría: «¡Oh, rey! Para viajar por el país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en la geometría hay un único camino para todos.» Entre las principales fuentes documentales autorizadas que nos permiten atribuir a Menecmo el descubrimiento de las secciones cónicas está una carta de Eratóstenes al rey Ptolomeo Euergetes, citada unos 700 años más tarde por Eutocio, en la que se mencionan varias duplicaciones del cubo, entre las cuales figura una por medio de la complicada construcción de Arquitas y otra «cortando el cono según las triadas de Menecmo».

12. Dinostrato y la cuadratura del círculo

Dinostrato, hermano de Menecmo, fue también matemático, y mientras uno de los dos hermanos «resolvía» la duplicación del cubo, el otro «resolvió» la cuadratura del círculo. Esta cuadratura se reducía a una cuestión muy simple una vez descubierta, al parecer por Dinostrato mismo, una propiedad sorprendente del punto Q extremo de la trisectriz de Hipias. Si la ecuación de la trisectriz (fig. 6.4) es $\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta$, donde a es el lado del cuadrado $ABCD$ asociado a la curva,

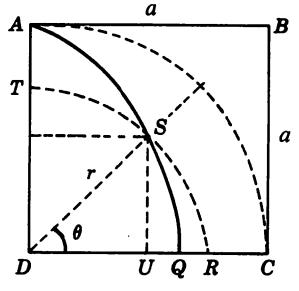


Figura 6.4

entonces el límite de r al tender θ a cero es $\frac{2a}{\pi}$. Este resultado es obvio para cualquiera que haya estudiado un poco de cálculo infinitesimal y recuerde que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$, midiendo el ángulo θ en radianes. La demostración que nos transmite Pappus, debida probablemente a Dinostrato, se basa únicamente en consideraciones de geometría elemental. El teorema de Dinostrato afirma que el lado a del cuadrado es la media proporcional entre el segmento DQ y el arco del cuarto de circunferencia $\widehat{AC}$, es decir, que $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DQ}$. Podemos demostrar este teorema utilizando el típico método griego de demostración indirecta que consiste en refutar las dos posibilidades alternativas. Supongamos pues en primer lugar que $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DR}$, donde $DR > DQ$; tracemos entonces la circunferencia de centro D y radio DR, que cortará a la trisectriz en S y al lado AD del cuadrado en T. Consideremos la perpendicular SU al lado DC por el punto S; en vista de que Dinostrato sabía ya que los arcos de circunferencias correspondientes al mismo ángulo central son entre sí como sus radios, podemos escribir que $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{\widehat{TR}}{DR}$, y como por hipótesis $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DR}$, se sigue que $\widehat{TR} = AB$. Pero de la propiedad que define la trisectriz resulta que $\frac{\widehat{TR}}{\widehat{SR}} = \frac{AB}{SU}$, luego, si $\widehat{TR} = AB$, entonces debe ser $\widehat{SR} = SU$, lo cual obviamente es absurdo, ya que la perpendicular es más corta que cualquier otra línea recta o curva que vaya desde el punto S a la recta DC. Así pues, el cuarto término DR en la proporción $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DR}$ no puede ser mayor que DQ. De una manera análoga podemos demostrar que este cuarto proporcional tampoco puede ser menor que DQ, y en consecuencia queda demostrado el teorema de Dinostrato, es decir, que $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DQ}$.

Dado pues el punto de intersección Q de la trisectriz con el lado DC, tenemos una proporción que nos relaciona a tres segmentos rectilíneos con el arco de circunferencia $\widehat{AC}$, y, por lo tanto, mediante la sencilla construcción geométrica del cuarto término de una proporción conocidos los otros tres, podemos construir fácilmente un segmento b de longitud igual a la del arco $\widehat{AC}$, y dibujando el rectángulo de lados $2b$ y a tendremos un rectángulo de área exactamente igual a la del círculo de radio a, y un cuadrado igual a este rectángulo puede construirse a su vez fácilmente, tomando como lado del cuadrado la media geométrica entre los lados del rectángulo, como es bien sabido. A partir de la demostración de Dinostrato de que la trisectriz de Hipias servía también para resolver la cuadratura del círculo, esta curva vino a ser más conocida como la cuadratriz. Siempre estuvo

claro, por supuesto, para los griegos que el uso de esta curva para resolver los problemas de trisección y cuadratura violaba las reglas del juego, según las cuales sólo se permitía utilizar rectas y circunferencias. Las «soluciones» de Hipias y de Dinostrato eran, tal como reconocieron sus mismos autores, «sofísticas», y así continuó la búsqueda de nuevas soluciones, ya fueran canónicas o ilegítimas, con el resultado de que los geómetras griegos descubrieron varias curvas nuevas durante sus investigaciones.

13. Autólico de Pitania

Pocos años después de Dinostrato y de Menecmo floreció un matemático al que corresponde la distinción de haber escrito el tratado matemático griego más antiguo que ha sobrevivido hasta nosotros. En las páginas anteriores hemos presentado de una manera bastante completa la obra de los matemáticos helénicos primitivos, pero no debe olvidarse que esta exposición no estaba basada en las obras originales, sino en resúmenes, comentarios o descripciones posteriores. A veces aparece un comentarista que, según todos los indicios, copia de una obra original que aún existía en su época, como es el caso de Simplicio en el siglo VI de nuestra era al describir las cuadraturas de las lúnulas de Hipócrates. Pero hasta la llegada de Autólico de Pitania, contemporáneo de Aristóteles, no nos encontramos a un solo autor griego cuyas obras hayan sobrevivido. Una de las razones para la supervivencia de este pequeño tratado, *Sobre la esfera en movimiento*, es la de que formaba parte de una colección conocida como la «Pequeña Astronomía», que fue muy usada por los astrónomos de la antigüedad. *Sobre la esfera en movimiento* no es una obra muy profunda, e incluso probablemente tampoco muy original, ya que incluye poco más que algunos teoremas elementales de la geometría de la esfera que podían ser necesarios en astronomía. Su importancia primordial está en el hecho de que nos revela que la geometría griega había alcanzado ya evidentemente la forma que consideramos como típica de la época clásica. Los teoremas se formulan con claridad y se demuestran rigurosamente; además el autor utiliza sin demostración ni indicación concreta de las fuentes algunos teoremas que debía considerar como bien conocidos. Podemos concluir pues que en su época, hacia el 320 a.C., había ya en Grecia una tradición sólidamente establecida de libros de texto geométricos.

14. Aristóteles

Autólico fue contemporáneo de Aristóteles, el sabio de más amplios conocimientos de todos los tiempos, cuya muerte se suele tomar como hito del final del primer gran período en la historia de la civilización griega, la Epoca Helénica. Aristóteles fue discípulo de Platón, lo mismo que Eudoxo, y también fue tutor de Alejandro Magno, como Menecmo. Aristóteles era principalmente un filósofo y un biólogo, pero al mismo tiempo estaba profundamente *au courant* de las actividades de los matemáticos de la época. Aristóteles pudo muy bien haber intervenido en

una de las principales controversias matemáticas de esta época, puesto que se le ha atribuido un tratado con el título de *Sobre las líneas indivisibles*. La crítica moderna pone en tela de juicio la autenticidad de esta obra, pero en cualquier caso probablemente fue el resultado de discusiones que tuvieron lugar en el Liceo aristotélico. La tesis del tratado es la de que la teoría de los indivisibles, defendida por Xenócrates, uno de los sucesores de Platón a la cabeza de la Academia, es insostenible. La idea de lo indivisible o infinitesimal fijo, sea de longitud, área o volumen, ha fascinado a los hombres de todas las épocas; Xenócrates pensaba, al parecer, que esta idea resolvía las paradojas que, como las de Zenón, contaminaban el pensamiento tanto matemático como filosófico. Aristóteles también dedicó mucha atención a las paradojas de Zenón, pero intentó refutarlas sobre la base del sentido común. Como no deseaba seguir a los matemáticos platónicos por el camino de las abstracciones y tecnicismos que imponía la época, Aristóteles no hizo ninguna contribución técnica notable a la matemática. Se dice que escribió una biografía de Pitágoras, pero se ha perdido, y Eudemo, uno de sus discípulos, escribió una historia de la geometría que también se perdió. Sin embargo, debido a su fundamentación de la lógica y a sus frecuentes alusiones a ideas y teoremas matemáticos a lo largo de su voluminosa obra[11], Aristóteles puede ser considerado como un importante promotor del desarrollo de la matemática. La discusión aristotélica sobre el infinito actual y potencial en la aritmética y en la geometría ejerció una profunda influencia en muchos escritores poteriores sobre los fundamentos de la matemática, pero habría que comparar la afirmación de Aristóteles acerca de que los matemáticos «ni necesitan ni usan el infinito», con el punto de vista de nuestros días de que el infinito es el paraíso del matemático. El análisis de Aristóteles del papel de las definiciones y de las hipótesis en la matemática tuvo un significado más concreto y positivo.

15. El final del período Helénico

El año 323 a.C. murió súbitamente Alejandro Magno y su imperio se desmembró rápidamente. Sus generales se repartieron el vasto territorio sobre el que tan efímeramente había reinado el joven conquistador. Ptolomeo se quedó con Egipto, Seleuco y Lisímaco con Siria y el Este, y Antígono y Casandro gobernaron cada uno a su vez en Macedonia. En Atenas, donde Aristóteles había sido considerado como un extranjero, el filósofo se sintió impopular ahora que su poderoso alumno-soldado había muerto, de manera que abandonó Atenas y murió al año siguiente. A todo lo largo y lo ancho del mundo griego el viejo orden estaba cambiando, tanto política como culturalmente. Bajo el mandato de Alejandro se fue produciendo una fusión gradual de las costumbres y del saber Helénico y Oriental, y así resulta más adecuado referirse a la nueva civilización como la civilización Helenística, mejor que Helénica. Además, la nueva ciudad de Alejandría, recién fundada por el conquistador del mundo, pasó a ocupar el lugar de Atenas como centro del mundo matemático. Así pues, se suelen distinguir en la

[11] Véase T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle* (1949).

historia de las civilizaciones dos períodos correspondientes al mundo griego, separados uno del otro por las muertes casi simultáneas de Aristóteles y de Alejandro (así como también la de Demóstenes) como línea divisoria. El período anterior se conoce como la Epoca Helénica, mientras que el posterior como la Epoca Helenística o Alejandrina. En los capítulos siguientes examinaremos la matemática del primer siglo de esta nueva época, siglo que se suele denominar como la Edad de Oro de la matemática griega.

Bibliografía

Becker, O.: «Eudoxus-Studien», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte B, *Studien*, II (1933), 311-333, 369-387; III (1936), 236-244, 370-410.

Brumbaugh, R. S.: *Plato's Mathematical Imagination* (Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1954).

Coolidge, J. L.: *A History of the Conic Sections and the Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945).

——: *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; ed. en rústica, New York: Dover, 1963).

Cornford, F. M.: *Plato's Cosmology*, el Timeo de Platón traducido, con un comentario paralelo (London: Routledge y Kegan Paul, 1937).

Görland, Albert: *Aristoteles und die Mathematik* (Marburg, 1899).

Heath, T. L.: *History of Greek Mathematics* (Oxford, 1921, 2 vols.).

——: *Mathematics in Aristotle* (Oxford, 1949).

Heiberg, J. L.: «Mathematisches zu Aristoteles», *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, 18 (1904), 1-49.

Laserre, François: *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, trad. Helen Mortimer (London: Hutchinson, 1964).

Loria, Gino: *Historie des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (París: Gauthier-Villars, 1929).

Michel, Paul-Henri: *De Pythagore à Euclide* (París: Société d'Edition «Les Belles Lettres», 1950).

Platón: *Dialogues*, trad. Benjamin Jowett (Oxford, 1871, 4 vols.).

Solmsen, Friedrich: «Platos Einfluss auf die Bildung der mathematischen Methode», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte B, *Studien*, I (1929-1931), 93-107.

Toeplitz, Otto: «Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte B, *Studien*, I (1931), 3-33.

Wedberg, Anders: *Plato's Philosophy of Mathematics* (Stockholm: Almquist & Wiksell, 1955).

Zeuthen, H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886).

Ejercicios

1. Se cree que Teeteto calculó, para cada uno de los poliedros regulares, la razón de la arista al radio de la esfera circunscrita. Calcúlese esta razón para tres de los sólidos regulares (véase el Libro XIII de los *Elementos* de Euclides).
2. Demuéstrese el teorema, debido probablemente a Teeteto, de que no hay más que cinco sólidos regulares (véase el Libro XIII de los *Elementos* de Euclides).
3. Platón dice en el *Teeteto* que Teodoro demostró que $\sqrt{3}$ es irracional. Dése una demostración detallada de este teorema.

4. Calcúlense los ángulos de los 360 triángulos rectángulos escalenos en que dividía Platón la superficie del dodecaedro.
5. Complétese la otra mitad de la demostración por exhausción (véase el texto) de que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus radios (utilícense polígonos circunscritos).
6. Descríbase un posible método mediante el cual Eudoxo pudiera haber medido la circunferencia de la Tierra.
7. Utilizando el método sugerido al hablar de la obra de Menecmo, demuéstrese que toda sección plana de un cilindro es una elipse. Esta propiedad la demostró Sereno de Antinoe, que probablemente vivió durante el siglo IV de nuestra era.
8. En su teoría del arco iris utiliza Aristóteles un lugar geométrico que se suele ver atribuido a Apolonio, un matemático posterior, y que consiste en el lugar geométrico de todos los puntos P tales que las distancias de P a dos puntos fijos P_1 y P_2 están en una razón fija distinta de uno. Identifíquese este lugar geométrico.

*9. Demuéstrese que una sección de un cono acutángulo, en el sentido de Menecmo, es decir, perpendicular a una generatriz, es una elipse.

*10. Complétese la demostración de Dinostrato (véase el texto) demostrando que la hipótesis $DR < DQ$ conduce también a una contradicción.

Capítulo VII
EUCLIDES DE ALEJANDRIA

> Ptolomeo le preguntó una vez a Euclides si había algún camino más corto para el conocimiento de la geometría que por el estudio de los Elementos, a lo que Euclides respondió que no había ningún camino real a la geometría.
>
> *Proclo Diádoco*

1. El autor de los *Elementos*

La muerte de Alejandro Magno había conducido a una feroz contienda entre los generales del ejército griego, pero hacia el año 306 a.C. el control de la parte egipcia del imperio estaba ya firmemente en las manos de Ptolomeo I, y este ilustrado gobernante pudo dirigir al fin su atención a esfuerzos más constructivos. Entre sus primeras decisiones estuvo el establecimiento de una escuela o instituto en Alejandría, conocido como el Museo, no superado por ningún otro en su tiempo. Como profesores de esta escuela hizo llamar a un grupo de sabios de primera línea, entre los cuales estaba el autor del texto de matemáticas de éxito más fabuloso que se haya escrito nunca, los *Elementos* (Stoixeia) de Euclides. Teniendo en cuenta la fama del autor y de su «best seller», es notable lo poco que se sabe de la vida de Euclides. Su vida fue tan oscura que no hay asociado a su nombre ningún lugar de nacimiento. Aunque a menudo algunas ediciones de los *Elementos* dan como identidad del autor la de Euclides de Megara, y en las historias de la matemática aparece frecuentemente un retrato de Euclides de Megara; se trata de un caso de confusión de identidad*. El auténtico Euclides de Megara era un discípulo de Sócrates y, aunque se ocupó de lógica, no se sentía más atraído por la matemática que su maestro. Nuestro Euclides, en cambio, es conocido como Euclides de Alejandría, debido a que fue llamado allí para enseñar matemáticas. Por el carácter de su obra se puede suponer que había estudiado con los discípulos de Platón, si no en la Academia misma. Las leyendas asociadas a Euclides nos lo pintan como un viejo amable y gentil. La tradición que hemos reproducido en el capítulo anterior acerca de la petición de Alejandro Magno de una introducción fácil a la geometría se ve repetida en el caso de Ptolomeo, a quien, según se dice, Euclides aseguró que «no hay ningún camino real a la geometría». Evidentemente Euclides no hacía hincapié en los aspectos prácticos de la materia, pues hay una leyenda acerca de él que dice que cuando uno de sus alumnos le preguntó que qué utilidad tenía el estudiar geometría, Euclides ordenó a su esclavo que le diera unas monedas, «ya que debe ganar algo necesariamente de lo que aprende».

---

* (Véase, por ejemplo, la portada reproducida en la página 298 más adelante.)

Euclides y los *Elementos* son considerados frecuentemente como sinónimos, pero en realidad él fue el autor de aproximadamente una docena de tratados que cubrían ampliamente materias variadas, desde óptica, astronomía, música y mecánica hasta un libro sobre las secciones cónicas. Con la excepción de la *Esfera* de Autólico, las obras de Euclides que han sobrevivido son los tratados de matemática griega más antiguos existentes; sin embargo, se han perdido más de la mitad de los escritos de Euclides, entre los que están algunas de sus obras más importantes, tales como un tratado sobre cónicas. Euclides consideraba a Aristeo, un geómetra contemporáneo suyo, como merecedor de grandes honores por haber escrito un tratado anterior sobre *Lugares Sólidos* (que era el nombre griego para las secciones cónicas, derivado probablemente de la definición estereométrica de estas curvas en la obra de Menecmo). Los tratados sobre cónicas por Aristeo y Euclides se han perdido los dos, probablemente de manera irrecuperable, y ello fue debido quizá a que fueron pronto reemplazados por la obra más extensa sobre cónicas de Apolonio, que describiremos más adelante. Entre las obras de Euclides perdidas están también una sobre *Lugares de Superficie*, otra sobre *Pseudaria* (o falacias) y una tercera sobre *Porismas*. A partir de las referencias antiguas, no está ni siquiera muy claro qué material contenían estas obras. La primera, por ejemplo, podría haber estado dedicada a las superficies conocidas por los antiguos —la esfera, cono, cilindro, toro, elipsoide de revolución, paraboloide de revolución e hiperboloide de revolución de dos hojas— o quizá a curvas sobre estas superficies. Por lo que sabemos, los griegos no estudiaron ninguna superficie que no fuera la de un sólido de revolución.

La pérdida de los *Porismas* de Euclides es especialmente exasperante porque pudiera haber representado una aproximación antigua a un tipo de geometría analítica. Más tarde Pappus nos dice que un porisma es algo intermedio entre un teorema, en que se propone algo para ser demostrado, y un problema; en que se propone algo para ser construido. Otros han descrito un porisma como una proposición en la que uno determina una relación entre cantidades conocidas y variables o indeterminadas, quizá el enfoque más próximo al concepto de función en la antigüedad. Si un porisma era, como se ha llegado a pensar, algo así como una ecuación verbal de una curva, el libro sobre *Porismas* de Euclides pudo haber diferido ampliamente de nuestra geometría analítica por la falta de símbolos y técnicas algebraicas. El historiador de la geometría del siglo XIX Michel Chasles sugería como un típico porisma euclídeo la determinación del lugar geométrico de un punto cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos era constante.

2. Otras obras

Hasta nuestros días han sobrevivido cinco obras de Euclides: los *Elementos*, los *Datos*, la *División de Figuras*, los *Fenómenos* y la *Optica*. La última de estas obras tiene el interés de ser una obra primitiva sobre perspectiva o la geometría de la visión directa. Los antiguos habían dividido el estudio de los fenómenos ópticos en tres partes: (1) óptica (o la geometría de la visión directa), (2) catóptrica (o la geometría de los rayos reflejados), y (3) dióptrica (o la geometría de los rayos

refractados). Una *Catóptrica* atribuida a veces a Euclides, es de autenticidad dudosa, siendo quizá debida a Teon de Alejandría que vivió unos 600 años después. La *Optica* de Euclides[1] es notable por su adopción de una teoría de «emisión» de la visión, según la cual el ojo envía rayos que viajan hasta el objeto, en contraste con una teoría aristotélica rival según la cual viaja en línea recta una actividad en el medio ambiente desde el objeto hasta el ojo. Debe notarse que la matemática de la perspectiva (en oposición a la descripción física) es la misma cualquiera que sea la teoría de las dos que se adopte. Entre los teoremas que se encuentran en la *Optica* de Euclides hay uno que fue muy usado en la antigüedad: $\text{tg } \alpha/\text{tg } \beta < \alpha/\beta$ si $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Uno de los objetivos de la *Optica* era el de combatir una obstinación pertinaz de los epicúreos en el sentido de que un objeto era exactamente tan grande como parecía, sin tener en cuenta en absoluto la deformación de escorzo implicada por la perspectiva.

Los *Fenómenos* de Euclides se parecen mucho a la *Esfera* de Autólico, es decir, es una obra sobre geometría esférica para uso de astrónomos. Una comparación de las dos obras viene a indicar que ambos autores se apoyaron ampliamente en una tradición de textos que era bien conocida a su generación. Es muy posible que pasara lo mismo en gran medida con los *Elementos* de Euclides, pero en este caso no nos queda ninguna obra contemporánea con la que pudiera ser comparada.

La obra euclídea sobre *División de Figuras* es significativa por su característica de ser una obra que se habría perdido de no haber sido por la erudición de los sabios árabes. No ha sobrevivido en el original griego, pero antes de que desaparecieran las versiones griegas se hizo una traducción al árabe (omitiendo algunas de las demostraciones originales «porque son fáciles»), la cual a su vez fue traducida posteriormente al latín, y por último a los idiomas modernos usuales[2]. Lo mismo ha ocurrido frecuentemente con otras obras antiguas. La *División de Figuras* incluye una colección de 36 proposiciones relativas a la división de figuras planas. Por ejemplo la proposición 1 pide la construcción de una recta que sea paralela a la base de un triángulo y divida al triángulo en dos partes de áreas iguales. La proposición 4 exige la bisección de un trapecio *abqd* (fig. 7.1) mediante una recta paralela a sus bases; la recta buscada *zi* se halla determinando el punto *z* tal que $\overline{ze}^2 = \frac{1}{2}(\overline{eb}^2 + \overline{ea}^2)$. Otras proposiciones piden la división de un paralelogra-

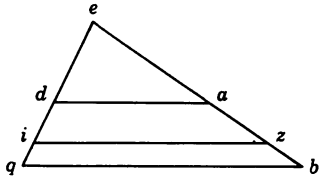


Figura 7.1

[1] Véase M. R. Cohen e I. E. Drabkin: *A Source Book in Greek Science* (1948), págs. 257 y sigs.

[2] Una versión inglesa titulada *Euclid's Book on Divisions of Figures* fue publicada en 1915 por R. C. Archibald.

mo en dos partes iguales mediante una recta trazada por un punto dado de que uno de los lados (proposición 6) o por un punto dado exterior al paralelogramo (proposición 10). La última proposición pide la división de un cuadrilátero en una razón dada, mediante una recta que pase por un punto dado de uno de los lados del cuadrilátero. Algo parecido a la *División de Figuras*, por su carácter y finalidad, son los *Datos* de Euclides, obra que nos ha llegado tanto en el original griego como en árabe. Parece que fue escrita para ser usada en la Universidad de Alejandría como complemento a los seis primeros libros de los *Elementos*, de la misma manera que un manual de tablas sirve de suplemento a un libro de texto; sería útil pues como una guía en el análisis de problemas de geometría con el objeto de descubrir demostraciones. El libro empieza con quince definiciones referentes a magnitudes y lugares geométricos, y la parte central del texto comprende 95 proposiciones relativas a las interrelaciones entre condiciones y magnitudes que pueden darse en un problema. Las dos primeras afirman que si se dan dos magnitudes a y b entonces está dada también su razón y que si se da una magnitud y su razón a otra segunda, entonces también está dada la segunda magnitud. Hay como dos docenas de proposiciones análogas que sirven como reglas o fórmulas algebraicas, y a continuación siguen algunas reglas geométricas sencillas relativas a rectas paralelas y magnitudes proporcionales, recordando al lector algunas de las consecuencias de los datos de un problema, tales como la advertencia de que cuando dos segmentos están en una cierta razón dada entonces se conoce la razón de las áreas de dos figuras rectilíneas semejantes cualesquiera contruidas sobre dichos segmentos. Algunas de las proposiciones nos dan el equivalente geométrico de la resolución de ecuaciones cuadráticas; por ejemplo, se nos dice que si se aplica un área rectangular dada AB sobre un segmento de longitud dada AC (fig. 7.2) y si

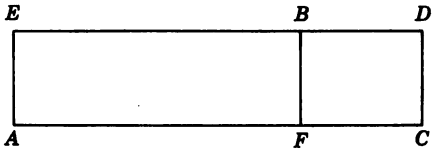


Figura 7.2

nos dan además el área BC que le falta al área AB para agotar el rectángulo completo AD construido sobre AC, entonces también son conocidas las dimensiones del rectángulo BC. Utilizando notación algebraica moderna se demuestra fácilmente que la afirmación anterior es verdadera. Sea a la longitud de AC, b^2 el área de AB, y sea $\frac{c}{d}$ la razón de FC a CD; entonces, si llamamos $FC=x$, $CD=y$ tenemos que $\frac{x}{y}=\frac{c}{d}$ y además que $(a-x)y=b^2$. Eliminando y nos queda $(a-x)xd=b^2c$ o bien $dx^2-adx+b^2c=0$, de donde resulta

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{b^2c}{d}}$$

La solución geométrica dada por Euclides es equivalente a ésta salvo que sólo utiliza el signo menos antes de la raíz. Las proposiciones 84 y 85 de los *Datos* son sustitutos geométricos de los conocidos métodos algebraicos de los babilonios para resolver los sistemas $xy=a^2$, $x\pm y=b$, que son a su vez equivalentes a la solución de ecuaciones cuadráticas. Las últimas proposiciones de los *Datos* se refieren a las relaciones entre medidas lineales y angulares en un círculo dado.

3. La finalidad de los *Elementos*

La Universidad de Alejandría no era probablemente muy distinta de las instituciones modernas de enseñanza superior. Algunos de los miembros de la facultad sobresaldrían en la investigación, otros se adaptarían mejor a tareas administrativas y otros aún destacarían por su capacidad pedagógica. Según parece por las referencias que tenemos, Euclides pertenecía de manera muy definida a esta última categoría; no hay ningún descubrimiento nuevo que se le atribuya a él directamente, pero sí destacó por su habilidad expositiva. Esa es la clave del éxito de su obra más importante, los *Elementos*: se trataba claramente de un libro de texto, y no precisamente el primero. Sabemos que hubo al menos tres elementos análogos anteriormente, incluyendo el de Hipócrates de Chios, pero no queda ni rastro de ellos ni de ningún otro rival potencial durante los tiempos antiguos. Los *Elementos* de Euclides se destacaron tanto por encima de los restantes competidores que fueron los únicos que sobrevivieron. Los *Elementos* no eran, como se piensa a veces, un compendio de todos los conocimientos geométricos, sino más bien un texto introductorio que cubría toda la matemática *elemental* —es decir, la aritmética (en el sentido de la «aritmética superior» de los ingleses, o de la «teoría de números» de los americanos), la geometría sintética (de puntos, rectas, planos, círculos y esferas) y el álgebra (no en el sentido simbólico moderno, sino lo equivalente con ropaje geométrico). Se notará inmediatamente que el arte de calcular no está incluido, ya que esto no formaba parte de la enseñanza universitaria; tampoco estaba incluido en el libro el estudio de las cónicas ni de las curvas planas superiores, porque esto formaba parte de la matemática más avanzada. Proclo nos describe los *Elementos* como si guardaran la misma relación con el resto de la matemática que la que tienen las letras del alfabeto con relación al lenguaje. Si los *Elementos* hubieran tratado de ser un depósito de información exhaustivo, el autor habría incluido probablemente referencias a otros autores, información acerca de las investigaciones recientes y explicaciones informales, pero tal como están escritos, los *Elementos* se limitan austeramente al asunto de que se trata, la exposición en un orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental. De vez en cuando, sin embargo, otros escritores posteriores interpolaron en el texto explicaciones en forma de escolios, y los copistas posteriores copiaron dichos añadidos como si fueran parte del texto original; algunos de ellos aparecen en todos los manuscritos existentes actualmente. Euclides mismo no formuló ninguna pretensión de originalidad, y está claro que debió hacer abundante uso de las obras de sus predecesores, pero se cree que la ordenación final es suya propia y

presumiblemente algunas de las demostraciones se deban también a él, pero aparte de esto es difícil estimar el grado de originalidad que hay en esta obra matemática, la más famosa de la historia.

4. Definiciones y postulados

Los *Elementos* están divididos en trece libros o capítulos, de los cuales la primera media docena son sobre geometría plana elemental, los tres siguientes sobre teoría de números, el libro X sobre los inconmensurables y los tres últimos principalmente sobre geometría de sólidos. No hay ninguna introducción o preámbulo a la obra, y el primer libro comienza abruptamente con una lista de 23 definiciones. Los defectos o debilidades están aquí en que algunas de las definiciones no definen nada, ya que no hay ningún conjunto previo de elementos indefinidos en términos de los cuales definir los demás. Así, decir, como hace Euclides, que «un punto es lo que no tiene parte», o que «una línea es longitud sin anchura», o que «una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura», apenas significa definir estos objetos, pues una definición debe expresarse en términos de cosas anteriores y que son mejor conocidas que las cosas que se definen. Se pueden plantear objeciones fácilmente a otras de las llamadas «definiciones» de Euclides, a cuenta de su circularidad lógica, como en el caso: «los extremos de una línea son puntos», o «una línea recta es una línea que está situada de la misma manera con respecto a todos sus puntos», o «los extremos de una superficie son líneas», todas ellas posiblemente debidas a Platón. La definición euclídea de un ángulo plano como «la inclinación de una respecto a la otra de dos líneas en un plano que se cortan y no están situadas sobre una línea recta» es defectuosa por el hecho de que «inclinación» no ha sido definida previamente y no resulta ser mejor conocida que la palabra «ángulo».

A continuación de las definiciones Euclides nos presenta una lista de cinco postulados y cinco nociones comunes. Aristóteles había hecho una distinción clara entre axiomas (o nociones comunes) y postulados; los primeros, según él, deben ser convincentes por sí mismos, por ser verdades comunes a todas las ciencias, mientras que los segundos son menos evidentes y no presuponen el asentimiento del que está aprendiendo, ya que se refieren solamente a la materia concreta de que se trate. Algunos escritores posteriores distinguieron entre los dos tipos de hipótesis aplicando la palabra axioma a algo conocido o aceptado como obvio, mientras que la palabra postulado se refería a algo que se «exige». Nosotros no podemos saber si Euclides suscribiría alguno de estos dos puntos de vista, e incluso sí distinguiría entre los dos tipos de hipótesis; los manuscritos existentes no se muestran de acuerdo en este punto, y en algunos casos las 10 hipótesis aparecen reunidas todas en una sola categoría; en cualquier caso, los matemáticos modernos no ven ninguna diferencia esencial entre un axioma y un postulado. En la mayor parte de los manuscritos de los *Elementos* nos encontramos con las 10 hipótesis siguientes[3]:

[3] Véase *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traducido y editado por T. L. Heath (1956, 3 vols.).

Postulados. Postúlese lo siguiente:

1. Trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.
2. Prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.
3. Describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales.
5. Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes:

1. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
3. Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Aristóteles había escrito que «siendo iguales las demás cosas, la demostración mejor será aquella que proceda del menor número de postulados», y Euclides evidentemente suscribía este principio; por ejemplo, el postulado 3 se interpreta en su sentido literal más limitado, expresado a veces como el uso del compás euclídeo (o colapsable) cuyas patas mantienen una abertura constante en tanto que las puntas están apoyadas en el papel, pero que se cierran en cuanto se le levanta del papel. Es decir, el postulado no se interpreta en el sentido de permitir el uso del compás para transportar una distancia igual a un segmento sobre otro segmento separado más largo, a partir de uno de sus extremos. En las tres primeras proposiciones del Libro I se demuestra que esta última construcción es siempre posible, incluso bajo la interpretación estricta del postulado 3. La primera proposición justifica la construcción de un triángulo equilátero ABC sobre un segmento dado AB, construyendo una circunferencia con centro en A y pasando por B, y otra con centro en B y pasando por A, y tomando como punto C el punto de intersección de las dos circunferencias (que deberían cortarse se suponía tácitamente). La proposición 2 se apoya entonces en la proposición 1 para demostrar que desde cualquier punto A como extremo (fig. 7.3) se puede trazar un segmento rectilíneo igual a un segmento dado BC. En primer lugar Euclides dibuja AB y sobre él construye el triángulo equilátero ABD, extendiendo los lados DA y DB hasta E y F respectivamente. Con B como centro describe la circunferencia que pasa por C y que corta a BF en G; entonces, con D como centro traza la circunferencia que pasa por G, la cual corta a DE en H. Se ve fácilmente entonces que AH es el segmento buscado. Por último, en la proposición 3 Euclides utiliza la proposición 2 para demostrar que, dados dos segmentos rectilíneos distintos cualesquiera, se puede cortar del mayor un segmento igual al menor.

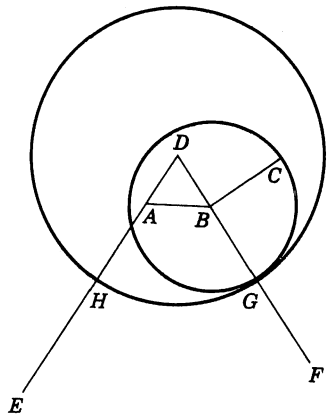


Figura 7.3

5. El contenido del Libro I

En las tres primeras proposiciones Euclides pone un gran cuidado en demostrar laboriosamente que una interpretación muy restrictiva del postulado 3 implica, no obstante, el libre uso de los compases como se hace normalmente en geometría elemental para transportar distancias. Sin embargo, para los niveles modernos de rigor las hipótesis euclídeas son lamentablemente inadecuadas, y de hecho Euclides hace uso frecuentemente de postulados tácitos en sus demostraciones. En la primera proposición de los *Elementos*, por ejemplo, supone sin demostración que las dos circunferencias se cortarán en un punto; para una situación como ésta y otras análogas es necesario añadir a los postulados uno equivalente a un principio de continuidad. Por otra parte, los postulados 1 y 2, tal como fueron formulados por Euclides, no garantizan ni la unicidad de la línea recta que pasa por dos puntos distintos ni siquiera su infinitud; simplemente aseguran que hay por lo menos una y que no tiene puntos extremos, y, sin embargo, Euclides hace uso libremente en sus demostraciones de la unicidad y de la infinitud. Es, desde luego, demasiado fácil criticar la labor de un hombre a la luz de los desarrollos posteriores, olvidando que «suficiente es hasta el día de hoy el rigor de esto». En su época los *Elementos* fueron evidentemente el desarrollo lógico de la matemática elemental más finamente razonado, que se había reunido jamás, y tuvieron que pasar 2.000 años antes de que se diera una formulación más cuidadosa. Durante este largo intervalo de tiempo la mayoría de los matemáticos consideraron lógicamente satisfactorio y pedagógicamente adecuado el tratamiento.

La mayor parte de las proposiciones del Libro I de los *Elementos* son bien conocidas para cualquiera que haya seguido un curso de geometría a nivel de enseñanza media. Entre ellas están los conocidos teoremas sobre congruencia de triángulos (pero sin ningún axioma que justifique el método de superposición), sobre las construcciones elementales con regla y compás, sobre las desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, sobre las propiedades de las rectas

paralelas (con la consecuencia principal de que la suma de los àngulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos) y de los paralelogramos (incluida la construcción de un paralelogramo con ángulos dados y con área igual a un triángulo dado o a una figura rectilínea dada). El libro concluye en las proposiciones 47 y 48 con las demostraciones del teorema de Pitágoras y su recíproco. La demostración del teorema que da Euclides no es la que se da normalmente en los libros de texto actuales, en los cuales se aplican proporciones simples entre los lados de los triángulos semejantes que se forman al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa. Se supone que Euclides evitó esta demostración debido a las dificultades que trae consigo en el caso de inconmensurabilidad. Solamente al llegar al Libro V se dedica Euclides a establecer la ya bien fundamentada teoría de proporciones, y hasta ese momento evita en lo posible el uso de proporciones. Para demostrar el teorema de Pitágoras, Euclides utilizó en cambio una bella demostración en la que se usa una figura que se ha descrito a veces como un molino de viento o como una cola de pavo real o bien como la silla de la novia (fig. 7.4). La demostración se consigue probando que el cuadrado sobre

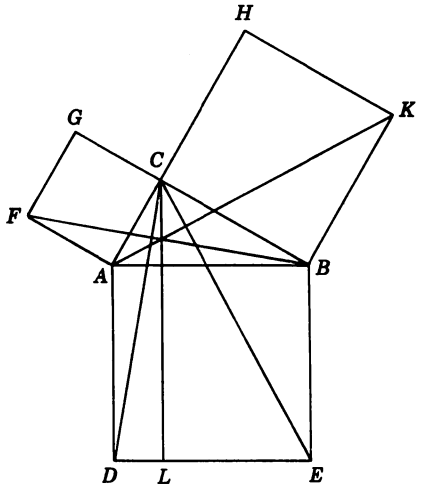
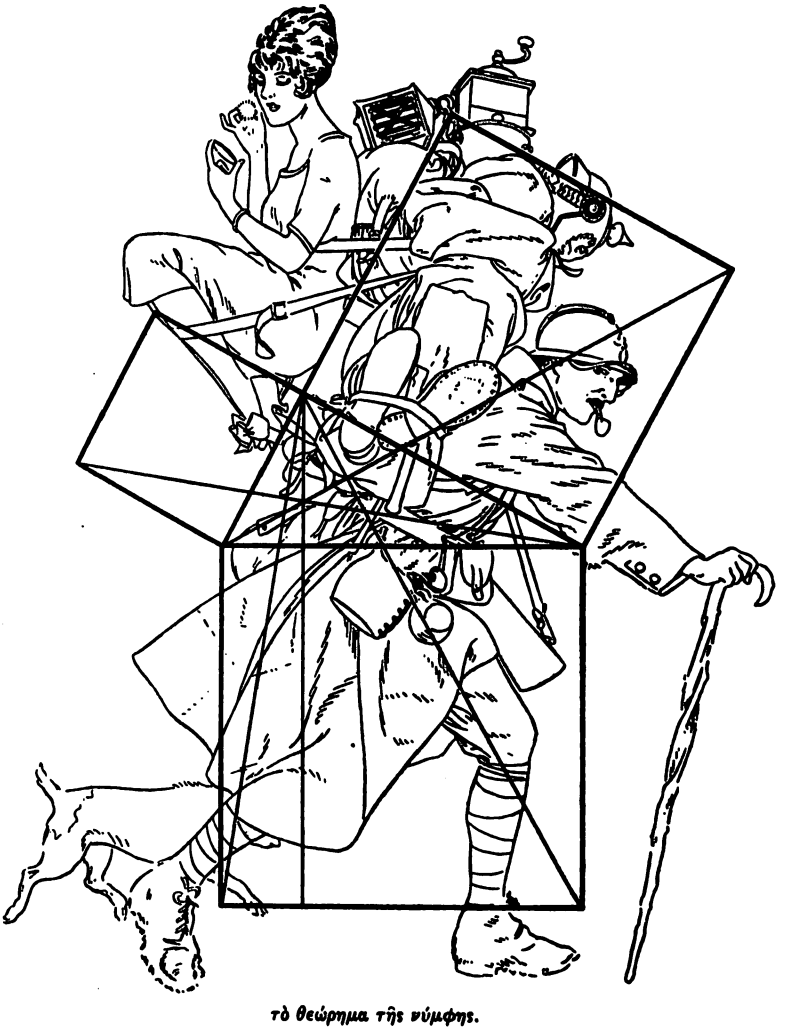


Figura 7.4

el lado AC es igual al doble del triángulo FAB o bien al doble del triángulo CAD, es decir, al rectángulo AL, y que el cuadrado sobre el lado BC es igual al doble del triángulo ABK o bien al doble del triángulo BCE, es decir, al rectángulo BL. Luego la suma de los cuadrados es igual a la suma de los rectángulos, es decir, al cuadrado sobre AB. Se supone que esta demostración es original de Euclides y se han hecho muchas conjeturas acerca de la forma que ofrecerían las demostraciones anteriores. A partir de la época de Euclides se han propuesto una infinidad de demostraciones alternativas.

Es de notar, a cuenta de los méritos de Euclides, el que el teorema de Pitágoras vaya seguido inmediatamente por una demostración del recíproco. Si en un

triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados sobre los otros dos lados, entonces el ángulo que forman estos otros dos lados es un ángulo recto. Es frecuente en algunos libros de texto modernos que los ejercicios que siguen al teorema de Pitágoras requieran no el teorema propiamente dicho, sino el recíproco no demostrado aún. Puede haber muchos defectos menores en los *Elementos*, pero el libro tiene todas las virtudes lógicas mayores.



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.
(With apologies to *La Vie Parisienne*.)

El diagrama de la «Silla de la Novia» del teorema I.47 de los *Elementos* de Euclides, en el contexto de la primera guerra mundial. [*The Mathematical Gazette*, 11 (1922-1923), pág. 364.]

6. El álgebra geométrica

El Libro II de los *Elementos* es uno de los más cortos, con sólo 14 proposiciones, ninguna de las cuales juega ningún papel en los libros de texto modernos; sin embargo, en la época de Euclides este libro tenía una gran importancia. Esta aguda discrepancia entre los puntos de vista antiguo y moderno es fácil de explicar: hoy nosotros tenemos un álgebra simbólica y una trigonometría que han reemplazado a sus equivalentes geométricos griegos. Por ejemplo, la proposición 1 del Libro II nos dice que «Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores». Este teorema, que nos asegura que $AD(AP+PR+RB)=AD\cdot AP+AD\cdot PR+AD\cdot RB$ (fig. 7.5),

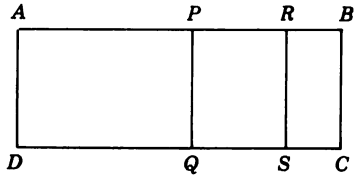


Figura 7.5

no es otra cosa que una formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la aritmética, que se conoce actualmente como propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma: $a(b+c+d)=ab+ac+ad$. En otros libros posteriores de los *Elementos* (los V y VII) encontramos demostraciones de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación. Mientras que nosotros representamos las magnitudes por letras que se sobreentiende son números (conocidos o desconocidos) con las cuales operamos usando las reglas algorítmicas del álgebra, en tiempos de Euclides las magnitudes se representaban como segmentos de línea recta obedeciendo a los axiomas y teoremas de la geometría. A veces se dice que los griegos no tenían álgebra, pero ésa es una afirmación patentemente falsa; tenían el Libro II de los *Elementos* que es un álgebra geométrica que les servía más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica. No hay ninguna duda de que el álgebra moderna facilita enormemente la manipulación de relaciones entre magnitudes, pero no es menos cierto que un geómetra griego versado en los 14 teoremas del «álgebra» de Euclides era mucho más hábil aplicando estos teoremas a la práctica de la medida que un geómetra experto de hoy; el álgebra geométrica de los antiguos no era una herramienta ideal, pero estaba muy lejos de ser ineficaz. La proposición 4 de Euclides, «Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos», es una manera prolija de decir que $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, pero su evidencia visual para un muchacho alejandrino ha debido ser mucho más viva de lo que nunca pueda llegar a ser su contrapartida algebraica moderna. Es cierto que su demostración en los *Elementos* ocupa como una página

y media, pero ¿cuántos estudiantes de enseñanza media podrían dar actualmente una demostración detallada y rigurosa de la regla algebraica que aplican tan resueltamente? Y lo mismo ocurre con la proposición II.5 de los *Elementos* que contiene lo que podría parecer una circunlocución impracticable de $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

> «Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad.»

El diagrama que usa Euclides en este contexto jugó un papel clave en el álgebra griega, por lo tanto lo reproduciremos[4] con algunas explicaciones adicionales. Si en la figura (fig. 7.6) llamamos $AC=CB=a$ y $CD=b$, entonces el teorema nos dice que $(a+b)\cdot(a-b)+b^2=a^2$. La comprobación geométrica de esta afirmación no es

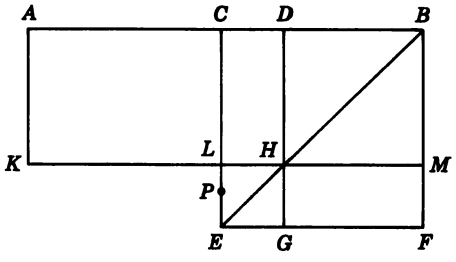


Figura 7.6

difícil. Sin embargo, el verdadero significado de la figura no está tanto en la demostración del teorema como en el frecuente uso que hicieron los algebristas geométricos griegos de figuras análogas. El mayor orgullo de un escolar moderno en álgebra es la resolución de la ecuación de segundo grado (que podrá ser capaz o no de justificar) y para el escolar griego el equivalente geométrico sería alguna figura parecida a la figura 7.6. Si se le pidiera a un estudiante griego construir un segmento x con la propiedad expresada por la condición $ax-x^2=b^2$, donde a y b son segmentos tales que $a>2b$, dibujaría la línea $AB=a$ y hallaría su punto medio C; entonces levantaría en C una perpendicular CP de longitud igual a b; con centro en P y radio $\frac{a}{2}$ dibujaría una circunferencia que corte a AB en un punto D. Entonces construiría sobre AB un rectángulo $ABMK$ de anchura $BM=BD$ y completaría el cuadrado $BDHM$: este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. Tal como lo denominaban los griegos, hemos aplicado al segmento $AB=a$ un rectángulo $AH=ax-x^2$, que es igual a un cuadrado dado b^2 y que se queda corto (del rectángulo AM) en un cuadrado DM. La demostración de esto viene dada por la proposición anterior (la

[4] A lo largo de todo este capítulo las traducciones y la mayor parte de las figuras están tomadas de *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, editado por T. L. Heath (1956).

II.5), según la cual es claro que el rectángulo $ADHK$ es igual al polígono cóncavo $CBFGHL$, es decir, difiere de $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ en el cuadrado $LHGE$ cuyo lado es, por construcción, $CD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$.

De una manera completamente análoga se resuelve la ecuación cuadrática $ax+x^2=b^2$, mediante el uso esta vez de II.6:

> «Si se corta en dos partes iguales una línea recta y se le añade (siempre en línea recta) otra línea recta, entonces el rectángulo contenido por el total (con la línea recta añadida) y la línea recta añadida, junto con el cuadrado construido sobre la mitad, es igual al cuadrado construido sobre la línea recta formada por la mitad y la línea recta añadida.»

Esta vez tenemos que «aplicar a una línea recta dada $AB=a$ un rectángulo $AM=ax+x^2$, que sea igual a un cuadrado dado b^2 y exceda al rectángulo AH en un cuadrado x^2» (fig. 7.7). En este caso se tiene que la distancia

$$CD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2};$$

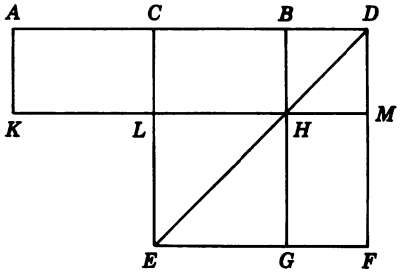


Figura 7.7

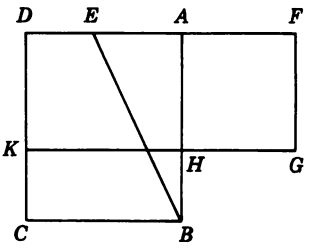


Figura 7.8

como por la proposición se sabe que el rectángulo $AM=ax+x^2$ más el cuadrado $LG=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ es igual al cuadrado $CF=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$, se sigue que se verifica la condición $ax+x^2=b^2$.

Las proposiciones siguientes del Libro II son variaciones sobre el álgebra geométrica que acabamos de ilustrar, con la II.11 como un caso particular importante de la II.6. Aquí Euclides resuelve la ecuación $ax+x^2=a^2$ trazando un cuadrado $ABCD$ de lado a, hallando el punto medio E del lado AD, trazando EB, extendiendo el lado DA hasta F tal que $EF=EB$ y completando el cuadrado $AFGH$ (fig. 7.8); entonces, extendiendo GH hasta que corte a DC en K, habremos

conseguido aplicar al segmento AD un rectángulo $FK = ax + x^2$ igual al cuadrado dado $AC = a^2$, y que lo «excede» en un cuadrado x^2.

La figura usada por Euclides en la proposición II.11 de los *Elementos* y de nuevo en la VI.30 (nuestra fig. 7.8) es la base de otra figura que aparece en muchos libros modernos de geometría para ilustrar una propiedad iterativa que tiene la sección áurea. Completemos el gnomon $BCDFGH$ de la figura 7.8 añadiéndole el punto L para completar el rectángulo $CDFL$ (fig. 7.9) y dentro del rectángulo

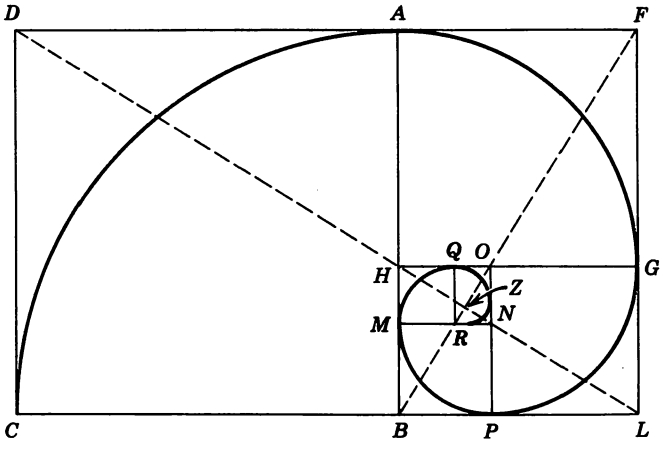


Figura 7.9

menor $LBGH$, que es semejante al rectángulo grande $LCDF$, construyamos el gnomon $LBMNOG$ semejante al $BCDFGH$ tomando $GO = GL$. Ahora, dentro del rectángulo $BHOP$, que es semejante a los $CDFL$ y $LBHG$, construyamos el gnomon $PBHQRN$, semejante a los $BCDFGH$ y $LBMNOG$. Continuando indefinidamente este proceso tendremos una sucesión indefinida de rectángulos semejantes encajados que tienden hacia un punto límite Z. Ocurre que este punto Z, que, como se ve fácilmente, es el punto de corte de las rectas FB y DL, es también el polo de una espiral logarítmica tangente a los lados de los rectángulos en los puntos C, A, G, P, M, Q... Sobre este fascinante diagrama pueden descubrirse otras propiedades sorprendentes[5].

Las proposiciones 12 y 13 del Libro II tienen el interés de que ya anuncian la trigonometría que iba a florecer pronto en Grecia. El lector reconocerá en estas proposiciones formulaciones geométricas, primero para un ángulo obtuso y después para un ángulo agudo, de lo que más tarde se iba a llamar teorema del coseno para triángulos planos:

Proposición 12

En un triángulo obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces

[5] Véase, por ejemplo, H. S. M. Coxeter: «The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game», *Scripta Mathematica*, 19 (1953), 135-143.

el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso.

Proposición 13

En un triángulo acutángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo agudo en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular desde el ángulo agudo.

Las demostraciones de las proposiciones 12 y 13 son análogas a las que se hacen hoy en los libros de trigonometría, mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras.

7. Los Libros III y IV

Generalmente se supone que el contenido de los dos primeros libros de los *Elementos* es en gran medida obra de los pitagóricos. Los Libros III y IV, por otra parte, están dedicados a la geometría del círculo y aquí el material se supone que fue tomado en su mayor parte de Hipócrates de Chios. El contenido de estos dos libros no se diferencia mucho de los teoremas sobre círculos que contienen los libros de texto actuales; así, por ejemplo, la primera proposición del Libro III pide construir el centro de un círculo dado, y la última, la proposición 37, es el bien conocido teorema que dice que si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, entonces el cuadrado construido sobre la tangente es igual al rectángulo contenido por la secante completa y su segmento exterior al círculo. El Libro IV contiene 16 proposiciones, la mayoría de ellas muy familiares para los estudiantes modernos, relativas a figuras inscritas o circunscritas a una circunferencia. Los teoremas sobre medida de ángulos se aplazan hasta que se disponga de una teoría de proporciones bien establecida.

8. La teoría de proporciones

Los libros más admirados de los trece que componen los *Elementos* han sido el quinto y el décimo, el primero de ellos sobre la teoría general de proporciones y el segundo sobre la clasificación de los inconmensurables. El descubrimiento de los inconmensurables había provocado una crisis lógica que arrojaba graves dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad, pero la crisis había sido evitada con éxito por medio de los principios enunciados por Eudoxo. No obstante, los matemáticos griegos tendían a evitar las proporciones, y ya hemos visto que Euclides, por ejemplo, retrasa su uso tanto como puede, sustituyendo una

relación entre longitudes que tendría que ser de la forma $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ por la igualdad de las áreas $xc=ab$. Antes o después, sin embargo, eran necesarias las proporciones, y así Euclides ataca el problema en el Libro V de los *Elementos*. Algunos comentaristas van tan lejos como para sugerir que el libro completo, que contiene 25 proposiciones, es obra de Eudoxo, pero esto parece improbable. Algunas de las definiciones de este libro, tales como la definición de razón, son tan vagas que resultan inútiles, pero la definición 4 en cambio es esencialmente el axioma de Eudoxo y Arquímedes: «Magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra cuando son capaces, tomando múltiplos, de superar una a la otra», y la definición 5 de igualdad de razones es precisamente la que hemos dado anteriormente al hablar de la definición de proporcionalidad de Eudoxo.

Al lector superficial podría parecerle el Libro V tan superfluo como el II, ya que ambos han sido desplazados actualmente por las reglas correspondientes del álgebra simbólica, pero un lector más minucioso e interesado en la axiomática verá inmediatamente que el Libro V trata de temas de una importancia fundamental para toda la matemática. El libro comienza con unas cuantas proposiciones que son equivalentes a cosas tales como la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha de la multiplicación respecto de la suma, la distributividad por la izquierda de la multiplicación con respecto a la resta y la propiedad asociativa de la multiplicación $(ab)c=a(bc)$; a continuación vienen las leyes que rigen el «mayor que» y el «menor que» y las propiedades bien conocidas de las proporciones. Frecuentemente se suele afirmar que el álgebra geométrica griega no podía superar el segundo grado en geometría plana ni el tercer grado en geometría sólida, pero realmente ése no es el caso; la teoría general de proporciones permitía trabajar con productos de cualquier número de dimensiones, porque una ecuación de la forma $x^4=abcd$ es equivalente a una que venga expresada en términos de productos de razones de segmentos, tal como $\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}=\frac{c}{x}\cdot\frac{d}{x}$.

Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el Libro V, la utiliza Euclides en el Libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes. Es notable la proposición 31, que nos da una generalización del teorema de Pitágoras: «En todo triángulo rectángulo la figura construida sobre la hipotenusa es igual a las figuras semejantes y análogamente construidas sobre los catetos»; Proclo atribuye esta generalización a Euclides mismo. El Libro VI contiene también, en sus proposiciones 28 y 29, una generalización del método de aplicación de áreas, aprovechando que las bases firmes para la teoría de proporciones establecidas en el Libro V le permiten al autor hacer uso libremente del concepto de semejanza, y así los rectángulos del Libro II son reemplazados ahora por paralelogramos, y lo que se pide es aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o se quede corto en un paralelogramo semejante a otro dado. Estas construcciones, como las de II.5-6, son en realidad soluciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas $bx=ac\pm x^2$, sujetas a la restricción (implicada en IX.27) de que el discriminante no sea negativo.

9. La teoría de números

Los *Elementos* de Euclides son considerados frecuentemente de una manera equivocada como un libro dedicado exclusivamente a la geometría. Ya hemos descrito dos Libros, el II y el V, que son casi completamente algebraicos; otros tres Libros, el VII el VIII y el IX están dedicados a la teoría de números. La palabra «número» para los griegos se refería siempre a lo que nosotros llamamos los números naturales o enteros positivos. El Libro VII comienza con una lista de 22 definiciones, distinguiendo varios tipos de números, par e impar, primo y compuesto, plano y sólido (es decir, el que se puede expresar como producto de dos o de tres factores respectivamente), y por último la definición de número perfecto como «aquel que es igual a sus propias partes». Los teoremas que aparecen en los Libros VII, VIII y IX serán conocidos probablemente para el lector que haya seguido un curso elemental de teoría de números, pero el lenguaje en que están desarrolladas las demostraciones no le será familiar, con toda seguridad. A todo lo largo de estos tres libros cada número se representa por un segmento, y así Euclides hablará de un número como *AB*. (El descubrimiento de los inconmensurables había mostrado ya que no todos los segmentos podían asociarse con números enteros, pero el recíproco, que todos los números pueden representarse por segmentos, seguía siendo obviamente verdadero). Por lo tanto, Euclides no usa las expresiones «es múltiplo de» o «es un factor o divisor de», sino que las sustituye por «está medido por» o «mide a» respectivamente; por ejemplo, un número n está medido por otro número m si existe un tercer número k tal que $n=km$.

El Libro VII propiamente dicho empieza con dos proposiciones que constituyen juntas una famosa regla de la teoría de números, que conocemos hoy con el nombre de «algoritmo de Euclides» para hallar el máximo común divisor (o medida) de dos números dados. Consiste en un esquema que sugiere una aplicación inversa y repetida del axioma de Eudoxo. Dados dos números distintos, se resta el menor a del mayor b repetidamente hasta que se obtenga un resto r_1 más pequeño que el menor; a continuación se resta repetidamente a este resto r_1 de a hasta obtener un resto $r_2 < r_1$; después se resta repetidamente r_2 de r_1 y así sucesivamente. Al final este proceso conducirá a un resto r_n que medirá a r_{n-1}, luego a todos los restos anteriores, así como a a y a b; este número r_n será el máximo común divisor de a y de b. Entre las proposiciones siguientes nos encontramos con equivalentes de teoremas conocidos de la aritmética; así, la proposición 8 nos dice que si $an=bm$ y $cn=dm$ entonces $(a-c)n=(b-d)m$, y la proposición 24 afirma que si a y b son primos con c, entonces ab es primo con c. El libro se cierra con una proposición, la 39, que nos da una regla para hallar el mínimo común múltiplo de varios números.

El Libro VIII es uno de los menos interesantes de los 13 libros de los *Elementos*. Comienza con varias proposiciones acerca de números en proporción continua (o en progresión geométrica) y se dedica después a algunas propiedades sencillas de los cuadrados y los cubos, terminando con la proposición 27: «Números sólidos semejantes tienen uno a otro la razón de un número cúbico a otro número cúbico»; esta proposición expresa simplemente que si tenemos un «número sólido» $ma \cdot mb \cdot mc$ y otro «número sólido semejante» $na \cdot nb \cdot nc$ entonces su razón será la de $m^3 : n^3$, es decir, de un cubo a otro cubo.

10. Números primos y perfectos

El Libro IX, último de los tres libros sobre teoría de números, contiene varios teoremas que tienen un interés especial. Entre ellos el más celebrado es el que expresa la proposición 20: «Los números primos son más que cualquier cantidad fijada de antemano de números primos», es decir, Euclides da aquí la demostración elemental bien conocida de que el número de primos es infinito. La demostración es indirecta, pues lo que se demuestra es que la hipótesis de un número finito de primos conduce a contradicción. Sea P el producto de *todos* los números primos, supuesto que sólo hay una cantidad finita de ellos, y tomemos el número $N = P + 1$; ahora, N no puede ser primo porque ello estaría en contradicción con la hipótesis de que P era el producto de *todos* los primos, luego N es compuesto y debe ser medido por algún primo p; pero p no puede ser ninguno de los factores primos de P, porque entonces tendría que ser un factor de 1; luego p tiene que ser un primo distinto de todos los que aparecen multiplicados en P, y así la hipótesis de que P era el producto de *todos* los primos tiene que ser falsa.

La proposición 35 de este libro contiene una fórmula para hallar una suma de números en progresión geométrica, expresada de una manera elegante pero poco usual:

> Si tantos números como queramos están en proporción continua, y se restan del segundo y del último números iguales al primero, entonces así como el exceso del segundo es al primero, así será el exceso del último a todos los anteriores a él.

Esta proposición es, desde luego, equivalente a la fórmula

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que a su vez es equivalente a

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

La proposición siguiente, que es la última del Libro IX, nos da la conocida fórmula para los números perfectos: «Si tenemos tantos números como queramos, comenzando por la unidad y dispuestos en proporciones doble continua, hasta que su suma sea primo, y si se multiplica esta suma por el último, entonces el producto obtenido será un número perfecto»; es decir, en notación moderna, si $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto. La demostración es fácil haciendo uso de la definición de número perfecto dada en el Libro VII. Los antiguos griegos conocían los cuatro primeros números perfectos: 6, 28, 496 y 8.128. Euclides no dio una respuesta a la cuestión recíproca de si su fórmula da o no *todos* los números perfectos; ahora se sabe que todos los números perfectos *pares* son del tipo exhibido por Euclides, pero el problema de la posible existencia

de números perfectos impares es un problema abierto[6]. De las dos docenas de números perfectos conocidos hasta la fecha todos son pares, pero concluir por una inducción que todos deben ser pares sería arriesgado.

En las proposiciones que van desde la 21 a la 36 del Libro IX hay una unidad que hace suponer que estos teoremas constituyeron alguna vez un sistema matemático autocontenido, posiblemente el más antiguo de la historia de la matemática y que se deriva presumiblemente de mediados o incluso principios del siglo V a.C. Se ha sugerido que las proposiciones 1 a 36 del Libro IX fueron tomadas probablemente por Euclides de un libro de texto pitagórico, sin introducir en ellas ningún cambio esencial[7].

11. Los inconmensurables

El Libro X de los *Elementos* fue, antes de los comienzos del álgebra moderna, el más admirado y el más temido; trata de la clasificación sistemática de los segmentos inconmensurables de las formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, donde a y b, cuando son de la misma dimensión, son conmensurables. Hoy podríamos considerar este libro como un libro sobre *números* irracionales de los tipos mencionados, donde a y b son *números* racionales, pero Euclides consideraba este libro como una parte de la geometría más bien que de la aritmética, y, de hecho, las proposiciones 2 y 3 reproducen, duplicándolas para magnitudes geométricas, las dos primeras proposiciones del Libro VII que se referían a números enteros. Aquí demuestra Euclides que si se le aplica a dos segmentos distintos el proceso que hemos descrito antes como algoritmo de Euclides, y si el resto nunca mide al resto anterior, entonces las magnitudes son inconmensurables. La proposición 3 demuestra que cuando se aplica el algoritmo en cuestión a dos magnitudes conmensurables, dará como resultado la mayor posible medida común de los dos segmentos.

El Libro X contiene 115 proposiciones, más que ningún otro, la mayoría de las cuales expresan equivalentes geométricos de propiedades de lo que hoy llamamos aritméticamente irracionales cuadráticos. Entre estos teoremas los hay que expresan la racionalización de denominadores en fracciones del tipo $\frac{a}{(b \pm \sqrt{c})}$ o $\frac{a}{(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})}$; los segmentos dados por raíces cuadradas, o por raíces cuadradas de sumas de raíces cuadradas, son constructibles con regla y compás tan fácilmente como las combinaciones racionales. Una razón de que los griegos hicieran un álgebra geométrica en vez de un álgebra aritmética era la de que la primera parecía

---

Para más detalles véase L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (Washington, D.C., 1919-1923, 3 vols.), I, 3-33.

[7] Véase Arpád Szabó, «The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beninnings of Its Foundations on Definitions and Axioms», *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 27-48A.

ser más general que la segunda, en vista de la falta del concepto de número real. Las raíces de la ecuación $ax - x^2 = b^2$, por ejemplo, pueden ser construidas siempre que $a > 2b$. ¿Por qué entonces se había tomado Euclides tantas molestias en demostrar, en las proposiciones 17 y 18 del Libro X, las condiciones bajo las cuales las raíces de esta ecuación son conmensurables con a? Allí demostraba que dichas raíces son conmensurables o inconmensurables con a según que $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ y a sean conmensurables o inconmensurables. Se ha sugerido[8] que tales consideraciones indican que los griegos utilizaban sus soluciones de las ecuaciones cuadráticas también para problemas *numéricos*, tal como hacían los babilonios con sus sistemas de ecuaciones $x + y = a$, $xy = b^2$; en tales casos sería interesante saber si las raíces van a ser o no van a ser expresables como cocientes de enteros. Un estudio minucioso de la matemática griega parece suministrar una cierta evidencia de que bajo el barniz geométrico había un mayor interés por el cálculo y las aproximaciones numéricas de lo que dan a entender los tratados clásicos existentes.

12. La geometría de los sólidos

El material que nos encontramos en el Libro XI, que comprende 39 proposiciones relativas a la geometría tridimensional, resultará conocido en su mayor parte para cualquiera que haya seguido un curso de geometría elemental de sólidos. Una vez más las definiciones pueden ser fácilmente objeto de crítica, pues Euclides define un sólido como «lo que tiene longitud, anchura y profundidad», y entonces nos dice que «una frontera de un sólido es una superficie»; las cuatro últimas definiciones son las de cuatro de los poliedros regulares, entre las cuales no figura la del tetraedro, probablemente por considerarlo incluido en una definición previa de pirámide como «una figura sólida limitada por planos, que se construye desde un plano a un punto arbitrario». Las 18 proposiciones del Libro XII se refieren todas a la medida de figuras utilizando el método de exhausción; el libro comienza con una demostración minuciosa y detallada del teorema que asegura que las áreas de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados sobre sus diámetros. A continuación se aplica el mismo método, de una típica doble *reductio ad absurdum*, al cálculo de los volúmenes de pirámides, conos, cilindros y esferas. Arquímedes atribuyó posteriormente las demostraciones rigurosas de estos teoremas a Eudoxo, del cual probablemente adaptó Euclides la mayor parte de este material.

El último libro está dedicado exclusivamente a las propiedades de los cinco sólidos regulares, hecho que ha movido a algunos historiadores a pensar que los *Elementos* fueron compuestos como una glorificación de las figuras cósmicas o platónicas. En vista de que una gran parte del material previo está muy lejos de relacionarse con nada que tenga que ver con los poliedros regulares, una hipótesis como ésta resulta completamente gratuita, pero en todo caso estos teoremas finales constituyen un «clímax» adecuado para un tratado tan notable. El objeto de estos teoremas es el de «inscribir» cada uno de los sólidos regulares en una esfera, es

[8] Véase Heath, *Elements of Euclid*, III, 43-45.

decir, hallar la razón de la arista del sólido al radio de la esfera circunscrita. Los comentaristas griegos atribuyen estos cálculos a Teeteto, a quien se debe, pues, probablemente la mayor parte del Libro XIII. En los preliminares de estos cálculos se refiere Euclides una vez más a la división de una recta en media y extrema razón, demostrando que «el cuadrado sobre el segmento mayor más la mitad del total es igual a cinco veces el cuadrado sobre la mitad», como se comprueba fácilmente resolviendo la ecuación $\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$, y menciona otras propiedades de las diagonales de un pentágono regular. A continuación, en la proposición 10 demuestra Euclides el teorema bien conocido de que un triángulo cuyos lados son respectivamente los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en la misma circunferencia es un triángulo rectángulo. Las proposiciones 13 a 17 expresan las razones de la arista al diámetro para cada uno de los sólidos regulares inscritos en la esfera, a saber: $\frac{e}{d}$ es $\sqrt{\frac{2}{3}}$ para el tetraedro, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ para el octaedro, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ para el hexaedro o cubo, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ para el icosaedro y $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{3}}$ para el dodecaedro. Por último, en la proposición 18, la última de los *Elementos*, se demuestra de una manera fácil que no puede haber ningún otro poliedro regular aparte de estos cinco. Unos 1.900 años más tarde al astrónomo Kepler le impresionó tanto este hecho que construyó una cosmología basada esencialmente en los cinco sólidos regulares, en la creencia de que había debido ser la clave que el creador habría utilizado para la construcción de la estructura de los cielos.

13. Los libros apócrifos

En los tiempos antiguos no era raro el atribuir a un autor famoso obras que no eran suyas, y así algunas versiones de los *Elementos* de Euclides incluían un libro catorce e incluso un libro quince, ambos de los cuales apócrifos como ha demostrado la crítica erudita posterior. El llamado Libro XIV continúa con la comparación hecha por Euclides de los sólidos regulares inscritos en una esfera, y el resultado más importante es el de que la razón de las superficies del dodecaedro y el icosaedro inscritos en la misma esfera es la misma que la razón de sus volúmenes, siendo esta razón la de la arista del cubo a la arista del icosaedro, es decir, $\sqrt{\frac{10}{3(5-\sqrt{5})}}$. Hoy se cree que este libro pudo ser escrito por Hipsicles apoyándose en un tratado de Apolonio que se ha perdido, en el que comparaba el dodecaedro y el icosaedro. (Hipsicles, que vivió probablemente durante la segunda mitad del siglo II a.C., se cree que pudo ser el autor de una obra astronómica, el *De ascensionibus*, a partir de la cual quizá se adoptase la división de la circunferencia en 360 partes iguales). El hecho de que una misma circunferencia sea la circunscrita al pentágono regular del dodecaedro y al triángulo del icosaedro

(ambos supuestos inscritos en la misma esfera) se dice que fue demostrado por Aristeo, aproximadamente contemporáneo de Euclides.

El falso Libro XV, que es inferior, se considera obra (al menos en parte) de Isidoro de Mileto (aprox. 532 d.C.) el arquitecto de la catedral de la Santa Sabiduría (Hagia Sophia) de Constantinopla. Este libro trata también de los sólidos regulares, mostrando cómo inscribir algunos de ellos dentro de otros, contando su número de aristas y de ángulos sólidos y calculando las medidas de los ángulos diedros formados por dos caras que tienen una arista común. Es interesante hacer notar que, a pesar de tales enumeraciones, todos los antiguos pasaron por alto la llamada fórmula poliédrica de Euler, enunciada en el siglo XVIII.

14. La influencia de los *Elementos*

Los *Elementos* de Euclides no solamente fueron la primera obra matemática griega de importancia que ha llegado hasta nosotros, sino también el libro de texto que ha ejercido una mayor influencia de todos los tiempos. Fue escrito hacia el 300 a.C., y desde entonces fue copiado y recopiado sin cesar, con la consecuencia de que se deslizaron en él errores y variaciones de una manera inevitable; incluso algunos editores posteriores, especialmente Teón de Alejandría, a finales del siglo IV, pretendieron mejorar el original. Sin embargo, ha sido posible obtener una impresión bastante buena del contenido de la versión euclídea por comparación entre más de media docena de copias griegas manuscritas que datan en su mayoría de entre los siglos X y XII. Las ampliaciones posteriores, que aparecen generalmente como escolios, añaden información adicional, con un interés histórico frecuentemente, y en la mayor parte de los casos se distinguen con facilidad del texto original. También nos han llegado copias de los *Elementos* en su traducción al árabe, que se vertieron más tarde al latín en el siglo XII y, por último, a los idiomas vernáculos durante el siglo XVI. La primera versión impresa de los *Elementos* apareció en Venecia en 1482, y fue uno de los primerísimos libros matemáticos que se imprimió; se estima que desde entonces se han publicado más de un millar de ediciones. Probablemente ningún otro libro salvo la Biblia puede jactarse de haber tenido tantas ediciones, y desde luego ninguna otra obra matemática ha tenido una influencia comparable con la de los *Elementos* de Euclides. ¡Qué apropiado resultaba, pues, el que los sucesores de Euclides se refirieran a él llamándole «El Elementador»!

Bibliografía

Archibald, R. C. (ed.): *Euclid's Book on Divisions of Figures* (Cambridge: Cambridge University Press, 1915).

Cohen, M. R., y I. E. Drabkin: *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958).

Frankland, W. B.: *The First Book of Euclid's Elements, with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus* (Cambridge: Cambridge University Press, 1905).

Heath, T. L.: *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.).

—— (ed.): *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Cambridge, 1908, 3 vols.; ed. en rústica, New York: Dover, 1956).
Hultsch, F. O.: «Eukleides», en Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1909), vol. VI, columnas 1003-1052.
Loria, Gino: *Storia delle matematiche* (Turín: Sten, 1929-1933, 3 vols.).
Sarton, George: *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954).
Szabó, Arpád: «Anfänge des euklidischen Axiomensystems», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960), 37-106.
Thomas, Ivor (ed.): *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.).
Thomas-Stanford, Charles: *Early Editions of Euclid's Elements* (Londres: Bibliographical Society, 1926).
Vogt, Heinrich: «Die Lebenzeit Euklids», *Bibliotheca Mathematica* (3), **13** (1913), 193-202.

Ejercicios

1. Descríbanse las fuentes que probablemente utilizó Euclides para escribir los *Elementos*; justifíquense las conjeturas que se formulen.
2. ¿Cuál de los trece libros de los *Elementos* considera usted como el más importante? Justifique su respuesta.
3. ¿Cuál de los trece libros de los *Elementos* considera usted como el menos importante? Justifique su respuesta.
4. Dados dos segmentos a y b, constrúyanse con regla y compás segmentos x e y que satisfagan las condiciones $x+y=a$, $xy=b^2$.
5. Dados dos segmentos a y b, constrúyase con regla y compás una solución x de la ecuación $x^2=ax+b^2$.
6. Utilícese el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 456 y 759.
7. Utilícese el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 567, 839 y 432.
8. ¿Cuál es la mayor unidad de medida común para dos segmentos de longitudes $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{7}$ respectivamente? ¿Y para dos segmentos de longitudes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente, con a, b, c, d, números naturales primos entre sí?
9. Dados dos segmentos desiguales a y b, demuéstrese que si el segmento c ha sido obtenido aplicando el algoritmo de Euclides a los a y b, entonces c es la mayor unidad de medida común para a y b.
10. Complétense todos los detalles de la demostración del teorema de Pitágoras por el método del «molino de viento».
11. Todos los números perfectos pares terminan en 6 o en 28, y dan resto 1 al reducirlos por el método de los «nueves» (salvo en el caso del primer número perfecto). Compruébense estas afirmaciones para los cuatro primeros números perfectos.
12. Muéstrese cómo puede trazarse una tangente a una circunferencia desde un punto exterior.
13. Justifíquese la fórmula de Euclides para la suma de los términos de una progresión geométrica.
14. El número $2^{13}-1$ es primo. Utilícese este hecho para calcular el quinto número perfecto en el orden creciente natural.

15. Demuéstrese que no puede haber ningún otro sólido regular convexo más que los que da Euclides.
16. Demuéstrese el teorema del coseno para triángulos acutángulos, indicando exactamente de qué manera podría haber expresado Euclides esta relación.

*17. En los *Elementos*, IX. 14, se demuestra que un número natural puede descomponerse en producto de factores primos de una manera única. Demuéstrese esta proposición.

*18. Demuéstrese la fórmula de Euclides para los números perfectos.

*19. Demuéstrese, por el método de exhausción, que los volúmenes de dos esferas están en la misma razón que los de los cubos construidos sobre sus diámetros (*Elementos*, XII. 18).

*20. Demuéstrese que si se inscriben en una misma circunferencia un pentágono, un hexágono y un decágono regulares, el triángulo formado por el lado del pentágono, el lado del hexágono y el lado del decágono es un triángulo rectángulo (*Elementos*, XIII. 10).

*21. El libro de Euclides *Sobre la división de las figuras* incluye una construcción de una recta paralela a las bases de un trapecio y que lo divide en dos partes de áreas iguales. Muéstrese cómo puede efectuarse tal construcción con la regla y el compás únicamente.

Capítulo VIII
ARQUIMEDES DE SIRACUSA

> Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.
>
> *Voltaire*

1. El asedio de Siracusa

Alejandría fue el centro de la actividad matemática a lo largo de toda la Epoca Helenística, y, sin embargo, el matemático más importante de esa época (y sin duda de toda la antigüedad) no era natural de dicha ciudad. Arquímedes pudo haber estudiado durante algún tiempo en Alejandría con los discípulos de Euclides y, de hecho, mantenía una comunicación con los matemáticos de allí, pero vivió y murió en Siracusa. Los detalles que conocemos de su vida son escasos, pero disponemos de alguna información acerca de él por la historia de la vida de Marcelo, el general romano, escrita por Plutarco. Durante la segunda guerra púnica la ciudad de Siracusa se vio cogida en medio de la lucha por el poder entre Roma y Cartago, y al haber ligado su suerte a la de los cartagineses, la ciudad fue sometida por los romanos a un asedio durante los años 214 al 212 a.C. Se nos cuenta que durante este asedio Arquímedes inventó ingeniosas máquinas de guerra para mantener alejado al enemigo, catapultas para lanzar piedras, sogas, poleas y garfios para levantar los barcos romanos y dejarlos caer estrellándolos, artificios para prender fuego a los barcos desde lejos, etc. Finalmente, sin embargo, Siracusa cayó en poder de los romanos gracias a una «quinta columna»; durante el saqueo de la ciudad Arquímedes fue asesinado por uno de los soldados romanos, a pesar de las órdenes expresas de Marcelo de que se le respetara la vida. Teniendo en cuenta que se nos asegura que Arquímedes tenía unos 75 años, habría nacido probablemente en torno al 287 a.C. Su padre era astrónomo y Arquímedes mismo se hizo una reputación en astronomía; se dice que Marcelo se habría reservado para sí mismo como parte del botín algunos ingeniosos planetarios que había construido Arquímedes para representar los movimientos de los cuerpos celestes. Las narraciones sobre la vida de Arquímedes concuerdan, sin embargo, en pintárnoslo atribuyendo poco valor a sus inventos mecánicos en comparación con los productos de su pensamiento. Incluso cuando se manejaba con palancas y otras máquinas simples estaba mucho más interesado en los principios generales que en las aplicaciones prácticas.



Representación en mosaico de la muerte de Arquímedes. Lo que se creyó ser el suelo de una habitación en Pompeya, se piensa ahora que es una copia (o falsificación) del siglo XVI (Instituto de Arte Municipal, Frankfurt am Main).

2. La ley de la palanca

Arquímedes no fue, naturalmente, el primero en usar la palanca, ni siquiera el primero en formular la ley general de la palanca. En las obras de Aristóteles se encuentra la afirmación de que dos pesos en los extremos de una palanca se equilibran cuando son inversamente proporcionales a sus distancias al punto de apoyo, y los peripatéticos relacionaban esta ley con su hipótesis de que el movimiento rectilíneo vertical es el único movimiento natural terrestre. Ellos señalaban que los extremos de los brazos desiguales de una palanca describirían arcos de circunferencias y no líneas rectas en sus desplazamientos en torno al punto de apoyo, de manera que el extremo del brazo mayor se movería siguiendo una circunferencia mayor, luego el camino recorrido se aproximaría más al movimiento rectilíneo vertical que no el del extremo del brazo menor; por lo tanto, la ley de la palanca resulta ser una consecuencia natural de este principio cinemático cualitativo. Arquímedes, por su parte, deducía la misma ley a partir de un postulado estático más plausible, el de que cuerpos bilateralmente simétricos están

en equilibrio. Es decir, supongamos que una barra sin peso, de cuatro unidades de longitud y que soporta tres unidades de peso, una en cada extremo y una en el centro está en equilibrio cuando el punto de apoyo está situado en su punto medio (fig. 8.1), en virtud del axioma de Arquímedes, por la simetría del sistema. Pero este



Figura 8.1

mismo principio de simetría muestra también que, si consideramos sólo la mitad de la derecha del sistema, entonces el estado de equilibrio se conservará si los dos pesos separados por las dos unidades de longitud se llevan juntos al punto medio del brazo derecho. Lo cual significa que un peso de una unidad separado del punto de apoyo por dos unidades mantendrá en equilibrio a un peso de dos unidades que está a una unidad de distancia de dicho punto de apoyo. Mediante una generalización de este método estableció Arquímedes la ley de la palanca exclusivamente a partir de principios estáticos, sin recurrir al argumento cinemático de los aristotélicos. En la historia de la ciencia durante el período medieval se verá que la conjunción de punto de vista estáticos y cinemáticos produjo avances importantes en la ciencia en general y particularmente en la matemática.

La obra de Arquímedes sobre la ley de la palanca forma parte de su tratado en dos libros *Sobre el equilibrio de los planos*. Este libro no es el tratado más antiguo existente de lo que podríamos llamar física, ya que Aristóteles había publicado aproximadamente un siglo antes una importante obra en ocho libros, titulada precisamente *Física*, pero mientras que el enfoque aristotélico era especulativo y no matemático, el desarrollo de Arquímedes era análogo al de la geometría de Euclides. A partir de un conjunto de postulados sencillos demostraba Arquímedes algunas conclusiones muy abstrusas, estableciendo así la estrecha relación entre matemática y mecánica que iba a ser tan importante tanto para la física como para la matemática[1]. El primer libro del *Sobre el equilibrio de los planos* se ocupa de figuras rectilíneas y se cierra con el cálculo de los centros de gravedad del triángulo y el trapecio; el Libro II está dirigido al cálculo del centro de gravedad de un segmento parabólico y demuestra el hecho de que este centro está situado sobre el diámetro del segmento y lo divide en dos segmentos en la razón de 3 a 2; el método usado es el ya familiar método de exhausción, pero un estudiante que conozca el cálculo infinitesimal elemental y el principio de los momentos (o ley de la palanca) puede comprobar fácilmente el resultado obtenido.

3. El principio hidrostático

A Arquímedes se le podría muy bien llamar el padre de la física matemática, no sólo por su obra *Sobre el equilibrio de los planos*, sino también por su otro tratado

[1] Véase E. J. Dijksterhuis, *Archimedes* (1957), págs. 286 y sigs., donde se llama la atención sobre las diferencias de opinión que hay acerca del rigor de las demostraciones de Arquímedes.

en dos libros *Sobre los cuerpos flotantes*. De nuevo aquí, a partir de un simple postulado acerca de la naturaleza de la presión de un fluido, obtiene algunos resultados muy profundos; entre las primeras proposiciones están las dos que formulan el bien conocido principio hidrostático de Arquímedes:

> «Cualquier sólido más ligero que un fluido y situado en él se sumergirá hasta el punto en que el peso del sólido sea igual al peso del fluido desplazado» (I.5)
>
> «Cualquier sólido más pesado que un fluido y situado en él se sumergirá hasta el fondo del fluido, y si se pesa dicho sólido dentro del fluido resultará más ligero que su verdadero peso en el peso del fluido desplazado» (I.7)[2].

La demostración matemática de este principio de flotación fue sin duda el descubrimiento que hizo que el ensimismado Arquímedes abandonara su baño de un salto y corriera desnudo hasta su casa gritando «Eureka» («Lo he encontrado»). Es posible también, aunque menos probable, que este principio le ayudase a comprobar la honradez de un orfebre sospechoso de haber sustituido fraudulentamente parte del oro por plata al fabricar una corona (o mejor una girnalda) para el rey Herón de Siracusa, amigo (si es que no era incluso pariente) de Arquímedes. Un fraude como ése podía haber sido detectado fácilmente por el sencillo método de comparar las densidades del oro, la plata y la corona, midiendo simplemente los volúmenes de agua desplazada al sumergir sucesivamente pesos iguales de cada uno de ellos en un recipiente lleno de agua hasta el borde. El arquitecto romano posterior Vitrubio atribuyó este método a Arquímedes, y una obra poética latina anónima, el *De Ponderibus et Mensuris*, escrita probablemente en torno al 500 d.C., menciona el uso por Arquímedes del principio de flotación.

El tratado de Arquímedes *Sobre los cuerpos flotantes* contiene muchas cosas más que las propiedades sencillas de los fluidos que acabamos de mencionar. Prácticamente todo el Libro II, por ejemplo, trata de las posiciones de equilibrio de segmentos de paraboloides flotando en fluidos, y demuestra, entre otras cosas, que la posición de reposo depende de los pesos específicos relativos del paraboloide sólido y del fluido en el que flota. Una proposición típica de éstas es la proposición 4:

> «Supongamos dado un segmento recto de un paraboloide de revolución cuyo eje a es mayor que $\frac{3}{4}p$ (donde p es el parámetro) y cuyo peso específico es menor que el de un cierto fluido, pero está con respecto a él en una razón no menor que $(a-\frac{3}{4}p)^2 : a^2$, entonces si el segmento de paraboloide se sitúa en el fluido con su eje en una inclinación arbitraria de la vertical, pero de manera que su base no toque la superficie del fluido, el segmento de paraboloide no permanecerá en dicha posición, sino que regresará a la posición en que su eje está vertical.»

Y a continuación siguen otros casos aún más complicados, con largas demostraciones. Arquímedes podría muy bien haber dado un curso teórico de ingeniería naval, aunque lo más probable es que hubiera preferido dar un curso

[2] Las traducciones en este capítulo están tomadas de *The Works of Archimedes*, editado por T. L. Heath (1897).

universitario de matemática pura. No siendo Arquímedes un típico sabio encerrado en su «torre de marfil», acudía con su ayuda en casos de emergencia de tipo mecánico. En una ocasión, según se nos cuenta, había sido construido un barco para el rey Herón que resultó ser demasiado pesado para ser botado al mar, pero Arquímedes, usando una ingeniosa combinación de poleas y palancas, realizó por sí solo la tarea. Se le atribuye también la afirmación jactanciosa de que con una palanca suficientemente larga y con un punto de apoyo adecuado podría mover la Tierra. Probablemente en Alejandría se interesara Arquímedes en los problemas técnicos que plantea el problema de sacar agua del Nilo para regar las tierras cultivables del valle; con esta finalidad inventó un mecanismo que se conoce ahora como tornillo de Arquímedes, formado por un tubo o conducto de forma helicoidal cilíndrica que se hace girar por medio de una manivela en torno a un eje, manteniéndolo inclinado.

4. El *Arenario*

En la antigüedad griega se hacía una distinción clara no sólo entre la teoría y las aplicaciones prácticas, sino también entre el cálculo rutinario y mecánico y el estudio teórico de las propiedades de los números; al primero de estos dos aspectos, por el que se dice que los sabios griegos mostraron generalmente desprecio, se le dio el nombre de logística, mientras que se sobreentendía que la aritmética, ocupación filosófica honorable, hacía referencia solamente al segundo aspecto. Se ha dicho incluso que esta actitud clásica con respecto al cálculo rutinario venía a reflejar la estructura social de la antigüedad, en la que los cálculos numéricos quedaban relegados a los esclavos. Sea el que sea el grado de verdad que encierra este punto de vista, no obstante parece haberse visto exagerado, puesto que los griegos se tomaron la molestia de reemplazar su antiguo sistema de numeración ático o herodiánico por otro sensiblemente más ventajoso, el jónico o alfabético. Arquímedes vivió aproximadamente en la época en que se hizo efectivo el cambio de la numeración ática a la jónica[3], y esto puede darnos una explicación del hecho de que se entretuviera en hacer una contribución a la logística. En una obra titulada *Psammites* («El cálculo de los granos de arena», más conocida en español como «El Arenario») se jactaba Arquímedes de que podría escribir un número mayor que el número de granos de arena necesarios para llenar el universo. En este proceso de cálculo Arquímedes se refería a una de las teorías astronómicas más atrevidas de la antigüedad, la formulada por Aristarco de Samos hacia mediados del siglo III a.C., en la que proponía situar a la Tierra en movimiento alrededor del Sol. Tal sistema astronómico parecía sugerir que las posiciones relativas de las estrellas fijas deberían cambiar al desplazarse la Tierra mucho millones de millas en su movimiento alrededor del Sol. La ausencia aparente de tal desplazamiento paraláctico fue uno de los motivos principales que impulsó a los más grandes

[3] Sin embargo, O. Neugebauer, en su *Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), pág. 11, cree que el sistema alfabético era usado ya varios siglos antes de la época de Arquímedes.

astrónomos de la antiguedad (incluyendo posiblemente a Arquímedes mismo) a rechazar la hipótesis heliocéntrica; Aristarco, no obstante, aseguraba con gran clarividencia que la ausencia de paralaje podía atribuirse a la enorme distancia que separaba a las estrellas fijas de la Tierra. Ahora bien, Arquímedes, para cumplir su jactanciosa promesa, tenía que considerar forzadas al máximo las posibles dimensiones del universo, y así demostró que podía enumerar los granos de arena necesarios para llenar incluso el inmenso mundo de Aristarco. Arquímedes comienza con ciertas estimaciones que se habían hecho en su época relativas a los tamaños de la Tierra, la Luna y el Sol, y a las distancias de la Luna, el Sol y las estrellas fijas. Según nos dice, se había dado en su época una estimación de la circunferencia de la Tierra en unos 300.000 estadios (unas 30.000 millas, ya que el estadio utilizado generalmente venía a ser un décimo de milla); Arquímedes concedió que se hubiera podido producir una estimación demasiado baja e imaginó una circunferencia de $3_1000.000$ de estadios. Por otra parte, Aristarco había calculado que el diámetro del Sol era entre 18 y 20 veces el de la Luna, el cual es a su vez menor que el de la Tierra. Para mayor seguridad de no quedarse corto, Arquímedes consideró que el diámetro del Sol no fuera mayor que 30 veces el de la Luna (o, a fortiori, el de la Tierra); a continuación supuso Arquímedes que el tamaño aparente del Sol era mayor que una milésima parte de la circunferencia completa, ya que Aristarco lo había estimado en medio grado aproximadamente, resultado que parecía confirmar la observación. Conociendo una cota superior para el tamaño real del Sol y una cota inferior para su tamaño aparente se podía calcular fácilmente una cota superior para su distancia a la Tierra. Por último, supuso Arquímedes que el universo de Aristarco tenía un radio que era a la distancia del Sol a la Tierra como esta distancia era al radio de la Tierra[4]. A partir de estas hipótesis demostró Arquímedes que el diámetro del universo usual hasta la distancia del Sol es menor que 10^{10} estadios. A continuación tenía que estimar el tamaño de un grano de arena; moviéndose siempre sobre seguro, supuso que 10.000 granos de arena superaban ya a una semilla de adormidera, que el diámetro de una de estas semillas de adormidera no era menor que $\frac{1}{40}$ de la anchura de un dedo, y que a su vez un estadio es menor que 10.000 dedos. Reuniendo todas estas desigualdades llegó Arquímedes a la conclusión de que el número de granos de arena necesarios para llenar la esfera del universo generalmente aceptado en aquel tiempo era menor que un número que nosotros escribiríamos como 10^{51}. Para el universo de Aristarco, que es al anterior universo usual como éste es a la Tierra, demostró Arquímedes que no serían necesarios más de 10^{63} granos de arena. Arquímedes no utilizaba esta notación, por supuesto, sino que describió el número obtenido como diez millones de unidades del octavo orden de los números (donde los números de segundo orden comienzan en una miriada de miriadas y los números de octavo orden con la séptima potencia una miriada de miriadas). Para demostrar que podía expresar incluso números mucho más grandes que éste,

[4] El lenguaje del *Arenario* no es muy claro en este punto, pero la interpretación adoptada aquí parece la más apropiada. Erila y Rudolf von Ehrhardt, en «Archimedes' Sand-Reckoner», *Isis*, 33 (1942), págs. 578-602, cuestionan la autenticidad del *Arenario*, pero O. Neugebauer la defiende en su artículo «Archimedes and Aristarchus», *Isis*, 34 (1942), págs. 4-6.

extendió Arquímedes su terminología para llamar a los números de orden menor que una miriada de miriadas números del primer período, con lo que el segundo período comenzaba con el número $(10^8)^{10^8}$ que tiene $800_1000.000$ de dígitos en base 10, y los períodos seguían, desde luego, hasta el período 10^8. Es decir, este nuevo sistema de Arquímedes permitía remontarse hasta una miriada de miriadas de unidades del orden una miriada de miriadas del período una miriada de miriadas, un número que se escribiría en base 10 como un uno seguido por unos 80.000 millones de millones de cifras. Es precisamente en conexión con su trabajo relativo a los números gigantescos donde menciona Arquímedes de pasada el principio que conduciría más tarde a la invención de los logaritmos, es decir, que la suma de los «órdenes» de varios números (equivalentes a sus exponentes tomando la base $100_1000.000$) corresponde al «orden» del producto de dichos números.

5. La medida del círculo

Arquímedes mostró de nuevo su habilidad para los cálculos numéricos en su estimación aproximada de la razón de una circunferencia a su diámetro. Partiendo del hexágono regular inscrito en la circunferencia, calcula Arquímedes los perímetros de los polígonos obtenidos duplicando sucesivamente el número de lados hasta llegar al polígono regular de 96 lados. El procedimiento iterativo que utiliza para estos polígonos está relacionado con lo que a veces se llama el algoritmo de Arquímedes. Consideremos la sucesión P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}..., donde P_n y p_n son respectivamente los perímetros de los polígonos regulares circuncrito e inscrito de n lados. Comenzando con el tercer término de la sucesión, podemos calcular cualquier témino a partir de los dos anteriores tomando alternativamente sus medias armónica y geométrica. Es decir,

$$P_{2n}=\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}, \qquad p_{2n}=\sqrt{p_nP_{2n}}$$

etcétera. Si uno lo prefiere, puede proceder de una manera alternativa, utilizando la sucesión a_n, A_n, a_{2n}, A_{2n}..., donde a_n y A_n son respectivamente las áreas de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de n lados. Entonces el tercer término y los sucesivos se obtienen tomando alternativamente la media geométrica y armónica, de tal manera que

$$a_{2n}=\sqrt{a_nA_n}; \qquad A_{2n}=\frac{2A_na_{2n}}{A_n+a_{2n}}$$

etcétera. El método de Arquímedes para calcular raíces cuadradas al determinar el perímetro del hexágono circunscrito y para hallar medias geométricas era muy semejante al que utilizaban los babilonios. El resultado final de los cálculos de Arquímedes sobre el círculo fue una aproximación al valor de π expresada por la desigualdad $3\frac{10}{71}\pi<3\frac{10}{70}$, lo que suponía una estimación sensiblemente mejor que

la de los egipcios y los babilonios. (Debe tenerse en cuenta claramente que ni Arquímedes ni ningún otro matemático griego utilizó nunca ni nuestra notación π ni la idea de un número como razón de la circunferencia al diámetro en un círculo). Este resultado aparece en la proposición 3 del tratado *Sobre la medida del círculo*, una de las obras más populares de Arquímedes durante la Edad Media. Esta obrita, probablemente incompleta tal como ha llegado hasta nosotros, incluye sólo tres proposiciones, de las que una se reduce a la demostración, por el método de exhausción, de que el área del círculo es igual a la de un triángulo rectángulo que tenga como uno de sus catetos la circunferencia del círculo y el otro igual al radio. Es improbable que fuera Arquímedes el descubridor de este teorema, puesto que ya se presupone en la cuadratura del círculo atribuida a Dinostrato.

6. La trisección del ángulo

Arquímedes también se vio atraído por los tres famosos problemas geométricos, lo mismo que sus predecesores, y la espiral de Arquímedes, bien conocida, le permitió dar soluciones a dos de ellos (aunque no únicamente con regla y compás, desde luego). La espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo; así pues, la ecuación de esta espiral en coordenadas polares es de la forma $r=a\theta$. Dada una de estas espirales, puede efectuarse fácilmente la trisección de un ángulo arbitrario de la manera siguiente. Situemos el ángulo de tal forma que el vértice y el lado inicial coincidan con el origen O de la espiral y la posición inicial OA de la semirrecta que gira. Sea P el punto de intersección del segundo lado del ángulo con la espiral, y dividamos el segmento OP en tres partes iguales por medio de los puntos R y S (fig. 8.2); sean RU y SV las

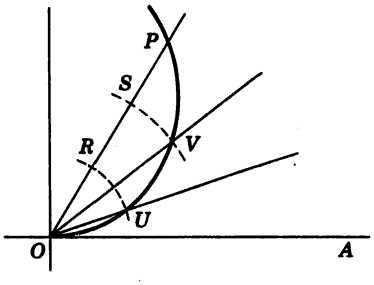


Figura 8.2

circunferencias de centro O y radios OR y OS respectivamente. Si estas circunferencias cortan a la espiral en los puntos U y V, entonces las semirrectas OU y OV trisecan al ángulo AOP.

La matemática griega suele verse caracterizada a veces como esencialmente estática y con escasa o nula atención a la idea de variabilidad, pero lo cierto es que Arquímedes, en su estudio de la espiral, parece haber determinado la tangente a la

curva por medio de consideraciones cinemáticas que recuerdan el cálculo diferencial. Considerando un punto genérico de la espiral $r=a\theta$ como sometido a dos movimientos simultáneos, un movimiento radial uniforme de alejamiento del origen de coordenadas y un movimiento circular de centro el origen, Arquímedes parece haber hallado la dirección instantánea del movimiento, y por lo tanto la dirección de la tangente a la curva, observando el movimiento resultante de los dos componentes por medio del paralelogramo de las velocidades. Esta parece ser la primera vez que se determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia.

El estudio que llevó a cabo Arquímedes sobre la espiral, curva que él mismo atribuye a su amigo Conon de Alejandría, formaba parte indudablemente de la búsqueda general de soluciones a los tres problemas famosos por parte de los griegos. Esta curva se presta tan bien a las multisecciones de un ángulo que muy bien pudo haber sido inventada por Conon con este objeto. Sin embargo, y lo mismo que pasaba con la cuadratriz, también puede servir para cuadrar el círculo, tal como mostró Arquímedes mismo. Trácese por un punto P de la espiral OPR la tangente PQ, y sea Q el punto de intersección de esta tangente con la recta OQ perpendicular al radio vector OP por el origen O. Entonces demuestra Arquímedes que el segmento OQ (conocido como la subtangente polar del punto P) es igual a la longitud del arco PS de la circunferencia de centro O y radio OP (fig. 8.3)

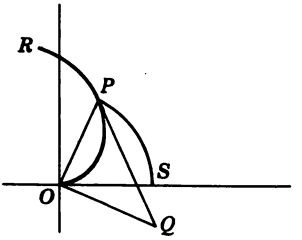


Figura 8.3

interceptado por la semirrecta inicial (eje polar) y la semirrecta OP del radio vector. Este teorema, que demuestra Arquímedes por medio de un típico razonamiento de doble *reductio ad absurdum*, lo puede comprobar cualquier estudiante de cálculo infinitesimal teniendo en cuenta que $\text{tg}\ \psi = \frac{r}{r'}$, donde $r=f(\theta)$ es la ecuación de la curva en coordenadas polares, r' es la derivada de r con respecto a θ y ψ es el ángulo entre el radio vector correspondiente al punto P de la curva y la tangente en el punto P. Gran parte de la obra de Arquímedes es tal que hoy podría aparecer incluida en un curso de cálculo infinitesimal, y esta circunstancia se da muy especialmente en el caso de su obra *Sobre las espirales*. Si tomamos como punto P el punto de intersección de la espiral con la recta perpendicular al eje polar, entonces la subtangente polar OQ será precisamente igual a la cuarta parte de la circunferencia de radio OP, y por lo tanto podemos construir fácilmente la circunferencia completa como cuatro veces el segmento OQ y, por el teorema de Arquímedes, obtenemos así un triángulo de área igual a la del círculo, y una simple

transformación geométrica permite construir un cuadrado equivalente al triángulo, y la cuadratura del círculo está servida.

Entre las 28 proposiciones del libro *Sobre las espirales* hay varias que se refieren a áreas relacionadas con la espiral. Por ejemplo, se demuestra en la proposición 24 que el área barrida por el radio vector en su primera rotación completa es igual a un tercio del área del «primer círculo», es decir, del círculo con centro en el polo y de radio igual a la longitud del radio vector al finalizar su primera vuelta completa, para $\theta = 2\pi$. Arquímedes utiliza de nuevo el método de exhausción para demostrarlo, pero también aquí podría comprobar fácilmente el resultado un estudiante actual, teniendo en cuenta que este área es igual a $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$. Además, puede demostrarse también inmediatamente con ayuda de los recursos del cálculo, lo que demuestra Arquímedes por el método más difícil de exhausción, es decir, que el área del anillo adicional R_2 engendrado en la segunda rotación, limitado por la primera y la segunda vuelta de la espiral y el segmento del eje polar entre los dos extremos del radio vector al finalizar la primera y la segunda vuelta, es igual a seis veces la región R_1 barrida por el radio vector en la primera rotación. Las áreas de los *sucesivos* anillos que se van añadiendo en las rotaciones consecutivas vienen dadas por la sencilla fórmula recursiva $R_{n+1} = \frac{n}{n-1} R_n$ tal como demuestra Arquímedes.

7. El área de un segmento parabólico

El libro *Sobre las espirales* fue muy admirado pero poco leído, ya que se le consideró generalmente como la más difícil de todas las obras de Arquímedes. De los tratados que se refieren principalmente al método de exhausción (es decir, esencialmente al cálculo integral) el más popular fue el de *La cuadratura de la parábola*. Cuando escribía Arquímedes, las secciones cónicas se conocían desde hacía casi un siglo, y, sin embargo, no se había hecho ningún progreso en lo que se refiere al cálculo de áreas relacionadas con ellas. Se necesitó el genio del más grande matemático de la antigüedad para cuadrar una sección cónica, concretamente un segmento de parábola, lo que consigue en la proposición 17 de la obra dedicada a dicha cuadratura. La demostración por el método standard de exhausción es larga y complicada, pero el hecho es que Arquímedes demuestra rigurosamente que el área K de un segmento parabólico $APBQC$ (fig. 8.4) es igual a

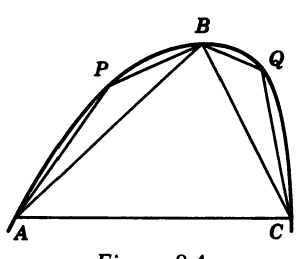


Figura 8.4

cuatro tercios del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura. En las siguientes siete proposiciones, que son las últimas del libro, da Arquímedes una segunda demostración diferente del mismo teorema. Demuestra en primer lugar que el área del más grande triángulo inscrito ABC, con base AC, es igual a cuatro veces la suma de los correspondientes triángulos inscritos con bases cada uno de los segmentos AB y BC. Continuando el proceso que sugiere esta relación, parece claro que el área K del segmento parabólico ABC vendrá dada por la suma de la serie infinita $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \cdots$, que es $\frac{4}{3}T$. Arquímedes no habla, desde luego, de la suma de la serie infinita, puesto que los procesos infinitos no se aceptaban en su época, sino que demuestra por una doble *reductio ad absurdum* que K no puede ser ni mayor ni menor que $\frac{4}{3}T$. Arquímedes, dicho sea de paso, al igual que sus predecesores, no utiliza el nombre de «parábola», sino el de «ortotoma» o «sección de un cono rectángulo».

En el preámbulo a la *Cuadratura de la parábola* nos encontramos con la hipótesis o lema que se suele conocer hoy como el axioma de Arquímedes: «Que el exceso por el cual la mayor de dos áreas desiguales supera a la menor, añadido a sí mismo la cantidad de veces que sea necesario, puede llegar a exceder cualquier área dada.» Este axioma viene a excluir de una manera efectiva los indivisibles o infinitésimos constantes que tanto habían sido discutidos en la época de Platón. Se trata esencialmente de lo mismo que el axioma de exhausción, y Arquímedes admite francamente que

> «Los geómetras anteriores también han utilizado este lema, ya que demostraron, usando precisamente este mismo lema, que los círculos están entre sí en la razón duplicada de sus diámetros, y que las esferas están entre sí en la razón triplicada de sus diámetros, así como que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene su misma base y altura igual, y también demostraron que todo cono es un tercio del cilindro que tiene la misma base y la misma altura que el cono, suponiendo un cierto lema análogo al que hemos mencionado.»

Los «geómetras anteriores» a los que hace referencia aquí Arquímedes incluirían probablemente a Eudoxo y sus sucesores.

8. El volumen de un segmento de paraboloide

Parece ser que Arquímedes no pudo hallar el área de un segmento general de elipse o de hipérbola. En realidad, el cálculo del área de un segmento parabólico por el método de integración moderno no involucra nada peor que simples polinomios, pero las integrales que aparecen en la cuadratura de un segmento de elipse o de hipérbola (lo mismo que en los arcos de estas curvas o de la parábola) exigen ya la utilización de funciones trascendentes. No obstante, Arquímedes, en su importante trabajo *Sobre conoides y esferoides*, calcula el área de la elipse *completa:* «Las áreas de las elipses son entre sí como los rectángulos construidos sobre sus

ejes» (proposición 6). Esto es, obviamente, lo mismo que decir que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es πab, o bien que el área de una elipse es igual al área de un círculo cuyo radio sea la media geométrica de los dos semiejes de la elipse. Además, Arquímedes muestra en este mismo tratado cómo calcular los volúmenes de los segmentos que se obtienen al cortar un elipsoide, paraboloide o hiperboloide de revolución (éste de dos hojas) por un plano perpendicular al eje principal. El método que utiliza Arquímedes se parece tanto al método de integración moderno, que vamos a resumirlo solamente para un caso. Sea *ABC* un segmento recto de paraboloide de revolución (o «conoide» parabólico) de eje *CD* (fig. 8.5); considere-

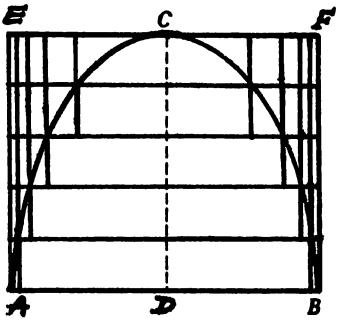


Figura 8.5

mos el cilindro circular *ABFE* circunscrito al sólido, cuyo eje es también *CD*. Dividamos este eje en *n* partes iguales de longitud *h* y tracemos por los puntos de división planos paralelos a la base. Construyamos sobre los círculos en que estos planos cortan al paraboloide cilindros inscritos y circunscritos tal como indica la figura. Es fácil demostrar entonces, utilizando la ecuación de la parábola y la suma de una progresión aritmética, que se verifican las siguientes proporciones y desiguales:

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{sólido inscrito}}=\frac{n^2h}{h+2h+3h+\cdots+(n-1)h}>\frac{n^2h}{\frac{1}{2}n^2h}$$

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{sólido circunscrito}}=\frac{n^2h}{h+2h+3h+\cdots+nh}<\frac{n^2h}{\frac{1}{2}n^2h}$$

Arquímedes había demostrado previamente que la diferencia entre los volúmenes de los sólidos circunscrito e inscrito era igual al volumen de la rodaja inferior de los cilindros circunscritos; así pues, haciendo crecer el número *n* de subdivisiones del eje *CD*, lo que supone que cada rodaja se irá haciendo más delgada cada vez, la diferencia entre los sólidos circunscrito e inscrito podrá hacerse menor que

cualquier magnitud dada de antemano, y por lo tanto las desigualdades anteriores conducen a la conclusión de que el volumen del cilindro *ABFE* es necesariamente igual al doble del volumen del segmento conoidal. La diferencia principal entre esta obra y los métodos modernos del cálculo integral radica en la falta del concepto de límite de una función, concepto que estaba ya tan al alcance de la mano y que, sin embargo, no fue formulado nunca por los matemáticos de la antigüedad, ni siquiera por el gran Arquímedes, el hombre que más cerca estuvo de conseguirlo.

9. El segmento esférico

Arquímedes escribió un buen número de tratados, admirables todos ellos, de los cuales el que más impresionó a sus sucesores fue el de *Sobre las espirales*. El autor mismo parece haberse inclinado por otro, el de *Sobre la esfera y el cilindro*. Arquímedes pidió que se tallara sobre su tumba una representación de una esfera inscrita en un cilindro circular recto de altura igual al diámetro de la esfera, ya que descubrió y demostró que la razón de los volúmenes del cilindro a la esfera es la misma que la razón de sus áreas, es decir, la de tres a dos. Esta propiedad, que descubrió Arquímedes posteriormente a su *Cuadratura de la parábola*, no la conocían, según él mismo nos dice, los geómetras anteriores. Durante algún tiempo se creyó que los egipcios conocían el área de un hemisferio esférico[5], pero ahora parece claro que fue Arquímedes el primero que descubrió y demostró que el área de la esfera es exactamente igual a cuatro veces el área de un círculo máximo de dicha esfera. Arquímedes demostró también que «la superficie de un segmento esférico cualquiera es igual a un círculo cuyo radio es el segmento trazado desde el vértice del segmento esférico a un punto cualquiera de la circunferencia base de dicho segmento». Esto es evidentemente equivalente a la proposición más conocida de que el área de cualquier segmento esférico es igual a la de un cilindro cuyo radio es el de la esfera y cuya altura es la misma que la del segmento. Es decir, que el área del segmento no depende de manera directa de la distancia del centro de la esfera, sino sólo de la altura o grosor del segmento. El teorema fundamental sobre la superficie de la esfera aparece en la proposición 33, a continuación de una larga serie de teoremas preliminares, entre los que se encuentra uno que es equivalente a una integración de la función seno:

> «Si se inscribe un polígono en un segmento de círculo LAL', de manera que todos sus lados excepto la base sean iguales y el número de estos lados par, tal como el $LK...A...K'L'$, siendo A el punto medio o vértice del segmento, y si trazamos las rectas BB', CC'..., que son paralelas a la base LL' y unen pares de puntos angulares correspondientes, entonces $(BB'+CC'+\cdots+LM):AM=A'B:BA$, donde M es el punto medio de LL' y AA' es el diámetro que pasa por M (fig. 8.6).

[5] Véase E. G. Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª ed. (The American Mathematical Monthly, Slaught Memorial Papers, núm. 2, enero 1949), págs. 15-16. Cf. notas de pie de página 10 y 11 del capítulo 2.

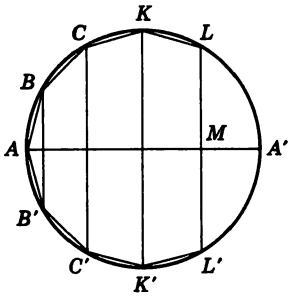


Figura 8.6

Esto viene a ser el equivalente geométrico de la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\theta}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\theta+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{n}=\frac{1-\cos\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2n}$$

A partir de este teorema es fácil obtener la expresión moderna $\int_0^{\phi}\operatorname{sen} x\,dx=1-\cos\phi$ multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $\frac{\theta}{n}$ y tomando límites cuando n tiende a infinito. Así, el miembro de la izquierda se convierte en

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen} x_i\Delta x_i$$

donde $x_i=\frac{i\theta}{n}$ para $i=1, 2, 3, \ldots, n$, $\Delta x_i=\frac{\theta}{n}$ para $i=1, 2, 3, \ldots, n-1$ y $\Delta x_n=\frac{\theta}{2n}$. El miembro de la derecha se convierte entonces en

$$(1-\cos\theta)\lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{2n}\cot\frac{\theta}{2n}=1-cos\ \theta$$

El equivalente del caso especial $\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=1-\cos\pi=2$ lo había dado ya Arquímedes en la proposición anterior.

La conocida fórmula para el volumen de la esfera aparece en *Sobre la esfera y el cilindro*, I. 34:

> «Una esfera cualquiera es igual a cuatro veces el cono que tiene como base un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera.»

Este teorema se demuestra por medio del método de exhausción usual, y la razón arquimediana entre el volumen o área de la esfera y del cilindro circunscrito se sigue como un corolario fácil. El diagrama que representa a la esfera inscrita en un cilindro se grabó efectivamente sobre la tumba de Arquímedes, tal como sabemos

por la información que nos transmite Cicerón. Cuando era cuestor en Sicilia el famoso orador romano, descubrió la tumba con el diagrama en un estado de abandono total. Cicerón restauró dicha tumba (lo cual significó casi la única contribución de un romano a la historia de la matemática), pero más tarde desapareció todo rastro de ella.

10. *Sobre la esfera y el cilindro*

Un problema del Libro II del *Sobre la esfera y el cilindro* arroja una luz interesante sobre el álgebra geométrica griega. En la proposición 2 justifica Arquímedes su fórmula para el volumen de un segmento de una esfera dada; en la proposición 3 demuestra que para cortar una esfera dada por un plano, de manera que *las superficies* de los dos segmentos resultantes estén en una razón dada, uno tiene que trazar simplemente un plano perpendicular a un diámetro pasando por un punto de dicho diámetro que lo divida en dos segmentos que estén en la razón deseada, y a continuación, en la proposición 4, muestra Arquímedes cómo cortar por un plano una esfera dada de manera que *los volúmenes* de los dos segmentos estén en una razón dada, que es un problema mucho más difícil. Utilizando notación moderna, Arquímedes se ve conducido a la ecuación

$$\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a-x)\,(m+n)}{ma}$$

donde $\frac{m}{n}$ es la razón entre los dos segmentos. Esta ecuación es una cúbica, y Arquímedes atacó su solución tal como habían hecho sus predecesores para resolver el problema de Delos, es decir, por medio de una intersección de cónicas. Es interesante hacer notar que el enfoque griego de las cúbicas fue muy distinto del de las ecuaciones cuadráticas. Por analogía con el método de «aplicación de áreas» para este último caso, se podría haber esperado algo así como una «aplicación de volúmenes», pero lo cierto es que no se adoptó este método. Arquímedes consiguió reducir su ecuación cúbica, por medio de sustituciones, a la forma $x^2(c-x)=db^2$ y prometió dar por separado un análisis completo de esta cúbica con respecto al número de raíces positivas. Este análisis había estado perdido al parecer durante muchos siglos cuando Eutocio, importante comentarista de principios del siglo VI, descubrió un fragmento que parece contener el auténtico análisis llevado a cabo por Arquímedes. La solución se obtenía por medio de la intersección de la parábola $cx^2=b^2y$ con la hipérbola $(c-x)y=cd$; profundizando más, descubrió Arquímedes una condición sobre los coeficientes que determina el número de raíces reales que satisfacen la ecuación dada, condición equivalente al cálculo y discusión del discriminante $27\,b^2d-4c^3$ de la ecuación cúbica $db^2=x^2(c-x)$, lo cual puede comprobarse fácilmente por medio de un sencillo cálculo elemental. En vista de que todas las ecuaciones cúbicas pueden transformarse en otras del tipo estudiado por Arquímedes, nos encontramos aquí, de hecho, con la esencia de un análisis

completo de la ecuación cúbica general. No obstante, el interés por las ecuaciones cúbicas desapareció poco después de Arquímedes, para revivir brevemente con Eutocio y después, siglos más tarde, con los árabes.

11. El *Libro de los Lemas*

La mayor parte de los tratados arquimedianos que hemos comentado hasta ahora tendríamos que incluirlos en una matemática decididamente avanzada, pero el gran siracusano no dejó de proponer también problemas elementales. En su *Libro de los Lemas*, por ejemplo, nos encontramos con un estudio de la figura llamada *arbelos* o «cuchillo de zapatero». El cuchillo de zapatero es la región del plano limitada por tres semicírculos tangentes dos a dos tal como aparecen en la figura 8.7, siendo la superficie en cuestión la que queda dentro del semicírculo mayor y fuera de los dos menores. Arquímedes demuestra en la proposición 4 que si CD es perpendicular a AB, entonces el área del círculo de diámetro CD es igual al área del arbelos, y en la proposición siguiente demuestra que los dos círculos inscritos en las dos regiones en que CD divide al «cuchillo de zapatero» son iguales.

El *Libro de los Lemas* contiene también un teorema (la proposición 14) acerca de lo que llama Arquímedes el *salinon* o «bodega para sal». Dibújense cuatro semicircunferencias de diámetros AB, AD, DE y EB, tal como en la figura 8.8, de

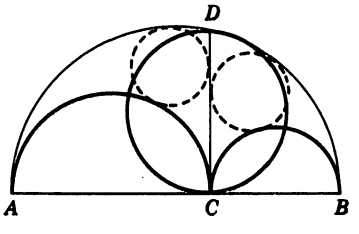


Figura 8.7

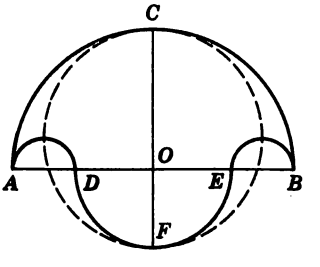


Figura 8.8

manera que $AD = EB$. Entonces el área total limitada por el salinon (es decir, limitada por los arcos semicirculares) es igual al área del círculo que tiene como diámetro el eje de simetría FOC de la figura.

Es también en el *Libro de los Lemas* donde encontramos la famosa trisección arquimediana del ángulo, en la proposición 8. Sea ABC el ángulo que se desea trisecar (fig. 8.9). Entonces tracemos con centro en B una circunferencia de radio arbitrario que corte a AB en P y a BC en Q, así como a la prolongación de BC en R; dibújese ahora la recta STP tal que S esté sitado en la prolongación $CQBR$, T sobre la circunferencia, y tal que $ST = BQ = BP = BT$. Se puede demostrar entonces fácilmente que, por ser isósceles los triángulos STB y TBP, el ángulo BST es exactamente igual a un tercio del ángulo QBP que se trataba de trisecar. Tanto Arquímedes como sus contemporáneos sabían muy bien, desde luego, que ésta no era una trisección canónica en el sentido platónico, ya que incluye la construcción

de lo que se llamaba una *neusis*, es decir, una inserción de una longitud dada, en este caso $ST = BQ$, entre dos figuras, aquí la recta QR prolongada y la circunferencia.

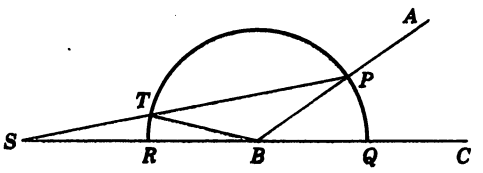


Figura 8.9

El *Libro de los Lemas* no ha llegado hasta nosotros en su original griego, sino a través de su traducción al árabe que fue vertida más tarde al latín, por lo que se ve citado frecuentemente por su título latino *Liber Assumptorum*. De hecho, la obra tal como nos ha llegado no puede ser el auténtico texto arquimediano, puesto que su nombre se cita varias veces a lo largo del libro. Sin embargo, incluso si el tratado no es otra cosa que una colección o miscelánea de teoremas que los árabes atribuyeran a Arquímedes, la obra es casi con seguridad sustancialmente auténtica. También se han formulado algunas dudas acerca de la autenticidad del *Problema de los bueyes*, aunque se admite generalmente su carácter arquimediano, y que data seguramente de unas pocas décadas antes de su muerte. El *Problema de los bueyes* es un reto a los matemáticos a resolver un sistema de ecuaciones indeterminadas simultáneas en ocho incógnitas, los números de vacas y bueyes de cada uno de cuatro colores diferentes. En la formulación del problema hay algunas ambigüedades, pero de acuerdo con la interpretación usualmente aceptada, los valores de las ocho incógnitas para una de las soluciones posibles ¡llenarían un volumen de más de 600 páginas! El problema, que implica la solución de la ecuación $x^2 = 1 + 4729494y^2$, nos suministra pues de una manera incidental un primer ejemplo de lo que más tarde se iba a conocer con el nombre de «ecuación de Pell» (véase más adelante).

12. Los sólidos semirregulares y la trigonometría

Sabemos con seguridad que no todas las obras de Arquímedes han sobrevivido porque en un comentario tardío (debido a Pappus) se nos dice que Arquímedes descubrió todos los 13 posibles sólidos llamados semirregulares. Mientras que un sólido regular o poliedro regular tiene como caras polígonos regulares del mismo tipo, un sólido semirregular es un poliedro convexo cuyas caras son también polígonos regulares, pero no todos del mismo tipo. Por ejemplo, si de cada una de las ocho esquinas de un cubo de arista a cortamos un tetraedro de arista $\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, entonces la figura resultante será un sólido semirregular o arquimediano limitado por ocho triángulos equiláteros y seis octógonos regulares.

Está claro, por múltiples referencias, que un buen número de las obras de Arquímedes se han perdido. Según las informaciones que nos transmiten los sabios árabes, la fórmula para el área de un triángulo conocida usualmente como fórmula de Herón, es decir, $K=\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, donde s es el semiperímetro del triángulo, la conocía ya Arquímedes varios siglos antes de la época de Herón. Los mismos sabios árabes también atribuyen a Arquímedes el «teorema de la cuerda rota» que dice que si AB y BC forman una «cuerda rota» cualquiera en una circunferencia (con la condición de que $AB \neq BC$), y si M es el punto medio del arco ABC y F el pie de la perpendicular trazada por M a la más larga de las dos cuerdas, entonces F será el punto medio de la «cuerda rota» $AB\!C$ (fig. 8.10). Según

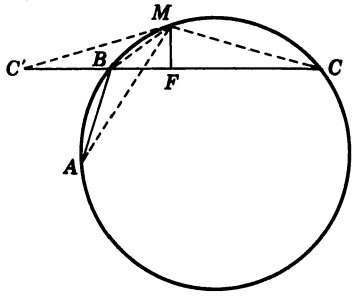


Figura 8.10

los árabes, Arquímedes dio varias demostraciones de este teorema, una de las cuales se obtiene fácilmente trazando las rectas de puntos que aparecen en la figura, tomando $FC'=FC$ y demostrando que $\Delta MBC' \simeq \Delta MBA$, luego $BC'=BA$ y se sigue por lo tanto que $C'F=AB+BF=FC$. No sabemos si Arquímedes se dio cuenta del significado trigonométrico de este teorema, pero algún historiador ha sugerido[6] que lo utilizó como una fórmula equivalente a nuestra $\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x \cos y-\cos x \operatorname{sen} y$. Para mostrar tal equivalencia llamemos $\widehat{MC}=2x$ y $\widehat{BM}=2y$; entonces $\widehat{AB}=2x-2y$. Ahora bien, las cuerdas correspondientes a estos arcos son respectivamente $MC=2 \operatorname{sen} x$, $BM=2 \operatorname{sen} y$, y $AB=2 \operatorname{sen}(x-y)$. Además las proyecciones de MC y MB sobre BC son $FC=2 \operatorname{sen} x \cos y$, y $FB=2 \operatorname{sen} y \cos x$. Si escribimos, por último, el teorema de la cuerda rota en la forma $AB=FC-FB$ y si sustituimos estas cuerdas por sus equivalentes trigonométricos, obtenemos inmediatamente la fórmula para $\operatorname{sen}(x-y)$. Podemos obtener también otras identidades trigonométricas, evidentemente, a partir del mismo teorema de la cuerda rota, lo que hace pensar que Arquímedes pudo haber descubierto que este teorema era una herramienta muy útil para sus cálculos astronómicos.

13. El *Método*

Los tratados de Arquímedes que han llegado hasta nosotros lo han hecho siguiendo unas vías sutiles y escasas, y no como en el caso de los *Elementos* de

[6] Véase Johannes Tropfke, «Archimedes und die Trigonometrie», *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 10 (1927-1928), págs. 432-463.

Euclides, que han sobrevivido en muchos manuscritos griegos y árabes. Casi todas las copias de las obras de Arquímedes provienen de un único original griego que existía a comienzos del siglo XVI y que estaba copiado a su vez de otro original que databa del siglo IX o el X aproximadamente. Los *Elementos* de Euclides han sido conocidos por los matemáticos prácticamente sin interrupción desde que fueron escritos, pero los tratados de Arquímedes han sufrido en cambio una transmisión más accidentada. Epocas hubo en las que se conocían pocas, e incluso ninguna, de las obras de Arquímedes. En vida de Eutocio, un intelectual de primera fila y un hábil comentarista, como hemos visto, del siglo VI, sólo se conocían tres de las muchas obras de Arquímedes, *Sobre el equilibrio de los planos*, la incompleta sobre *La medida del círculo* y la admirable *Sobre la esfera y el cilindro*. En estas circunstancias lo que resulta notable es que haya sobrevivido hasta hoy una parte tan extensa de la obra que escribió Arquímedes. Entre los aspectos más sorprendentes de la azarosa historia de la transmisión de las obras de Arquímedes está el descubrimiento a comienzos del siglo XX de uno de sus tratados más importantes, uno al que Arquímedes tituló simplemente *El Método* y que había estado perdido desde los primeros siglos de nuestra era hasta su redescubrimiento en 1906.

El Método de Arquímedes tiene una importancia especial porque nos revela una faceta del pensamiento de Arquímedes que no encontramos en ningún otro sitio. Los tratados restantes son verdaderas joyas de precisión lógica que no dan apenas ninguna pista de los análisis preliminares que han debido conducir a las formulaciones definitivas. Las demostraciones aparecen tan completamente desprovistas de motivación que algunos matemáticos del siglo XVII llegaron a sospechar que Arquímedes había ocultado celosamente su método de investigación con objeto de que su obra fuera aún más admirada. En 1906, con el descubrimiento del manuscrito que contenía *El Método*, se vio claramente cuán inmerecidas eran tales mezquinas sospechas acerca de la honestidad científica del gran siracusano. En este libro había hecho pública Arquímedes, para que todo el mundo la pudiera leer, una descripción muy detallada de las investigaciones «mecánicas» preliminares que le condujeron a muchos de sus descubrimientos matemáticos más importantes. Arquímedes sabía muy bien que su «método» en estos casos carecía de rigor, ya que suponía, por ejemplo, que un área es una suma de segmentos rectilíneos.

El Método, tal como ha llegado hasta nosotros, contiene la mayor parte del texto de unas quince proposiciones enviadas a Eratóstenes, matemático y bibliotecario de la Universidad de Alejandría, en forma de carta. El autor comienza diciendo que resulta más fácil dar una demostración de un teorema si tenemos previamente una idea de qué es lo que tratamos de obtener; como ejemplo cita las demostraciones de Eudoxo sobre la pirámide y el cono, que se habían visto facilitadas en gran medida por las afirmaciones previas, sin demostración, de Demócrito. Arquímedes anuncia a continuación que él mismo disponía de un método «mecánico» que le permitía preparar el camino para algunas de sus demostraciones. El primerísimo teorema que descubrió por este método fue el que se refiere al área de un segmento parabólico; en la proposición 1 de *El Método* nos explica Arquímedes cómo llegó a *descubrir* este teorema «pesando» segmentos rectilíneos tal como uno compara pesos de cuerpos sólidos en mecánica.

Arquímedes consideró las áreas del segmento parabólico ABC y del triángulo AFC (donde FC es la tangente a la parábola en el punto C) como la totalidad del conjunto de segmentos paralelos al diámetro QB de la parábola, tales como el OP (fig. 8.11) para la parábola y OM para el caso del triángulo. Si colocamos ahora en H (siendo $HK=KC$) un segmento igual a OP, éste equilibraría exactamente al segmento OM donde está situado realmente, con respecto al punto de apoyo K. Este hecho puede demostrarse rigurosamente a partir de la ley de la palanca utilizando propiedades elementales de la parábola. Por lo tanto, el área del

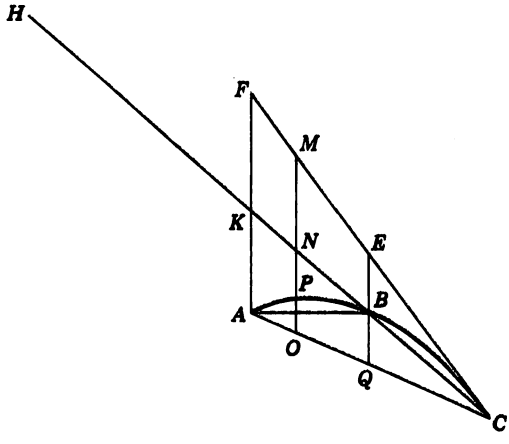


Figura 8.11

segmento parabólico, situado con su centro de gravedad en H, equilibrará exactamente al triángulo en su posición real, cuyo centro de gravedad está sobre la recta KC y a un tercio de la distancia de K a C. De esto se sigue fácilmente que el área del segmento parabólico es igual a un tercio del área del triángulo AFC, o bien cuatro tercios del área del triángulo inscrito ABC.

14. El volumen de la esfera

El teorema favorito de Arquímedes, que fue grabado como sabemos sobre su tumba, también lo descubrió por medio de su método mecánico. Nos lo describe en la proposición 2 de *El Método:*

> «Cualquier segmento esférico es al cono de la misma base y la misma altura en la misma razón que la suma del radio de la esfera y la altura del segmento complementario es a la altura del segmento complementario.»

El teorema se sigue inmediatamente de una bellísima propiedad de equilibrio que descubrió Arquímedes y que puede comprobarse fácilmente en términos de fórmulas modernas. Sea $AQDCP$ una sección diametral de una esfera de centro O y diámetro AC (fig. 8.12), y sea AUV una sección plana del cono circular recto de eje AC y con UV como diámetro de la base. Sea $IJUV$ un cilindro circular recto de eje

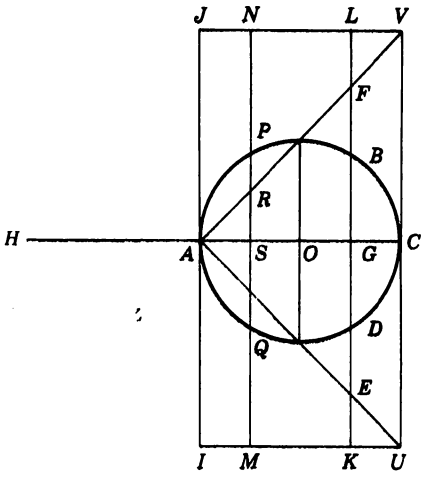


Figura 8.12

AC y de diámetro $IJ = UV$, y sea por último $AH = AC$. Si trazamos un plano perpendicular al diámetro AC por uno de sus puntos S, este plano cortará al cono, a la esfera y al cilindro en círculos de radios $r_1 = SR$, $r_2 = SP$ y $r_3 = SN$ respectivamente. Si llamamos A_1, A_2 y A_3 a las áreas de estos círculoos, entonces se tiene, tal como descubrió Arquímedes, que A_1 y A_2, situados con sus centros en H, equilibrarán exactamente a A_3 en su posición real, con respecto al punto de apoyo A. Por lo tanto, si llamamos a los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro V_1, V_2 y V_3, se sigue que $V_1 + V_2 = \frac{1}{2} V_3$, y como $V_2 = \frac{1}{3} V_3$, la esfera debe ser pues igual a $\frac{1}{6} V_3$. Debido a que el volumen V_3 del cilindro era ya conocido (a partir de Demócrito y de Eudoxo), también resulta conocido el volumen de la esfera, en notación moderna $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Aplicando la misma técnica de equilibrio al segmento esférico cuyo diámetro de la base es BD, al cono cuya base tiene diámetro EF y al cilindro de diámetro KL, se calcula el volumen del segmento esférico de la misma manera que en el caso de la esfera completa.

15. La recuperación de *El Método*

El método del equilibrio de las secciones circulares con respecto a un vértice como punto de apoyo lo aplicó Arquímedes para descubrir los volúmenes de los segmentos de tres sólidos de revolución, el elipsoide, el paraboloide y el hiperboloide, así como los centros de gravedad del paraboloide (o conoide), de un hemisferio esférico y de un semicírculo. *El Método* finaliza con la determinación de los volúmenes de dos sólidos que aparecen como favoritos en los textos modernos de cálculo infinitesimal, a saber, el de una cuña cortada de un cilindro circular recto por dos planos (tal como en la fig. 8.13) y el volumen de la intersección de dos cilindros circulares rectos iguales que se cortan de manera que sus ejes son perpendiculares.

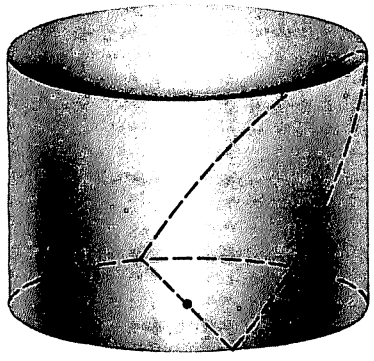


Figura 8.13

La obra que contiene estos resultados tan maravillosos que datan de hace más de 2.000 años se recuperó casi por accidente en 1906. El infatigable sabio danés J. L. Heiberg tuvo noticias de que se había encontrado en Constantinopla un palimpsesto de contenido matemático. (Un palimpsesto es un pergamino en el que la escritura original ha sido lavada imperfectamente, tratando de borrarla y reemplazada por un texto nuevo y diferente superpuesto.) Un examen minucioso lo convenció de que el manuscrito original había contenido obras de Arquímedes, y con ayuda de la fotografía consiguió leer la mayor parte del texto arquimediano. El manuscrito consistía en 185 hojas, la mayoría de pergamino y algunas de papel, con el texto arquimediano copiado por una mano del siglo X. Más tarde se había intentado borrar este texto, por fortuna sin demasiado éxito, con objeto de utilizar de nuevo el pergamino para un Eucologio (es decir, una colección de oraciones y de textos litúrgicos usados en la Iglesia ortodoxa oriental) escrito hacia el siglo XIII. El texto matemático de Arquímedes contenía el libro *Sobre la esfera y el cilindro*, la mayor parte del *Sobre las espirales*, parte de la *Medida del círculo* y del *Sobre el equilibrio de los planos*, así como *Sobre los cuerpos flotantes*, todos los cuales se conocían ya por otros manuscritos; y, lo más importante de todo, el palimpsesto nos dio a conocer la única copia superviviente de *El Método*. En un cierto sentido este palimpsesto es un fiel símbolo de la contribución de la Edad Media a la historia de la matemática. La ferviente preocupación por los asuntos religiosos estuvo a punto de borrar de la faz de la Tierra una de las obras más importantes del matemático más grande de la antigüedad; y, sin embargo, a fin de cuentas fue la erudición medieval la que, en parte de una manera involuntaria, la conservó, así como muchas otras cosas que de otra forma se habrían perdido casi con toda seguridad.

Bibliografía

Bromwich, T. J.: «The Methods Used by Archimedes for Approximating to Square Roots», *The Mathematica Gazette*, 14 (1928-1929), 253-257.

Clagett, Marshall: *Archimedes in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964, 2 vols.).

Cohen, M. R., y I. E. Drablin: *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958).
Davis, H. T.: «Archimedes and Mathematics», *School Science and Mathematics*, 44 (1944), 136-145, 213-221.
Dijksterhuis, E. J.: *Archimedes* (New York: Humanities Press, 1957).
Erhardt, Erika von., y Rudolf von Erhardt: «Archimedes' Sand-Reckoner», *Isis*, **33** (1942), 578-602.
Heath, T. L.: *The Works of Archimedes* (Cambridge, 1897; reed. en rústica, incluyendo Archimedes' *Method*, New York: Dover, n.d.).
Heiberg, J. L.: *Quaestiones archimedae* (Copenhague, 1879).
——: «Le role d'Archimède dans le développement des sciences exactes», *Scientia*, 20 (1916), 81-89.
—— (ed.): *Archimedes, Opera omnia* (Leipzig, 1880-1881, 3 vols.).
Heiberg, J. L., y H. G. Zeuthen: «Eine neue Schrift des Archimedes», *Bibliotheca Mathematica* (3), 7 (1906-1907), 321-363.
Hofmann, J. E.: «Erklärungsversuche für Archimeds Berechnung von $\sqrt{3}$», *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 12 (1929), 386-408.
Hoppe, Edmund, «Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von π», *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 9 (1920-1922), 104-107.
Midolo, P.: *Archimede e il suo tempo* (Syracuse, 1912).
Neugebauer, O.: «Archimedes and Aristarchus», *Isis*, 34 (1942), 4-6.
Smith, D. E.: «A Newly Discovered Treatise of Archimedes», *Monist*, 19 (1909), 202-230.
Thomas, Ivor: *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Leob Classical Library, 1939-1941, 2 vols.).
Tropfke, Johannes: «Archimedes und die Trigonometrie», *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 10 (1927-1928), 432-463.
Weissenborn, Hermann: «Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron», *Berliner Studien für Klassische Philologie und Archaeologie*, **1** (1884), 357-408.

Ejercicios

1. A veces se suele considerar a Arquímedes como el inventor del cálculo integral. ¿Hasta qué punto está usted de acuerdo o discrepa de este punto de vista?
2. Se sabe que Euclides dependió en gran medida de las obras de sus predecesores. ¿Hasta qué punto es o no cierto esto mismo en el caso de Arquímedes?
3. Aristóteles conocía la ley de la palanca muchos años antes de que naciera Arquímedes. Entonces, ¿por qué se suele atribuir esta ley a Arquímedes? Explíquese de manera convincente.
4. De los muchos tratados de Arquímedes que conocemos, ¿cuál considera usted como el más importante para el desarrollo de la matemática? Explíquese claramente.
5. Arquímedes suele ser considerado como el matemático más grande de la antigüedad. Explíquese detalladamente la justificación de tal opinión, comparando su obra con la de al menos dos de sus potenciales «rivales» anteriores a él.
6. Si a_i y A_i son respectivamente las áreas de los polígonos regulares de i lados inscrito y circunscrito a una circunferencia, demuéstrense las fórmulas de recursión arquimedianas $a_{2n}=\sqrt{a_n A_n}$ y $A_{2n}=\dfrac{2A_n a_{2n}}{A_n+a_{2n}}$.

7. Si p_i y P_i son los perímetros de los polígonos regulares de i lados inscrito y circunscrito respectivamente a una circunferencia, demuéstrense las fórmulas de recursión

$$O_{2n}=\frac{2P_np_n}{P_n+p_n} \text{ y } p_{2n}=\sqrt{p_nP_{2n}}.$$

8. A partir del hexágono regular inscrito en una circunferencia, tal como hizo Arquímedes, calcúlense o bien p_{12} y P_{12} o a_{12} y A_{12} utilizando el algoritmo de Arquímedes. ¿Qué valor de π resulta de la media aritmética de estos resultados?
9. Calcúlese el área comprendida entre los arcos de la espiral $r=a\theta$ para $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ y para $2\pi\leqslant\theta\leqslant 4\pi$.
10. Muéstrese claramente cómo se puede dividir la superficie de una esfera por medio de dos planos paralelos en tres regiones de áreas numéricamente iguales.
11. Demuéstrese el teorema de Arquímedes que afirma que el área del «cuchillo de zapatero» es igual al área del círculo de diámetro CD (véase fig. 8.7).
12. Demuéstrese el método de trisección de Arquímedes descrito en el texto.
13. Constrúyanse, o al menos dibújense tras de los poliedros semirregulares de Arquímedes.

*14. Calcúlese la longitud de la subtangente polar de la espiral de Arquímedes $r=a\theta$ para $\theta=2\pi$, y muéstrese cómo puede ser utilizada para cuadrar el círculo.
*15. Demuéstrese el teorema de Arquímedes sobre la «cuerda rota».
*16. Utilizando o bien la propiedad de la balanza de Arquímedes o integración en sentido moderno, dar una demostración de la fórmula para el volumen de un segmento esférico.
*17. Demuéstrese el teorema arquimediano sobre el «salinon».
*18. En el diagrama relativo al teorema de Arquímedes sobre la «cuerda rota» (fig. 8.10), utilícese la relación $BF+FC=BC$ para obtener la expresión trigonométrica conocida para $\text{sen}(x+y)$.
*19. ¿Puede usted dividir, bien sea de una manera exacta o sólo aproximada, la esfera unidad por dos planos paralelos, en tres segmentos esféricos de volúmenes iguales? Explíquese claramente.
*20. Demuéstrese que las dos circunferencias inscritas en las dos regiones en que la recta CD divide al «cuchillo de zapatero» (fig. 8.7) son iguales.

Capítulo IX
APOLONIO DE PERGA

> Me parece que toda la evidencia de que disponemos apunta a Apolonio como el verdadero fundador de la astronomía matemática griega.
>
> *Otto Neugebauer*

1. Obras perdidas

Durante el primer siglo aproximadamente de la Epoca Helenística hubo tres matemáticos cuyas figuras aparecen sobresaliendo por encima de todos los demás de su tiempo, así como también por encima de la mayoría de sus predecesores y de sus sucesores. Estos matemáticos fueron Euclides, Arquímedes y Apolonio, y sus obras son las que han hecho que se denomine como «Edad de Oro» de la matemática griega al período que va del 300 al 200 a.C. En cierto sentido la matemática se había quedado rezagada con respecto a las artes y la literatura, ya que realmente es la Edad de Pericles, a mediados del siglo V a.C., la que se suele conocer en un sentido más general como «Edad de Oro» de la cultura griega. A lo largo de todo el período helenístico la ciudad de Alejandría constituyó el foco más importante de actividad matemática del mundo occidental, pero Apolonio, como Arquímedes, no había nacido en ella. Apolonio nació en Perga, en Pamfilia (situada en el sur de Asia Menor), pero probablemente estudió en Alejandría y todo parece indicar que durante algún tiempo se dedicó a enseñar, más tarde, en dicha Universidad. Sabemos también que vivió en Pérgamo durante una época de su vida, ciudad que contaba asimismo con una universidad y una biblioteca superadas sólo por las de Alejandría, conseguidas gracias a la protección de Lisímaco, el general de Alejandro, y de sus sucesores. Debido al hecho de que nos encontramos en el mundo antiguo con una verdadera legión de hombres célebres llamados todos ellos con el nombre de Apolonio (de ellos nada menos que 129 aparecen mencionados, junto con sus biografías, en la *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* de Pauly-Wissowa), debido a ello, como decimos, a nuestro matemático se le distingue de los demás por el uso de su nombre completo, Apolonio de Perga. No conocemos con exactitud las fechas límite de su vida, pero se dice que vivió durante los reinados de Ptolomeo Evergetes y de Ptolomeo Filopater; una cierta información nos lo muestra incluso como tesorero general de Ptolomeo Filadelfo, y se dice también que era de veinticinco a cuarenta años más joven que Arquímedes. A partir de todos estos datos se han sugerido como fechas de su nacimiento y muerte los años 262 y 190 a.C., respectivamente; por lo demás, poco se sabe de su vida. Apolonio parece haberse sentido de alguna manera como

un rival de Arquímedes, y quizá por ello se ocupó también de algunos de los temas que discutimos ya en el capítulo anterior. Así, por ejemplo, desarrolló un esquema llamado de las «tetradas» para expresar números grandes, utilizando lo equivalente a los exponentes de la miriada simple, mientras que Arquímedes había usado como base la doble miriada. Este sistema numérico de Apolonio probablemente era el mismo que se expone de una manera incompleta en la última parte, que es la única que nos ha llegado, del Libro II de la *Colección Matemática* de Pappus. (El Libro I completo y la primera parte del II se han perdido.) Allí podemos ver el número $5.462_1360.064 \times 10^6$ escrito en la forma μ^γ, $\varepsilon\upsilon\xi\beta$ μ^β, $\gamma\chi$ μ^α, $\varsigma\upsilon$, donde μ^γ, μ^β y μ^α son la tercera, segunda y primera potencia de una miriada, respectivamente.

Apolonio escribió un libro, que se ha perdido, titulado *Reparto rápido*, en el que se enseñaban, al parecer, métodos rápidos de cálculo. Se dice también que Apolonio daba en este libro una aproximación de π mejor que la dada por Arquímedes, probablemente el valor que conocemos como 3,1416, pero no sabemos cómo se consiguió este valor que aparece más tarde en Ptolomeo y en la India. De hecho, nos encontramos con más preguntas sin respuesta sobre Apolonio y su obra que acerca de Euclides o Arquímedes, debido a que una gran parte de su obra ha desaparecido. Sí conocemos, sin embargo, los títulos de muchas de las obras perdidas, tales como *Secciones en una razón dada*, otra sobre *Secciones en un área dada*, una sobre *Secciones determinadas*, otra obra sobre *Tangencias* (o *Contactos*), otra sobre *Inclinaciones* y, por último, una sobre *Lugares planos*. En algunos casos sabemos de qué trataban estas obras debido a que unos siglos más tarde Pappus nos transmitió breves descripciones de unas pocas. Seis de las obras de Apolonio fueron incluidas, por lo que sabemos, junto con un par de tratados de los más avanzados de Euclides (que también se han perdido), en una colección conocida como el «Tesoro del análisis». Pappus nos dice que éste consistía en un cuerpo especial de conocimientos destinado a aquellos que, después de haber recorrido los elementos usuales, quisieran prepararse para abordar y resolver problemas relativos a curvas superiores. El «Tesoro del análisis», constituido en gran parte por obras de Apolonio, debió de incluir en consecuencia mucho material que ahora calificaríamos como verdadera geometría analítica. No sin motivo Apolonio, más bien que Euclides, fue conocido en la antigüedad como «El Gran Geómetra».

2. La reconstrucción de las obras perdidas

Es posible obtener, a partir de las descripciones dadas por Pappus, entre otros, una idea bastante aproximada del contenido de algunas de las obras griegas perdidas y, cuando se puso de moda el juego intelectual de reconstruir las obras geométricas que no han llegado hasta nosotros, durante el siglo XVII, los tratados de Apolonio estuvieron entre los favoritos[1]. De las reconstrucciones de los *Lugares planos*, por ejemplo, podemos deducir que los siguientes fueron dos de los lugares

[1] Para una descripción de estas «restauraciones» véase el artículo sobre «Apolonio» por T. L. Heath en la *Encyclopœdia Britannica*, 11.ª ed. (1910).

considerados: (1) El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante, es una recta perpendicular a la que determinan estos dos puntos. (2) El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante (y distinta de uno) es una circunferencia. Este último lugar geométrico se conoce, de hecho, como «Círculo de Apolonio», pero se trata sin duda de un nombre inadecuado, ya que había sido conocido anteriormente por Aristóteles, quien lo utilizó para tratar de dar una justificación matemática de la forma semicircular del arco iris[2].

El libro sobre *Secciones en una razón dada* trataba, al parecer, de los diversos casos de un problema general: dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado una recta que corte a las anteriores en segmentos (medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados) que estén en una razón dada. Este problema es equivalente a resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax - x^2 = bc$, es decir, al de aplicar a un segmento dado un rectángulo igual a otro rectángulo dado salvo un cuadrado de exceso. En el libro sobre *Secciones en un área dada* el problema a resolver es análogo, salvo que lo que se pide es que los segmentos determinados por las intersecciones formen un rectángulo equivalente a otro, y no que estén en una razón dada. Este problema conduce a una ecuación cuadrática de la forma $ax + x^2 = bc$, es decir, a aplicar a un segmento a un rectángulo igual a otro rectángulo dado salvo el defecto de un cuadrado. El tratado de Apolonio sobre *Secciones determinadas* trataba de lo que podríamos llamar geometría analítica de una dimensión. Se consideraba el siguiente problema general, formulado utilizando la típica forma geométrica del análisis algebraico de los griegos. Dados cuatro puntos A, B, C, D, sobre una recta, determinar un quinto punto P sobre ella, tal que el rectángulo construido sobre AP y CP esté en una razón dada con el rectángulo construido sobre BP y DP. También en este caso el problema se reduce fácilmente a la resolución de una ecuación cuadrática y, lo mismo que en los casos anteriores, Apolonio trata el problema de una manera exhaustiva, incluyendo los límites de las posibilidades que se presentan y el número de soluciones.

3. El problema de Apolonio

El tratado sobre *Tangencias* era de un tipo muy diferente al de los tres que hemos comentado, ya que tal como nos lo describe Pappus nos encontramos estudiado en él el problema que hoy se conoce familiarmente como el «Problema de Apolonio». Dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados (donde debe entenderse que ser tangente una circunferencia a un punto significa pasar por él). Este problema da lugar a diez casos posibles, desde los dos más sencillos en los que los tres elementos son tres puntos o tres rectas, al más difícil de todos, trazar una circunferencia tangente a otras tres dadas. Los dos casos más fáciles habían aparecido ya en los *Elementos* de Euclides, en conexión con las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo;

[2] Véase G. B. Boyer, *The Rainbow* (New York; Yoseloff, 1959), págs. 45-46.

otros seis casos se estudiaban en el Libro I de las *Tangencias*, y los casos relativos a dos rectas y una circunferencia así como a tres circunferencias ocupaban todo el Libro II. No conocemos cuáles eran exactamente las soluciones de Apolonio, pero pueden ser reconstruidas a base de la información que nos transmite Pappus. No obstante, durante los siglos XVI y XVII los eruditos tuvieron la impresión de que Apolonio no había resuelto el último caso, y por lo tanto consideraron este problema como un reto a su habilidad. Newton fue uno de los que dio una solución utilizando solamente regla y compás[3].

La trisección de un ángulo hecha por Arquímedes, en la que se intercalaba una longitud dada entre una recta y una circunferencia, a lo largo de otra recta que se hace girar para ello alrededor de un punto fijo (el punto P en la figura 8.9), es un ejemplo típico de solución de un problema por medio de una *neusis* (o inclinación). El tratado de Apolonio sobre *Inclinaciones* estaba dedicado al estudio de la clase de problemas del tipo de *neusis* que pueden ser resueltos por métodos «planos», es decir, mediante el uso de regla y compás exclusivamente. La trisección efectuada por Arquímedes no es, desde luego, un problema de este tipo, ya que, como es bien sabido, en la época moderna se ha conseguido demostrar que un ángulo genérico no puede ser trisecado por medio de métodos «planos». Según Pappus, uno de los problemas de los que se ocupaba Apolonio en las *Inclinaciones* es el de trazar en una circunferencia dada una cuerda de longitud dada «inclinada» hacia (o pasando por) un punto dado.

Pueden encontrarse en la antigüedad alusiones a otras obras perdidas de Apolonio, entre las cuales se halla una sobre la *Comparación del dodecaedro y del icosaedro*. En ella Apolonio daba una demostración del teorema (probablemente conocido por Aristeo) que dice que las caras pentagonales de un dodecaedro distan lo mismo del centro de la esfera circunscrita que las caras triangulares del icosaedro inscrito en la misma esfera. El teorema que aparece en el espurio Libro XIV de los *Elementos* y que nos dice en esta situación la razón entre las áreas del icosaedro y del dodecaedro es igual a la razón de sus volúmenes, se sigue inmediatamente del teorema anterior de Apolonio, y es posible por lo tanto que el autor del Libro XIV de los *Elementos* hiciera uso del tratado en cuestión de Apolonio.

4. Ciclos y epiciclos

Apolonio fue también un astrónomo famoso. Según todos los indicios a él se debe el artificio matemático favorito en la antigüedad para representar los movimientos de los planetas. En lugar de las esferas concéntricas que había utilizado Eudoxo, Apolonio propuso dos sistemas alternativos, uno de ellos a base de movimientos epicíclicos y el otro a partir de movimientos excéntricos. En el primer esquema se supone que un planeta P se mueve uniformemente describiendo una circunferencia menor o epiciclo, cuyo centro C gira a su vez uniformemente siguiendo la circunferencia de un círculo mayor o deferente, con centro en la Tierra

[3] *Arithmetica Universalis*, Problema XLVII.

E (fig. 9.1). En el esquema excéntrico el planeta P se mueve uniformemente siguiendo la circunferencia de un círculo mayor cuyo centro C' se mueve a su vez uniformemente a lo largo de la circunferencia de un círculo menor con centro en E. Si se tiene $PC = C'E$, los dos esquemas geométricos resultan ser equivalentes, cosa que evidentemente sabía Apolonio[4]. Mientras que la teoría de las esferas

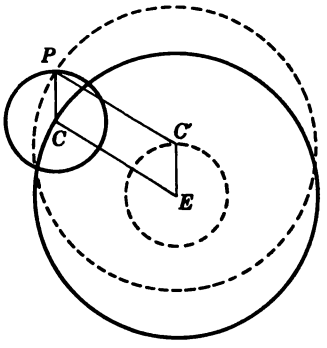


Figura 9.1

homocéntricas se había convertido, sobre todo debido a la obra de Aristóteles, en el sistema astronómico favorito de todos aquellos que se encontraban suficientemente satisfechos con una representación global de los movimientos aproximados de los planetas, la teoría de los ciclos y epiciclos o de los círculos excéntricos se convirtió, por obra de Ptolomeo principalmente, en la preferida por los astrónomos matemáticos que pretendían refinamientos de detalle y una precisión capaz de hacer predicciones para el futuro. Durante unos 1.800 años estos dos sistemas, el de Eudoxo y el de Apolonio, fueron pacíficos rivales compitiendo entre sí por el favor de los sabios.

5. Las *Cónicas*

A pesar de su abundante producción científica, sólo dos de los muchos tratados escritos por Apolonio han sobrevivido en su mayor parte. Todas las versiones griegas de sus *Secciones en una razón dada* se perdieron hace largo tiempo, pero no antes de que se hiciera una traducción al árabe; en 1706, Halley, el astrónomo amigo de Newton, publicó una traducción de esta obra al latín, y a partir de entonces ha aparecido traducida a diversas lenguas modernas. Aparte de este tratado, sólo se ha conservado sustancialmente otra obra de Apolonio, la cual es, sin embargo, y afortunadamente, sin duda alguna, su «chef-d'oeuvre», las *Cónicas*. De esta famosa obra sólo se conserva en el original griego la mitad, los cuatro primeros de sus ocho libros; pero por suerte un matemático árabe, Thabit ibn

[4] Véase O. Neugebauer, «Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius», *Scripta Mathematica*, 24 (1959), págs. 5-21.

Qurra, tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que desapareciera su versión griega, y esta traducción se ha conservado. En 1710, Edmund Halley publicó una traducción al latín de los siete libros, y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas.

Las secciones cónicas se conocían ya desde hacía más o menos un siglo y medio cuando Apolonio compuso su famoso tratado sobre estas curvas, y durante este intervalo por lo menos dos veces se escribieron tratados generales sobre el tema, debidos a Aristeo y a Euclides, pero de la misma manera que los *Elementos* de Euclides habían eclipsado a todos los textos elementales anteriores, así también en el nivel más avanzado de la teoría de las secciones cónicas, las *Cónicas* de Apolonio desplazaron a todos sus rivales en este campo, incluyendo las *Cónicas* de Euclides, y al parecer no se hizo ya ningún otro intento de mejorarlas en la antigüedad. Si la supervivencia es en algún sentido una medida de la calidad, entonces los *Elemenos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio fueron sin duda las mejores obras en su género en la matemática antigua.

El Libro I de las *Cónicas* comienza con una exposición de los motivos para escribir la obra. Así sabemos que mientras Apolonio estaba en Alejandría fue visitado por un geómetra llamado Naucrates, y fue a petición de este último que Apolonio escribió un apresurado borrador de las *Cónicas* en ocho libros. Más tarde, ya en Pérgamo, Apolonio se tomó el tiempo necesario para pulir cuidadosamente estos libros, uno por uno, lo que explica el hecho de que los Libros IV al VII comiencen con dedicatorias y agradecimientos al rey Atalo de Pérgamo. Los cuatro primeros libros los describe el autor como constituyendo una introducción elemental, y se supone generalmente que la mayor parte del material que contienen había aparecido publicado ya en los anteriores tratados sobre cónicas. Sin embargo, Apolonio nos dice expresamente que algunos de los teoremas contenidos en el Libro III son suyos propios, ya que Euclides no había dado un tratamiento completo de los lugares geométricos que se consideran en él. Apolonio afirma que los cuatro últimos libros son extensiones de la materia que van más allá de lo esencial, y efectivamente, en ellos la teoría avanza en direcciones más especializadas, como veremos[5].

Anteriormente a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos según que el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso. Parece ser que Apolonio demostró por primera vez y de una manera sistemática que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono; éste era un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión. Otra generalización importante se llevó a cabo cuando Apolonio demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de su base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular

[5] Véase T. L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (1896), págs. XXVI-XXVII. Tanto aquí como a lo largo de todo este capítulo nos basamos en este importante libro de Heath, del cual hemos tomado además la traducción de los pasajes que reproducimos.

oblicuo o escaleno. Si Eutocio, en sus comentarios sobre las *Cónicas*, estaba bien informado, podemos asegurar que Apolonio fue el primer geómetra que demostró que las propiedades de estas curvas son las mismas, se obtengan como secciones de conos oblicuos o de conos rectos. Por último, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja (algo como el cono indefinidamente largo de un helado actual) por un cono de dos hojas (parecido a un par de conos de helado indefinidamente largos y orientados en sentidos opuestos, de manera que sus vértices coincidan y sus ejes estén sobre una misma recta). De hecho, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente:

> «Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.»

Este cambio en el punto de vista convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como la conocemos hoy. Hasta entonces los geómetras solían hablar de «las dos hipérbolas», en vez de «las dos ramas» de una hipérbola única, pero en cualquier caso el carácter dual de la curva fue reconocido claramente a partir de Apolonio.

6. Los nombres de las secciones cónicas

No hay duda de que a lo largo de la historia de la matemática los conceptos han sido mucho más importantes que la terminología utilizada, pero no obstante el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio tiene una importancia mayor que la usual. Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombre específico más que descripciones triviales de la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (u oxitoma), secciones de un cono rectángulo (u ortotoma) y secciones de un cono obtuso (o amblitoma). Arquímedes continuó utilizando estos nombres, aunque según parece también usó ya el nombre de parábola como sinónimo para una sección de un cono rectángulo. Pero fue realmente Apolonio, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, quien introdujo por primera vez los nombres de elipse y de hipérbola en conexión con estas curvas. Las palabras «elipse», «parábola» e «hipérbola» no eran nuevas en absoluto y acuñadas para la ocasión, sino que fueron adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas. *Ellipsis*, que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado (u otra figura dada). Mientras que la palabra *Hyperbola* (de «avanzar más allá») se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra *Parábola* (de «colocar al lado» o «comparar») indicaba que no había ni deficiencia ni exceso. Apolonio aplicó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres

para las secciones cónicas. La conocida ecuación moderna de la parábola con vértice en el origen y eje el eje de abscisas es $y^2 = lx$, donde l es el llamado «latus rectum» o parámetro, que suele representarse por $2p$ y a veces por $4p$; es decir, la parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el parámetro l. Las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, referidas análogamente a uno de sus vértices como origen, son

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o bien

$$y^2 = lx \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

donde l es de nuevo el «latus rectum» o parámetro $\frac{2b^2}{a}$. Es decir, en el caso de la elipse $y^2 < lx$, mientras que para la hipérbola $y^2 > lx$, y son estas propiedades de las curvas que están expresadas por las respectivas desigualdades las que sugirieron los nombres dados por Apolonio hace más de dos milenios a las secciones cónicas, nombres tan afortunados que han quedado firmemente asociados a ellas hasta hoy[6].

7. El cono de dos hojas

Al obtener todas las secciones cónicas a partir de un único cono circular oblicuo de dos hojas, y darle unos nombres tan adecuados como los que les dio, Apolonio hizo una contribución notable a la geometría, pero aun así no consiguió llegar en el grado de generalidad todo lo lejos que podría haber ido. Apolonio podría haber comenzado de la misma manera con un cono elíptico, o bien con un cono cuadrático en general, y haber obtenido no obstante las mismas curvas. Es decir, cualquier sección plana de un cono «circular» como los que utiliza Apolonio podría haber servido como curva generatriz o «base» en su definición, de manera que la particularización a un «cono circular» no es necesaria. De hecho, tal y como demuestra Apolonio mismo (Libro I, Proposición 5), todo cono circular oblicuo tiene no sólo un sistema infinito de secciones circulares paralelas a la de la base, sino también otro conjunto infinito de secciones circulares dadas por todas las que él llamó secciones subcontrarias (o antiparalelas) a las primeras. Sea BFC la base del cono circular oblicuo dado y sea ABC la sección triangular del cono por el plano de la figura (véase la fig. 9.2). Sea ahora P un punto cualquiera perteneciente

[6] El comentarista Eutocio fue el responsable de una interpretación errónea que aún está muy extendida, al respecto de que las palabras elipse, parábola e hipérbola fueron adoptadas por Apolonio para indicar que el plano de corte se quedaba corto, o marchaba paralelamente, o cortaba a la segunda hoja del cono. Esto no coincide en absoluto con lo que el mismo Apolonio nos dice en las *Cónicas*.

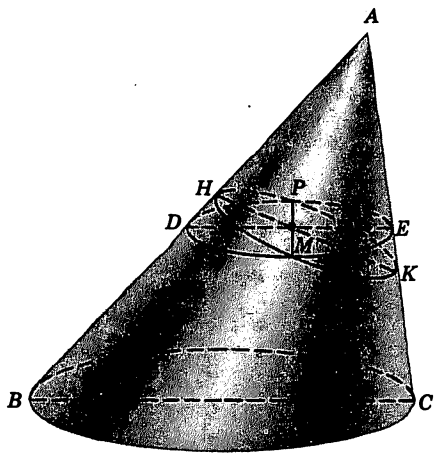


Figura 9.2

a una sección circular DPE paralela a la BFC, y sea HPK una sección por un plano tal que los triángulos AHK y ACB sean semejantes, pero orientados de manera opuesta; en esta situación Apolonio llama a la sección HPK una sección subcontraria de la BFC, y demuestra que esta sección es también una circunferencia. La demostración se puede obtener fácilmente a partir de una semejanza de triángulos: los HMD y EMK; de esta semejanza se sigue que $HM \cdot MK = DM \cdot ME = PM^2$, propiedad característica de una circunferencia. En el lenguaje de la geometría analítica, si llamamos $HM = x$, $HK = a$ y $PM = y$, entonces $y^2 = x(a-x)$, o bien $x^2 + y^2 = ax$, que es la ecuación de una circunferencia.

8. Las propiedades fundamentales

Los geómetras griegos clasificaban las curvas en tres categorías: la primera, conocida con el nombre de «lugares planos», contenía a todas las líneas rectas y circunferencias; la segunda, conocida como la de los «lugares sólidos», estaba constituida por todas las secciones cónicas; y la tercera categoría, conocida como la de los «lugares lineales», agrupaba a todas las curvas restantes. El nombre dado a la segunda clase venía sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, tal como se suele hacer hoy, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano. Apolonio, al igual que sus predecesores, obtenía sus curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, pero intentó (y consiguió) prescindir del cono lo más rápidamente posible. A partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental o «síntoma» de la sección, que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva, y desde ese momento abandonó ya el cono y procedió a estudiar dicha curva por métodos planimétricos exclusivamente,

basados en esta propiedad. Este proceso, que aquí vamos a ilustrar con el caso de la elipse (véase Libro I, Proposición 13), probablemente se parecía mucho al que habían utilizado sus predecesores, incluido Menecmo. Sea ABC una sección triangular de un cono circular oblicuo (véase fig. 9.3) y sea P un punto cualquiera

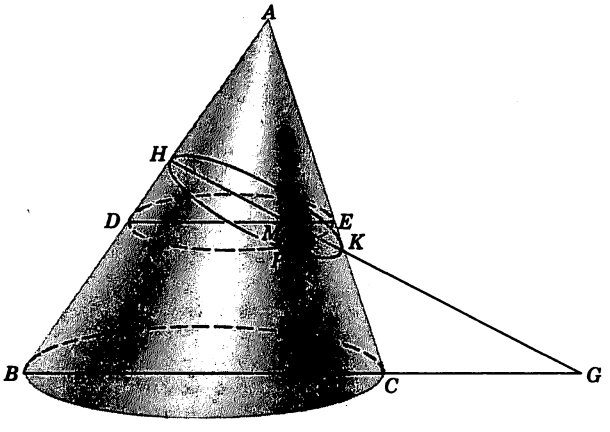


Figura 9.3

de una sección plana HPK que corta a todas las generatrices del cono; prolonguemos HK hasta que corte a la recta BC en G, y tracemos por P un plano paralelo a la base, que cortará al cono según la circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM. Sea DME el diámetro de esta circunferencia perpendicular a PM (que, para que ocupe la posición de la figura, dado el plano HPK, basta con elegir el punto de vista o, lo que es lo mismo, el plano de la figura, adecuadamente). Entonces, por la semejanza de los triángulos HDM y HBG tenemos

$$\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$$

y de la semejanza de los triángulos MEK y KCG,

$$\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$$

Ahora bien, por otra parte tenemos, debido a la propiedad de la circunferencia tantas veces utilizada, que

$$PM^2 = DM \cdot ME$$

por lo tanto,

$$PM^2 = \frac{HM \cdot BG}{HG} \cdot \frac{MK \cdot CG}{KG}$$

Si llamamos $PM=y$, $HM=x$ y $HK=2a$, la propiedad que expresa la igualdad anterior viene a traducirse en la ecuación

$$y^2=kx(2a-x)$$

que podemos reconocer como la ecuación de una elipse referida al vértice H y a HK como su eje mayor. De una manera análoga obtiene Apolonio para la hipérbola la condición equivalente a la ecuación

$$y^2=kx(x+2a)$$

La forma de estas ecuaciones resulta estar en perfecto buen acuerdo con las formas «según el nombre» que vimos anteriormente, como se puede comprobar tomando $k=\frac{b^2}{a^2}$ y $l=\frac{2b^2}{a}$.

9. Diámetros conjugados

Una vez que Apolonio obtuvo, a partir de sus consideraciones estereométricas sobre el cono, las relaciones básicas entre lo que nosotros no podríamos por menos de llamar las coordenadas de un punto de la curva en el plano, expresadas por las tres ecuaciones

$$y^2=lx-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2=lx$$

$$y^2=lx+\frac{b^2x^2}{a^2}$$

se dedicó a deducir las propiedades restantes a partir de estas ecuaciones planas, sin hacer ya ninguna referencia explícita al cono. El autor de las *Cónicas* nos dice que ha tratado en su Libro I de las propiedades fundamentales de estas curvas «de una manera más completa y más general que en los escritos de los otros autores». Hasta qué punto responde a la realidad esta afirmación puede deducirse del hecho de que es aquí, en el mismísimo Libro I, donde se desarrolla, por ejemplo, la teoría de los diámetros conjugados en una cónica. Es decir, lo que demuestra concretamente Apolonio es que los puntos medios del conjunto de las cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse o una hipérbola están situados sobre un segundo diámetro, y denomina a ambos como «diámetros conjugados». De hecho, mientras que hoy se suele referir una cónica a un par de rectas perpendiculares como ejes, Apolonio utiliza sistemáticamente un par de diámetros conjugados como equivalentes de un sistema de coordenadas oblicuas. Este sistema de diámetros conjugados constituye un marco de referencia extraordinariamente útil para referir a él una cónica, ya que, como demostró Apolonio, si se traza una recta por un

extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela al diámetro conjugado del primero, entonces esta recta «tocará a la cónica en el punto en cuestión y no será posible trazar otra recta entre ella y la cónica»; es decir, la recta en cuestión será tangente a la cónica. Aquí podemos ver claramente, de una manera incidental, el concepto griego estático de la tangente a una curva, en contraste con la concepción cinemática de Arquímedes. Como consecuencia de lo anterior nos encontramos a menudo en las *Cónicas* con el hecho de que se utilice un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas de referencia.

Entre los teoremas del Libro I hay algunos (como las Proposiciones 41 a 49) que equivalen a la demostración de que la «ecuación» de la cónica conserva su forma al hacer una transformación de coordenadas de un sistema basado en la tangente y el diámetro que pasan por un punto P de la cónica, a otro sistema determinado por la tangente y el diámetro correspondientes a un segundo punto Q sobre la misma cónica, junto con la demostración de que es posible referir la cónica a uno cualquiera de tales sistemas de ejes. En particular, Apolonio conocía bien las propiedades de la hipérbola referida a sus asíntotas tomadas como ejes, dada, para la hipérbola equilátera por la ecuación $xy=c^2$. Apolonio no podía llegar a sospechar, desde luego, que algún día una relación de esta forma, concretamente la ley de Boyle, sería fundamental para el estudio de los gases, o que su estudio de la elipse llegaría a ser esencial para el desarrollo de la astronomía moderna.

10. Tangentes y división armónica

En el Libro II se continúa el estudio de los diámetros conjugados y de las tangentes. Por ejemplo, si P es un punto cualquiera de una hipérbola de centro C, entonces la tangente en P cortará a las asíntotas en puntos L y L' (véase la fig. 9.4)



Figura 9.4

que equidistan de P (Proposiciones 8 y 10). Por otra parte, se demuestra en las Proposiciones 11 y 16 que cualquier cuerda QQ' paralela a CP corta a las asíntotas en puntos K y K', tales que $QK=Q'K'$ y $QK\cdot QK'=CP^2$. Las demostraciones de estas propiedades son, desde luego, sintéticas, pero el lector puede convencerse de su validez fácilmente utilizando los métodos analíticos modernos. Las proposiciones restantes del Libro II muestran cómo trazar tangentes a una cónica haciendo

uso de las propiedades de la división armónica de un segmento. En el caso de la elipse, por ejemplo (Proposición 49), si Q es un punto de la curva (fig. 9.5), Apolonio traza la perpendicular QN desde el punto Q al eje AA', y halla el conjugado armónico T de N con respecto a A y A', es decir, el punto T de la recta AA' tal que $\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{NA'}$, o bien, en otras palabras, el punto T que divide externamente al segmento AA' en la misma razón en que N divide internamente a AA'. Entonces la recta que pasa por T y Q será tangente a la elipse. El caso en que Q no esté situado sobre la curva puede reducirse a éste utilizando las propiedades conocidas de la división armónica. Por cierto, puede demostrarse que no hay otras

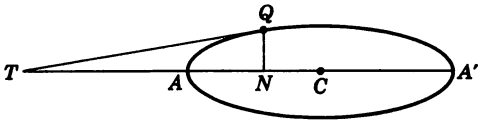


Figura 9.5

curvas planas más que las cónicas tales que, dada la curva y un punto, se pueda trazar con regla y compás la tangente a la curva que pasa por el punto dado, pero esto no lo sabía Apolonio, naturalmente.

11. El lugar geométrico determinado por tres y cuatro rectas

Según parece, Apolonio estaba especialmente orgulloso del Libro III de su obra, ya que en el Prólogo General a las *Cónicas* podemos leer:

> «El tercer libro contiene muchos teoremas notables que son útiles para la síntesis de lugares sólidos y la determinación de límites; la mayoría de estos teoremas, y a la vez los más bellos, son nuevos y, cuando los descubrí, pude observar que Euclides no había tratado la síntesis de los lugares geométricos con respecto a tres y cuatro rectas, sino sólo los casos fáciles, y aun así sin éxito, porque era imposible completar esta síntesis sin contar con mis descubrimientos adicionales.»

El lugar geométrico determinado por tres y cuatro rectas al que se hace referencia en este párrafo jugó un papel muy importante a lo largo de la historia de la matemática desde Euclides hasta Newton. Se trata de lo siguiente: Dadas tres (o cuatro) rectas en un plano, hallar el lugar geométrico de un punto P que se mueve de tal manera que el cuadrado de la distancia de P a una de estas tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (o, en el caso de cuatro rectas, el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), midiendo siempre estas distancias en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes. Si utilizamos los métodos analíticos modernos, incluyendo la forma normal de la ecuación de una recta, entonces nos es fácil demostrar que el lugar geométrico buscado es una sección cónica, sea real o imaginaria, reducible o irreducible. Si, en el caso del lugar

geométrico correspondiente a tres rectas, llamamos a las rectas dadas $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ y $A_3x+B_3y+C_3=0$, y si los ángulos según los cuales se deben medir las distancias son θ_1, θ_2 y θ_3, entonces el lugar geométrico del punto $P(x, y)$ vendrá dado por la ecuación

$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+B_1^2)\operatorname{sen}^2\theta_1}=\frac{K(A_2x+B_2y+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}\operatorname{sen}\theta_2}\cdot\frac{(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}\operatorname{sen}\theta_3}$$

Esta ecuación es de segundo grado en x e y, en general, y por lo tanto el lugar geométrico es una sección cónica. Nuestra solución en terminología moderna no hace justicia al tratamiento dado por Apolonio al problema en su Libro III, en el que nos encontramos con más de 50 proposiciones formuladas cuidadosamente y demostradas todas ellas por métodos sintéticos, que nos conducen finalmente al lugar geométrico buscado. Medio milenio más tarde Pappus propuso una generalización de este teorema para n rectas, con $n>4$, y fue precisamente este problema generalizado el que sirvió a Descartes en 1637 como «test crítico» o prueba de fuego de su novísima geometría analítica. Así pues, pocos problemas han jugado un papel tan importante en la historia de la matemática como el que jugó el «lugar de las tres y las cuatro rectas».

12. Intersecciones de cónicas

El Libro IV de las *Cónicas* lo describe su autor como el que se ocupa del problema de «de cuántas maneras diferentes pueden cortarse unas a otras las secciones de conos», y Apolonio se muestra especialmente orgulloso de los teoremas, «ninguno de los cuales ha sido tratado por los escritores anteriores», relativos al número de puntos en que una sección cónica corta a las «ramas opuestas de una hipérbola». La idea de considerar a la hipérbola como una curva de dos ramas se debe a Apolonio, que se explaya en el descubrimiento y demostración de teoremas relativos a ella. Por ejemplo, demuestra Apolonio (IV. 42) que si una rama de una hipérbola corta a las dos ramas de otra hipérbola, entonces la rama opuesta de la primera hipérbola no cortará a ninguna de las dos ramas de la segunda hipérbola en dos puntos; o bien (IV. 54), si una hipérbola es tangente a una de las ramas de una segunda hipérbola con la concavidad en direcciones opuestas, entonces la rama opuesta de la primera hipérbola no cortará a la rama opuesta de la segunda. Es precisamente en conexión con los teoremas de este libro donde Apolonio hace un comentario que nos indica que en su época, lo mismo que en la nuestra, había obtusos adversarios de la matemática pura que preguntaban, con intención malévola, por la utilidad de tales resultados. Apolonio contesta con orgullo a estas objeciones afirmando que: «Merecen ser aceptados a causa de sus propias demostraciones, de la misma manera que aceptamos muchas otras cosas en la matemática por esta misma razón y no por ninguna otra»[7].

[7] Véase Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*, pág. LXXIV.

13. Máximos y mínimos. Tangentes y normales

La introducción al Libro V, que está dedicado a estudiar segmentos máximos y mínimos trazados con respecto a una cónica, vuelve a insistir en que «el tema es de los que parecen ser dignos de ser estudiados por su propio interés». Al mismo tiempo que uno no puede por menos de admirar al autor por su elevada actitud intelectual, parece procedente hacer notar que lo que en su día fue simplemente una bella teoría, sin ninguna posibilidad en absoluto de ser aplicada a la ciencia o la tecnología de la época, ha llegado a ser un instrumento teórico fundamental en campos tales como la dinámica terrestre o la mecánica celeste. Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Sin un conocimiento de las propiedades de las tangentes a una parábola sería imposible un análisis preciso de las trayectorias locales en el movimiento de proyectiles y, de la misma manera, un estudio detallado de las trayectorias de los planetas es inimaginable sin hacer referencia a las tangentes a una elipse. Resulta pues meridianamente claro, dicho en otras palabras, que fue la matemática pura de Apolonio la que hizo posible la aparición, unos 1.800 años más tarde, de los *Principia* de Newton, los cuales, a su vez, han hecho concebir a los científicos actuales la esperanza de que algún día será posible un viaje a la Luna[8]. Ya incluso en la antigua Grecia el teorema de Apolonio, que asegura que todo cono oblicuo tiene dos familias de secciones circulares, encontró aplicación a la cartografía en la proyección estereográfica de una región esférica sobre un plano, utilizada por Ptolomeo y probablemente incluso por Hiparco. Frecuentemente se ha dado el caso en el desarrollo de la matemática de que temas que sólo podían justificarse originariamente como «dignos de ser estudiados por sí mismos», han sido más tarde de un valor inestimable para el «hombre práctico».

Los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva C en un punto P, considerándola como una recta L que tiene el único punto P común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por P e incluida entre la recta L y la curva C. Quizá fuese porque Apolonio no se encontraba muy satisfecho con esta definición por lo que evita definir la normal a una curva C por un punto Q como la recta por Q que corta a la curva C en un punto P y es perpendicular a la tangente a C por P. En lugar de ello, hace uso, para definir la normal, del hecho de que la distancia de Q a C es un mínimo o un máximo relativo si se mide precisamente a lo largo de la normal. Así, por ejemplo, Apolonio demuestra en las *Cónicas* V. 8 un teorema relativo a la normal a una parábola que hoy podría formar parte de un curso de cálculo diferencial; formulado en terminología moderna este teorema afirma que la subnormal a la parábola $y^2 = 2px$ correspondiente a un punto cualquiera P de la curva, es constante e igual a p. En el lenguaje utilizado por Apolonio esta propiedad se expresa más o menos de la manera siguiente:

> «Si A es el vértice de una parábola $y^2 = px$ y si G es un punto situado sobre su eje y tal que $AG > p$, y si N es un punto entre A y G tal que $NG = p$, y si NP es la perpendicular

[8] [El autor no podía sospechar en 1968 lo cercano que estaba tal acontecimiento (21 de julio de 1969)]. (*N. del T*).

al eje por N, que corta a la parábola en P (fig. 9.6), entonces PG es el segmento mínimo que va desde G a un punto de la curva, y por lo tanto es normal a la parábola en P.»

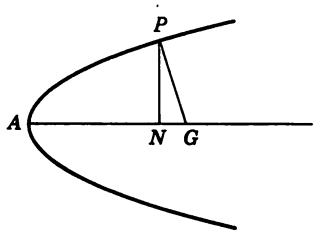


Figura 9.6

La demostración que hace Apolonio es una demostración siguiendo el típico método indirecto: lo que se demuestra es que si P' es otro punto cualquiera de la parábola, entonces $P'G$ aumenta según P' se mueve sobre la curva alejándose de P en cualquier dirección que lo haga. A continuación se da una demostración del teorema análogo, sólo que más complicado, relativo a la normal a una elipse o una hipérbola desde un punto del eje, y se demuestra además que si P es un punto de una cónica sólo se puede trazar una única normal por P, ya sea que la normal se considere como un mínimo o un máximo, y que esta normal es perpendicular a la tangente a la cónica en P. Nótese, pues, que la perpendicularidad que nosotros solemos tomar como definición viene demostrada aquí como un teorema, mientras que, recíprocamente la propiedad de máximo-mínimo que es para nosotros un teorema la toma Apolonio como definición. Las proposiciones restantes del Libro V desarrollan el tema de las normales a una cónica hasta un punto tal que Apolonio llega a dar criterios que nos permiten decir cuántas normales se pueden trazar desde un punto dado a una sección cónica; estos criterios vienen a ser equivalentes a lo que nosotros describiríamos como las ecuaciones de las evolutas de las cónicas respectivas. Para el caso de la parábola $y^2 = 2px$ Apolonio demuestra esencialmente que los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación cúbica $27py^2 = 8(x-p)^3$ son posiciones límites de los puntos de intersección de las normales a la parábola en puntos P y P', cuando P' se aproxima a P. Es decir, los puntos de esta cúbica son realmente los centros de curvatura correspondientes a los distintos puntos de la cónica (o, dicho con otras palabras, los centros de los círculos osculadores a la parábola). En el caso de la elipse y de la hipérbola, cuyas ecuaciones respectivas son

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

las correspondientes ecuaciones de sus evolutas son

$$(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} = (a^2 \mp b^2)^{2/3}$$

Después de dar las condiciones que determinan la evoluta de una cónica, muestra Apolonio cómo construir una normal a una cónica por un punto dado Q. En el caso de la parábola $y^2 = 2px$, y para un punto Q exterior a la parábola y que no esté sobre su eje, se traza la perpendicular QM al eje AK, se toma en sentido opuesto a la parábola $MH = p$ y se levanta la perpendicular HR a HA (fig. 9.7); a

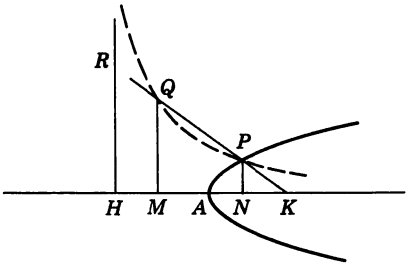


Figura 9.7

continuación se traza la hipérbola equilátera que pasa por Q y que tiene por asíntotas HA y HR, la cual cortará a la parábola dada en un punto P. Entonces la recta QP es la normal buscada, como puede demostrarse viendo simplemente que $NK = HM = p$. Si el punto Q estuviera situado en el interior de la parábola, entonces la construcción se haría análogamente salvo que P estaría ahora situado entre Q y R. Apolonio da también unas construcciones análogas para la normal desde un punto a una elipse o una hipérbola dadas, haciendo uso también de una hipérbola auxiliar. Hay que hacer notar que la construcción de normales a la elipse y a la hipérbola requiere algo más que el uso de la regla y el compás, cosa que no pasaba con la construcción de tangentes. En la nomenclatura con que denominaban los antiguos estos dos problemas, el problema de trazar una *tangente* a una cónica es un «problema plano», ya que para resolverlo basta utilizar intersecciones de rectas y circunferencias; por el contrario, el problema de trazar una *normal* a una cónica con centro desde un punto arbitrario del plano es un «problema sólido», ya que es imposible resolverlo utilizando sólo rectas y circunferencias, aunque sí es posible utilizando lugares geométricos sólidos (en nuestro caso una hipérbola). Varios siglos más tarde Pappus criticó severamente a Apolonio por su construcción de la normal a la parábola tratándola como un problema sólido en vez de como un problema plano; es decir, la hipérbola que utiliza Apolonio en este caso podría ser sustituida por una circunferencia. Quizá Apolonio pensó que en este problema de las normales era conveniente dejar de lado la especie de fetichismo incondicional de las rectas y circunferencias, con objeto de dar un tratamiento uniforme al problema para los tres tipos de cónicas.

14. Cónicas semejantes

En su dedicatoria del Libro VI de las *Cónicas* al rey Atalo, Apolonio lo describe como dedicado a estudiar las proposiciones relativas a los «segmentos de

cónicas iguales y desiguales, semejantes y desemejantes, junto con algunas otras materias que no fueron tratadas por los que me precedieron. En particular, se encontrará en este libro cómo se puede obtener una sección de un cono recto igual a una sección cónica dada». Dos cónicas son semejantes, según Apolonio, si las ordenadas trazadas al eje a distancias proporcionales del vértice son respectivamente proporcionales a las correspondientes abscisas. Entre las proposiciones más fáciles que podemos ver en el Libro VI están las que aseguran que todas las parábolas son semejantes (VI. 11), y que una parábola no puede ser semejante a una elipse ni a una hipérbola, ni tampoco una elipse a una hipérbola (VI. 14, 15). Otras proposiciones de este mismo libro, como las VI. 26 y VI. 27, demuestran que si se corta un cono arbitrario por dos planos paralelos que dan lugar a secciones hiperbólicas o elípticas, entonces las dos secciones son semejantes pero no iguales.

El Libro VII vuelve al tema de los diámetros conjugados, y contiene «muchas proposiciones nuevas relativas a los diámetros de las secciones cónicas y a las figuras construidas sobre ellos». Entre ellas hay algunas que pueden encontrarse también en los textos modernos, tales como las que demuestran que (VII. 12, 13, 29, 30):

> «En toda elipse la suma, y en toda hipérbola la diferencia de los cuadrados construidos sobre dos diámetros conjugados cualesquiera es igual a la suma, o diferencia, respectivamente, de los cuadrados construidos sobre los ejes.»

También nos encontramos con la demostración del conocido teorema que dice que si trazamos las tangentes en los extremos de un par de diámetros conjugados de una elipse o de una hipérbola (en cuyo caso deben considerarse las dos hipérbolas conjugadas), entonces el paralelogramo formado por estas cuatro tangentes es equivalente al rectángulo construido sobre los ejes. Se ha formulado a veces la conjetura de que el Libro VIII, que se ha perdido, de las *Cónicas* continuaría con el estudio de otros problemas análogos, debido a que en la introducción al Libro VII nos dice Apolonio que los teoremas del Libro VII van a ser utilizados en el Libro VIII para resolver determinados problemas sobre cónicas, de tal manera que este último libro «es, como si dijéramos, un apéndice».

15. Los focos de las cónicas

Las *Cónicas* de Apolonio constituyen un tratado de una amplitud y una profundidad tan extraordinarias que a veces nos sorprende precisamente el notar que se han omitido algunas de las propiedades que a nosotros nos parecen tan obviamente fundamentales. Tal como se definen las cónicas hoy en día en los libros de texto, los focos juegan un papel de primera importancia; sin embargo, Apolonio ni siquiera le da nombres especiales a estos puntos, y se refiere a ellos sólo de una manera indirecta. Se supone que él mismo, y quizá incluso ya Aristeo y Euclides, estaban bien familiarizados con las propiedades de estas curvas referidas al foco y a la directriz, pero el caso es que nada de esto se menciona ni siquiera en las *Cónicas*. No hay, obviamente, en los tratamientos antiguos de las cónicas ninguna idea

numérica que corresponda a lo que ahora llamamos la excentricidad de una cónica con centro y, aunque el foco de una parábola aparece de manera implícita en muchos teoremas de Apolonio, no está nada claro que fuera consciente del papel de la directriz, tan familiar ahora para nosotros. Apolonio, por otra parte, parece haber sabido cómo determinar una cónica que pase por cinco puntos, pero este problema, que tuvo más tarde un lugar tan importante en los *Principia* de Newton, está totalmente ausente de las *Cónicas*. Es muy posible, desde luego, que algunas o todas estas omisiones que nos llaman la atención se deban al hecho de que fueran tratadas en otras obras que se han perdido, por Apolonio u otros autores. Se han perdido tantas obras de la matemática antigua que un argumento *e silencio* difícilmente se sostiene. Por otra parte, las palabras de Leibniz podrían servirnos de advertencia a la hora de no subestimar los logros de los antiguos: «Todo aquel que entienda a Arquímedes y a Apolonio se verá inclinado a admirar menos a los hombres más eminentes de las épocas posteriores.»

16. Sobre el uso de las coordenadas

Los métodos que utiliza Apolonio en las *Cónicas* son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1.800 años. El uso de unas rectas de referencia en general y de un diámetro y una tangente en uno de sus extremos en particular no difiere esencialmente, desde luego, del uso de un sistema de coordenadas, sea rectangular u oblicuo, en general. Las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Las relaciones que da Apolonio entre estas abscisas y las correspondientes ordenadas (o *síntomas* de las curvas) no son otra cosa que formas retóricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas. Sin embargo, en el álgebra geométrica de los griegos no había lugar para las magnitudes negativas y, por otro lado, lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas venía siempre superpuesto «a posteriori» a una curva dada para estudiar sus propiedades. No parece presentarse ningún caso en la geometría antigua en el que se fije un sistema de coordenadas de referencia «a priori», con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica o retórica. Podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por las ecuaciones. Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues, conceptos subsidiarios derivados de una situación geométrica concreta, y se puede asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darlas de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfagan condiciones dadas sobre sus dos coordenadas. Para garantizar que un lugar geométrico era realmente una curva, los antiguos griegos consideraron necesario o bien producirla de una manera estereométrica como una sección de un sólido o describir su construcción de una manera cinemática.

Esta forma peculiar de definir y de estudiar las curvas por parte de los griegos

presenta un aspecto bastante desfavorable si se la compara con la amplitud y flexibilidad del tratamiento moderno. En realidad los antiguos ignoraron casi completamente el papel que jugaban una gran variedad de curvas en el mundo que los rodeaba. Siendo como eran uno de los pueblos con un sentido estético más desarrollado de todos los tiempos, las únicas curvas que fueron a encontrarse en los cielos y en la tierra fueron combinaciones de circunferencias y líneas rectas. Ni siquiera explotaron un poco a fondo los dos métodos para definir curvas que ellos mismos descubrieron; tanto el método cinemático como el de las secciones planas de otras superficies permiten un amplio margen de generalización, y sin embargo los matemáticos griegos apenas estudiaron una docena de curvas. Incluso la cicloide, engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una línea recta, parece haberles sido completamente desconocida. El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la geometría analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores modernos de la geometría analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista, mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del álgebra geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar.

Bibliografía

Apolonio de Perga: *Les coniques*, trad. Paul Ver Eecke (Bruges: Desclée, de Brouwer, 1924).

Coolidge, J. L.: *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945).

——: *History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; ed. en rústica, New York: Dover, 1963).

Coxeter, H. S. M.: «The Problem of Apollonius», *American Mathematical Monthly*, **75** (1968), 5-15.

Dingeldey, F.: «Coniques», *Encyclopédie des sciences mathématiques*, 3 (3), 1-256.

Fladt, K.: *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades* (Stuttgart, 1965).

Heath, T. L.: «Apollonius», en *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª ed. (Cambridge, 1910), II, 186-188.

—— (ed.): *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (Cambridge: Cambridge University Press, 1896; reed., New York: Barnes and Noble, 1961).

Neugebauer, O.: «Apollonius-Studien», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte B, *Studien*, II (1932), 215-253.

——: «Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius», *Scripta Mathematica*, 24 (1959), 5-21.

Taylor, Charles: *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881).

Thomas, Ivor: *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.).

Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961; ed. en rústica, New York: Wiley, 1963).
Zeuthen, H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhaguen, 1886 y 1902).

Ejercicios

1. Los nombres de Aristóteles, Euclides, Arquímedes y Apolonio están relacionados respectivamente con los de cuatro poderosos gobernantes: Alejandro, Ptolomeo, Heron y Atalo. Dígase qué país gobernaba cada uno de ellos y por qué motivos están asociados sus nombres a los de nuestros cuatro matemáticos.
2. Descríbanse varios aspectos en los que la matemática de Apolonio se diferencie sensiblemente de la de Euclides y varios otros aspectos en los que sus obras se parezcan.
3. ¿En qué aspectos se parecen y en qué otros se diferencian las obras de Apolonio y de Arquímedes?
4. ¿Podría decirse que Apolonio utilizó la geometría analítica? Justifíquese la respuesta, mostrando en qué aspectos sus métodos se parecen y en cuáles difieren de la geometría analítica moderna.
5. Escríbase el número 12.345.678.987.654.321 en el sistema de Apolonio.
6. Demuéstrese el teorema de Apolonio que afirma que el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante es una recta perpendicular a la que pasa por los dos puntos dados.
7. Demuéstrese el teorema del «círculo de Apolonio», es decir, demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos son distintas, pero están en una razón fija, es una circunferencia.
8. Dados los puntos $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 4)$ y $P_3(1, 2)$, hallar la ecuación de la recta que pasa por P_3 y que corta al eje Ox en un punto P_4 y al eje Oy en un punto P_5 tales que: *a*) P_1P_4 es el doble de P_2P_5, y *b*) $P_1P_4 \cdot P_2P_5 = 10$.
9. Resolver el «problema de Apolonio» para *a*) el caso de dos puntos y una recta, *b*) el caso de dos rectas y un punto.
10. A partir de las ecuaciones usuales de la elipse, la parábola y la hipérbola con un vértice en el origen de coordenadas, complétese la demostración de la «propiedad relativa al nombre», de Apolonio.
11. Si un diámetro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene pendiente m, calcúlese la pendiente de su diámetro conjugado.
12. Hállese la pendiente del sistema de cuerdas paralelas de la parábola $y^2 = 2px$ que son bisecadas por el diámetro $y = a$.
13. Dado un diámetro de una hipérbola, muéstrese exactamente de qué manera se podría construir su diámetro conjugado con regla y compás.
14. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 2px$ por el punto $(-1, 2)$ y muéstrese cómo se podrían construir con regla y compás.
15. Determínense las coordenadas de los pies de las cuatro normales que se pueden trazar desde el punto (1, 0) a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. ¿Cuántas normales pueden trazarse desde el punto (2, 0) a esta elipse?
16. ¿Para qué valores de K pueden trazarse cuatro normales desde el punto $(K, 0)$ a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

17. Demuéstrese que la longitud de la subnormal a una parábola correspondiente a un punto P situado sobre la misma parábola, es constante (e independiente por lo tanto de la posición del punto P sobre la curva).
18. Apolonio sabía que la tangente a una elipse o a una hipérbola por un punto P de la curva forma ángulos iguales con los radios focales que pasan por P. Demuéstrese este teorema.
19. Demuéstrese el teorema de Apolonio que dice que el segmento de tangente a una hipérbola determinado por sus intersecciones con las asíntotas, queda dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

*20. Hállese la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de sus distancias perpendiculares a los ejes de coordenadas es igual al producto de las distancias perpendiculares de P a las rectas $y=x$ e $y=1-x$.
*21. Hállese la ecuación de la polar del punto (a, b) con respecto a la parábola $y^2=2px$.
*22. Demuéstrese, de la misma manera que lo hizo Apolonio para el cono, que una sección oblicua de un cilindro circular es una elipse.
*23. Demuéstrese que, si AA' es el eje mayor de una elipse, si la tangente a la elipse en un punto arbitrario P corta a la prolongación de dicho eje en el punto T, y si N es la proyección de P sobre AA', entonces (AA', TN') es una cuaterna de puntos conjugados (véase fig. 9.5).
*24. ¿Cuántas normales pueden trazarse desde el punto (1, 2) a la parábola $y^2=2px$? Justifíquese la respuesta.

Capítulo X
LA TRIGONOMETRIA Y LAS TECNICAS DE MEDICION GRIEGAS

> Cuando trazo a placer el vertiginoso ir y venir de los cuerpos celestes, mis pies ya no tocan la tierra, sino que me hallo en presencia del mismísimo Zeus y me sacio de ambrosía, alimento de los dioses.
>
> *Ptolomeo*

1. La trigonometría primitiva

La trigonometría, al igual que cualquier otra rama de la matemática, no fue el resultado de la labor de un solo hombre ni de una única nación. Ya los antiguos egipcios y babilonios conocían y habían utilizado propiedades o «teoremas» relativos a las razones entre los lados de triángulos semejantes, sin formularlos de una manera explícita, naturalmente. Dado que no nos encontramos con ningún indicio del concepto de medida de ángulos en el mundo prehelénico, tales estudios y consideraciones podrían quizá llamarse «trilaterometría», o medida de los polígonos de tres lados (o triláteros), mejor que «trigonometría» o medida de las distintas partes de un triángulo. Con los griegos nos encontramos por primera vez con un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Las propiedades de las cuerdas, tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos de la época de Hipócrates, y es posible que Eudoxo haya usado razones y este tipo de medidas de ángulos para determinar el tamaño de la Tierra y las distancias relativas del Sol y de la Luna. En las obras de Euclides no aparece la trigonometría, en el sentido estricto del término, pero sí que hay teoremas equivalentes a leyes o fórmulas trigonométricas concretas. Las proposiciones II. 12 y II. 13 de los *Elementos*, por ejemplo, expresan el teorema del coseno para ángulos obtusos y agudos respectivamente, en un lenguaje geométrico más bien que trigonométrico, y se demuestran por un método análogo al utilizado por Euclides en conexión con el teorema de Pitágoras. Por otro lado, los teoremas relativos a longitudes de cuerdas son esencialmente aplicaciones del moderno teorema de los senos. Ya hemos visto también que el teorema de Arquímedes sobre la cuerda rota puede traducirse fácilmente al lenguaje trigonométrico, dando lugar a lo análogo de las fórmulas para los senos de sumas y diferencias de ángulos. Y los astrónomos de la Epoca Alejandrina, por su parte, especialmente Eratóstenes de Cirene (ca. 276-ca. 194 a.C.) y Aristarco de Samos (ca. 310-ca. 230 a.C.), se veían manejando problemas que apuntaban de una manera cada vez más urgente a la necesidad de establecer sistemáticamente las relaciones entre los ángulos y las cuerdas.

2. Aristarco de Samos

Aristarco, según nos cuentan Arquímedes y Plutarco, propuso un sistema astronómico heliocéntrico, anticipándose así a Copérnico en más de un milenio y medio[1], pero todo lo que pudiera haber escrito sobre este sistema se ha perdido. En cambio sí nos ha llegado un tratado de Aristarco, escrito probablemente antes de elaborar su teoría heliocéntrica (en torno al 260 a.C.), titulado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, en el que se supone un universo geocéntrico[2]. En esta obra Aristarco hace la observación de que cuando la Luna está exactamente medio llena, el ángulo entre la visual dirigida al centro del Sol y la visual dirigida al centro de la Luna es menor que un ángulo recto en un treintavo de cuadrante. (La introducción sistemática de los 360° como medida de un círculo completo vino un poco más tarde.) En el lenguaje trigonométrico actual esto viene a significar que la razón de la distancia de la Luna a la Tierra, a la distancia del Sol a la Tierra, es decir, la razón de ME a SE (véase la fig. 10.1) es igual a sen 3°. Como aún no se

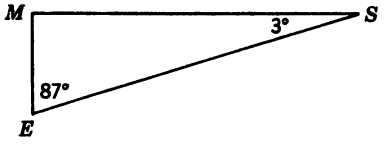


Figura 10.1

habían desarrollado las tablas trigonométricas, Aristarco tuvo que recurrir a un teorema geométrico bien conocido en su época y que hoy lo expresaríamos por medio de la cadena de desiguales trigonométricas

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ para } 0° < \beta < \alpha < 90°$$

De estas condiciones obtuvo Aristarco la conclusión de que $\frac{1}{20} < \operatorname{sen} 3° < \frac{1}{18}$, y afirmó en consecuencia que el Sol está más de 18 veces, pero menos de 20 veces, más alejado de la Tierra que la Luna. Este valor está muy lejos de aproximarse al verdadero, que es algo menor de 400 veces, pero es un poco mejor que los valores 9 y 12 que Arquímedes atribuye a Eudoxo y a Fidias, padre de Arquímedes. Además, hay que decir que el *método* utilizado por Aristarco es teóricamente impecable, estando viciado el resultado solamente por los errores de observación al medir el ángulo MES, puesto que el valor dado de 87° debía ser en realidad de unos 89° 50′.

Una vez determinadas las distancias relativas del Sol y de la Luna, dedujo Aristarco que sus tamaños tendrían que estar en la misma razón. Esto se sigue

[1] La exposición más completa sobre Aristarco y su lugar en la historia de la astronomía puede encontrarse en el libro de T. L. Heath *Aristarchus of Samos* (1913).

[2] Es posible que Eudoxo se anticipase a Aristarco en la determinación de estas distancias. Véase Paul Tannery, *Mémoires Scientifiques*, vol. I, pág. 371.

fácilmente del hecho de que el Sol y la Luna tienen muy aproximadamente el mismo tamaño aparente, es decir, se ven bajo el mismo ángulo aproximadamente para un observador desde la Tierra. En el tratado en cuestión se da este ángulo como de 2°, pero Arquímedes atribuye por su parte a Aristarco el valor mucho mejor de $\frac{1}{2}°$. A partir de esta razón puede ya Aristarco determinar una aproximación para los tamaños del Sol y de la Luna comparados con el de la Tierra. Aristarco sabía, por observación de los eclipses lunares, que la anchura del cono de sombra proyectado por la Tierra, a la distancia en que lo atraviesa la Luna es de unas dos veces la anchura de la Luna. Entonces, si R_s, R_e y R_m son los radios del Sol, la Tierra y la Luna respectivamente, y si D_s y D_m son las distancias del Sol y la Luna a la Tierra, entonces, por la semejanza de los triángulos *BCD* y *ABE* (véase la fig. 10.2) tenemos la proposición

$$\frac{R_e - 2R_m}{R_s - R_e} = \frac{D_m}{D_s}$$

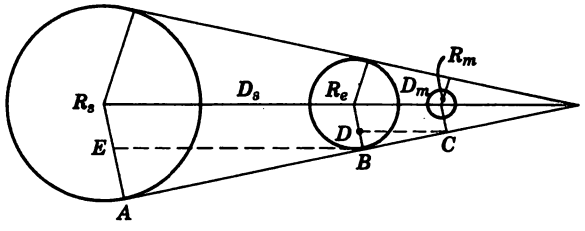


Figura 10.2

y si sustituimos en esta ecuación D_s y R_s por los valores aproximados $19D_m$ y $19R_m$, obtenemos

$$\frac{R_e - 2R_m}{19R_m - R_e} = \frac{1}{19}$$

o bien $R_m = \frac{20}{57}R_e$. Aquí hemos simplificado considerablemente los cálculos desarrollados efectivamente por Aristarco; en realidad sus razonamientos son mucho más precisos y cuidadosos, lo cual permite llegar a la conclusión de que

$$\frac{108}{43} < \frac{R_e}{R_m} < \frac{60}{19} \quad \text{y} \quad \frac{19}{3} < \frac{R_s}{R_e} < \frac{43}{6}$$

3. Eratóstenes de Cirene

Todo lo que se necesitaba para llegar a conseguir una estimación aproximada de los tamaños reales del Sol y de la Luna, era medir el radio de la Tierra.

Aristóteles había hablado de una medida equivalente a unas 40.000 millas para la circunferencia de la Tierra (resultado debido probablemente a Eudoxo), y Arquímedes nos informa de que algunos de sus contemporáneos estimaban dicho perímetro en unas 30.000 millas[3]. Un cálculo mucho mejor, y el más célebre de todos a considerable distancia, fue el que llevó a cabo Eratóstenes, un contemporáneo más joven de Arquímedes y Aristarco. Eratóstenes había nacido en Cirene, pero pasó la mayor parte de su juventud en Atenas, donde consiguió al parecer destacar en muy diversos campos: en poesía, astronomía, historia, etc., hasta que fue llamado a Alejandría hacia la mitad de su vida, por Ptolomeo III Filopator para ser tutor de su hijo (más tarde Ptolomeo Filadelfo) y a la vez desempeñar el cargo de bibliotecario de la universidad de esta ciudad. Y fue a Eratóstenes, ya en Alejandría, a quien envió Arquímedes su tratado sobre el *Método*. Hoy se recuerda a Eratóstenes más que nada por sus mediciones sobre el tamaño de la Tierra, que no fueron ni las primeras ni las últimas estimaciones que se hicieron en la antigüedad, pero sí las más precisas por todos los conceptos. Eratóstenes observó que el día del solsticio de verano a mediodía el Sol alumbraba directamente en vertical el fondo de un pozo muy profundo en la localidad de Syena (próxima a la actual Assuan), mientras que al mismo tiempo en Alejandría, situada aproximadamente en el mismo meridiano y 5.000 estadios al norte de Syena, el Sol proyectaba una sombra que indicaba que la distancia angular del Sol al cenit era de un cincuentavo de un círculo completo. A partir de la igualdad de los ángulos correspondientes $S'AZ$ y $S''OZ$ en la figura 10.3, resulta claramente que la

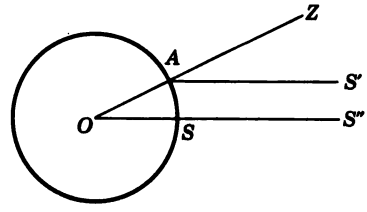


Figura 10.3

circunferencia de la Tierra debe ser igual a 50 veces la distancia entre Syena y Alejandría. Esto supone un perímetro de unos 250.000 estadios, o bien, como el estadio equivale a unos 185 m., de unos 46.000 km. Otras estimaciones posteriores fijaron el número anterior en 252.000 estadios, probablemente con la intención de obtener la cantidad redonda de 700 estadios por grado.

Debido a la gran cantidad de campos de conocimiento que cultivó, Eratóstenes es bien conocido en la matemática también por la «criba de Eratóstenes», un método sistemático para ir aislando progresivamente los números primos. Partiendo de la sucesión de todos los números naturales ordenados de manera creciente, se van suprimiendo un número sí y otro no a partir del dos, cada tercer número (en la sucesión inicial) a partir del tres, cada quinto número a partir del cinco, y se continúa de la misma manera suprimiendo cada n-ésimo número a partir del

[3] A. Diller, «The Ancient Measurement of the Earth», *Isis*, 40 (1949), págs. 6-9.

número *n*. Entonces los números que queden en la tabla a partir del 2 serán obviamente los números primos. Eratóstenes escribió también algunas obras sobre medias y sobre lugares geométricos, pero estas obras se han perdido. Incluso su tratado *Sobre la medida de la Tierra* desapareció, aunque se han conservado algunos detalles sobre él que nos han sido transmitidos por otros matemáticos, incluidos Herón y Ptolomeo de Alejandría.

4. Hiparco de Nicea

Durante unos dos siglos y medio, de Hipócrates a Eratóstenes, los matemáticos griegos se habían dedicado a estudiar relaciones entre rectas y circunferencias, y habían aplicado estas relaciones a una gran variedad de problemas astronómicos, pero de todo ello no había resultado nada que pudiera llamarse una trigonometría más o menos sistemática. Entonces, probablemente durante la segunda mitad del siglo II a.C., todo parece indicar que fue compuesta la primera tabla trigonométrica por obra del astrónomo Hiparco de Nicea (ca. 180-ca. 125 a.C.), que se ganó así a pulso el derecho a ser conocido como «el padre de la trigonometría». Aristarco ya había observado que en una circunferencia dada la razón del arco a su cuerda disminuye según el ángulo decrece de 180° a 0°, tendiendo hacia el límite 1. Parece, sin embargo, que hasta que Hiparco emprendió la tarea, nadie se había preocupado de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos[4]. Se ha llegado a afirmar, sin embargo, que Apolonio pudiera haberse anticipado a Hiparco a este respecto, y que la única contribución de este último a la trigonometría hubiera consistido simplemente en el cálculo de un conjunto de cuerdas mejor que el que habían utilizado sus predecesores. Evidentemente Hiparco construyó sus tablas para usarlas en sus teorías astronómicas, sobre cuyos orígenes bien poco se sabe[5]. La figura de Hiparco es una figura de transición entre la astronomía babilónica y la obra de Ptolomeo. La astronomía pasaba por un período de desarrollo floreciente en Mesopotamia en la época en que Berossos, casi el único astrónomo babilónico conocido por su nombre propio, se trasladó a la isla de Cos hacia el 270 a.C., y es muy probable que por esta época se transmitieran a Grecia los conocimientos astronómicos del próximo oriente. Las contribuciones principales que se atribuyen a Hiparco en el campo de la astronomía fueron la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos de los babilonios, la de redactar un catálogo de estrellas, la de mejorar el cálculo de algunas constantes astronómicas importantes, tales como la duración del mes y del año, el tamaño de la Luna y el ángulo de oblicuidad de la eclíptica, y, por último, el descubrimiento del fenómeno de la precesión de los equinoccios. A menudo se ha supuesto que Hiparco fue en gran medida el responsable de la construcción de sistemas planetarios geométricos, pero esto no es seguro, ya que no está nada claro hasta qué punto Apolonio pudo haber aplicado métodos trigonométricos a la astronomía un poco antes que Hiparco.

---

[4] Véase Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (París, 1893), págs. 66 y sigs.

[5] Queda claro lo poco que se sabe en el libro de O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), especialmente págs. 167-168).

No sabemos con exactitud cuándo comenzó a usarse en la matemática de un modo sistemático la división del círculo completo en 360°, pero todo parece indicar que se debe principalmente a Hiparco, en conexión con el cálculo de su tabla de cuerdas. Es posible también que la tomase directamente de Hypsicles, que ya antes había dividido el día en 360 partes, subdivisión que pudo haber venido sugerida a su vez por la astronomía babilónica. Tampoco sabemos exactamente cómo construyó Hiparco su famosa tabla, ya que sus obras se han perdido (exceptuando un comentario sobre un poema astronómico popular por Arato). Es probable que sus métodos fueran análogos a los de Ptolomeo, que vamos a estudiar más adelante, puesto que Teón de Alejandría, al comenzar la tabla de cuerdas de Ptolomeo, nos informa de paso de que Hiparco ya había escrito anteriormente un tratado en doce libros sobre las cuerdas en un círculo.

5. Menelao de Alejandría

Teón menciona también otro tratado en seis libros, debido a Menelao de Alejandría (ca. 100), que trataba de *Cuerdas en un círculo*. Los comentaristas griegos tardíos y árabes mencionan otras obras matemáticas y astronómicas de Menelao, entre las que se encuentran unos *Elementos de geometría*, pero la única que ha sobrevivido, y eso sólo en su versión árabe, es su *Esférica*. En el Libro I de este tratado establece Menelao las bases para un estudio de los triángulos esféricos análogo al que hace Euclides en su Libro I para los triángulos planos. Se incluye aquí un teorema que no tiene análogo en Euclides, el que dice que dos triángulos esféricos son congruentes si tienen sus ángulos iguales dos a dos (Menelao no distingue entre triángulos esféricos congruentes y simétricos), y se demuestra también que para todo triángulo esférico ABC se tiene $A+B+C>180°$. El

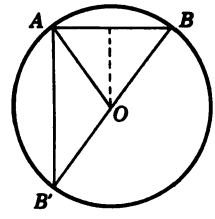


Figura 10.4

segundo libro de la *Esférica* trata de las aplicaciones de la geometría esférica a los fenómenos astronómicos y tiene poco interés matemático. El Libro III y último contiene el famoso «teorema de Menelao», formando parte de lo que esencialmente es trigonometría esférica en la forma típicamente griega, es decir, como una geometría o trigonometría de cuerdas en un círculo. En el círculo de la figura 10.4 nosotros diríamos que la cuerda AB es el doble del seno de la mitad del ángulo AOB (multiplicado por el radio del círculo). En cambio Menelao y sus sucesores griegos se referían a AB simplemente como la cuerda correspondiente al arco AB.

Si BOB' es un diámetro del círculo, entonces la cuerda AB' es el doble del coseno de la mitad del ángulo AOB (multiplicado por el radio del círculo). Por lo tanto, los teoremas de Tales y de Pitágoras, que conducen a la ecuación $AB^2 + AB'^2 = 4r^2$, son equivalentes a la identidad trigonométrica moderna $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$. Menelao, y probablemente también Hiparco antes que él, conocía otros tipos de identidades, de dos de las cuales hizo uso como lemas previos para demostrar su teorema sobre transversales. El primero de estos dos lemas lo podemos formular en terminología moderna de la manera siguiente: Si una cuerda AB en un círculo de centro O (fig. 10.5) la cortamos por un radio OD en un punto C, entonces se tiene que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\text{sen } \widehat{AD}}{\text{sen } \widehat{DB}}$$

El segundo lema es análogo: Si la prolongación de la cuerda AB corta a la prolongación del radio OD' en C', entonces

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{\text{sen } \widehat{AD'}}{\text{sen } \widehat{BD'}}$$

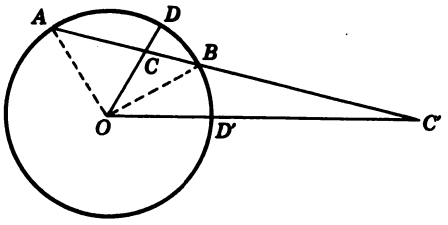


Figura 10.5

Menelao admite estos dos lemas sin demostración, probablemente porque se los podría encontrar en obras anteriores, por ejemplo, posiblemente en los doce libros de Hiparco sobre cuerdas. El lector puede demostrar fácilmente estos dos lemas trazando los radios OA y OB, las perpendiculares desde A y desde B a OD y utilizando semejanza de triángulos[6].

Es probable que Euclides conociera ya el «teorema de Menelao» para el caso de triángulos planos y quizá incluso lo incluyese en su obra perdida *Porismas*. Este teorema para el caso plano afirma que si cortamos los lados AB, BC, CA, de un triángulo ABC por una recta transversal en los puntos D, E y F respectivamente (fig. 10.6), entonces se verifica que $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$. En otras palabras, una recta cualquiera corta a los lados de un triángulo de tal manera que el producto de tres segmentos no adyacentes es igual al producto de los otros tres, como puede demostrarse fácilmente por métodos de geometría elemental o

[6] Véase T. L. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), vol. II, págs. 265-267.

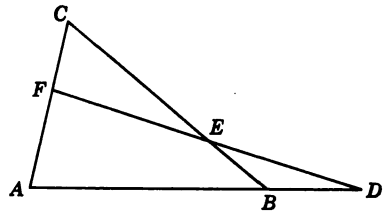


Figura 10.6

aplicando relaciones trigonométricas sencillas. Menelao daba por descontado que sus contemporáneos ya conocían este teorema, y se dedicó a generalizarlo a triángulos esféricos en una forma que equivale a la formulación moderna

$$\text{sen } AD \cdot \text{sen } BE \cdot \text{sen } CF = \text{sen } BD \cdot \text{sen } CE \cdot \text{sen } AF$$

Si utilizamos segmentos orientados en lugar de absolutos, entonces los dos productos en cuestión son iguales en valor absoluto, pero tienen distinto signo.

6. El *Almagesto* de Ptolomeo

El teorema de Menelao jugó un papel fundamental en la trigonometría esférica y en astronomía, pero no obstante la obra trigonométrica más significativa y que tuvo una mayor influencia, con mucha diferencia sobre las demás de toda la antigüedad, fue la *Sintaxis matemática*, una obra en trece libros escrita por Ptolomeo de Alejandría medio siglo más o menos después de Menelao. Esta famosa «Síntesis matemática» fue distinguida de otro grupo de tratados astronómicos escritos por diferentes autores (incluido Aristarco) por la denominación de la colección «mayor» al referirse a la de Ptolomeo, y la de colección «menor» para referirse a la de Aristarco y otros. De las frecuentes referencias a la primera de ellas como *megiste*, surgió más tarde en Arabia la costumbre de llamar al libro de Ptolomeo *Almagesto* («el más grande»), y desde entonces la obra se ha conocido por este nombre.

De la vida de su autor tenemos tan poca información como de la del autor de los *Elementos;* no sabemos ni cuándo ni dónde nacieron ni Euclides ni Ptolomeo. Sí sabemos que Ptolomeo hizo observaciones astronómicas en Alejandría del año 127 al 151, y por lo tanto podemos suponer que nació hacia finales del siglo I. Suidas, un escritor que vivió en el siglo X, nos informa de que Ptolomeo vivía aún durante el reinado de Marco Aurelio, que fue emperador del año 161 al 180.

Se supone que el *Almagesto* de Ptolomeo debe mucho, por lo que se refiere a los los métodos utilizados, a las *Cuerdas en un círculo* de Hiparco, pero la magnitud de esta deuda no puede establecerse con seguridad. Está claro que Ptolomeo debió usar en su astronomía el catálogo de posiciones de estrellas que dejó Hiparco, pero no podemos determinar si las tablas trigonométricas de Ptolomeo fueron extraídas en gran parte de las de su ilustre predecesor o no, ni, en caso afirmativo, en qué

medida. Afortunadamente, en cualquier caso, el *Almagesto* de Ptolomeo ha resistido los estragos del tiempo, y disponemos por lo tanto no sólo de sus tablas trigonométricas, sino también de una explicación de los métodos utilizados en su construcción. En el cálculo de las cuerdas por Ptolomeo desempeñó un papel central una proposición geométrica que se conoce todavía como «teorema de Ptolomeo»: Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia (fig. 10.7), entonces $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, es decir, la suma de los productos

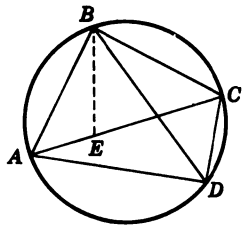


Figura 10.7

de los lados opuestos de un cuadrilátero concíclico convexo es igual al producto de las dos diagonales. La demostración de este teorema puede hacerse fácilmente trazando el segmento BE tal que el ángulo ABE sea igual al ángulo DBC y observando que el triángulo ABE es semejante entonces al BCD. Un caso particular de este teorema de Ptolomeo había aparecido ya incluido en los *Datos* de Euclides (Proposición 93) en la forma siguiente: Si ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia y BD es la cuerda bisectriz del ángulo ABC, entonces $\frac{(AB+BC)}{BD} = \frac{AC}{AD}$.

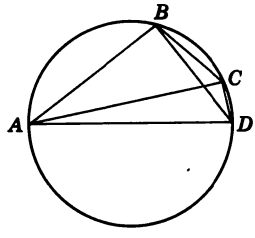


Figura 10.8

Otro caso especial del teorema general de Ptolomeo, y éste mucho más útil, es aquel en el que un lado, digamos AD, es un diámetro del círculo (fig. 10.8). Entonces, si $AD = 2r$, tenemos $2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Llamando al arco $BD = 2\alpha$ y al arco $CD = 2\beta$, entonces $BC = 2r \cdot \text{sen}\ (\alpha - \beta)$, $AB = 2r \cdot \text{sen}\ (90° - \alpha)$, $BD = 2r \cdot \text{sen}\ \alpha$, $CD = 2r \cdot \text{sen}\ \beta$ y $AC = 2r \cdot \text{sen}\ (90° - \beta)$. Por lo tanto, el teorema de Ptolomeo conduce en este caso al resultado $\text{sen}\ (\alpha - \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta$.

Un razonamiento análogo nos lleva a la fórmula

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

y al par

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

y por lo tanto a estas cuatro fórmulas de sumas y diferencias de ángulos se las conoce frecuentemente aún hoy como fórmulas de Ptolomeo.

La fórmula que nos da el seno de una diferencia o, más exactamente, la cuerda de una diferencia de dos arcos, fue la que Ptolomeo encontró más útil para construir sus tablas. Otra fórmula que también utilizó de una manera sistemática es la equivalente a la fórmula moderna del seno del ángulo mitad. Dada la cuerda de un cierto arco en un círculo, Ptolomeo calcula la cuerda correspondiente a la mitad del arco de la manera siguiente: Sea D el punto medio del arco BC en una circunferencia de diámetro $AC=2r$ (fig. 10.9), sea $AB=AE$ y sea DF la mediatriz de

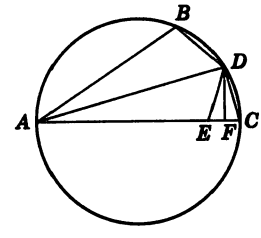


Figura 10.9

EC. Entonces es fácil demostrar que $FC=\frac{1}{2}(2r-AB)$; por otra parte, se sabe de la geometría elemental que $DC^2=AC\cdot FC$, de donde se obtiene que $DC^2=r(2r-AB)$. Si tomamos el arco $BC=2\alpha$ entonces $DC=2r\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $AB=2r\cdot\cos\alpha$, y obtenemos como consecuencia nuestra bien conocida fórmula moderna

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

En otras palabras, si se conoce la cuerda de un arco dado, entonces podemos calcular la cuerda del arco mitad. Ahora Ptolomeo se encontraba ya bien equipado para abordar la construcción de una tabla de cuerdas tan precisa como se pudiera desear, disponiendo de las equivalentes a nuestras cuatro fórmulas fundamentales.

7. El círculo de 360 grados

Hay que subrayar que desde la época de Hiparco hasta la edad moderna no hubo nada parecido a nuestras *razones* trigonométricas. Los griegos, y después de

ellos los hindúes y los árabes usaban *líneas* trigonométricas. Estas líneas al principio tomaron la forma, como hemos visto, de cuerdas en un círculo, y a Ptolomeo le correspondió la tarea de asociarle valores numéricos, aproximaciones, a dichas cuerdas. Para conseguirlo era necesario establecer previamente dos convenios: 1) algún sistema para subdividir la circunferencia de un círculo, y 2) algún método para subdividir el diámetro del mismo círculo. Parece ser que la división de la circunferencia en 360 grados se utilizaba ya en Grecia desde la época de Hiparco, aunque se desconoce cómo surgió exactamente esta idea. Es posible que la medida de los 360 grados fuera tomada de la astronomía, donde el zodiaco había sido dividido en doce «signos» o 36 «decanes». Un ciclo completo de las estaciones, con una duración aproximada de unos 360 días se podía hacer corresponder fácilmente con el sistema de los signos del zodiaco y de los decanes, dividiendo cada signo en 30 partes o cada decan en 10 partes. Nuestro sistema actual de medida de ángulos puede haber tenido su origen en esta correspondencia. Y además, como el sistema de numeración posicional babilónico era tan evidentemente superior para el tratamiento de las fracciones al de las fracciones unitarias egipcias y al de las fracciones usuales griego, era lo más natural que Ptolomeo subdividiera sus grados en 60 «partes minutae primae», y cada una de ellas en 60 «partes minutae secundae», etc., y es precisamente de estas expresiones latinas que utilizaron los traductores de las que se derivaron más tarde nuestros términos «minuto» y «segundo». También fue el sistema sexagesimal sin duda el que sugirió a Ptolomeo el hecho de dividir el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, cada una de las cuales estaba subdividida en 60 minutos y cada minuto de longitud a su vez en 60 segundos de longitud.

Podemos transformar fácilmente nuestras identidades trigonométricas usuales al lenguaje de las cuerdas de Ptolomeo por medio de las sencillas relaciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{cuerda } 2x}{120} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{\text{cuerda } (180^\circ - 2x)}{120}$$

Así, por ejemplo, las fórmulas $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$ se convierten en las siguientes, donde «cuerda del arco $2x$» la abreviamos por «*cd* $2x$»:

$$\operatorname{cd} \overline{2x \pm 2y} = \frac{\operatorname{cd} \overline{2x} \operatorname{cd} \overline{2y} \mp \operatorname{cd} 2x \operatorname{cd} 2y}{120}$$

donde la línea sobre un arco (o ángulo) representa el arco suplementario. Obsérvese que no sólo se expresaban de manera sexagesimal los ángulos o arcos, sino también sus cuerdas. De hecho, siempre que los matemáticos o astrónomos de la antigüedad querían utilizar un sistema preciso de aproximación, recurrían a la escala sexagesimal para tratar las fracciones, y esta costumbre condujo a las expresiones «fracciones de los astrónomos» y «fracciones de los físicos» para distinguir las fracciones sexagesimales de las fracciones ordinarias.

8. El cálculo de las tablas

Una vez decidido el sistema de medición, Ptolomeo disponía de todo lo necesario para calcular cuerdas de ángulos dentro de ese sistema. Por ejemplo, dado que el radio del círculo de referencia medía 60 partes, la cuerda de un arco de 60° contenía también 60 partes lineales. La cuerda correspondiente a 120° será entonces $60\sqrt{3}$, o bien, aproximadamente, 103 partes 55 minutos y 33 segundos o, en la notación alfabética o jónica de Ptolomeo $\rho\gamma^{p}\,\nu\varepsilon'\,\lambda\gamma''$. Ptolomeo podría haber usado ahora su fórmula para el ángulo mitad, para calcular la cuerda del arco de 30°, y a partir de ésta la del ángulo de 15°, y así sucesivamente para ángulos menores. Sin embargo, Ptolomeo prefirió retrasar la aplicación de esta fórmula y se dedicó en cambio a calcular en primer lugar las cuerdas de 36° y de 72°. Para ello utilizó un teorema de Euclides, el *Elementos* XIII. 9, en el que se demuestra que los lados del pentágono regular, del hexágono regular y del decágono regular inscritos en una misma circunferencia, forman un triángulo rectángulo. De una manera accidental, este teorema de Euclides nos proporciona la justificación de la elegante construcción del pentágono regular inscrito en una circunferencia, dada por Ptolomeo. Sea O el centro de la circunferencia y sea AB un diámetro (fig. 10.10);

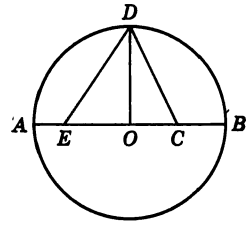


Figura 10.10

entonces si C es el punto medio de OB y OD es un radio perpendicular a AB, tomando CE igual a CD los lados del triángulo rectángulo EDO son los lados del pentágono, del hexágono y del decágono regulares inscritos en la circunferencia dada. Así pues, si el radio OB mide 60 partes, de las propiedades del pentágono regular y de la sección áurea resulta que OE, la cuerda correspondiente a un ángulo central de 36° es $30(\sqrt{5}-1)$, es decir, aproximadamente 37,083 o bien $37^{p}\,4'\,55'''$ o $\lambda\zeta^{p}\,\delta'\,\nu\varepsilon''$. Por el teorema de Pitágoras obtenemos entonces la cuerda del ángulo de 72° que es $30\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ o aproximadamente 70,536 o $70^{p}\,32'\,3''$ o bien $o^{p}\,\lambda\beta'\,\gamma''$.

Conociendo la cuerda de un arco de s grados en una circunferencia, podemos calcular fácilmente la cuerda del arco $180°-s$ por medio de los teoremas de Tales y de Pitágoras, es decir, de la fórmula $\mathrm{cd}^2\ \bar{s}+\mathrm{cd}^2\ s=120^2$, luego Ptolomeo podía obtener las cuerdas de los arcos suplementarios de 36° y de 72°. Por otro lado, de las cuerdas de 72° y de 60° se puede calcular la cuerda del arco de 12° por medio de la fórmula que da la cuerda de la diferencia de dos arcos y, a partir de ella, por aplicaciones sucesivas de la misma fórmula del ángulo mitad, obtuvo Apolonio las cuerdas de los arcos de 6°, 3°, $1\frac{1}{2}°$ y $\frac{3}{4}°$, de las que las dos últimas, por ejemplo,

valen $1^p\,34'\,15''$ y $0^p\,47'\,8''$ respectivamente. Mediante una interpolación lineal entre estos dos últimos valores calculó Apolonio el valor aproximado de la cuerda de 1°, con el resultado de $1^p\,2'\,50''$, y utilizando de nuevo la fórmula del ángulo mitad, o bien simplemente dividiendo por dos, dado lo pequeño que es el ángulo, encontró el valor de $0^p\,31'\,25''$ para la cuerda de 30'. Esto viene a ser equivalente a decir que el seno de 15' es 0,00873, valor que tiene casi media docena de cifras decimales exactas.

El valor de la cuerda de $\frac{1}{2}°$ obtenido por Ptolomeo es, desde luego, la longitud del lado del polígono regular de 720 lados inscrito en la circunferencia de 60 unidades de radio. Mientras que el polígono de 96 lados había conducido a Arquímedes al valor $\frac{22}{7}$ como aproximación de π, el de Ptolomeo nos da un valor aproximado de $6 \cdot (0^p\,31'\,25'')$, es decir, 3; 8, 30, para π, que es el mismo que utiliza Ptolomeo en el *Almagesto* como $\frac{377}{120}$, lo que equivale en forma decimal aproximadamente a 3,1416, valor que pudo haber sido conocido anteriormente por Apolonio.

9. La astronomía de Ptolomeo

Armado de las fórmulas para las cuerdas de las sumas y diferencias de arcos y para la cuerda del arco mitad, y con un valor bien calcuado para la cuerda de un arco de $\frac{1}{2}°$, se dispuso por fin Ptolomeo a construir su tabla, correcta hasta el último segundo, de las cuerdas de todos los arcos desde $\frac{1}{2}°$ hasta 180°, de medio en medio grado; esta tabla es esencialmente la misma que una tabla actual de senos de ángulos desde $\frac{1}{4}°$ hasta 90°, de cuarto en cuarto grado, y formaba parte del Libro I de *Almagesto*, constituyendo así una herramienta indispensable para los astrónomos a lo largo de más de mil años. Los doce libros restantes de este célebre tratado contienen, entre otras cosas, el bello desarrollo matemático de la teoría de ciclos y epiciclos para el movimiento de los planetas, que se conoce como sistema de Ptolomeo. Lo mismo que Arquímedes, Hiparco y la mayor parte de los grandes pensadores de la antigüedad, Ptolomeo postuló un universo esencialmente geocéntrico, debido al hecho de que una tierra en movimiento parecía dar lugar a graves dificultades, tales como la ausencia de paralaje estelar apreciable y las aparentes inconsistencias de un teórico movimiento de la Tierra con los fenómenos de la dinámica terrestre. En comparación con estos problemas, el carácter inverosímil de la inmensa velocidad que se requeriría para que la esfera de las estrellas «fijas» girase diariamente alrededor de la Tierra, parecía reducirse a algo insignificante. El sistema ptolemaico, además de mostrarse muy de acuerdo con el sentido común, tenía la ventaja de poder representarse con gran facilidad. Los planetarios, por ejemplo, se construyen como si el universo fuera geocéntrico, puesto que de esta forma los movimientos *aparentes* de los astros se reproducen más fácilmente.

Platón le había propuesto a Eudoxo el problema astronómico de «salvar los fenómenos», es decir, de idear un artificio matemático tal como, por ejemplo, una combinación de movimientos circulares uniformes, de manera que sirviera como modelo de los movimientos aparentes de los planetas, pero el sistema de Eudoxo

de las esferas homocéntricas fue abandonado casi completamente por los matemáticos en favor del sistema de ciclos y epiciclos de Apolonio e Hiparco. Ptolomeo hizo a su vez una modificación esencial en este último sistema. En primer lugar desplazó la Tierra un poco del centro del círculo deferente, con lo que se tenían en realidad órbitas excéntricas; este cambio ya se había propuesto con anterioridad, pero Ptolomeo introdujo además una novedad tan drástica y radical en sus implicaciones filosóficas y científicas que Copérnico, mucho más tarde, no pudo aceptarla, por muy eficaz que resultara ser el artificio en cuestión, conocido con el nombre de «ecuante», para reproducir los movimientos planetarios. Después de repetidos ensayos infructuosos Ptolomeo no consiguió ajustar ningún sistema de ciclos, epiciclos y excéntricos que representase con exactitud los movimientos observados de los planetas. Su solución consistió entonces en la revolucionaria idea de abandonar la persistente exigencia griega de la uniformidad de los movimientos circulares utilizados, e introducir en su lugar un punto geométrico, el ecuante E, alineado con la Tierra G y con el centro C del círculo deferente, de tal manera que el movimiento angular *aparente* del centro Q del epiciclo en el que gira el planeta P, sea uniforme «visto desde E» (fig. 10.11). De esta manera consiguió Ptolomeo una

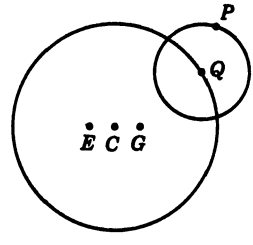


Figura 10.11

representación más exacta de los movimientos planetarios, pero hay que decir, desde luego, que el truco empleado tenía un carácter solamente cinemático y no hacía ningún esfuerzo por contestar a las cuestiones de tipo dinámico que planteaban de manera clara los movimientos circulares no uniformes.

10. Otras obras de Ptolomeo

La fama actual de Ptolomeo está asociada en gran parte a un único libro, el *Almagesto*, pero ésta es sólo una de las varias obras que escribió. Entre las más importantes se encuentra también una *Geografía* en ocho libros, que fue una verdadera biblia para los geógrafos de la época, lo mismo que para los astrónomos lo fue el *Almagesto*. La *Geografía* de Ptolomeo introdujo el sistema de longitudes y latitudes que todavía usamos hoy como coordenadas geográficas, además de describir algunos métodos de proyección cartográfica y de catalogar unas 8.000 ciudades, ríos y otros accidentes geográficos importantes de la superficie conocida de la Tierra. Desgraciadamente en aquella época no se conocía ninguna manera

satisfactoria de determinar longitudes y, por lo tanto, eran inevitables errores importantes de localización. Y aún más significativo a este respecto fue el hecho de que Ptolomeo parece haber hecho una elección bastante mala a la hora de evaluar las dimensiones de la Tierra. En lugar de aceptar la cifra de 252.000 estadios para un círculo máximo dada por Eratóstenes, prefirió la de 180.000 estadios propuesta por Posidonio, un estoico que fue maestro de Pompeyo y de Cicerón. Como consecuencia de ello Ptolomeo pensó que el mundo eurasiático conocido constituía una parte más amplia de la circunferencia completa de lo que realmente es, suponiendo que abarcaba más de 180° en longitud, en vez de los aproximadamente 130° reales. Este importante error sugirió más tarde a los navegantes, incluido Colón mismo, que un viaje desde Europa a la India, navegando siempre hacia el Oeste, sería mucho más corto de lo que resultó ser en realidad. Si Colón hubiera sabido lo groseramente que había subestimado Ptolomeo el tamaño de la Tierra, puede que nunca se hubiera decidido a emprender su primer viaje del descubrimiento de América.

Los métodos geográficos de Ptolomeo funcionaban mejor en la teoría que en la práctica, como puede comprobarse por otros de sus libros que han llegado a nosotros sólo en sus traducciones del árabe al latín, y en los que trata de dos tipos de proyección cartográfica distintos. En el *Analemma* se explica la proyección ortográfica, y ésta es la primera noticia que tenemos de este método, aunque es posible que hubiera sido utilizado ya por Hiparco. En esta transformación de la superficie esférica en un plano, los puntos de la esfera se proyectan ortogonalmente sobre tres planos perpendiculares entre sí. En su *Planisferio* describe Ptolomeo la proyección estereográfica, en la que los puntos de la superficie esférica se proyectan sobre un plano desde uno de los polos de la esfera; en el caso concreto de Ptolomeo, desde el polo Sur y sobre el plano del Ecuador. Ptolomeo sabía que en esta transformación una circunferencia que no pase por el polo de proyección se transforma en otra circunferencia en el plano, y si la circunferencia pasa por el polo entonces se proyecta en una recta; Ptolomeo conocía también la importante propiedad de esta proyección de ser conforme, es decir, de conservar los ángulos. Podemos hacernos una idea de la importancia que tuvo para el desarrollo de la geografía moderna la figura de Ptolomeo, a partir del hecho de que, de los primitivos mapas medievales que nos han llegado en los manuscritos, ninguno hasta el siglo XIII tiene como prototipos los mapas hechos por Ptolomeo más de mil años antes[7].

11. Optica y astrología

Ptolomeo escribió también una *Optica* que ha sobrevivido, aunque de una manera imperfecta, a través de su versión latina de una traducción árabe. Esta obra trata de la física y de la psicología de la visión, de la geometría de los espejos y de un primitivo intento de deducir las leyes de la refracción. A partir de las tablas que da Ptolomeo para los ángulos de refracción de la luz que pasa del aire al agua (y

[7] Véase George Sarton, *Ancient Science and Modern Civilization* (1954), págs. 53-54.

también del aire al cristal y del agua al cristal), para ángulos de incidencia desde 10° a 80°, en intervalos de 10°, podemos deducir que suponía válida una ley de la forma $r = ai + bi^2$, ya que las diferencias segundas de sus valores de r son constantes. Para los ángulos de incidencia de 10° y de 80° admite como ángulos de refracción 8° y 50° respectivamente, y las diferencias segundas son todas iguales a $\frac{1}{2}°$. Las diferencias segundas en las viejas fórmulas pitagóricas para los números poligonales también eran constantes, y quizá fuera este hecho el que influyó en Ptolomeo para buscar una ley de tipo cuadrático y no trigonométrico para el fenómeno de la refracción. La trigonometría se aplicó casi exclusivamente a la astronomía y a la geografía durante el primer milenio y medio de su existencia, y tuvo que llegar el sigo XVII para que se descubriesen las primeras aplicaciones de la trigonometría a la refracción y a otros fenómenos físicos.

No podemos dar por completa nuestra revisión de la obra de Ptolomeo sin mencionar su *Tetrabiblos* (o *Quadripartitum*), ya que nos muestra un aspecto importante de la sabiduría antigua que se suele pasar por alto. Los autores griegos no siempre fueron tan racionalistas y de pensamiento tan claro y riguroso como se suele suponer. El *Almagesto* sí es, desde luego, un modelo de lo que puede conseguirse poniendo en juego una buena matemática junto con unos datos observacionales exactos, para construir una sobria astronomía científica, pero en cambio el *Tetrabiblos* (u obra en cuatro libros) representa un tipo completamente distinto de religión sideral al que sucumbió en gran parte el mundo antiguo. Con el final de la «Edad de Oro», la matemática y la filosofía griega se vieron influenciadas por la aritmética o aritmología caldeas y por la astrología, y la seudoreligión resultante vino a llenar en parte el vacío dejado por el rechazo de las viejas mitologías. Ptolomeo, por su parte, también parece haber compartido esta influencia de los tiempos, y así sostiene en el *Tetrabiblos* que no se debiera rechazar al astrólogo debido a la posibilidad de error, de la misma manera que no se rechaza al médico por el mismo motivo. Cuanto más avanza uno en la lectura de esta obra más decepcionado se va sintiendo, porque Ptolomeo no parece mostrar la menor duda en aceptar las supersticiones tan extendidas en su época.

El *Tetrabiblos* se diferencia del *Almagesto* no sólo en el sentido en que la astrología se diferencia de la astronomía, sino que estas dos obras utilizan también tipos de matemática diferentes. El *Almagesto* es un libro complejo y sólidamente fundamentado que hace un uso minucioso de la clásica geometría sintética griega, mientras que el *Tetrabiblos* es un caso típico de la seudociencia de la época en que se adoptaron los primitivos artificios aritméticos babilónicos. De las obras clásicas de Euclides, Arquímedes y Apolonio se podría sacar la impresión de que la matemática griega se ocupó únicamente de los niveles más altos del razonamiento geométrico puramente lógico, pero el *Tetrabiblos* de Ptolomeo viene a poner de manifiesto que la mayor parte del pueblo en general estaba más interesada en los cálculos puramente aritméticos que en el pensamiento racional. Desde los días de Alejandro Magno por lo menos hasta el final del mundo clásico hubo indudablemente una comunicación mucho mayor que hasta entonces entre Grecia y Mesopotamia, y parece claro que la aritmética babilónica y la geometría con ropaje algebraico continuaron ejerciendo una influencia considerable en el mundo helenístico. Este aspecto de la matemática se nos presenta de una manera tan

acusada, por ejemplo, en Herón de Alejandría (fl. ca. 100), que se llegó a pensar que posiblemente Herón no era griego, sino egipcio o fenicio. Actualmente lo que se cree es que en realidad Herón refleja un tipo de matemática que estaba presente ya desde antiguo en Grecia, pero que no tiene ningún representante entre las figuras más importantes, excepto quizá en Ptolomeo, tal como nos revela su *Tetrabiblos*. La geometría deductiva griega, en cambio, no parece haber sido adoptada en Mesopotamia hasta después de la conquista árabe.

12. Herón de Alejandría

A Herón de Alejandría se le conoce en la historia de la matemática sobre todo por la fórmula que lleva su nombre, y que nos da el área de un triángulo:

$$K = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s el semiperímetro. Los traductores árabes nos dicen que esta «fórmula de Herón» la conocía ya Arquímedes, quien sin duda debía disponer, si es esto cierto, de una demostración de la misma, pero en cualquier caso la primera demostración que conocemos es la que aparece en la *Métrica* de Herón. Aunque esta fórmula se obtiene ahora de una manera trigonométrica, la demostración de Herón es del tipo geométrico usual. La *Métrica* estuvo perdida durante largo tiempo, lo mismo que el *Método* de Arquímedes, hasta que fue redescubierta en 1896 en Constantinopla, en un manuscrito que data del 1100 aproximadamente. La palabra «geometría» significaba originalmente «medida de la Tierra», pero lo cierto es que la geometría clásica tal como nos la encontramos en los *Elementos* de Euclides y en las *Cónicas* de Apolonio, está muy alejada de la vulgar agrimensura. La obra de Herón, sin embargo, nos muestra claramente que no toda la matemática griega era del tipo «clásico». Hubo dos niveles, evidentemente, en el estudio de las configuraciones geométricas, comparables a la separación dual que también se hacía en el contexto de los números entre la aritmética propiamente dicha o teoría de números y la logística o estudio de las técnicas de computación, y uno de estos dos niveles, eminentemente racional, podría conocérsele como geometría propiamente dicha, mientras que el otro, decididamente práctico, merecería más bien ser llamado geodesia. Los babilonios carecieron del primero de ellos, pero en cambio desarrollaron fuertemente el segundo, y es justamente este tipo de matemática babilónica la que nos encontramos en Herón. Hay que decir, desde luego, que en la *Métrica* también nos encontramos ocasionalmente con alguna demostración, pero la mayor parte de la obra se refiere a ejemplos numéricos de medida de longitudes, áreas y volúmenes, y aquí es donde se aprecian grandes semejanzas entre sus resultados y los que conocemos de los textos de problemas de la antigua Mesopotamia. Por ejemplo, Herón da una tabla[8] de las áreas A_n de los polígonos regulares de n lados en función de los cuadrados de sus lados S_n, empezando por $A_3 = \frac{13}{30} \cdot s_3^2$ y continuan-

[8] Véase D. E. Smith, *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols.), vol. II, pág. 606.

do hasta $A_{12} = \frac{45}{4} \cdot s_{12}^2$, pero, de la misma manera que pasaba en la matemática prehelénica, tampoco hace distinción Herón entre los resultados que son exactos y los que son sólo aproximaciones más o menos precisas. Para A_5, por ejemplo, Herón da dos fórmulas distintas, $\frac{5}{3} \cdot s_5^2$ y $\frac{12}{7} \cdot s_5^2$, de las cuales la primera coincide con el valor encontrado en una tablilla babilónica[9], pero ninguna de las dos es exactamente correcta. Para el hexágono, la razón de A_6 a s_6^2 que da Herón es la de $\frac{13}{5}$, y los babilonios en cambio 2; 37, 30, mientras que el verdadero valor está entre los dos y es, desde luego, irracional. Se podía haber esperado que Herón utilizase para estos cálculos tablas trigonométricas como las que construyó Hiparco unos 200 años antes, pero todo parece indicar que en esta época la trigonometría se reducía casi exclusivamente a un instrumento de los astrónomos y no del hombre práctico.

El abismo que separa la geometría clásica de las técnicas de medida de Herón puede ilustrarse con toda claridad por medio de algunos de los problemas que plantea y resuelve Herón en otra de sus obras, la *Geométrica*. Uno de estos problemas pide calcular el diámetro, el perímetro y el área de un círculo, dada la suma de las tres magnitudes. El axioma de homogeneidad de Eudoxo excluiría terminantemente un problema como éste de cualquier consideración teórica, debido a que las tres magnitudes tienen distintas dimensiones, pero desde un punto de vista no crítico y puramente numérico el problema tiene sentido. Por otra parte, Herón tampoco resuelve este problema en términos generales, sino que, siguiéndole de nuevo la pista a los métodos prehelénicos, elige el caso específico en que la suma es 212 y, en cuanto a la solución, es del tipo de las antiguas recetas en las que se dan sólo las etapas del cálculo, sin ninguna razón que las justifique. El valor 14 para el diámetro se halla fácilmente sin más que tomar como π la aproximación de Arquímedes y aplicar el método babilónico de completar el cuadrado para resolver una ecuación de segundo grado. Las lacónicas instrucciones que da Herón son las siguientes: «Multiplica 212 por 154, súmale 841, halla la raíz cuadrada y réstale 29, y por último, divide el resultado obtenido por 11.» Difícilmente se le puede llamar enseñar matemática a semejante laberíntico acertijo, y sin embargo los libros de Herón estaban escritos para servir de manuales de matemática aplicada.

Además Herón prestaba tan poca atención a la posible unicidad de la solución como a la dimensionalidad de sus magnitudes. En otro problema se pide calcular los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma del área y el perímetro es igual a 280. Se trata aquí, evidentemente, de un problema indeterminado, pero Herón da una sola solución, haciendo uso de la fórmula de Arquímedes para el área del triángulo; en notación moderna, si s es el semiperímetro del triángulo y r el radio del círculo inscrito, entonces $rs + 2s = s(r+2) = 280$, y continuando con su peculiar estilo de recetario de cocina, «busca siempre los factores», toma Herón $r+2=8$ y $s=35$, de donde el área $rs=210$, pero como el triángulo tiene que ser rectángulo, la hipotenusa c será igual a $s-r$, es decir, a $35-6=29$; la suma de los catetos a y b es igual a $s+r=41$, de donde se sigue fácilmente que los valores de a y b deben ser 20 y 21. Herón no dice nada de las otras posibles factorizaciones de 280, que conducirían, naturalmente, a otras respuestas al problema.

[9] Véase O. Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pág. 47.

13. El principio de mínima distancia

Herón estaba interesado en las medidas numéricas bajo todas sus formas, y así en óptica y en mecánica lo mismo que en geodesia. La ley de la reflexión de la luz ya la conocían Euclides y Aristóteles (y probablemente incluso Platón), pero Herón parece haber sido el primero que demostró por medio de un sencillo razonamiento geométrico, en una obra sobre *Catóptrica* o estudio de la reflexión, que la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión es una simple consecuencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla o «económica». Es decir, si un haz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM' y se dirige después hacia el ojo E de un observador (véase la fig. 10.12), entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible

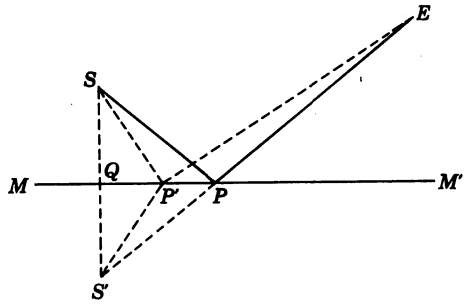


Figura 10.12

SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' sean iguales. Se demuestra que ningún otro camino $SP'E$ es tan corto como el SPE trazando la perpendicular SQS' a MM', tomando $S'Q = SQ$ y comparando el camino SPE con el $SP'E$. Como estos dos caminos tienen longitudes iguales respectivamente a los $S'PE$ y $S'P'E$, y dado que $S'PE$ es una línea recta por ser iguales los ángulos $M'PE$ y MPS, se llega a la conclusión de que $S'PE$ es el camino más corto.

La historia de la ciencia recuerda a Herón como inventor de diversos aparatos, entre ellos un tipo primitivo de máquina de vapor que aparece descrita en la *Neumática*, de un precursor de nuestro termómetro moderno, así como de diversos juguetes y artificios mecánicos basados en las propiedades de los líquidos y los gases y en las leyes de las máquinas simples. Herón propone en su *Mecánica* una ley, astuta pero incorrecta, para la máquina simple cuyo principio se le había escapado incluso al gran Arquímedes, el plano inclinado. También se asocia su nombre al llamado «algoritmo de Herón» para el cálculo de raíces cuadradas, pero su método iterado se debe en realidad a los babilonios 2.000 años anteriores a él. A pesar de que evidentemente Herón aprendió mucho de la matemática babilónica, no parece haber apreciado la importancia del principio posicional para el tratamiento de las fracciones. Las fracciones sexagesimales se habían convertido en las herramientas standard para la astronomía y la física, pero es probable que el hombre de la calle no llegara nunca a familiarizarse con ellas. Las fracciones ordinarias fueron

utilizadas en cierta medida por los griegos, principalmente ya en la época helenística tardía, al principio colocando el numerador debajo del denominador y después en la posición invertida actual, aunque sin la barra de separación entre ambos, pero Herón, escribiendo como lo hacía para el hombre práctico, parece haber preferido utilizar las viejas fracciones unitarias; así, al dividir 25 por 13 da la respuesta como $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{78}$. La antigua adicción egipcia a las fracciones unitarias se prolongó así en Europa durante mil años al menos después de la época de Herón.

14. El declinar de la matemática griega

El período que va de Hiparco a Ptolomeo a lo largo de tres siglos fue uno de predominio de la matemática aplicada, y los libros de Herón parecen cuadernos de notas tomadas por un estudiante en lo que equivaldría a un instituto tecnológico en Alejandría. A veces se ha sostenido la tesis[10] de que la matemática se desarrolla mejor y de una manera más eficaz cuando mantiene un estrecho contacto con las aplicaciones técnicas mundanas, pero el período que hemos estado estudiando apoyaría más bien la tesis opuesta. La pérdida de genio creador en religión y filosofía, que condujo a los griegos a dedicarse al misticismo y a los cultos esotéricos, se ve reflejado en la matemática por un persistente movimiento dirigido a las aplicaciones, que dominó durante más de tres siglos. Desde Hiparco hasta Ptolomeo se llevaron a cabo importantes progresos en astronomía y geografía, en óptica y en mecánica, pero en cambio los avances en la matemática fueron poco significativos. Bien es verdad que estos siglos fueron testigos del desarrollo inicial de la trigonometría, pero esta materia que ahora forma parte de la matemática pura era entonces, en el mejor de los casos, una aplicación de la geometría elemental a las técnicas de medición, que respondía a las necesidades de la astronomía. Además, no está claro ni siquiera si hubo o no algún progreso importante en la trigonometría de Ptolomeo, correspondiente al año 150 de nuestra era, respecto a la de Hiparco en el año 150 a.C., e incluso, quizá, respecto a la de Apolonio y Arquímedes cien años antes aún. Era ya completamente evidente, por lo tanto, que la época de rápido crecimiento de la matemática que va desde Eudoxo a Apolonio, en que las consideraciones teóricas más profundas estuvieron en el primer plano de las preocupaciones de los matemáticos, había llegado a su fin. Probablemente la tendencia a las aplicaciones fue el resultado de la decadencia más que su causa, pero en cualquier caso los dos fenómenos se dieron simultáneamente. Algunos historiadores[11] atribuyen esta decadencia a las insuficiencias y limitaciones del álgebra geométrica griega, y otros[12] al frío hálito de Roma. En cualquier caso, la época durante la que surgieron a un primer plano la trigonometría y las técnicas de medida se caracterizó por una decidida ausencia de progreso, si no por

[10] Especialmente por Lancelot Hogben en sus múltiples obras sobre la matemática y su historia, tales como, por ejemplo, *Mathematics for the Million* (New York: W. W. Norton, ca. 1937).

[11] Por ejemplo, B. L. van der Waerden en su *Science Awakening* (1961), págs. 265-266.

[12] E. T. Bell en su *Development of Mathematics* (New York: MacGraw-Hill, 1940).

una franca decadencia. Sin embargo, fueron precisamente estos aspectos de la matemática griega los que más interesaron a los sabios árabes e hindúes que iban a servir de puente entre la matemática antigua y el mundo moderno. Pero antes de dirigir nuestra atención a estos pueblos tenemos que echar un vistazo a lo que constituyó un auténtico «veranillo de San Martín» de la matemática griega, llamado también a veces su «Edad de Plata».

Bibliografía

Aaboe, Asger: *Episodes from the Early History of Mathematics* (New York: Random House, 1964).

Braunmühl, Anton von: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig, 1900-1903, 2 vols.).

Cohen, M. R., y I. E. Drabkin: *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958).

Dantzig, Tobias: *The Bequest of the Greeks* (New York: Scribner, 1955).

Heath, T. L.: *Aristarchus of Samos* (Oxford: Clarendon, 1913).

——: *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols).

Lammert, Friedrich: «Klaudios Ptolemaios», en Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie derklassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1959), vol. XXIII, parte 2, columnas 1788-1858.

Manitius, Karl: *Des Ptolemäus Handbuch der Astronomie* (Leipzig, 1912-1913), 2 vols.).

Peters, C. H. F., y E. B. Knobel: *Ptolemy's Catalogue of Stars; a Revision of the Almagest* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1915).

Ptolomeo, Claudius: *L'optique*, ed. por Albert Lejeune (Louvain, Bélgica: Louvain University, 1956).

——: *Cosmographia*, ed. por R. A. Skelton (Amsterdam: Meridian, 1963).

Sarton, George: *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954).

Stahl, W. H.: *Ptolemy's Geography; a Select Bibliography* (New York: Bulletin of the New York Public Library, 1951-1952).

Tannery, Paul: *Mémoires scientifiques* (Toulouse, 1912, etc.), especialmente vols. I y II.

Thomas, Ivor: *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.).

Thomson, J. O.: *History of Ancient Geography* (Cambridge, 1948).

Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961, ed. en rústica, New York: Wiley, 1963).

Ejercicios

1. ¿Cómo puede explicarse el hecho de que el período en el que surge la trigonometría griega sea una época de decadencia en la geometría griega?
2. ¿Por qué preferían los antiguos un sistema astronómico geocéntrico a un sistema heliocéntrico? Explíquese claramente.
3. ¿Qué distancia habría tenido que navegar Colón desde Gibraltar hasta la India, viajando hacia el Oeste y suponiendo que América no existiese, si las ideas de Ptolomeo acerca de las dimensiones de la Tierra hubieran sido correctas? ¿Y suponiendo las dimensiones reales de la Tierra?

4. ¿Qué les ocurre a las circunferencias sobre la superficie de una esfera al proyectarlas ortogonalmente sobre un plano?
5. Utilícese la información dada en el texto para determinar la ley de la refracción de Ptolomeo para los rayos de luz que pasan del aire al agua.
6. Demuéstrese, bien sea geométricamente o trigonométricamente, la fórmula de Herón para el área del triángulo.
7. Se dice que Posidonio utilizó observaciones de las estrellas para estimar el tamaño de la Tierra. Explíquese cómo podría hacerse esto.
8. ¿Cuál de las fórmulas de Herón para la razón de A_5 a s_5^2 da la mejor aproximación?
9. Herón dio como razón del área de un heptágono regular al cuadrado del lado el valor de $\frac{43}{12}$, mientras que los babilonios dieron el valor 3; 41. ¿Cuál es la mejor aproximación de las dos?
10. Calcúlese el porcentaje de error, hasta las décimas, en el valor $\frac{45}{4}$ dado por Herón para la razón $A_{12}:s_{12}^2$.
11. Complétense las etapas de la solución de Herón al problema de hallar el diámetro de un círculo sabiendo que la suma del diámetro, el perímetro y el área es 212.
12. Demuéstrese la doble desigualdad de Aristarco $\frac{1}{20} < \text{sen } 3° < \frac{1}{18}$.
13. Hiparco sabía, por las observaciones de eclipses, que el paralaje lunar (es decir, el ángulo subtendido por la Tierra en un punto de la Luna) es aproximadamente 2° ¿Cuál es la distancia de la Luna que implica este valor?
14. Escríbase la cuerda de 45° en notación griega.
15. Calcúlese el sen 15°, sin tablas, y a partir de él escríbase en notación alfabética griega el valor dado por Ptolomeo para la cuerda de 30°.
16. Escríbase la cuerda de 150° en notación griega.
17. Si expresamos los valores para π de Arquímedes y de Ptolomeo como fracciones ordinarias impropias, y si deducimos de las dos una nueva fracción igual a la diferencia de los numeradores partido por la diferencia de los denominadores, obtenemos otra aproximación mejor, que ya conocían los chinos. ¿Cuántas cifras exactas tiene esta nueva aproximación?
18. Demuéstrese el teorema de Aristarco que dice que si $\beta < \alpha < 90°$, entonces $\dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} < \dfrac{\alpha}{\beta}$.
19. Demuéstrense los dos lemas de Menelao.
20. Demuéstrese, geométrica o trigonométricamente, el teorema de Menelao para triángulos planos.
21. Complétese la demostración del teorema de Ptolomeo.
22. Obténganse las fórmulas para $\text{sen}(x+y)$ y $\cos(x \pm y)$, utilizando el teorema de Ptolomeo con un diámetro del círculo como uno de los lados del cuadrilátero.
23. Utilícese el método de Ptolomeo para los ángulos mitad, para obtener una fórmula para $\cos \dfrac{x}{2}$.

*24. Calcúlese exactamente, en términos de radicales, la razón del área del decágono regular al cuadrado del lado. ¿Es el valor obtenido mayor o menor que el valor $\frac{15}{2}$ dado por Herón?

Capítulo XI
RENACIMIENTO Y OCASO DE LA MATEMATICA GRIEGA

> Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica..., saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.
>
> *Pappus de Alejandría*

1. La matemática aplicada

Actualmente se suele utilizar la expresión convencional «la matemática griega» como si se tratase de un campo de conocimientos perfectamente bien delimitado y uniforme. Sin embargo, este punto de vista puede conducir a graves errores de apreciación, ya que viene a suponer implícitamente que la única geometría que conocían los griegos era la sofisticada geometría del tipo de la de Arquímedes o Apolonio. Tenemos que recordar, sin embargo, que la matemática se desarrolló en el mundo griego a lo largo de más de un milenio, al menos desde el 600 a.C. hasta por lo menos el 600 d.C., y que a lo largo de este período viajó de Jonia a la Magna Grecia en el sur de Italia, después a Atenas y luego a Alejandría y a otras partes del mundo civilizado por aquel entonces. Los largos intervalos transcurridos tanto en el tiempo como en el espacio dieron lugar a diversos cambios tanto en la extensión como en la profundidad de la actividad matemática, y la ciencia griega en general tampoco conservó su identidad invariable, siglo tras siglo, como ocurrió con la ciencia prehelénica. Por otra parte, incluso en una época determinada y en un lugar determinado del mundo griego había, como en nuestra propia civilización, grandes diferencias tanto en los intereses como en los logros de la investigación matemática. Ya hemos visto cómo incluso en la obra de un mismo matemático como Ptolomeo podemos encontrarnos con dos tipos completamente distintos de erudición: el del *Almagesto* para los racionalistas rigurosos e «intransigentes», y el del *Tetrabiblos* para los místicos de mente más «poética». Es muy probable que existieran siempre por lo menos dos niveles de conocimientos matemáticos en este sentido, pero que este hecho quede oscurecido por la escasez de obras que nos han llegado, especialmente de las de más bajo nivel. La frase que hemos escogido como título de este capítulo hay que tomarla con ciertas reservas, ya que, aunque esté justificada a la luz de lo que hoy sabemos sobre el mundo griego, sin embargo nuestros conocimientos están muy lejos de ser completos. El período que vamos a estudiar en este capítulo que va de Ptolomeo a Proclo, abarca casi cuatro siglos, desde el segundo hasta el sexto, pero nuestra exposición se basa, en su mayor parte, sólo en

dos tratados principales, de los cuales a su vez sólo nos han llegado partes, aunque importantes, así como en un pequeño número de obras de menor importancia.

Herón y Ptolomeo fueron ambos sabios griegos, pero vivieron ya en un mundo dominado políticamente por Roma. La muerte de Arquímedes a manos de un soldado romano pudo ser sólo una casualidad, pero el hecho es que resultó verdaderamente profética. A lo largo de su dilatada historia, la antigua Roma contribuyó poco a la ciencia o a la filosofía, y aún menos a la matemática. Tanto durante la República como en los días del Imperio, los romanos se vieron muy poco atraídos por las investigaciones de tipo lógico o especulativo. Las artes prácticas como la medicina y la agricultura, en cambio, fueron cultivadas con más entusiasmo, y también gozó de un cierto favor la geografía descriptiva. Los impresionantes proyectos de ingeniería y los grandes monumentos arquitectónicos tienen sin duda cierta relación con los aspectos más elementales de la ciencia, pero los constructores romanos se contentaban con simples recetas y maneras de proceder que bien poco requerían un conocimiento del gran *corpus* del pensamiento griego. Se puede juzgar del grado de familiaridad de los romanos con la ciencia a partir del libro *De Architectura* de Vitruvio, escrito a mediados de la Epoca Augusta y dedicado al emperador. En un cierto pasaje el autor nos describe los que son, a su juicio, los tres máximos descubrimientos matemáticos: la inconmensurabilidad de la arista y la diagonal en un cubo; el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, y el cálculo por Arquímedes de la composición de la corona o de la guirnalda real. Marco Vitruvio Pollio, el autor de este libro, estaba especialmente interesado en instrumentos de agrimensura y en problemas relativos a medidas aproximadas. Vitruvio da como perímetro de una rueda de diámetro 4 pies, el resultado de 12,5 pies, lo que supone un valor de $3\frac{1}{8}$ para π; ésta no es una aproximación tan buena como la de Arquímedes, con cuyas obras Vitruvio estaba probablemente muy poco familiarizado, pero en cualquier caso se trata de un grado de exactitud razonable para los fines de los romanos. Se piensa a veces que las gigantescas y magníficas obras de ingeniería tales como las pirámides egipcias o los acueductos romanos debieron exigir un alto grado de desarrollo matemático, pero la evidencia histórica de que disponemos no confirma en absoluto este hecho. De la misma manera que la matemática egipcia primitiva había estado a un nivel más bajo que la babilónica de la misma época, también la matemática romana estuvo a un nivel incomparablemente más bajo que la matemática griega del mismo período. Los romanos carecieron casi por completo de creatividad matemática, así que sus mejores esfuerzos en este campo, tales como los que hemos visto en Vitruvio, no fueron ni siquiera comparables con los resultados más pobres de los griegos, que podríamos ejemplificar por la obra de Herón[1].

2. Diofanto de Alejandría

Ya hemos visto que la matemática griega no se mantuvo uniformemente a un nivel alto, sino que el glorioso período del siglo III a.C. fue seguido por una época

[1] Una comparación verdaderamente devastadora de la ciencia romana con la griega la presenta W. H. Stahl en su libro *Roman Science* (1962).

de decadencia que quizá mejoró un poco con Ptolomeo, pero que no se recuperó de una manera efectiva hasta la «Edad de Plata» de la matemática griega, en torno al siglo que va del 250 al 350 aproximadamente. A comienzos de este período, conocido también como la Edad Alejandrina Tardía, nos encontramos con el más importante de todos los algebristas griegos, Diofanto de Alejandría, y hacia el final aparece el último geómetra importante en la matemática griega, Pappus de Alejandría. No ha habido nunca otra ciudad que haya sido el centro de la actividad matemática durante un período tan largo como lo fue Alejandría desde los días de Euclides (hacia el 300 a.C.) hasta la muerte de Hipatía (en el año 415). Se trataba de un centro muy cosmopolita, y así la matemática que produjo la escuela alejandrina no fue toda del mismo tipo. Los resultados de Herón eran muy diferentes de los de Euclides, Apolonio o Arquímedes, y de nuevo nos encontramos con una separación brusca de la tradición clásica griega en la obra que nos ha llegado de Diofanto. Poco se sabe de la vida de Diofanto, aparte de una tradición antigua que ha quedado registrada en una colección de problemas que data de los siglos V o VI y que se conoce con el nombre de «Antología griega», que describiremos más adelante, y que dice:

> «Dios le concedió el ser un muchacho durante una sexta parte de su vida, y añadiendo a esto una doceava parte, El pobló de vello sus mejillas; Le iluminó con la luz del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio Le concedió un hijo. Pero ¡ay! infeliz niño nacido tarde; después de alcanzar la mitad de la medida de la vida de su padre, el frío destino se lo llevó. Después de consolar sus penas con la ciencia de los números durante cuatro años más, finalizó su vida»[2].

Si este acertijo es correcto históricamente, entonces Diofanto vivió 84 años, pero en cualquier caso no debemos considerar en absoluto este problema como típico de los que interesaron a Diofanto, puesto que prestó escasa atención a las ecuaciones de primer grado.

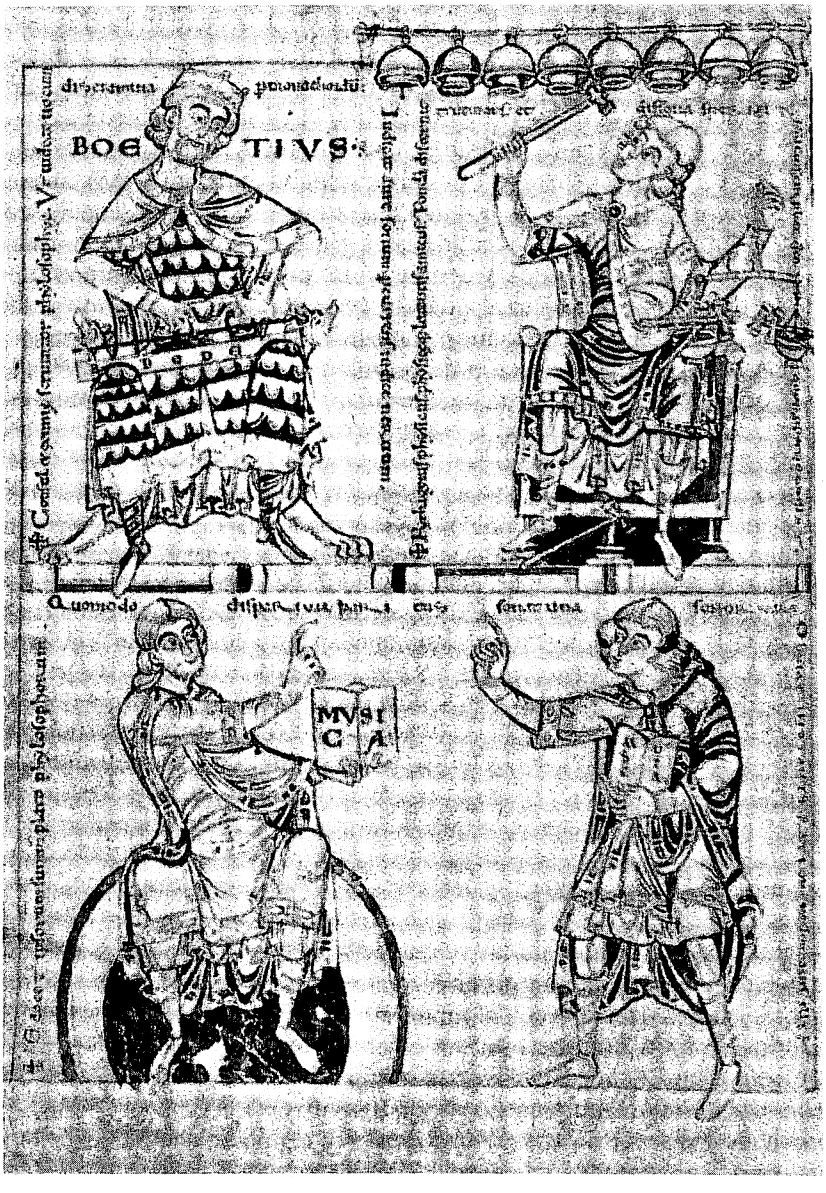
3. Nicómano de Gerasa

A Diofanto se le puede llamar el padre del álgebra, pero ya veremos más adelante que esta denominación no hay que tomarla demasiado literalmente, dado que su obra no contiene nada del material que constituye la base del álgebra elemental moderna, ni tampoco se parece en absoluto al álgebra geométrica que nos encontramos en Euclides. La obra más importante que conocemos de Diofanto es su *Arithmetica*, que es un tratado originalmente en trece libros, de los que sólo han sobrevivido los seis primeros[3]. Recuérdese que en la antigua Grecia la palabra aritmética significaba realmente teoría de números y no técnica del cálculo. Por

---

[2] Citado de Cohen y Drabkin, *Source Book in Greek Science* (1958), pág. 27. La inseguridad en que nos encontramos con respecto a la vida de Diofanto es tan grande que ni siquiera sabemos con exactitud en qué siglo vivió. Se admite generalmente que vivió en torno al 250, pero también se han sugerido a veces fechas anteriores o posteriores en un siglo o más.

[3] Para una exposición completa véase T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria* (1910).



Cuatro matemáticos de la antigüedad que también hicieron contribuciones a la música: Boecio, Pitágoras, Platón y Nicómaco. De un manuscrito de una obra de Boecio de la Universidad de Cambridge.

este motivo la aritmética griega a menudo tenía más en común con la filosofía que con lo que solemos llamar matemática, y nada tiene de extraño, por lo tanto, que esta materia haya jugado un papel muy importante en el pensamiento neoplatónico durante la Epoca Alejandrina Tardía. Este hecho es especialmene evidente en el caso de Nicómaco de Gerasa, el autor de la *Introductio Arithmeticae*, un neopitagórico que vivió no muy lejos de Jerusalén en torno al año 100. Nicómaco ha sido considerado como de ascendencia siria probablemente, pero lo cierto es que en su obra lo que predomina son las tendencias filosóficas griegas. La *Introductio*, tal como nos ha llegado, consta sólo de dos libros, pero es posible que ésta sea solamente una versión abreviada de un tratado originalmente más extenso. En cualquier caso, la posible pérdida de parte de esta obra es mucho menos de lamentar que la pérdida de los siete últimos libros de la *Arithmetica* de Diofanto, porque la diferencia entre las obras de estos dos autores es abismal. Nicómaco muestra una competencia matemática muy escasa, por lo que podemos ver, y se dedicó únicamente al estudio de las propiedades más elementales de los números. El nivel de su obra puede juzgarse por el hecho de que Nicómaco considerase conveniente incluir una tabla de multiplicar hasta el ι por ι (es decir, 10 por 10). Si esta tabla estaba ya en el original y no es una simple interpolación posterior, entonces se trata del ejemplo más antiguo que nos ha llegado de una tabla griega de este tipo, aunque conozcamos muchas otras tablas de multiplicar babilónicas unos dos milenios más antiguas.

La *Introductio* de Nicómaco comienza con la ya veterana clasificación pitagórica de los números en pares e impares, y a continuación en parmente pares o potencias de dos y parmente impares o de la forma $2^n \cdot p$, con p impar, $p>1$ y $n>1$, e imparmente pares o de la forma $2 \cdot p$, con p impar y $p>1$. Siguen las definiciones de los números primos, compuestos y perfectos, incluyendo una descripción de la criba de Eratóstenes y una lista de los cuatro primeros números perfectos (6, 28, 496 y 8128). La obra incluye también una clasificación de las razones y de las combinaciones de razones (puesto que las razones entre enteros son esenciales para la teoría pitagórica de los intervalos musicales), un amplio tratamiento del tema favorito de la aritmética pitagórica, los números figurados en dos y tres dimensiones, y una exposición exhaustiva de los diversos tipos de medias (de nuevo un tema favorito de la matemática y de la filosofía pitagóricas). Como tantos otros escritores, Nicómaco considera al tres como el primer número en el estricto sentido de la palabra, ya que uno y dos no eran en realidad números, sino sólo los generadores de la sucesión numérica, y además, para Nicómaco los números estaban dotados de cualidades tales como mejor o peor, más joven o más viejo, etc., y podían transmitir estos caracteres, como los padres a sus hijos. A pesar de este marco de antropomorfismo aritmético, la *Introductio* contiene incluso un teorema moderadamente sofisticado: Nicómaco observó que si se agrupan los enteros impares de la forma 1; $3+5$; $7+9+11$; $13+15+17+19$; ..., entonces las sumas sucesivas van siendo iguales a los cubos de los enteros. Esta observación, junto con el antiguo descubrimiento pitagórico de que la suma de los n primeros números impares es n^2, conduce inmediatamente a la conclusión de que la suma de los n primeros cubos perfectos es igual al cuadrado de la suma de los n primeros números enteros.

La *Introductio* de Nicómaco[4] no tenía la intención de ser un tratado de cálculo ni de álgebra, sino un manual conteniendo aquellos elementos de la matemática que resultaban esenciales para entender la filosofía pitagórica y platónica, y en este sentido sirvió como modelo para muchos imitadores y comentadores posteriores. Entre ellos, los más conocidos fueron Teón de Esmirna (ca. 125), que escribió su *Expositio* en griego, y Boecio (muerto en el 524), que escribió su *Arithmetica* mucho más tarde y ya en latín. Estos hombres, lo mismo que Nicómaco, estaban mucho más interesados en las aplicaciones de la aritmética a la música y a la filosofía platónica que en hacer progresar la teoría matemática en sí. El título completo de la *Expositio* indica claramente, de hecho, que se trata de una exposición de temas matemáticos útiles para el etendimiento de Platón[5]. Explica, por ejemplo, que la tetractis, que consiste en los números 1, 2, 3, y 4, contiene todas las consonancias musicales, dado que con ella pueden formarse las razones 4:3, 3:2, 2:1, 3:1 y 4:1. La *Arithmetica* de Boecio, por otra parte, es muy poco original, reduciéndose casi a una traducción de la obra anterior de Nicómaco[6].

4. La *Arithmetica* de Diofanto

Bien distinta de las obras de Nicómano, Teón y Boecio era la *Arithmetica* de Diofanto, que constituía un tratado caracterizado por un alto grado de habilidad matemática y de ingenio puestos en juego. A este respecto el libro puede compararse con los grandes clásicos de los comienzos de la Epoca Alejandrina, y, sin embargo, no tiene prácticamente nada en común con ellos ni, de hecho, con nada de lo que constituye la matemática griega tradicional, sino que representa una rama esencialmente nueva y utiliza por lo tanto unos planteamientos diferentes. Al estar divorciada de los métodos geométricos, recuerda mucho al álgebra babilónica, pero mientras que la matemática babilónica se había ocupado principalmente de la solución *aproximada* de ecuaciones *determinadas* de grados hasta el tercero, la *Arithmetica* de Diofanto, en lo que ha llegado hasta nosotros, está dedicada casi completamente a la resolución *exacta* de ecuaciones *determinadas* e *indeterminadas*. Debido al énfasis que se pone en la *Arithmetica* en la solución de problemas indeterminados, la teoría que se ocupa de estos temas, y que a veces se denomina análisis indeterminado, se suele conocer también con el nombre moderno de análisis diofántico, y como estas materias forman parte hoy generalmente de los cursos de teoría de números más bien que del álgebra elemental, no resulta muy adecuado desde este punto de vista el considerar a Diofanto como el padre del álgebra. Hay otro aspecto, sin embargo, desde el que se justifica mejor esta

[4] Para una traducción al inglés véase Nicómaco de Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, traducida por M. L. D'Ooge (1926). Se trata de una edición muy útil que incluye también una extensa introducción en la que se sitúa la obra de Nicómaco en su correcta perspectiva histórica. D'Ooge saca la conclusión, de la evidencia acumulada, de que Nicómaco era realmente griego y no sirio.

[5] Pueden verse unos fragmentos traducidos al inglés en Cohen y Drabkin, *Source Book in Greek Science*, págs. 294-198.

[6] Marshall Clagett, *Greek Science in Antiquity*, págs. 185-186.

paternidad. El álgebra actual se basa casi exclusivamente en enunciados escritos en forma simbólica y no en el lenguaje escrito usual que sirve para la comunicación humana, en el que se expresaba la matemática griega antigua, así como la literatura y la filosofía. Es un hecho universalmente aceptado que se pueden distinguir tres grandes etapas en el desarrollo histórico del álgebra: 1) la etapa retórica o primitiva, en la que todo se escribía con palabras del lenguaje ordinario; 2) una etapa sincopada o intermedia, en la que se adoptaron algunas abreviaturas, y 3) una etapa simbólica o final que corresponde a la moderna simbolización completa en un lenguaje formal artificial. Tal división un tanto arbitraria del desarrollo del álgebra en tres etapas supone, desde luego, una simplificación quizá excesiva, pero nos puede servir de una manera efectiva como primera aproximación a lo que ha ocurrido, y dentro de este esquema a la *Arithmetica* de Diofanto hay que situarla sin la menor duda en la segunda categoría.

A todo lo largo de los seis libros supervivientes de la *Arithmetica* se hace un uso sistemático de ciertas abreviaturas para potencias de números y para relaciones y operaciones entre ellos. Un número desconocido o incógnita se representa por un símbolo que se parece a la letra griega *s* (quizá recordando la última letra de la palabra «arithmos»), su cuadrado se representa por Δ^{γ}, el cubo por K^{γ}, la cuarta potencia, llamada cuadrado-cuadrado, por $\Delta^{\gamma}\Delta$, la quinta potencia o cuadrado-cubo por ΔK^{γ}, y la sexta potencia o cubo-cubo por $K^{\gamma}K$. Diofanto conocía, desde luego, las reglas de combinación equivalentes a nuestras leyes para operar con los exponentes, y tenía además nombres especiales para los inversos de las seis primeras potencias de la incógnita, lo que equivale a nuestras potencias negativas. Los coeficientes numéricos se escribían después de los símbolos para las respectivas potencias de la incógnita a las que fueran asociados; la suma de términos se representaba por la simple yuxtaposición de los símbolos de los términos en cuestión, y la resta venía representada por un único símbolo situado inmediatamente antes de los términos que había que restar. Con esta notación Diofanto podía escribir polinomios con una única incógnita de una manera casi tan concisa como lo hacemos nosotros hoy. El polinomio $2x^4+3x^3-4x^2+5x-6$, por ejemplo, aparecía escrito en una forma equivalente a *SS*2 *C*3 *x*5 *M S*4 *u*6, donde las letras latinas *S*, *C*, *x*, *M* y *u* representan las correspondientes griegas para «cuadrado», «cubo», la «incógnita», «menos» y la «unidad», y con nuestros numerales actuales en vez de los que vendrían en su lugar en la notación alfabética griega que se usaba en la época de Diofanto. El álgebra griega no necesitaba ya restringirse a las tres primeras potencias o dimensiones, e identidades tales como la

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

que jugaron tan importantes papeles en el álgebra medieval y en la trigonometría moderna, aparecen ya en la obra de Diofanto. La diferencia más importante entre la sincopación diofántica y la notación algebraica moderna está en la falta de símbolos especiales para las operaciones y relaciones, así como de la notación exponencial en la primera de ellas. Estos elementos que faltaban para la notación simbólica fueron la contribución del período que va desde finales del siglo XV a mediados del siglo XVII en la matemática europea.

5. Los problemas diofánticos

Si pensamos en primer término en las cuestiones de notación entonces Diofanto tiene sin duda buenas razones a su favor para ser llamado el padre del álgebra, pero en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados, estas pretensiones resultan ya bastante menos justificadas. La *Arithmetica* no es una exposición sistemática sobre las operaciones o las funciones algebraicas o la resolución de ecuaciones algebraicas, sino que consiste en una colección de unos 150 problemas, resueltos todos ellos en términos de ejemplos numéricos concretos y específicos, aunque quizá Diofanto pretendiese sugerir con ellos un método general. No hay ningún desarrollo axiomático ni tampoco se hace ningún esfuerzo por calcular todas las soluciones posibles; en el caso de las ecuaciones de segundo grado con dos raíces positivas se da solamente la mayor, y las raíces negativas obviamente no se consideran. Tampoco se establece ninguna distinción clara y precisa entre los problemas determinados e indeterminados, e incluso para el caso de estos últimos, que suelen tener un número infinito de soluciones, se da una única solución. Diofanto resuelve problemas con varias incógnitas expresando hábilmente todas las cantidades desconocidas en términos de una sola de ellas, siempre que esto sea posible. Dos problemas de la *Arithmetica* nos pueden servir para ilustrar este método que utiliza sistemáticamente Diofanto. Para calcular dos números, en el primero de ellos, tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, los números desconocidos no se representan por x e y, sino por lo que en nuestra notación moderna sería $10+x$ y $10-x$; entonces se tendrá que verificar únicamente que $(10+x)^2+(10-x)^2=208$, luego $x=2$, y los números buscados son 8 y 12. Diofanto trata análogamente el segundo problema, en el que se da la suma de dos números y la suma de sus cubos como 10 y 370 respectivamente.

En estos problemas nos encontramos con ecuaciones determinadas, pero Diofanto utilizaba, de hecho, esencialmente el mismo método para los problemas de análisis indeterminado. En un cierto problema se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto; éste es un ejemplo típico de problema de análisis diofántico, en el que sólo se admiten como soluciones aceptables números racionales. Para resolver este problema, Diofanto no llama a los números buscados x e y, sino x y $2x+1$, de manera que al añadir el segundo al cuadrado del primero dará automáticamente un cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a x. Ahora bien, se exige además que $(2x+1)^2+x$ también sea un cuadrado perfecto, y aquí Diofanto no se preocupa por buscar las infinitas respuestas posibles, sino que se contenta con elegir un caso de un cuadrado perfecto, concretamente en este ejemplo el número $(2x-2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x+1)^2+x$ resulta una ecuación lineal en x, de la que se obtiene $x=\frac{3}{13}$, luego el segundo número $2x+1$ será $\frac{19}{13}$. Naturalmente que se podría haber utilizado $(2x-3)^2$ o $(2x-4)^2$ u otras expresiones análogas en vez de $(2x-2)^2$ para obtener otro par de números distintos con la misma propiedad. Aquí podemos ver un tipo de planteamiento en Diofanto que se aproxima un poco a lo que podríamos llamar un «método»: siempre que dos números tengan que satisfacer dos condiciones, se deben elegir dichos números indeterminados de tal manera que una de las dos condiciones se verifique

automáticamente, y a continuación se les impone la única segunda condición para determinarlos. Es decir, que Diofanto, en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones *simultáneas* en dos incógnitas, opera con las condiciones *sucesivas* de manera que sólo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso.

6. El lugar de Diofanto en la historia del álgebra

Entre los problemas indeterminados que nos encontramos en la *Arithmetica* hay algunos que conducen a ecuaciones tales como $x^2=1+30y^2$, o bien $x^2=1+26y^2$, que son casos particulares de la llamada «ecuación de Pell» $x^2=1+py^2$, y aquí de nuevo se conforma Diofanto con dar una única solución[7]. En cierto sentido no es justo criticar a Diofanto por contentarse con encontrar una única solución, ya que lo que intentaba era resolver problemas, no *ecuaciones*. En este sentido, la *Arithmetica* no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas sobre aplicaciones del álgebra, y desde este punto de vista Diofanto se parece mucho a sus viejos colegas los algebristas babilónicos y, de hecho, a veces ha sido considerada su obra como «la más bella floración que produjo el álgebra babilónica»[8]. Sin embargo, en buena medida tampoco esta asociación hace justicia a Diofanto, porque sus números son completamente abstractos y no se refieren a medidas de grano, dimensiones de campos o unidades monetarias, como era el caso en el álgebra egipcia y mesopotámica. Además, Diofanto está interesado únicamente en soluciones racionales *exactas*, mientras que los babilonios, expertos calculistas, estaban dispuestos siempre a aceptar aproximaciones de números irracionales como soluciones de sus ecuaciones. Por este motivo las ecuaciones cúbicas aparecen raramente en la obra de Diofanto, mientras que entre los babilonios se había prestado mucha atención a la reducción de las cúbicas a la forma standard $n^3+n^2=a$, con objeto de resolverlas de una manera aproximada por interpolación en una tabla de valores de n^3+n^2.

No sabemos cuántos de los problemas de la *Arithmetica* son originales de Diofanto y cuántos tomó prestados, en su caso, de otras colecciones análogas. Es muy probable que al menos algunos de los problemas y de los métodos se puedan rastrear hasta sus orígenes babilónicos, ya que algunos ejercicios y pasatiempos o acertijos numéricos han tenido la tendencia a reaparecer persistentemente generación tras generación. Para nosotros hoy la *Arithmetica* de Diofanto presenta un aspecto sorprendentemente original, pero es posible que esta impresión sea el resultado de que se hayan perdido otras colecciones de problemas rivales. Nuestra concepción de la matemática griega es el resultado del análisis de un número de obras relativamente pequeño, que son las que han llegado hasta nosotros, y

---

[7] Véase D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover, 1967), pág. 62. Para una exposición completa de la obra de Diofanto véase T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*. Cf. también J. A. Sánchez Pérez, *La aritmética en Grecia* (1947), y el artículo de F. O. Hultsch sobre Diofanto en Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschft*, vol. V (Stuttgart: Metzler, 1905), columnas 1051-1073.

[8] Véase J. D. Swift, «Diophantus of Alexandria», *American Mathematical Monthly*, 43 (1956), págs. 163-170.

evidentemente las conclusiones obtenidas a partir de ellas serán siempre inseguras en mayor o menor grado. Se han encontrado ciertos indicios de que Diofanto pudo haber sido una figura no tan aislada como se suponía, en una colección de problemas de principios del siglo II aproximadamente (y, por lo tanto, muy probablemente anteriores a la *Arithmetica*), en la que aparecen algunos de los símbolos especiales que utiliza Diofanto[9]. No obstante, lo cierto es que Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego. En particular, por ejemplo, Fermat se vio conducido a su célebre «gran teorema» o «último teorema» (véase más adelante), cuando intentaba generalizar un problema que había visto en la *Arithmetica* de Diofanto, el II-8: «dividir un cuadrado dado en dos cuadrados»[10].

7. Pappus de Alejandría

La *Arithmetica* de Diofanto es una obra brillante digna del período de renacimiento matemático en que fue escrita, pero está muy alejada, tanto en su motivación como en su contenido, de los bellos tratados lógicos del gran triunvirato de geómetras de los comienzos de la Epoca Alejandrina. El álgebra pareció adecuarse más a la resolución de problemas que a la exposición deductiva, y debido a ello la gran obra de Diofanto quedó fuera de la corriente central de la matemática griega. Otra obra menor de Diofanto sobre números poligonales se acerca más a los intereses griegos anteriores, pero ni siquiera ésta puede ser considerada como una aproximación al clásico ideal lógico griego. La geometría clásica no había encontrado ningún defensor entusiasta, con la posible excepción de Menelao, desde la muerte de Apolonio cuatrocientos y pico años antes, pero durante el reinado de Diocleciano (284-305) vivió en Alejandría un sabio a quien animaba el mismo espíritu que había movido a Euclides, Arquímedes y Apolonio: nos referimos a Pappus de Alejandría, que escribió un libro hacia el año 320 con el título de *Colección matemática* (Synagoge), que es importante por varias razones. En primer lugar nos presenta un panorama histórico del máximo valor de partes de la matemática griega que de otra manera serían desconocidas para nosotros, ya que corresponden a obras perdidas. Por ejemplo, en el Libro V de la *Colección* es donde nos enteramos del descubrimiento por Arquímedes de los 13 poliedros semirregulares o «sólidos arquimedianos». Por otra parte, la *Colección* incluye además demostraciones alternativas y lemas suplementarios a proposiciones de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo. Y, por último, este tratado incluye nuevos descubrimientos y generalizaciones que no se hallaban en ninguna obra anterior. La *Colección*, que es el libro más importante de Pappus, constaba originariamente de ocho libros, pero el primero y la primera parte del segundo se han perdido; en este caso la pérdida no tiene tanta importancia como la de los

[9] Véase F. E. Robbins, «P. Mich. 620: A Series of Arithmetical Problems», *Classical Philology*, 24 (1929), págs. 321-329, y Kurt Vogel, «Die Algebraischen Probleme des P. Mich. 620», *Classical Philology*, 25 (1930), págs. 373-375.

[10] Véase Heath, *Diophantus of Alexandria*, págs. 144-145.

últimos libros de la *Arithmetica* de Diofanto, porque todo parece indicar que los dos primeros libros de la *Colección* estaban dedicados esencialmente al estudio de los principios del sistema de las tetradas de Apolonio dentro de la numeración griega, pero como ya tenemos desarrollado en el *Arenario* el correspondiente sistema de las octadas de Arquímedes, podemos conjeturar sin grandes dificultades qué tipo de material se ha perdido de la exposición de Pappus.

8. La *Colección*

El Libro III de la *Colección* nos muestra de una manera clara que Pappus compartía totalmente la estimación clásica griega por las sutilezas y finuras de la precisión lógica en la geometría. Es en este libro donde Pappus distingue de una manera clara y precisa entre los problemas llamados «planos», «sólidos» y «lineales», los primeros de los cuales son resolubles con rectas y circunferencias solamente, los segundos exigen la utilización de secciones cónicas, y los últimos otras curvas distintas de las rectas, circunferencias y cónicas. Pappus expone entonces algunas soluciones dadas a los tres famosos problemas de la antigüedad, siendo la duplicación del cubo y la trisección del ángulo ejemplos de problemas de la segunda categoría, o problemas sólidos, mientras que la cuadratura del círculo lo es de problema lineal. Pappus parece aceptar aquí de una manera implícita el hecho de que los problemas clásicos son imposibles de resolver bajo las condiciones platónicas, porque no figuran entre los problemas planos, pero hasta el siglo XIX no se dieron las primeras demostraciones rigurosas de este hecho.

En el Libro IV Pappus insiste de nuevo en que debería darse para cada problema una construcción adecuada a su nivel de complejidad, es decir, no se deberían usar lugares lineales en la solución de un problema sólido, ni tampoco lugares sólidos o lineales en la solución de un problema plano. Y al afirmar que la trisección de un ángulo es un problema sólido, sugiere en consecuencia métodos para resolverlo utilizando secciones cónicas, mientras que Arquímedes había usado en un caso una *neusis* o construcción del tipo de las de «regla deslizante», y en otro la espiral, que es un lugar lineal. Una de las trisecciones de Pappus es la siguiente. Sea AOB el ángulo dado; tracemos la circunferencia de centro O y radio arbitrario $OA = OB$ (fig. 11.1) y sea OC la bisectriz del ángulo. Trácese la hipérbola que tiene

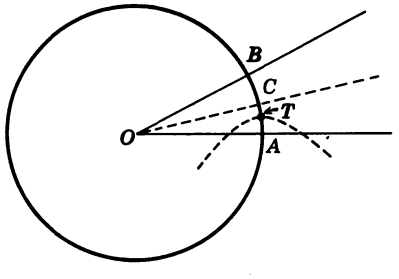


Figura 11.1

uno de sus focos en A, como directriz la recta OC y excentricidad igual a 2. Entonces una rama de esta hipérbola cortará a la circunferencia en un punto T tal que el ángulo AOT es igual a un tercio del ángulo AOB.

Una segunda construcción para la trisección de un ángulo propuesta por Pappus, hace uso de una hipérbola equilátera de la manera siguiente. Sea el lado OB del ángulo dado AOB una diagonal de un rectángulo $ABCO$, y tracemos por A la hipérbola equilátera que tiene como asíntotas las prolongaciones de CB y CO (fig. 11.2); trácece ahora una circunferencia de centro A y de radio dos veces OB, la cual cortará a la hipérbola en el punto P; trácese la perpendicular PT desde el

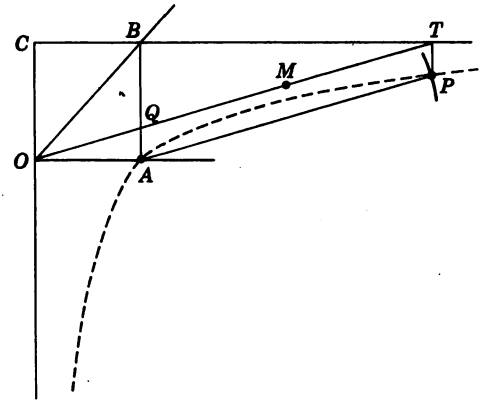


Figura 11.2

punto P a la asíntota CB. Entonces se puede demostrar fácilmente, a partir de las propiedades de la hipérbola, que la recta OT es paralela a AP y que el ángulo AOT es un tercio del ángulo AOB. Pappus no nos da ninguna información acerca de los orígenes de esta trisección, y no podemos evitar el preguntarnos si esta trisección no la conocería ya Arquímedes; si dibujamos la semicircunferencia de diámetro QT que pasa por B y tiene como centro M, entonces tenemos esencialmente la construcción de la *neusis* arquimediana, ya que $OB=QM=MT=MB$.

En el Libro III expone Pappus también la teoría de las medias y da una construcción geométrica muy bella que incluye las medias aritmética, geométrica y armónica en una única semicircunferencia. Pappus demuestra que si en la semicircunferencia ADC de centro O (fig. 11.3) tenemos DB AC y BF OD,

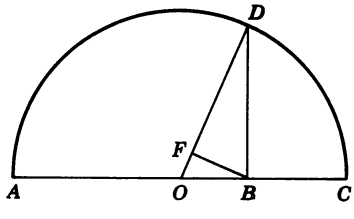


Figura 11.3

entonces *OD* es la media aritmética, *DB* la media geométrica y *DF* la media armónica de los segmentos *AB* y *BC*. En este caso Pappus sí que reivindica para sí mismo sólo la paternidad de la demostración, atribuyendo el diagrama a otro geómetra del que no nos da el nombre. A veces, incluso cuando Pappus nos da nombres concretos relativos a sus fuentes, resultan ser completamente desconocidos para nosotros, lo cual pone de relieve la poca información de que disponemos sobre los matemáticos de la época.

9. Algunos teoremas de Pappus

La *Colección* de Pappus está llena de información histórica interesante y también de importantes resultados nuevos. En muchos casos las novedades aparecen bajo la forma de generalizaciones de teoremas anteriores, y concretamente en el Libro IV nos encontramos con un par de ejemplos de este tipo. El primero consiste en una generalización elemental del teorema de Pitágoras. Si *ABC* es un triángulo *cualquiera* (fig. 11.4) y si *ABDE* y *CBGF* son paralelogramos *cualesquiera*

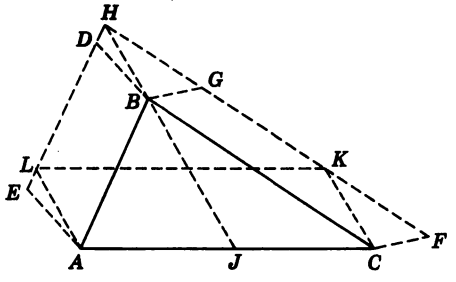


Figura 11.4

construidos sobre dos de sus lados, entonces Pappus construye sobre el tercer lado *AC* otro paralelogramo *ACKL* igual a la suma de los dos primeros. Esto se consigue fácilmente prolongando los lados *FG* y *ED* hasta que se corten en *H*, trazando entonces la recta *HB* que cortará al lado *AC* en *J*, y finalmente trazando *AL* y *CK* paralelas a *HJ*. No sabemos si esta generalización, que se suele conocer con el nombre de teorema de Pappus, es original suya o no, pero se ha sugerido que posiblemente la conociera ya Herón antes que Pappus.

Otro ejemplo de generalización en el mismo Libro IV, que también lleva el nombre de Pappus, es el de la extensión de un teorema de Arquímedes sobre el *arbelos* o «cuchillo de zapatero», en la que afirma que si inscribimos sucesivamente en la figura circunferencias C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ..., tal como indica la figura 11.5, tangentes todas ellas a las semicircunferencias *AB* y *AC*, y cada una a la anterior y la siguiente, entonces la distancia perpendicular del centro de la *n*-ésima circunferencia C_n al diámetro *AB* es igual a *n* veces el diámetro de C_n[11].

[11] Puede verse un bosquejo de demostración de este teorema en R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York: Houghton Mifflin, 1929), pág. 117.

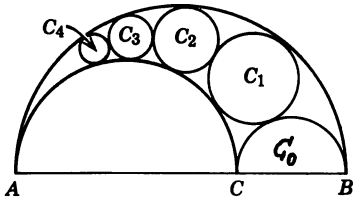


Figura 11.5

10. El problema de Pappus

El Libro V de la *Colección* fue uno de los favoritos de los comentaristas posteriores, al plantear entre otras cosas la cuestión de la sagacidad de las abejas. Después de haber demostrado Pappus que de los polígonos regulares con el mismo perímetro, tiene mayor área el que tenga mayor número de lados, sacó la conclusión de que las abejas demostraban tener alguna forma de inteligencia matemática al construir sus celdillas en forma de prisma hexagonal y no triangular ni cuadrado. En este libro se estudian además otros problemas de isoperimetrías, y se incluye una demostración de que el círculo tiene un área mayor, para un perímetro dado, que cualquier polígono regular En este contexto Pappus parece haber seguido de cerca una obra *Sobre figuras isométricas* escrita casi medio milenio antes por Zenodoro (ca. 180 a.C.), de la que nos han llegado algunos fragmentos a través de los comentaristas posteriores. Entre las proposiciones que aparecían en el tratado de Zenodoro había una que afirmaba que de todas las figuras sólidas con la misma superficie, la esfera es la que tiene un volumen máximo, pero evidentemente sólo se daba una justificación incompleta[12].

Los Libros VI y VIII de la *Colección* están dedicados en su mayor parte a las aplicaciones de la matemática a la astronomía, a la óptica y a la mecánica, incluyendo un intento fallido de determinar la ley del plano inclinado. Mucho más importante desde el punto de vista de la historia de la matemática es el Libro VII, en el que, siguiendo su tendencia a las generalizaciones, estuvo cerca Pappus del principio fundamental de la geometría analítica. Los únicos métodos reconocidos por los antiguos para definir curvas planas eran: 1) la definición cinemática en la que se considera un punto moviéndose sometido a dos movimientos simultáneos, y 2) la sección por un plano de una cierta superficie geométrica tal como un cono, una esfera o un cilindro. Entre estas últimas curvas estaban ciertas cuárticas conocidas como «secciones spiricas», que había descrito ya Perseo (ca. 150 a.C.), y que se pueden obtener cortando el anillo de ancla o «toro» por un plano. En algunas ocasiones llamó la atención de los griegos alguna curva alabeada, entre las que hay que contar la hélice cilíndrica y la análoga de la espiral arquimediana sobre una superficie esférica, conocidas las dos por Pappus, pero lo cierto es que la

[12] Véase Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), vol. II, págs. 207 y sigs. Una exposición fascinante de estos temas puede verse en D'Arcy Wentworth Thompson: *On Growth and Form*, 2.ª ed. (Cambridge University Press, 1942).

geometría griega se limitó básicamente al estudio de las curvas planas y, de hecho, a una cantidad muy limitada de curvas planas. Es interesante resaltar, por lo tanto, que en el Libro VII de la *Colección* propone Pappus la generalización de un problema más antiguo, que implica la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas. Este problema suele ser conocido, incluso en su forma más sencilla, como el «problema de Pappus», pero el planteamiento original relativo a tres o cuatro rectas parece remontarse a la época de Euclides. La primera vez que lo vemos tratado, bajo el nombre de «el lugar geométrico de las tres o cuatro rectas», es en la obra de Apolonio, como vimos ya en el capítulo IX; parece evidente que Euclides debió identificar el lugar geométrico en cuestión, pero sólo para algunos casos especiales, mientras que Apolonio parece haber dado una solución completa, en una obra que se ha perdido. Sin embargo, Pappus da la impresión de creer que los geómetras anteriores habían fracasado en sus intentos de obtener una solución general, y quiere dar a entender que él fue el primero que demostró que el lugar geométrico buscado es una sección cónica en todos los casos.

Pero lo que es más importante para nosotros es que Pappus pasa entonces a considerar el problema análogo para más de cuatro rectas. Para seis rectas en el plano, por ejemplo, reconoce que queda determinada una curva por la condición de que el producto de las distancias de un punto P a tres de las rectas esté en una razón fija al producto de sus distancias a las otras tres rectas; en este caso la curva queda definida, pues, por el hecho de que un sólido está en una razón fija a otro sólido. Pappus dudaba en embarcarse en los casos en que aparecen más de seis rectas, ya que «no hay nada que esté contenido por más de tres dimensiones», pero continuaba diciendo que «algunos hombres un poco anteriores a nuestra época se han permitido interpretar tales cosas, que no significan nada en absoluto que sea comprensible, hablando del producto del contenido de tal y tal líneas por el cuadrado de ésta o el contenido de aquellas otras. Estas cosas podrían ser formuladas, sin embargo, y demostradas en toda su generalidad por medio de proporciones compuestas». Esos predecesores anónimos que cita Pappus estaban preparados evidentemente para dar un paso de una gran importancia en la dirección de una posible geometría analítica que incluyera el estudio de curvas de grado mayor que tres, de la misma manera que Diofanto había utilizado ya las expresiones cuadrado-cuadrado y cubo-cubo para potencias más altas de números. Si Pappus hubiera explorado esta sugerencia un poco más lejos, podría haberse anticipado a Descartes en dar una clasificación general y una teoría de curvas que fuera mucho más allá que la distinción clásica entre los lugares planos, sólidos y lineales. No obstante, el hecho de reconocer que, independientemente del número de rectas que aparezcan en el problema de Pappus, queda determinada una curva concreta, es sin duda la observación más general sobre lugares geométricos de toda la geometría antigua, y el simbolismo algebraico sincopado que había desarrollado Diofanto podría haber ayudado a desvelar algunas de las propiedades de las curvas, pero el caso fue que Pappus era solamente un geómetra, como Diofanto había sido solamente un algebrista, y así ocurrió que Pappus se limitó a hacer notar con sorpresa que nadie había hecho hasta entonces una síntesis de este problema para ningún caso más allá de las cuatro rectas. Pappus mismo no hizo ningún estudio más profundo de estos lugares geométricos, «de los cuales no

sabemos nada más, y que simplemente reciben el nombre de curvas»[13]. Lo que se necesitaba para llevar a cabo la siguiente etapa natural de este proceso, era la presencia de un matemático interesado igualmente por el álgebra como por la geometría; es muy significativo el hecho histórico, que hay que subrayar, de que cuando aparece al fin una figura tal en la persona de Descartes, fue este mismísimo problema de Pappus el que sirvió de punto de partida y a la vez de palanca para la invención de la geometría analítica moderna.

11. El *Tesoro del análisis*

Hay más cosas importantes en el Libro VII de la *Colección*, aparte del problema de Pappus. Una de ellas consiste en una descripción completa de lo que se llamaba el método del análisis, y de una colección de obras conocida en la antigüedad como el *Tesoro del análisis*. Pappus nos explica que el análisis es «un método que consiste en considerar como conocido aquello que se busca, y obtener las consecuencias de ello hasta llegar a algo que se admite ya como un resultado de síntesis». Es decir, reconoce que el análisis es una «solución a la inversa», cuyas etapas tienen que recorrerse después en orden opuesto para que constituyan una demostración válida en el sentido usual. Si el análisis conduce a algo reconocido como imposible, entonces el problema también será imposible, ya que una conclusión falsa implica una premisa falsa. Pappus nos dice que el método del análisis y de la síntesis era el que utilizaban los autores cuyas obras constituyen el *Tesoro del análisis:* «Este es un cuerpo de doctrina destinado a aquellos que, después de recorrer el contenido de los elementos usuales, quieran adiestrarse para resolver los problemas sobre curvas que se les planteen», y Pappus nos da a continuación una lista de obras que figuraban en el *Tesoro del análisis*, entre las cuales estaban los tratados sobre cónicas de Aristeo, Euclides y Apolonio. Por estos comentarios de Pappus es por lo que sabemos que las *Cónicas* de Apolonio contenían originalmente 487 teoremas; como los siete libros que conocemos incluyen 382 proposiciones, podemos concluir que el octavo libro perdido contenía 105 proposiciones. La mitad aproximadamente de los libros que, según Pappus, figuraban en el *Tesoro del análisis* se han perdido, incluyendo el de *Secciones en una razón dada* de Apolonio, el *Sobre las Medias* de Eratóstenes y los *Porismas* de Euclides. Se ha sugerido la idea de que un «porisma» era quizá lo equivalente en la antigüedad a nuestra ecuación para una curva o lugar geométrico, indicando en ese caso que Euclides y Pappus pudieran no haber estado tan alejados de lo que llamamos «geometría analítica» como se suele admitir generalmente.

12. Los teoremas de Pappus-Guldin

El Libro VII de la *Colección* contiene el primer tratamiento que conocemos de las propiedades foco-directriz de las tres secciones cónicas. Parece que Apolonio ya

[13] No hay ninguna traducción al inglés de la *Colección* de Pappus, pero pueden verse extensas exposiciones de ella en Heath, *History of Greek Mathematics*, y en I. Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Sí hay en cambio una buena traducción francesa de la *Colección*, hecha por Paul Ver Eecke (París: Desclée de Bouver, 1933, 2 vols.).

conocía las propiedades focales de las cónicas con centro, pero es posible que la propiedad del foco y la directriz de la parábola no fuera conocida con anterioridad a Pappus. Otro teorema que aparece por primera vez en el Libro VII es el que se conoce ordinariamente con el nombre de Paul Guldin, un matemático del siglo XVII: «Si se hace girar una curva cerrada y plana alrededor de una recta que no la corta y situada en su mismo plano, entonces el volumen del sólido engendrado se obtiene multiplicando el área encerrada por la curva, por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de este área en un giro completo.» Pappus se mostraba, con razón, orgulloso de este teorema tan general, ya que incluye «un gran número de teoremas de todo tipo sobre curvas, superficies y sólidos, y todos ellos demostrados simultáneamente con una demostración única». Ciertamente, se trata del teorema más general perteneciente al dominio del cálculo infinitesimal que nos encontramos en la antigüedad. Pappus da también el teorema análogo que nos dice que el área de la superficie engendrada por la revolución de una curva plana alrededor de una recta de su plano que no corta a la curva, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia recorrida en una revolución completa por el centro de gravedad de la curva[14].

La *Colección* de Pappus es el último tratado matemático antiguo verdaderamente importante, dado que los intentos del autor de revitalizar y relanzar la geometría no tuvieron éxito. Se siguieron escribiendo obras matemáticas en griego durante otros mil años más aproximadamente, continuando la tradición que había comenzado otros mil años antes, pero los autores que sucedieron a Pappus ya no alcanzaron a elevarse nunca a su nivel, siendo sus obras casi exclusivamente comentarios de tratados anteriores. Pappus mismo es en parte el responsable de los omnipresentes comentarios que iban a seguir, porque también él escribió comentarios sobre los *Elementos* de Euclides y sobre el *Almagesto* de Ptolomeo, entre otros, de los que sólo se han conservado algunos fragmentos. Los comentarios posteriores, tales como los de Teón de Alejandría (fl. 365) nos son más útiles desde el punto de vista de la información histórica que de los resultados matemáticos que contienen. Teón fue también el responsable de una importante edición de los *Elementos* que se ha conservado, y se le recuerda también como el padre de Hypatía, una joven erudita de amplia cultura matemática que escribió comentarios sobre Diofanto, Ptolomeo y Apolonio. Siendo como era una ardiente defensora de la cultura pagana, Hypatía se atrajo la enemistad y el odio de una fanática turba cristiana, a cuyas manos sufrió una muerte cruel el año 415. El dramático impacto de su muerte en Alejandría ha sido el motivo de que algunos historiadores hayan tomado este año como el que señala el final de la matemática antigua, pero creemos que resulta más correcto situar este final aproximadamente un siglo más tarde.

---

[14] Existe la posibilidad de que el «Teorema de Guldin» sea en realidad una interpolación posterior en el manuscrito de la *Colección*. (Véase la traducción de Ver Eecke citada en la nota 13.) En cualquier caso el teorema representa un sorprendente avance debido a alguien durante o a continuación del largo período de decadencia.

13. Proclo de Alejandría

Proclo de Alejandría (410-485) se trasladó a Atenas siendo aún un joven matemático y filósofo, y allí llegó a dirigir la escuela neoplatónica. Proclo tenía más de filósofo que de matemático, desde luego, pero sus comentarios tienen a menudo un valor crítico para la historia de la primitiva geometría griega. Su *Comentario sobre el Libro I de los Elementos* de Euclides es de una importancia excepcional para nosotros, porque Proclo tenía sin duda al alcance de la mano, mientras lo escribía, una copia de la *Historia de la geometría* de Eudemo, ahora perdida desgraciadamente, así como el *Comentario sobre los Elementos* de Pappus, perdido también casi en su totalidad. La información que tenemos sobre la historia de la geometría antes de Euclides se la debemos en gran medida a Proclo, que incluyó en su *Comentario* un resumen o extracto esencial de la *Historia* de Eudemo. Este pasaje, que ha venido a ser conocido como el *Sumario de Eudemo*, puede considerarse como la principal contribución de Proclo a la matemática, aunque también se le atribuye el teorema que dice que si un segmento de longitud fija se mueve de manera que sus extremos se desplazan a lo largo de dos rectas que se cortan, entonces un punto determinado del segmento describirá una elipse.

14. Boecio

Durante los años en que Proclo escribía sus obras en Atenas, el Imperio Romano de Occidente iba hundiéndose lenta pero inexorablemente. Se suele situar el final del imperio, de una manera convencional, en el año 476, el mismo año en que el emperador romano aún niño Rómulo Augústulo fue desplazado por un godo, Odoacro. Algunos miembros de la vieja élite senatorial romana permanecieron en sus puestos, pero el partido senatorial había perdido ya el control político. En esta nueva situación Boecio (ca. 480-524) se encontró en una posición difícil, ya que provenía de una vieja y distinguida familia patricia y no se dedicaba exclusivamente a la filosofía y a la matemática, sino que era además un político, y debió ver con disgusto el irresistible ascenso del poder ostrogodo. A pesar de que Boecio puede ser considerado probablemente como el matemático más importante que produjo la antigua Roma, el nivel de su obra presenta un fuerte contraste con el de la de los matemáticos griegos. Boecio fue el autor de libros de texto para cada una de las cuatro ramas matemáticas de las artes liberales, pero estos libros no eran más que simples abreviaturas a un nivel muy elemental de clásicos anteriores. Una *Aritmética* que se reducía a un resumen de la *Introductio* de Nicómaco; una *Geometría* basada en Euclides y que incluía proposiciones únicamente, sin demostraciones, de algunas de las partes más sencillas de los cuatro primeros libros de los *Elementos*; una *Astronomía* extraída del *Almagesto* de Ptolomeo, y, por último, una *Música* que proviene de las obras anteriores de Euclides, Nicómaco y Ptolomeo. En algunos casos, estos textos introductorios que fueron profusamente utilizados más tarde en las escuelas monásticas medievales pueden haber sufrido interpolaciones posteriores, lo que hace difícil el determinar con precisión qué es lo que se debe exactamente a Boecio mismo. No obstante, lo que sí está claro es que

el autor estaba interesado principalmente en dos aspectos de la matemática: sus relaciones con la filosofía y su aplicabilidad a problemas sencillos de medición. De la matemática como una estructura lógica rigurosa apenas aparece alguna traza.

Boecio parece haber sido un hombre de estado de altas miras e integridad incuestionada. Tanto él mismo como más tarde sus hijos sirvieron como cónsules, y Boecio estuvo entre los principales consejeros de Teodorico, pero por alguna razón, sea de tipo político o religioso, el filósofo cayó en desgracia con el emperador. Se ha afirmado que Boecio era cristiano (como también lo era probablemente Pappus) y que abrazaba concepciones trinitarias que le privaron de la confianza del emperador arriano. Es posible también que Boecio estuviera demasiado estrechamente relacionado con elementos políticos que tenían su vista puesta en el Imperio de Oriente con la esperanza de ayuda para restaurar el viejo orden romano en Occidente[15]. En cualquier caso, Boecio fue ejecutado el año 524 ó 525 después de larga prisión. (Incidentalmente, Teodorico murió sólo un año más tarde aproximadamente, en el 526.) Fue durante su permanencia en prisión cuando escribió Boecio su obra más famosa, el *De consolatione philosophiae*; este ensayo, escrito parte en prosa y parte en verso mientras esperaba la muerte, discute la responsabilidad moral a la luz de la filosofía platónica y aristotélica.

15. El final del período alejandrino

La muerte de Boecio puede considerarse que señala el final de la matemática antigua en el Imperio Romano de Occidente, de la misma manera que la muerte de Hypatía había marcado el fin de Alejandría como centro matemático, pero el trabajo continuó durante unos pocos años más en Atenas. En esta ciudad no nos encontramos ya en esa época con matemáticos muy originales, pero el comentarista peripatético Simplicio (fl. 520) estaba lo suficientemente interesado en la geometría griega como para conservar y transmitirnos lo que puede ser el fragmento original más antiguo existente. Aristóteles se refiere en su *Física* a la cuadratura de un círculo o un segmento, y Simplicio aprovechó esta oportunidad para citar «palabra por palabra» lo que había escrito Eudemo sobre el tema de la cuadratura de las lúnulas por Hipócrates. La exposición, que ocupa varias páginas, nos da los detalles completos de la cuadratura de las lúnulas, citados por Simplicio a partir de Eudemo, el cual, a su vez, se supone que dio por lo menos parte de las demostraciones en las mismísimas palabras de Hipócrates, especialmente en los pasajes en que se ven utilizadas ciertas formas de expresión arcaicas. Esta referencia nos sitúa lo más cercanos que podemos llegar a un contacto directo con la matemática griega anterior a la época de Platón.

---

[15] Véase Helen M. Barret, *Boethius. Some Aspects of His Times and Work* (Cambridge University Press, 1940). Se incluyen breves extractos de las obras de Boecio en Cohen y Drabkin, *Source Book in Greek Science*, págs. 291-294, 298-299.

16. La *Antología Griega*

Simplicio era básicamente un filósofo, pero en su época circulaba una obra que se suele conocer como la *Antología Griega*, cuyas partes matemáticas nos recuerdan fuertemente los problemas del *Papiro de Ahmes* anterior a ella en más de dos mil años. Esta *Antología* contenía unos 6.000 epigramas, de los cuales más de 40 son problemas matemáticos, coleccionados probablemente por Metrodoro, un gramático del siglo V o quizá del VI. La mayor parte de estos problemas, incluido el epigrama que hemos reproducido más arriba acerca de la edad de Diofanto, conducen a simples ecuaciones lineales. Por ejemplo, en uno de ellos se pide hallar cuántas manzanas hay en un conjunto si al distribuirlas entre seis personas la primera recibe un tercio del total, la segunda un cuarto, la tercera un quinto, la cuarta un octavo, la quinta recibe diez manzanas, y queda aún una manzana para la sexta persona. Otro de estos problemas es uno típico de los textos de álgebra elemental de nuestros días. Si un grifo puede llenar una cisterna en un día, un segundo en dos días, un tercero en tres días y un cuarto en cuatro días, ¿cuánto tardarán en llenar la cisterna los cuatro a la vez? Estos problemas no serían originales de Metrodoro probablemente, sino que se recopilarían de varias fuentes; algunos es posible que se remonten a antes de Platón, recordándonos una vez más que no toda la matemática griega era del tipo de la que consideramos como «clásica».

17. Los matemáticos bizantinos del siglo VI

Simplicio y Metrodoro no fueron, desde luego, los matemáticos más sobresalientes de su época, sino que hubo comentaristas contemporáneos con la preparación adecuada para entender las obras de Arquímedes y de Apolonio. Entre ellos hay que contar a Eutocio (nacido hacia el 460), que escribió comentarios sobre varios de los tratados de Arquímedes y sobre las *Cónicas* de Apolonio. Precisamente a Eutocio le debemos el conocer la solución arquimediana de una cúbica por intersección de cónicas, que se cita en *Sobre la esfera y el cilindro*, pero que no se ha conservado más que en este comentario de Eutocio. El comentario a las *Cónicas* de Apolonio por Eutocio estaba dedicado a Antemio de Tralles (muerto el 534), un matemático capaz y también arquitecto de Santa Sofía en Constantinopla, quien describió la manera de construir la elipse «a cordel» y escribió un libro *Sobre los Espejos Ustorios* en el que se estudian las propiedades focales de la parábola. Su colega y sucesor en la construcción de Santa Sofía, Isidoro de Mileto (fl. 520), fue también un matemático de cierto mérito, que divulgó los comentarios de Eutocio y promovió una renovación del interés en las obras de Arquímedes y de Apolonio. A Isidoro se debe probablemente la conocida construcción de la parábola con una escuadra en forma de T y una cuerda, y también posiblemente el Libro XV apócrifo de los *Elementos* de Euclides. No es aventurado el afirmar que pudo deberse en gran medida a las actividades del grupo de Constantinopla, compuesto por Eutocio, Isidoro y Antemio, el hecho de que

hayan sobrevivido hasta hoy las versiones griegas de las obras de Arquímedes y de los primeros cuatro libros de las *Cónicas* de Apolonio.

Isidoro de Mileto fue uno de los últimos directores de la Academia Platónica en Atenas. Esta escuela había experimentado muchos cambios, desde luego, a lo largo de su dilatada vida durante más de 900 años, y en la época de Proclo se convirtió en un centro de enseñanza neoplatónico. Cuando Justiniano llegó a emperador en Constantinopla el año 527, pensó sin duda que la enseñanza pagana que impartía la Academia, junto con otras escuelas filosóficas de Atenas, era una amenaza latente para el cristianismo ortodoxo, y en consecuencia el año 529 fueron cerradas las escuelas filosóficas y dispersados los sabios que allí enseñaban. En esta época Roma no resultaba ser un hogar muy acogedor para los estudiosos, y así Simplicio y algunos otros filósofos buscaron refugio en el Este, cosa que encontraron en Persia, donde establecieron, bajo el reinado del rey Chosroes, lo que podríamos llamar la «Academia de Atenas en el exilio»[16]. Por lo tanto, podemos considerar el año 529 como la fecha que señala el final, y esta vez un verdadero final, de la matemática europea en la antigüedad. En adelante, las semillas de la ciencia griega iban a germinar y desarrollarse en los países del próximo y del lejano Oriente hasta que, unos 600 años más tarde, el mundo latino estuviera en una situación más receptiva para las creaciones culturales. La fecha del año 529 tiene también otro significado que se puede tomar como sintomático, por la coincidencia, de un profundo cambio de valores en el mundo occidental: en este mismo año fue fundado el venerable monasterio de Monte Cassino. La matemática no desapareció completamente de Europa el año 529, desde luego, sino que se continuaron escribiendo comentarios sin importancia en griego en el Imperio Bizantino, y muchas versiones de los elementales textos latinos de Boecio se siguieron utilizando en las escuelas de Occidente. El espíritu de la matemática languidecía, sin embargo, mientras los hombres se preocupaban menos por el valor de la geometría y más por el camino de la salvación. Para seguirle la pista a las etapas siguientes en el desarrollo de la matemática tenemos, por lo tanto, que volverle la espalda a Europa y mirar hacia el Este.

Bibliografía

Clagett, Marshall: *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard Schuman, 1955; ed. en rústica, Collier Books, 1963).

Cohen, M. R., y I. E. Drabkin: *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reed., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958).

Casles, Michel: *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis... d'après la notice... de Pappus* (París: Mallet-Bachelier, 1860).

Heath, T. L.: *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, 2.ª ed. (New York: Cambridge University Press, 1910; ed. en rústica, New York: Dover, 1964).

——: *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.).

Nesselmann, G. H. F.: *Die Algebra der Griechen* (Berlín, 1842).

[16] Véase George Sarton, *The History of Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1952-1959, 2 vols.), vol. I, pág. 400.

Nicómano de Gerasa: *Introduction to Arithmetic*; trad. M. L. D'Ooge, con estudios sobre aritmética griega por F. E. Robbins y L. C. Karpinski (New York: Macmillan, 1926).
Pappus de Alejandría: *Collectionis quae supersunt*, ed. por F. Hultsch (Berlín, 1876-1878, 3 vols.).
——: *La collection mathemátique*, trad. Paul Ver Eecke (París, 1933, 2 vols.).
Proclo Diádoco: *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. Paul Ver Eecke (Bruges: Desclee de Brouwer, 1948).
Sánchez Pérez, José Augusto: *La aritmética en Grecia* (Madrid: Instituto Jorge Juan, 1947).
——: *La aritmética en Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asín, 1949).
Stahl, W. H.: *Roman Science* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1962).
Swift, J. D.: «Diophantus of Alexandria», *American Mathematical Monthly*, **43** (1956), 163-170.
Thomas, Ivor, ed.: *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.).
Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961; ed. en rústica, New York: Wiley, 1963).
Ziegler, Konrat: «Pappos», en Pauly-Wissowa: *Real-Enzyclopädie der klassischen Wissenschaft* (Stuttgart, 1949), vol. vol. XVIII, parte 3, columnas 1084-1106.

Ejercicios

1. ¿Cree usted que las condiciones en Alejandría eran más o menos favorables para el desarrollo de la matemática en los días de Pappus que en la época de Ptolomeo? Explíquese detalladamente.
2. Compárense las condiciones intelectuales de Alejandría con las de Roma en la época de Diofanto y de Pappus.
3. ¿Se habría modificado esencialmente el desarrollo de la matemática si Roma no hubiera caído el año 476? Razónese la respuesta.
4. Si usted fuese un matemático que viviese en el año 500, ¿cuál de las siguientes ciudades elegiría para vivir: Alejandría, Roma, Atenas o Constantinopla? Dense razones para la respuesta.
5. Demuéstrese que el epigrama referente a la edad de Diofanto conduce a la conclusión de que murió a los 84 años.
6. Compruébese que los cuatro números que da Nicómaco como números perfectos lo son efectivamente.
7. Resolver el problema de Diofanto en el que se pide encontrar dos números tales que su suma sea 10 y la suma de sus cubos 370.
8. Hállense dos fracciones racionales, distintas de $\frac{3}{13}$ y $\frac{9}{13}$, que satisfagan la condición de Diofanto de que cualquiera de ellas sumada al cuadrado de la otra de lugar a un cuadrado perfecto.
9. Demuéstrese que los segmentos OC, BD y DF en la figura 11.3 son realmente las medias aritmética, geométrica y armónica respectivamente de los segmentos AB y BC, tal como afirma Pappus.
10. Demuéstrese la generalización de Pappus del teorema de Pitágoras representada en la figura 11.4.
11. Dibújese cuidadosamente una figura análoga a la figura 11.5 a partir de segmentos AB y BC dados, y mídase aproximadamente al diámetro del círculo C_3, así como la distancia de su centro a la recta AB, comprobando así de una manera aproximada la afirmación de Pappus al respecto.

12. Resuélvase el problema de la distribución de las manzanas que se enuncia en el texto.
13. Resuélvase el problema de los tres grifos enunciado en el texto.
14. Demuéstrese analíticamente que el problema de Pappus para seis rectas conduce a un lugar geométrico cuya ecuación es de grado no mayor que tres.

*15. Demuéstrese la primera trisección de Pappus dada en el texto.
*16. Demuéstrese que OT es paralela a AP en la figura 11.2.
*17. Utilizando el resultado del ejercicio 16, complétese la demostración de la segunda trisección de Pappus dada en el texto.
*18. Justifíquese el teorema de Pappus sobre los sólidos de revolución.
*19. Demuéstrese el teorema de Proclo acerca de la generación de la elipse para el caso en que las rectas que se cortan sean perpendiculares.

Capítulo XII
CHINA E INDIA

> Una mezcla de conchas perlíferas y dátiles verdes... o de valioso cristal y guijarros vulgares.
>
> *La India*, de Al-Biruni

1. Los documentos más antiguos

Las civilizaciones de China y de la India son mucho más antiguas que las de Grecia y Roma, aunque no más que las que surgieron en los valles de Mesopotamia y del Nilo; ambas se remontan a lo que hemos llamado la Edad Potámica, mientras que las culturas griega y romana se desarrollaron durante la Edad Talásica. Aunque las civilizaciones que tuvieron su cuna en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo son comparables en edad con las que nacieron a lo largo del Nilo o entre el Eufrates y el Tigris, los registros cronológicos en el caso de China son mucho menos fiables que los que tenemos para Egipto y Babilonia. La pretensión de que los chinos ya hicieron importantes observaciones astronómicas hacia el quinceavo milenio antes de Cristo, describiendo entre otras cosas los doce signos del Zodiaco, carece por completo de fundamento, pero en cambio ya es más razonable una tradición que sitúa el primer imperio chino hacia el 2750 a.C., aunque hay también puntos de vista más conservadores que sitúan los orígenes de la civilización china más cerca del año 1000 a.C. La operación de fechar los documentos matemáticos chinos no es nada fácil y, por ejemplo, las estimaciones que se han hecho acerca del *Chou Pei Suan Ching*, considerado generalmente como el más antiguo de los clásicos de contenido matemático, difieren entre sí en casi mil años; el problema de fechado se complica por el hecho de que esta obra pudiera muy bien ser debida a varios autores de diferentes épocas. Algunos historiadores consideran al *Chou Pei* como un buen ejemplo de lo que era la matemática china del 1200 a.C. aproximadamente, pero hay otros que sitúan la obra en el primer siglo anterior a nuestra era. Una fecha en torno al 300 a.C. podría parecer razonable, por lo tanto, poniéndola así en estrecha competencia con otro tratado, el *Chui-chang suan-shu*, escrito hacia el 250 a.C.[1], es decir, poco antes del advenimiento de la dinastía Han (202 a.C.). Las palabras «Chou Pei» parecen referirse al uso del gnomon para el

[1] Las historias de la matemática suelen dedicar poco espacio al estudio de la matemática china. En este sentido son excepción las siguientes: D. E. Smith, *History of Mathematics* (1923-1925), y J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlín, 1963), vol. I. Una exposición extraordinariamente completa y puesta al día de la matemática del próximo y del lejano Oriente es la que da A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (1964).

estudio de las órbitas circulares en los cielos, y el libro con el mismo título trata, de hecho, de cálculos astronómicos, aunque incluye también una introducción a las propiedades del triángulo rectángulo, así como algunas cosas sobre el uso de las fracciones. El libro está escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro sobre el calenario; el ministro explica a su soberano que el arte de los números se deriva del círculo y del cuadrado, de los que el cuadrado pertenece a la tierra mientras que el círculo pertenece a los cielos. El *Chou Pei* nos revela que en China, lo mismo que nos dice Herodoto de Egipto, la geometría debió surgir de la agrimensura, y que, como pasaba en Babilonia, la geometría china se reducía esencialmente a un ejercicio numérico de aritmética o de álgebra. Parece haber algunas indicaciones en el *Chou Pei* relativas al teorema de Pitágoras, un teorema tratado, en cualquier caso, algebraicamente por los chinos.

2. Los *Nueve Capítulos*

Casi tan antiguo como el *Chou Pei* es el *Chui-chang suan-shu*, o los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, quizá la obra que ejerció una mayor influencia de entre todos los libros matemáticos chinos[2]. Este libro incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. Mientras que los griegos de esta misma época escribían tratados expositivos sistemáticos, ordenados de una manera lógica, los chinos se dedicaban a repetir la vieja costumbre de los babilonios y de los egipcios de coleccionar conjuntos de problemas concretos. Los *Nueve Capítulos* nos recuerdan también la matemática egipcia por su uso del método de la «falsa posición», pero lo cierto es que la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

En las obras matemáticas chinas, al igual que pasaba con las egipcias, uno se sorprende por la abigarrada mezcla de resultados exactos e inexactos, primitivos y sofisticados. Se dan reglas correctas para calcular las áreas de triángulos, rectángulos y trapecios; el área del círculo se calcula tomando los tres cuartos del cuadrado construido sobre el diámetro, o bien un doceavo del cuadrado de la circunferencia, lo cual sería un resultado correcto si tomamos 3 como valor de π, pero para el área de un segmento de círculo se utiliza en los *Nueve Capítulos* el resultado aproximado $\frac{s(s+c)}{2}$, donde s es la sagita (es decir, el radio menos la apotema del segmento) y c la cuerda base del segmento. Hay algunos problemas que están resueltos por medio de reglas de tres, y en otros encontramos raíces cuadradas e incluso cúbicas. El capítulo ocho de los *Nueve Capítulos* tiene importancia por la resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales, utilizando números positivos y negativos; el último problema de este

[2] Véase Joseph Needham, *Science and Civilization in China* (1959), vol. III, págs. 24-25. Sobre las obras matemáticas recientes véase Tung-Li Yuan, *Bibliography of Chinese Mathematics* 1918-1960 (Washington, D.C., publicado por el autor, 1963).

capítulo, por ejemplo, plantea la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, y el tema de las ecuaciones indeterminadas va a quedar ya como uno de los favoritos de los pueblos orientales. El capítulo noveno y último incluye diversos problemas sobre triángulos rectángulos, algunos de los cuales reaparecerán más tarde en la India y en Europa: uno de ellos pide calcular la profundidad de un estanque circular de 10 pies cuadrados de superficie, sabiendo que una caña que crece en su centro y que asoma un pie por encima del agua, alcanza exactamente la superficie si se la dobla hasta el borde del estanque. Otro de estos problemas muy conocido es el del bambú roto. Hay un bambú de 10 pies de altura que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base; se pide entonces calcular a qué altura se ha producido la rotura[3].

3. Los cuadrados mágicos

Los chinos han sido siempre muy aficionados a los diseños armónicos, aritméticos o geométricos, y no es nada sorprendente por lo tanto que el primer ejemplo registrado de cuadrado mágico (de origen sin duda antiguo, pero desconocido) haya aparecido aquí. El cuadrado

4	9	2
3	5	7
8	1	6

le fue comunicado a los hombres por una tortuga del río Lo, según la leyenda, en los días del emperador Yii, famoso ingeniero hidráulico[4]. El interés por este tipo de modelos es sin duda lo que llevó al autor de los *Nueve Capítulos* a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$3x+2y+z=39$$
$$2x+3y+z=34$$
$$x+2y+3z=26$$

mediante operaciones sobre las columnas de la matriz

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

[3] Véase Yoshio Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913), pág. 23.
[4] Véase D. J. Struik, «On Ancient Chinese Mathematics», en *The Mathematics Teacher*, 56 (1963), págs. 424-432.

para reducirla a la forma

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

donde esta segunda forma representa el sistema de ecuaciones

$$36z=99,\ 5y+z=24 \text{ y } 3x+2y+z=39$$

del cual pueden obtenerse fácilmente, y de una manera sucesiva, los valores de z, y, x.

4. Los numerales a base de varillas

Si la matemática china hubiera disfrutado de una continuidad sin interrupciones basada en la tradición, es posible que algunas de las sorprendentes anticipaciones de ciertos métodos modernos pudieran haber llegado a modificar de una manera significativa el desarrollo de la matemática, pero la cultura china vio a veces seriamente dificultado su desarrollo por bruscas rupturas. El año 213 a.C., por ejemplo, ordenó el emperador chino la quema de libros, excluidos probablemente los de tipo técnico. Algunas obras debieron obviamente sobrevivir, o bien porque se conservasen copias clandestinamente o por simple transmisión oral de obras aprendidas íntegramente de memoria. De esta forma el saber consiguió persistir superando las dificultades, con el énfasis puesto, en el caso de la matemática, en los problemas relativos al calendario y el comercio.

Parece haber existido algún tipo de contacto entre la India y China, así como entre China y el Oeste, pero los historiadores difieren al evaluar la extensión y la dirección de las influencias ejercidas. La tentación natural de ver una influencia babilónica o griega en China, por ejemplo, choca con el problema importante de que los chinos nunca hicieron uso de las fracciones sexagesimales. El sistema de numeración chino permaneció esencialmente decimal, con notaciones sorprendentemente diferentes de las utilizadas en otros países. En China se utilizaron dos esquemas de notación distintos desde los tiempos más primitivos. En uno de ellos predominaba el principio multiplicativo, mientras que en el otro se utilizaba una forma de notación posicional. En el primero había cifras distintas para los dígitos de uno a diez, y otras cifras para las potencias de diez, y en la forma escrita los dígitos que ocupaban una posición impar (de izquierda a derecha o de abajo arriba) se multiplicaban por sus sucesores; así, por ejemplo, el número 678 se escribiría como un 6 seguido del símbolo para 100, después un 7 seguido del símbolo para 10, y por último el símbolo para el 8.

En el sistema de los «numerales a base de varillas», los dígitos del 1 al 9 se representaban por 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 y los nueve primeros múltiplos de 10 por 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱. Utilizando estos 18 símbolos alternadamente en las posiciones de derecha a izquierda, se pueden expresar números tan grandes como se desee; por ejemplo, el número 56.789 se representaría por 𝍤 𝍮 𝍦 𝍰 𝍧. Al igual que en Babilonia, sólo de una manera relativamente tardía apareció un símbolo para representar una posición vacía. En una obra del año 1247 se escribe el número 1.405.536 usando un símbolo redondo para el cero, de la forma 𝍠 𝍫 𝍲 𝍭 𝍤 𝍪 𝍥. En ocasiones, como pasa con algunas formas del triángulo aritmético que datan del siglo XIV, las varillas o palotes verticales y horizontales aparecen intercambiadas.

La época exacta en la que aparecieron los numerales a base de varillas no se ha podido determinar, pero es seguro que ya se usaban varios siglos antes de nuestra era, es decir, mucho antes de que se adoptase el sistema de notación posicional en la India. El uso de un sistema posicional centesimal más que decimal en China resultó conveniente para la adaptación de los cálculos a la tabla de calcular; las distintas notaciones para las potencias vecinas de 10 permitían a los chinos utilizar una tabla de calcular con columnas verticales sin marcar, y hasta el siglo VIII el lugar que debía ocupar un cero se dejaba simplemente en blanco. Aunque en los textos anteriores al año 300 de nuestra era los números y las tablas de multiplicar se escribían en palabras, de hecho los cálculos se realizaban con numerales a base de varillas sobre una tabla de calcular.

5. El ábaco y las fracciones decimales

Los numerales a base de varillas del 300 a.C. aproximadamente no eran, como decimos, una simple notación para escribir los resultados de una computación, sino que los administradores, por ejemplo, llevaban consigo una bolsa que contenía una colección de varillas concretas de bambú, marfil o hierro, que utilizaban como instrumentos para hacer sus cálculos. Las varillas para contar las manejaban los chinos con tanta habilidad que un escritor del siglo XI nos las describe como «volando con tal rapidez de un lado a otro que el ojo no podría seguir su movimiento». Los pasos consistentes en cancelaciones de cantidades iguales se podían llevar a cabo probablemente con mayor rapidez usando las varillas en una tabla de calcular que en los cálculos escritos y, de hecho, resultó tan eficaz el uso de las varillas y de la tabla de calcular, que el ábaco o marco de calcular rígido, con bolas movibles a lo largo de barras paralelas no se comenzó a utilizar tan tempranamente como se había supuesto de una manera general. Las primeras descripciones claras que nos encontramos de sus formas modernas, conocidas en China con el nombre de *sua phan* y en Japón como *soroban*, datan del siglo XVI, aunque ciertas anticipaciones podrían haber sido usadas quizá hasta mil años antes. La palabra latina *abacus* probablemente se derive de la palabra semítica *abq*, que significa polvo, lo cual nos indicaría que en otros países, lo mismo que en China, este aparato evolucionó a partir de una bandeja llena de polvo o arena y que se utilizaba como tabla de calcular. Es posible, aunque no seguro en absoluto, que

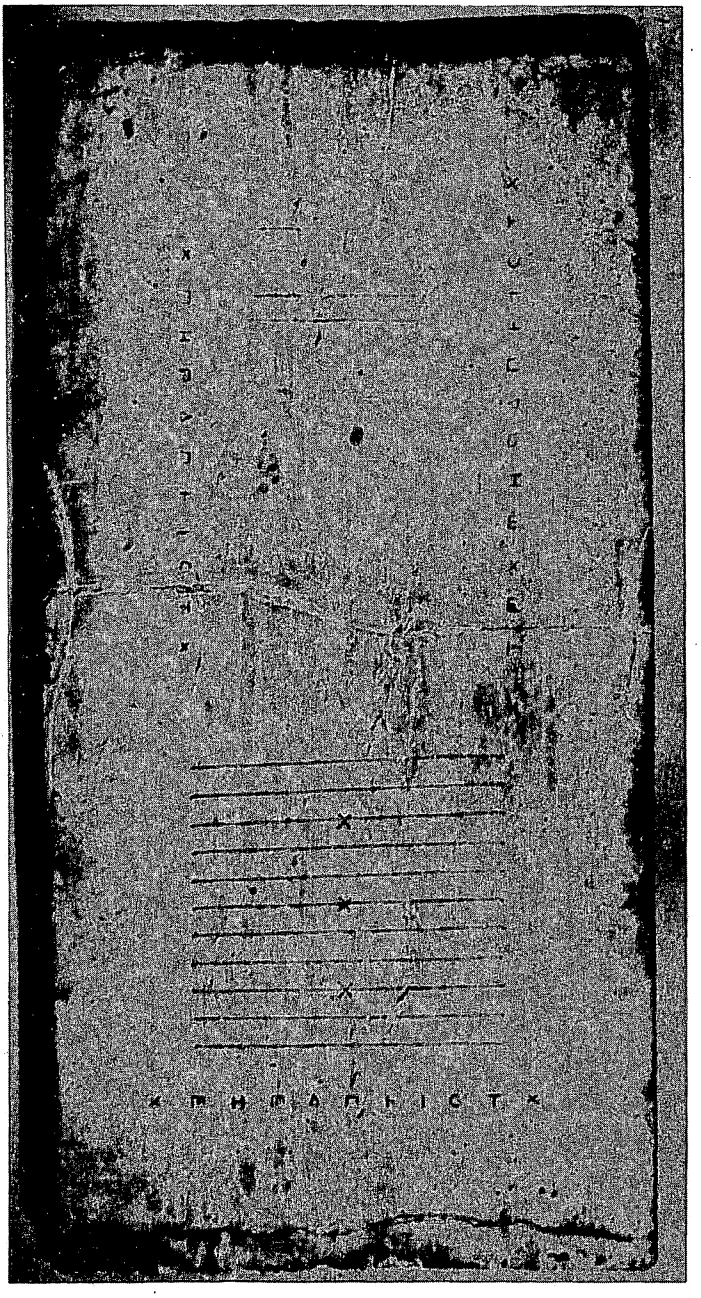
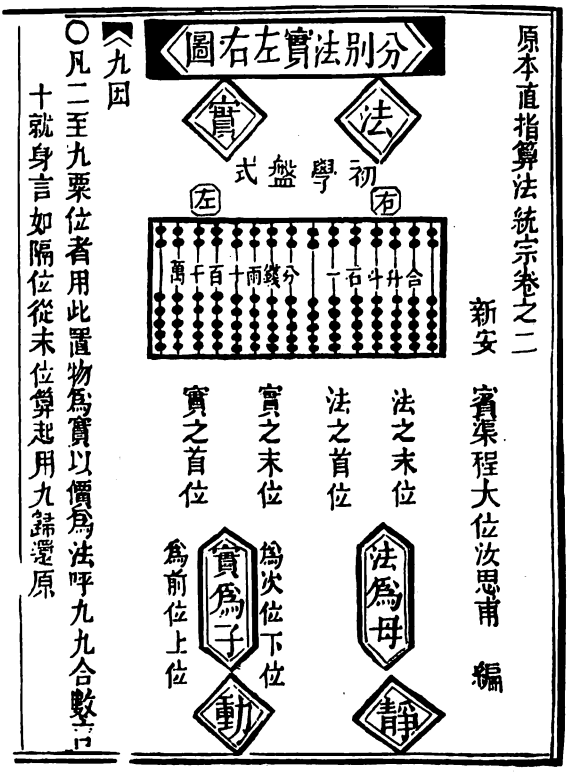


Tabla de mármol para calcular, probablemente del siglo IV a. C., que fue descubierta en la isla de Salamis y que se encuentra ahora en el Museo Nacional en Atenas.

el uso de la tabla de calcular sea anterior en China que en Europa, pero en cualquier caso no disponemos de fechas precisas y fiables. En el Museo Nacional de Atenas puede verse una placa de mármol que data probablemente del siglo IV a.C., y que parece ser una tabla para calcular, y cuando aún un siglo antes escribía Herodoto que «los egipcios mueven su mano de derecha a izquierda para calcular, mientras que los griegos la mueven de izquierda a derecha», se estaba refiriendo probablemente al uso de algún tipo de tabla de calcular. Exactamente cuándo dieron paso estos utensilios al ábaco propiamente dicho es una cuestión difícil de decidir, así como tampoco podemos decir si la aparición del ábaco en China, en Arabia y en Europa se debió o no a inventos independientes entre sí. El ábaco árabe tenía diez bolas en cada alambre y no tenía barra central, mientras que el chino tenía en cada alambre cinco bolas por debajo de la barra central y dos por encima; cada una de las bolas superiores en un mismo alambre del ábaco chino equivale a cinco de las inferiores, y para registrar un número se hacen deslizar el número correspondiente de bolas hacia la barra central que las separa unas de otras (véase el dibujo que reproducimos en el que aparece un ábaco).

No podemos considerar completa nuestra descripción del sistema de numeración chino sin hacer referencia al uso de las fracciones. Los chinos conocían bien las



Una antigua ilustración impresa sobre el ábaco, tomada del *Suan Fa Thung Tsung*, 1593. (Reproducida de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, vol. III, pág. 76.)

operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones. Al igual que hacían en otras materias, también establecían aquí analogías con los distintos sexos, refiriéndose al numerador como «el hijo» y al denominador como «la madre»; el énfasis generalizado en toda la cultura china sobre los principios del *yin* y del *yang* (opuestos entre sí, especialmente en el sexo), hacía más fácil seguir las reglas para manipular las fracciones. Más importante que estas curiosidades era, no obstante, la tendencia a la decimalización de las fracciones en China. Lo mismo que en Mesopotamia un sistema de medidas básicamente sexagesimal condujo a la numeración sexagesimal, así también en China la adopción de una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse, según se dice, tan lejos en el tiempo como el siglo XIV a.C.[5] Algunas veces se adoptaron ciertas artimañas de carácter decimal para aligerar un poco la manipulación de las fracciones; así, por ejemplo, en un comentario a los *Nueve Capítulos* que data del primer siglo de nuestra era, nos encontramos con el uso de unas reglas que hoy nos son muy conocidas para el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas, equivalentes a escribir $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{100a}{10}}$ y $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{\frac{1000a}{10}}$, y que facilitan la decimalización al hacer extracciones de raíces.

La idea de los números negativos no parece haber ocasionado muchas dificultades a los chinos, puesto que estaban acostumbrados a calcular utilizando dos conjuntos de varillas, uno de color rojo para representar números o coeficientes positivos y el otro de color negro para los negativos. Sin embargo, no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser una solución de una ecuación.

6. Los valores de π en China

La matemática china primitiva es tan distinta de la que se hacía en la misma época en otros lugares del mundo que parecería completamente justificada la hipótesis de un desarrollo independiente por completo. En cualquier caso, lo que parece que puede afirmarse con toda seguridad es que si hubo alguna intercomunicación antes del 400, entonces salió más matemática de China que entró, pero en cambio para períodos posteriores la cuestión se hace más difícil de responder. El uso del valor 3 para π en la matemática china primitiva apenas puede servir como argumento a favor de una hipotética dependencia de Mesopotamia, especialmente a la vista de que la búsqueda de valores cada vez más exactos fue más persistente en China que en ningún otro sitio, desde los primeros siglos de la era cristiana. En este proceso nos encontramos con los valores 3,1547, $\sqrt{10}$, $\frac{92}{29}$ y $\frac{142}{45}$, y en el siglo III aparece Liu Hui, importante comentarista de los *Nueve Capítulos*, que obtiene el valor 3,14 usando un polígono regular de 96 lados y la aproximación mucho mejor

[5] Véase Needham, *op. cit.*, vol. III, pág. 89.

3,14159 considerando un polígono de 3.072 lados. En la refundición que hizo Liu Hui de los *Nueve Capítulos* hay muchos problemas sobre cálculo de medidas, incluyendo la determinación correcta del volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada; para el tronco de cono circular se aplica una fórmula análoga, pero con el valor 3 para π. Una regla sorprendente es la que da el volumen del tetraedro con dos aristas opuestas perpendiculares como $\frac{1}{6}$ del producto de estas dos aristas por el segmento de perpendicular común. Para resolver ecuaciones lineales se utiliza el método de la falsa posición, pero hay también otros resultados algebraicos más sofisticados tales como la resolucion por medio de un esquema matricial de un problema diofántico en el que aparece un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. La resolución aproximada de ecuaciones de grados más altos parece haber sido efectuada recurriendo a un artificio análogo al que nosotros conocemos como «método de Horner». Liu Hui incluye también en su obra sobre los *Nueve Capítulos* gran cantidad de problemas sobre cálculo de alturas de torres inaccesibles y de árboles en laderas de montañas[6].

La fascinación que ejerció sobre los chinos el número π alcanzó su punto más alto en la obra de Tsu Ch'ung-Chih (430-501). Uno de sus valores era el conocido valor arquimediano $\frac{22}{7}$, al que Tsu Ch'ung-Chih califica de «inexacto»; su valor «exacto» era $\frac{355}{113}$. Si uno se encuentra obsesionado buscando posibles influencias occidentales, puede explicar esta aproximación tan buena que no se vio igualada en ninguna parte hasta el siglo XV, restando los numeraodres y los denominadores respectivamente del valor dado por Arquímedes del valor de Ptolomeo $\frac{377}{120}$. Sin embargo, Tsu Ch'ung-Chih llegó incluso más lejos en sus cálculos, ya que dio también 3,1415927 como un «valor por exceso» y 3,1415926 como un «valor por defecto» para π[7]. Los cálculos por medio de los cuales llegó a estos resultados, ayudado al parecer por su hijo Tsu Cheng-Chih, estaban contenidos probablemente en alguno de sus libros que se ha perdido. En cualquier caso sus resultados

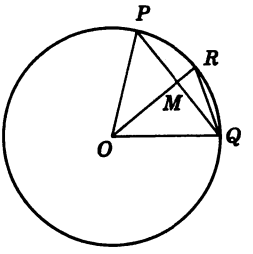


Figura 12.1

[6] Véase el excelente artículo sobre Liu Hui escrito por Ho Peng-Yoke en el *Dictionary of Scientific Biography*.

[7] Véase el artículo citado en la nota 6. Parece haber alguna confusión en la cita de este valor por Mikami, *op. cit.*, pág. 50, por Amith, *op. cit.*, vol. II, pág. 309, y por Hofmann, *op. cit.*, vol. I, pág. 76.

fueron muy notables para esta época, y resulta muy oportuno que se le haya puesto su nombre a un accidente geográfico de la superficie lunar.

No debemos olvidar, sin embargo, que el grado de exactitud alcanzado en el cálculo del valor de π es más una cuestión de resistencia calculística que de inteligencia teórica. De hecho, basta con el teorema de Pitágoras para conseguir una aproximación tan buena como se quiera. Si partimos del perímetro conocido de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, entonces el perímetro del polígono regular inscrito de $2n$ lados se puede calcular por medio de dos aplicaciones del teorema de Pitágoras. Sea, en efecto, C una circunferencia de centro O y radio r (fig. 12.1) y sea $PQ=s$ un lado del polígono regular inscrito de n lados, cuyo perímetro conocemos. Entonces la apotema $OM=u$ viene dada por $u=\sqrt{r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}$, y por lo tanto también conocemos la sagita $MR=v=r-u$, de donde el lado $RQ=w$ del polígono regular inscrito de $2n$ lados puede calcularse a partir de la fórmula $w=\sqrt{v^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2}$, y conoceremos por último el perímetro $2nw$. Este cálculo puede abreviarse, como observó Liu Hui, teniendo en cuenta que $w^2=22rv$. Repitiendo este procedimiento iremos obteniendo aproximaciones cada vez mejores al perímetro de la circunferencia, en términos del cual se define π.

7. El álgebra y el método de Horner

Los problemas que nos encontramos en la matemática china parecen ser a menudo más pintorescos que prácticos, y, sin embargo, la civilización china produjo un número de innovaciones técnicas sorprendentemente alto. La utilización de la imprenta y de la pólvora (siglo VIII), así como del papel y de la brújula marina (siglo XI) fue anterior en China que en cualquier otro lugar, y anterior también a la época más brillante de la matemática china, que tuvo lugar durante el siglo XIII, coincidiendo con la última parte del período Sung. En esta época había matemáticos trabajando en diversos lugares de China, pero las relaciones entre ellos parecen haber sido escasas y remotas y, como en el caso de la matemática griega, han llegado hasta nosotros relativamente pocos de los tratados que circularon en su día, evidentemente. El último y a la vez el más importante de los matemáticos Sung fue Chu Shih-Chieh, que floreció hacia los años 1280-1303, a pesar de lo cual sabemos tan poco sobre él que ni siquiera conocemos la fecha exacta de su nacimiento ni la de su muerte. Vivió en Yen-shan, cerca de Peking, pero parece ser que estuvo viajando durante unos veinte años, en plan de sabio errante que se ganaba la vida enseñando matemáticas, a pesar de lo cual encontró el tiempo y la tranquilidad suficientes para escribir dos tratados; el primero de ellos, escrito hacia el 1299, fue el *Suan-hsüeh ch'i-meng* o «Introducción a los estudios matemáticos», un libro relativamente elemental que ejerció sin embargo una gran influencia en Corea y en Japón, aunque en China desapareció más tarde y

estuvo perdido hasta su reaparición en el siglo XIX[8]. Mayor interés histórico y matemático tiene el *Ssu-yüan yü-Chien* o «Espejo Precioso de los Cuatro Elementos», escrito por Chu Shih-Chieh en 1303, libro que, por cierto, también desapareció pronto en China, hasta que fue redescubierto un siglo después. Los cuatro elementos a que se refiere el título, que son el cielo, la tierra, el hombre y la materia, representan las cuatro incógnitas de una ecuación. Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como 14. Chu Shih-Chieh explica en este libro un método de transformación para ecuaciones, que él llama el *fan fa*, y cuyo fundamento debe haber aparecido en China mucho tiempo antes, método que suele conocerse en Occidente con el nombre de «método de Horner», matemático que vivió medio milenio más tarde. Para resolver la ecuación $x^2+252x-5292=0$, por ejemplo, Chu Shih-Chieh obtiene en primer lugar por tanteo la aproximación $x=19$, lo cual significa que la ecuación tiene una raíz entre $x=19$ y $x=20$, y a continuación utiliza el *fan fa*, en este caso la transformación $y=x-19$, para obtener la ecuación $y^2+290y-143=0$ con una raíz entre $y=0$ e $y=1$. El valor aproximado de la raíz buscada de esta última es $y=\frac{143}{(1+290)}$, y por lo tanto el correspondiente valor de x es $19\frac{143}{291}$. Para la ecuación $x^3-574=0$ se usa la transformación $y=x-8$, que conduce a $y^3+24y^2+192y-62=0$, y la raíz buscada viene expresada como $x=8+\frac{62}{(1+24+192)}$ ó $x=8\frac{2}{7}$. En algunos casos Chu Shih-Chieh obtiene aproximaciones decimales de las raíces.

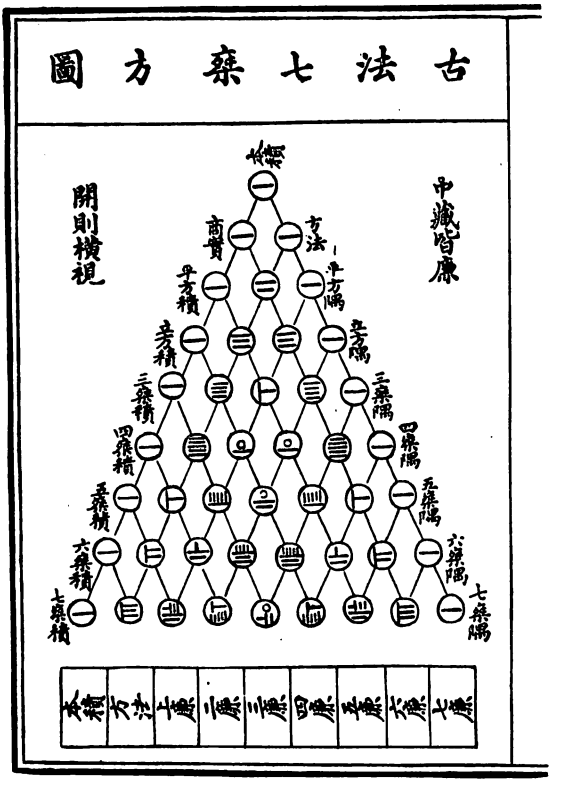
8. Los matemáticos del siglo XIII

El llamado «método de Horner» era bien conocido en China, como lo demuestra el hecho de que por lo menos otros tres matemáticos del período Sung tardío hicieran uso de procedimientos análogos. Uno de ellos fue Li Chih (o Li Yeh) (1192-1279), un matemático que vivió en Peking y a quien Khublai Khan ofreció en 1260 un puesto en el gobierno, puesto que Li Chih rehusó con una cortés excusa. Su libro *Ts'e-yuan hai-ching* o «Espejo marino de las medidas del círculo», contiene 170 problemas relativos a círculos inscritos y circunscritos a un triángulo rectángulo y a las relaciones entre los lados y los radios, donde algunos de estos problemas conducen a ecuaciones de cuarto grado. Aunque Li Chih no explica su método de resolución de ecuaciones, entre las cuales hay algunas de grado 6, todo hace pensar que no era muy diferente del utilizado por Chu Shih-Chieh y más tarde por Horner[9]. Otros dos matemáticos que usaron el método de Horner fueron Ch'in Chiu-Shao (*ca.* 1202-*ca.* 1261) y Yang Hui (*fl. ca.* 1261-1275). El primero de

[8] Véase también el extenso artículo sobre Chu Shih-Chieh por Ho Peng-Yoke en el *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 3, págs. 265-270. Véase también Needham, *op. cit.*, vol. III, págs. 38-53.

[9] Véase el artículo sobre Li Chih por Ho Peng-Yoke en el *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 8, págs. 313-320.

ellos fue además un ministro y gobernador sin escrúpulos que tuvo el mérito notable de adquirir inmensas riquezas en los cien días de su mandato. Su obra *Shu-Shu Chiu-Chang* o «Tratado matemático en nueve secciones» marca el punto culminante del análisis indeterminado chino, con la invención de reglas rutinarias para resolver sistemas de congruencias simultáneas. También nos encontramos en esta obra con el cálculo de la raíz cuadrada de 71.824 por etapas, paralelamente a lo que se hace en el método de Horner: partiendo de 200 como primera aproximación de la raíz de la ecuación $x^2-71.824=0$, reduce esta raíz en 200 mediante el cambio incógnita que conduce a $y^2+400y-31.824=0$. Para esta segunda ecuación Ch'in Chiu-Shao encuentra que 60 es una aproximación de la raíz, y disminuyéndola en 60 se llega a una tercera ecuación, $z^2+520z-4.224=0$, de la que 8 es una raíz, y por lo tanto tenemos que $x=268$. De una manera análoga resuelve las ecuaciones cúbicas y cuárticas. El mismo procedimiento de Horner fue utilizado por Yang Hui, de cuya vida no sabemos casi nada y cuya obra



El «triángulo de Pascal», tal como aparece al comienzo del *Ssu Yuan Yii Chien* de Chu Shih-Chieh, del año 1303. Lleva el título de «El Viejo Método del Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos», y en él figuran tabulados los coeficientes binomiales hasta la octava potencia. (Reproducido de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, vol. III, pág. 135.)

sólo se conserva en parte; entre sus contribuciones que han llegado hasta nosotros hay que contar los primeros cuadrados mágicos chinos de orden mayor que tres, incluyendo dos de cada uno de los órdenes cuatro a ocho y uno de cada uno de los órdenes nueve y diez[10].

9. El triángulo aritmético

Las obras de Yang Hiu incluían también otros resultados acerca de la suma de series finitas y del llamado «triángulo de Pascal», pero estos temas son más conocidos por aparecer publicados en el *Espejo precioso* de Chu Shih-Chieh, con quien se cierra la Edad de Oro de la matemática china. Como ejemplos de las muchas sumas de series finitas que aparecen en el *Espejo precioso*, podemos considerar las siguientes:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)\,(2n+1)/3!$$

$$1+8+30+80+\cdots+n^2(n+1)\,(n+2)/3!=n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\times(4n+1)/5!$$

de las cuales no se da, sin embargo, demostración de ningún tipo, ni tampoco parece que este tema se haya tratado de nuevo en China hasta casi el siglo XIX. Chu Shih-Chieh se maneja con estas sumas por medio del método de las diferencias finitas, algunos elementos del cual parecen remontarse en China al siglo VII, pero poco después de publicada esta obra el método en cuestión desapareció por varios siglos.

El *Espejo precioso* comienza con un diagrama del triángulo aritmético, conocido también en Occidente con el nombre inadecuado de «triángulo de Pascal», y en este diagrama figuran los coeficientes de los distintos desarrollos binómicos hasta la octava potencia, escritos con toda claridad en el sistema de numerales a base de varillas y con un símbolo redondo para el cero. Chu no pretende en absoluto haber sido el autor del descubrimiento de este triángulo, sino que se refiere a él como «el diagrama del viejo método para hallar potencias octavas e inferiores». De hecho, ya había aparecido en la obra de Yang Hui una distribución análoga de los coeficientes hasta la sexta potencia de un binomio, aunque sin utilizar el símbolo redondo para el cero, y en algunas obras chinas de hacia el 1100 se encuentran referencias a sistemas de tabulación para el triángulo aritmético, y es probable que dicho triángulo aritmético tuviera su origen en China más o menos por estas fechas. Es interesante hacer notar que el descubrimiento por parte de los chinos del teorema binomial para potencias enteras positivas, estuvo asociado en su origen a la extracción de raíces más que al cálculo de potencias. Una forma equivalente de este teorema la conocía al parecer también Omar Khayyam por la misma época en que estaba siendo utilizado en China, pero

[10] Pueden verse los excelentes artículos escritos por Ho Peng-Yoke para el *Dictionary of Scientific Biography*, con mucha más información sobre la obra de Ch'in Chiu-Shao (vol. 3, págs. 249-256) y de Yang Hui (vol. 14, págs. 538-546).

la obra árabe más antigua que ha llegado hasta nosotros y que lo incluye se debe a Al-Kashi y data del siglo XV; por esta época la matemática china ya no podía equiparse en su desarrollo con la europea ni con la del próximo Oriente, y es muy probable que para entonces China importase más matemática que exportase. Aún queda por resolver, sin embargo, el espinoso problema de determinar las influencias relativas entre China y la India durante el primer milenio de nuestra era.

10. La matemática primitiva en la India

Las excavaciones arqueológicas que se han realizado en Mohenjo Daro nos muestran la existencia de una vieja civilización con un alto nivel cultural en la India, contemporánea de los constructores de las grandes pirámides egipcias, pero no ha llegado hasta nosotros ningún documento del tipo matemático de aquella época lejana. Un milenio más tarde el país fue ocupado por los invasores arios que procedían de las altiplanicies del Irán, los cuales introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita. Buda, el gran maestro religioso, enseñaba en la India por la época en que, según se dice, Pitágoras visitó el país, y algunos han sugerido que quizá Pitágoras aprendió el teorema que lleva su nombre de los hindúes. Sin embargo, estudios recientes hacen esto altamente improbable, en vista de que los babilonios ya estaban familiarizados con el teorema en cuestión por lo menos mil años antes.

La caída del Imperio Romano de Occidente se sitúa tradicionalmente en el año 476, que fue precisamente el año en que nació Aryabhata, el autor de uno de los textos matemáticos hindúes más antiguos que conocemos; está claro, sin embargo, que debió haber una actividad de tipo matemático en la India mucho antes de esta época, probablemente incluso antes de la fundación mítica de Roma el 753 a.C. La India tuvo también, como Egipto, sus «tensadores de la cuerda», y los conocimientos geométricos primitivos que se fueron decantando de la planificación de templos y de la medición y construcción de altares, adoptando la forma de un cuerpo de conocimiento conocido como los *Sulvasūtras* o «reglas de la cuerda»: *Sulva* (o *sulba*) es una palabra que se refiere a las cuerdas utilizadas para efectuar mediciones, y *sūtra* significa un libro de reglas o aforismos relativos a un cierto ritual o a una ciencia. La operación de extender o tensar las cuerdas nos recuerda sorprendentemente los orígenes de la geometría egipcia, así como su asociación con la construcción de templos y altares nos recuerda de una manera inmediata el posible y discutido origen ritual de la matemática. Sin embargo, la gran dificultad que hay para atribuirle una fecha determinada a estas reglas es sólo comparable con las dudas que se plantean relativas a la influencia que pudieron tener en los matemáticos hindúes posteriores. Más aún que en el caso de China, nos encontramos con una sorprendente falta de continuidad de la tradición en la matemática hindú; las contribuciones importantes son acontecimientos episódicos separados por largos intervalos de tiempo sin ningún progreso[11].

[11] Tenemos que prevenir aquí al lector de que hay un cierto número de libros en los que las contribuciones de la India a la matemática aparecen exageradas groseramente. Un buen ejemplo de ello

11. Los *Sulvasūtras*

Se conservan tres versiones, todas ellas en verso, de la obra denominada como los *Sulvasūtras*, la más conocida de las cuales es la que lleva el nombre de Apastamba. En esta exposición primitiva, que puede remontarse quizá tan lejos en el tiempo como a la época de Pitágoras, nos encontramos con reglas para la construcción de ángulos rectos por medio de ternas de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas, tales como son 3, 4 y 5, ó 5, 12 y 13, ó 8, 15 y 17, ó 12, 35 y 37. Sin embargo, todas estas ternas se pueden derivar fácilmente de la vieja regla babilónica para construirlas, y por lo tanto no es improbable que hubiera una influencia mesopotámica en los *Sulvasūtras*. Apastamba sabía que el cuadrado construido sobre la diagonal de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre dos lados adyacentes, pero esta forma general del teorema de Pitágoras también pudo haber sido tomada de Mesopotamia. Más difícil de explicar es otra de las reglas que da Apastamba, una que nos recuerda fuertemente algunos de los teoremas del álgebra geométrica que aparecen en el Libro II de los *Elementos* de Euclides. Es la siguiente: Para construir un cuadrado equivalente (en área) a un rectángulo *ABCD* dado (fig. 12.2), llévense los lados menores sobre los

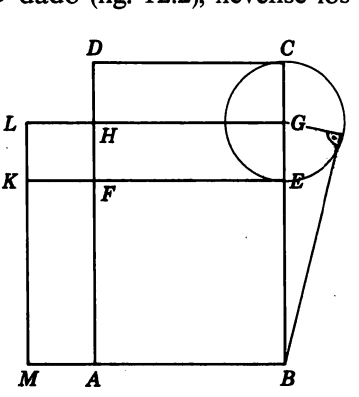


Figura 12.2

mayores de manera que $AF=AB=BE=CD$ y trácese HG mediatriz de los segmentos CE y DF; prolónguese EF hasta K, GH hasta L y AB hasta M, de manera que $FK=HL=FH=AM$, y trácese la recta LKM. Constrúyase ahora un rectángulo con diagonal igual a LG y con su lado más corto igual a HF; entonces el lado más largo de este rectángulo es el lado x del cuadrado buscado.

Son tan dudosos y discutidos los orígenes y el período durante el que se desarrollaron los *Sulvasūtras*, que no podemos decir con seguridad si estas reglas están relacionadas o no con la primitiva agrimensura egipcia o con el problema

---

es el libro de B. K. Sarkar *Hindu Achievements in Exact Science* (New York, 1918). La obra en dos tomos *History of Hindu Matehamtics*, por B. Datta y A. Singh (1935-1938), merece mucha más confianza, pero incluso ésta debe ser corregida sobre la marcha, siguiendo las líneas indicadas por Solomon Gandz en su recensión del volumen I de la obra en *Isis*, 25 (1936), págs. 478-488.

griego más tardío de la duplicación del altar cúbico. Los *Sulvasūtras* han sido fechados por los historiadores de una manera muy variada dentro de un intervalo de tiempo de casi mil años, que se extiende desde el siglo VIII a.C. al siglo II de nuestra era. La cronología local en las antiguas culturas del lejano Oriente apenas merece ninguna confianza cuando vemos que la tradición hindú ortodoxa se vanagloria de importantes trabajos astronómicos de hace más de 2.000.000 de años[12], y cuando los cálculos conducen a billones de días transcurridos desde el comienzo de la vida de Brahma al 400 de nuestra era aproximadamente[13]. Las referencias en la literatura védica a progresiones aritméticas y geométricas que pretenden remontarse al 2000 a.C.[14] pueden ser más seguras probablemente, pero lo cierto es que no hay ningún documento contemporáneo de la India que confirme esto. También se ha pretendido que el primer reconocimiento de la existencia de los inconmensurables tuvo lugar en la India durante el período de los *Sulvasūtras*, pero tales pretensiones no están comprobadas en absoluto[15]. La causa a favor de un descubrimiento temprano de las magnitudes inconmensurables por los hindúes la hace de lo más improbable el reiterado desinterés o incapacidad de los matemáticos hindúes para enfrentarse con los conceptos fundamentales.

12. Los *Siddhāntas*

Al período de los *Sulvasūtras*, que se cierra hacia el siglo II de nuestra era, le sigue la época de los *Siddhāntas* o sistemas astronómicos. El comienzo de la dinastía del rey Gupta (hacia el 290) señala un relanzamiento o renacimiento de la cultura sánscrita, y los *Siddhāntas* parecen haber formado parte de este renacimiento. Conocemos los nombres de cinco versiones diferentes de los *Siddhāntas*, que son el *Pauliśha Siddhānta*, *Sūrya Siddhānta*, *Vasisishta Siddhānta*, *Paitamaha Siddhānta* y *Romanka Siddhānta*. De todos ellos, el *Surya Siddhānta* o «Sistema del Sol», escrito hacia el año 400, parece ser el único que se conserva completo; según el texto mismo, escrito en verso en estrofas épicas, es la obra de Surya, el dios Sol[16]. Las teorías astronómicas principales son evidentemente griegas, pero aparecen mezcladas con una cantidad considerable de viejo folklore hindú. El *Pauliśha Siddhānta*, que data de hacia el 380, fue resumido por el matemático hindú Varahamihira (*fl.* 505), y a él se refiere frecuentemente el sabio árabe Al-Biruni, quien le atribuye directamente o un origen o una gran influencia griega. Los escritores más tardíos nos informan que todos los *Siddhāntas* estaban esencialmente de acuerdo en su contenido, variando sólo la fraseología utilizada, y así podemos suponer que los otros, al igual que el

[12] G. R. Kaye, «Indian Mathematics», *Isis*, 2 (1914), págs. 326-356.

[13] *Alberuni's India*, ed. por E. C. Sachan (Londres, 1960), 2 vols., vol. II, págs. 32 y sigs.

[14] A. N. Singh, «On the use of Series in Hindu Mathematics», *Osiris*, 1 (1936), págs. 606-628.

[15] A. N. Singh, «A Review of Hindu Mathematics up to the XII th century», *Archeion*, 18 (1936), págs. 43-62; Saradakanta Ganguli, «On the Indian Discovery of the Irrational at the Time of the Sulvasutras», *Scripta Mathematica*, 1 (1932), págs. 135-141.

[16] Se publicó una traducción inglesa por Burgess y Whitney, junto con extensas notas, en el *Journal of the American Oriental Society*, 6 (1860), págs. 141-498. Véase también George Sarton, *An Introduction to the History of Science* (1927), págs. 386-388.

Sūrya Siddhānta, eran tratados de astronomía formulados por medio de reglas crípticas en verso sánscrito, con muy pocas explicaciones y sin ninguna demostración.

Se suele admitir que los *Siddhāntas* aparecieron hacia finales del siglo IV o comienzos del V, pero en lo que ya hay un marcado desacuerdo es en lo que se refiere a los orígenes de los conocimientos que contienen. Los historiadores hindúes insisten, por supuesto, en la originalidad y la independencia de sus autores, mientras que los escritores occidentales se inclinan a ver en ellos signos indudables y claros de influencia griega. Es probable, por ejemplo, que el *Pauliśha Siddhānta* provenga en gran parte de la obra del astrólogo Pablo, que vivió en Alejandría poco tiempo antes de la fecha presumible en que fueron compuestos los *Siddhāntas*. (De hecho, Al-Biruni atribuye directamente este *Siddhānta* a Pablo de Alejandría.) Esta influencia vendría a explicar de una manera natural y sencilla las obvias semejanzas que hay entre algunas partes de los *Siddhāntas* y la trigonometría y astronomía de Ptolomeo. El *Pauliśha Siddhānta*, por ejemplo, utiliza para π el valor $3\frac{177}{1250}$, que coincide esencialmente con el valor sexagesimal 3; 8,30 de Ptolomeo.

Incluso aunque los hindúes adquiriesen sus conocimientos de trigonometría del helenismo cosmopolita de Alejandría, el material tomó en sus manos una nueva forma que iba a ser muy significativa. Mientras que la trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación funcional entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales en una circunferencia, que ellas subtienden, los escritores de los *Siddhāntas* transformaron esto para convertirlo en un estudio de la correspondencia entre la *mitad* de la cuerda y la *mitad* del arco o del ángulo central subtendido por la cuerda total. Así fue como nació, aparentemente en la India, el antepasado de la función trigonométrica moderna que conocemos como el *seno* de un ángulo, y la introducción de esta función seno representa probablemente la contribución principal de los *Siddhāntas* a la historia de la matemática. Aunque se acepta generalmente que este cambio de la cuerda completa a la semicuerda tuvo lugar en la India, el gran historiador de la ciencia de comienzos de siglo Paul Tannery formuló la hipótesis de que esta transformación de la trigonometría pudo haber tenido lugar en Alejandría durante el período post-ptolemaico. Sea o no sea correcta esta hipótesis, de lo que no cabe duda es de que no fue a través de los griegos sino de los hindúes como se extendió el uso posterior de la semicuerda que nosotros hemos heredado, y nuestra palabra «seno» se deriva, pasando por una accidentada historia en su traducción al árabe, como veremos, del nombre hindú *jiva*.

13. Aryabhata

Durante el siglo sexto, es decir, no mucho tiempo después de la composición de los *Siddhāntas*, vivieron dos matemáticos hindúes de los cuales sabemos que escribieron libros sobre el mismo tipo de materias. El más viejo y a la vez el más importante de los dos fue Aryabhata, cuya obra más conocida, escrita hacia el 499 y titulada *Aryabhatiya*, es un delgado volumen escrito en verso que cubre diversos temas de astronomía y de matemáticas. Se conocen los nombres de varios

matemáticos hindúes anteriores a esta época, pero no se ha conservado nada de sus obras salvo unos breves fragmentos. A este respecto, pues, la posición del *Araybhatiya* de Aryabhata es bastante análoga para el caso de la India a la de los *Elementos* de Euclides para Grecia ocho siglos antes. Las dos obras son, en efecto, recopilaciones de desarrollos anteriores compiladas por un autor único. Y, sin embargo, hay más diferencias, y más sorprendentes, que semejanzas entre estas dos obras; los *Elementos* constituyen una síntesis bien ordenada lógicamente de la matemática pura, expuesta con un alto grado de abstracción y con un objetivo pedagógico evidente, mientras que el *Aryabhatiya* es una breve obra descriptiva escrita en 123 estrofas métricas, con el objeto de suplementar las reglas de cálculo utilizadas en astronomía y en las técnicas de medición matemáticas, sin ninguna relación con la lógica o la metodología deductiva. Una tercera parte aproximadamente de la obra trata de *ganitapada*, es decir, de matemáticas; esta sección comienza con los nombres de las potencias de diez hasta el lugar décimo, y a continuación formula un conjunto de instrucciones para calcular raíces cuadradas y cúbicas de números enteros. Sigue un sistema de reglas para el cálculo de áreas, la mitad más o menos de las cuales son erróneas; para el área de un triángulo se da la regla correcta de calcular la mitad del producto de la base por la altura, para el volumen de la pirámide también se toma la mitad del producto de la base por la altura[17]. El área del círculo se calcula correctamente como la mitad del producto de la circunferencia por la mitad del diámetro, pero el volumen de una esfera viene expresado incorrectamente como el producto del área de un círculo máximo por la raíz cuadrada de este área. Al tratar del cálculo de áreas de cuadriláteros aparecen de nuevo reglas correctas e incorrectas unas al lado de otras: el área de un trapecio viene dada como la semisuma de los lados paralelos por la distancia perpendicular entre ellos, y a continuación sigue la regla absurda e incomprensible de que el área de cualquier figura plana se calcula determinando dos de sus lados y multiplicándolos. Hay una regla en el *Aryabhatiya* que señalan con orgullo los historiadores hindúes de la matemática, que es la siguiente[18]:

> Suma 4 a 100, multiplica por 8 y súmale 62.000. El resultado te da aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 20.000.

Aquí podemos ver utilizado el equivalente a 3,1416 como valor de π, lo cual es ciertamente notable, pero tenemos que recordar que éste es esencialmente el valor que había usado Ptolomeo. El hecho más que probable de que Aryabhata estuviera influenciado en este contexto por sus predecesores griegos viene reforzado por su adopción de la miriada o 10.000 unidades como medida del radio de la circunferencia.

Una parte típica del *Aryabhatiya* es la que trata de progresiones aritméticas, la cual contiene reglas para calcular la suma de los términos de una progresión, y también para hallar el número de términos de la progresión conocido el primer

---

[17] *The Aryabhatiya of Aryabhata*, traducido por W. E. Clark (1930), pág. 26.

[18] *Aryabhatiya*, pág. 28. Las traducciones utilizadas, tanto aquí como en los párrafos siguiente, están tomadas de la edición de Clark mencionada en la nota 17.

término, la diferencia de la progresión y la suma de todos los términos. La primera de estas reglas había sido conocida ya mucho antes por otros escritores; la segunda aparece formulada en la siguiente forma, tan curiosa como complicada:

> Multiplíquese la suma de la progresión por ocho veces la diferencia común, súmese el cuadrado de la diferencia entre el doble del primer término y la diferencia común; tómese la raíz cuadrada de este número, réstese el doble del primer término, divídase por la diferencia común, añádase uno y divídase por dos. El resultado será igual al número de términos.

Aquí, al igual que a todo lo largo del *Aryabhatiya*, no se da ninguna motivación ni justificación para esta regla. Probablemente fue obtenida resolviendo una ecuación de segundo grado, cuyo conocimiento podría muy bien haber venido de Mesopotamia o de Grecia. A continuación de algunos problemas realmente complicados sobre interés compuesto (es decir, sobre progresiones geométricas), el autor del libro trata, en un lenguaje muy florido, del problema bien elemental de calcular el cuarto proporcional a tres números dados:

> En la regla de tres multiplica el fruto por el deseo y divide por la medida. El resultado será el fruto del deseo.

Esta es, desde luego, la regla bien conocida que nos dice que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, entonces $x = \frac{bc}{a}$, donde a es «la medida», b «el fruto», c «el deseo» y x «el fruto del deseo». Realmente puede decirse que la obra de Aryabhata es un «potpourri» de lo sencillo y lo complicado, a la vez que de lo correcto y lo incorrecto. El sabio árabe Al-Biruni caracterizaba, medio milenio más tarde, la matemática hindú como una mezcla de vulgares guijarros y valiosos cristales, descripción que cuadra perfectamente al *Aryabhatiya.*

14. El sistema de numeración hindú

La segunda mitad del *Aryabhatiya* trata de la medida y cálculo de tiempos y de trigonometría esférica, y aquí es donde nos encontramos con un elemento nuevo que iba a dejar una huella permanente en la matemática de las generaciones futuras: el sistema de numeración posicional decimal. No sabemos exactamente de qué manera efectuaba sus cálculos Aryabhata, pero en su afirmación de que «de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede» hay una clara indicación de que en su mente estaba de una manera consciente la aplicación del principio posicional. La idea del «valor local o posicional» había sido ya un elemento absolutamente esencial del sistema de numeración babilónico, y quizá lo que los hindúes hicieron fue darse cuenta de que esta idea era aplicable también al sistema de notación decimal para los números enteros, que ya se estaba usando en la India. El desarrollo histórico de las notaciones numéricas en la India parece haber

seguido más o menos los mismos pasos que nos hemos encontrado en Grecia; las inscripciones procedentes del período cultural más primitivo de Mohenjo Daro muestran al principio un sistema consistente simplemente en el uso de palotes verticales reunidos en grupos, pero hacia la época de Asoka (siglo III a.C.) se usaba ya un sistema parecido al herodiánico. En este esquema nuevo se seguía usando el principio repetitivo, pero se adoptaron a la vez nuevos símbolos para unidades de orden superior, concretamente para cuatro, diez, veinte y cien. Esta manera de escribir los números, llamada escritura Karosthi, fue evolucionando gradualmente para dar lugar a otro sistema de notación, conocido como el de los caracteres Brahmi, que recuerda mucho el cifrado alfabético del sistema jónico griego; cabe preguntarse, por lo tanto, si el hecho de que el cambio de sistema tuviera lugar en la India poco después del período durante el cual los numerales herodiánicos se vieron desplazados por los jónicos en Grecia, fue una simple coincidencia o no.

De los numerales cifrados del sistema Brahmi a nuestra notación moderna para los números naturales hay que superar únicamente dos breves etapas; la primera consiste en reconocer que, utilizando estrictamente el principio posicional, las cifras que representan los nueve primeros números pueden servir también como cifras para los correspondientes múltiplos de diez o, por la misma razón, como cifras para representar los múltiplos correspondientes de cualquier potencia de diez. El reconocer este hecho básico habría convertido de golpe en superfluas todas las cifras Brahmi salvo las nueve primeras. No se sabe cuándo se produjo exactamente esta reducción a nueve cifras y, de hecho, lo más probable es que la transición a la notación «más económica» se hiciera de una manera gradual. Parece seguro, si nos basamos en la evidencia disponible, que este importante cambio tuvo lugar en la India, pero los orígenes de la inspiración para llevarlo a cabo son, en cambio, poco claros. Posiblemente los llamados numerales hindúes fueran el resultado de un desarrollo interno únicamente; quizá se desarrollaron primero en el contexto de los intercambios occidentales de la India con Persia, en cambio, ya que el conocimiento de la notación posicional babilónica pudo haber conducido a una modificación del sistema Brahmi. Es posible también que el nuevo sistema tuviera sus orígenes en los contactos hacia el Este, con China, donde el sistema seudoposicional de barras pudiera haber sugerido la reducción a nueve cifras. Hay incluso una teoría que afirma que esta reducción pudo haber tenido lugar por primera vez en Alejandría, dentro del sistema alfabético griego, y que esta idea debió propagarse más tarde a la India[19]. Durante el período alejandrino tardío, la costumbre griega de escribir las fracciones usuales poniendo el numerador debajo del denominador se invirtió, y ésta es precisamente la forma que adoptaron los hindúes, sin la barra que los separa. Desgraciadamente los hindúes no aplicaron el nuevo sistema de numeración para los enteros al campo de las fracciones decimales, y así se perdió la ventaja potencial más importante del cambio de la notación de tipo jónico.

La referencia específica más antigua a los numerales hindúes data del 662 y se encuentra en los escritos de Severo Sebokt, un obispo sirio. Como consecuencia del cierre de las escuelas filosóficas atenienses ordenado por Justiniano, algunos de los

[19] Véase Harriet P. Lattin, «The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov», *Isis*, 19 (1933), págs. 181-194.

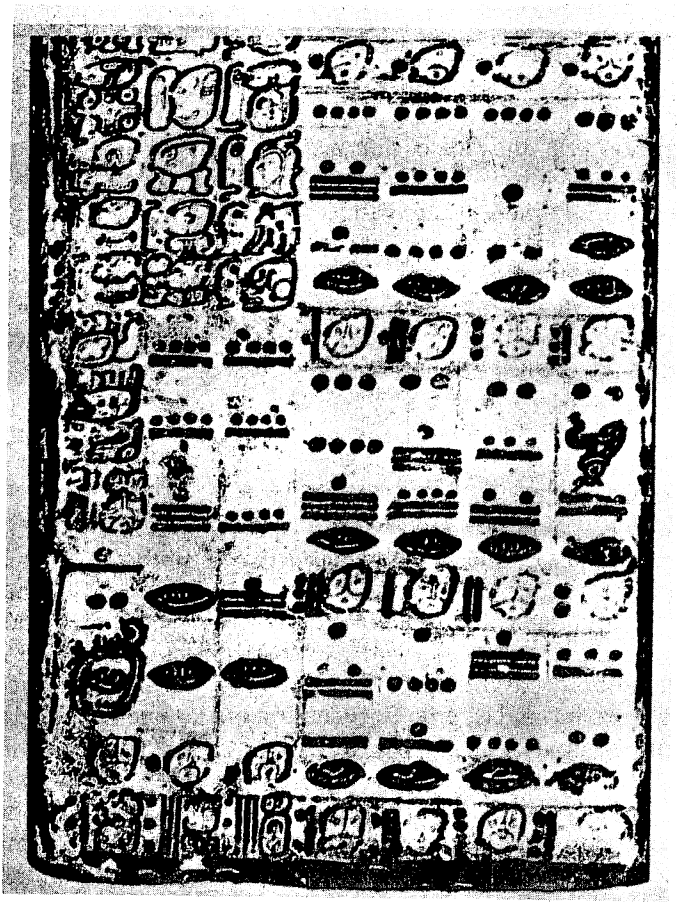
sabios que enseñaban en ellas se trasladaron a Siria, donde establecieron varios centros en los que se cultivaba el saber griego, y Sebokt debió sentirse evidentemente molesto por el desprecio que mostraban algunos de ellos por la cultura y por el saber no griegos, y consideró necesario por lo tanto el recordar a aquellos que «hablaban griego» que «hay otros también que saben algo». Y para ilustrar este punto llama la atención sobre los hindúes y sus «sutiles descubrimientos en astronomía», y especialmente «sus valiosos métodos de cálculo y sus operaciones que sobrepasan toda descripción. Quisiera decir solamente que sus cálculos se hacen por medio de nueve signos»[20]. Sabemos también que por aquella época los numerales hindúes ya se habían estado usando durante bastante tiempo, como revela el hecho de que el primer documento propiamente hindú sea un plato que data del año 595, en el que aparece escrita la fecha del año 346 en notación decimal posicional[21].

15. El símbolo para el cero

Hay que hacer notar que la referencia a *nueve* símbolos y no a *diez* implica evidentemente que los hindúes no habían superado aún la segunda etapa en la transición hacia el sistema de numeración moderno, es decir, la que consiste en la introducción de una notación especial para una posición que falta o, lo que es lo mismo, de un símbolo para el cero. En la historia de la matemática se presentan muchas situaciones anómalas, y no es precisamente la menor la que revela el hecho de que «la primera aparición indudable del cero en la India es en una inscripción del año 876»[22], es decir, más de dos siglos después de la primera referencia que conocemos a los otros nueve numerales. No está demostrado ni siquiera que el número cero (en tanto que idea conceptualmente distinta de un símbolo para una posición vacía) surgiera al mismo tiempo que los otros nueve numerales hindúes. Es muy posible, en cambio, que el cero tuviera su origen en el mundo griego, quizá en Alejandría, y que desde allí se propagase a la India después de que el sistema decimal posicional se hubiera consolidado allí[23].

La historia del cero como símbolo para representar una posición vacía en los sistemas de notación posicionales se complica aún más por el hecho de que esta idea apareció, independientemente según todos los indicios, tanto en el mundo occidental y seguramente mucho antes de la época de Colón, como en el mundo oriental asiático. Los mayas del Yucatán utilizaban una numeración posicional para representar intervalos de tiempo entre distintas fechas de su calendario, generalmente con 20 como base principal y 5 como base auxiliar (que corresponden así al 60 y al 10 usados por los babilonios). Las unidades simples venían representadas por puntos y los grupos de cinco por barras horizontales, de manera que el número 17, por ejemplo, se escribía como  , es decir, $3 \times 5 + 2$. La

[20] Citado de D. E. S Smith, *History of Mathematics*, vol. I, pág. 167.
[21] Véase D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover), pág. 71.
[22] Smith, *History of Mathematics*, vol. II, pág. 69.
[23] Véase, por ejemplo, B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), págs. 56-58.



Fragmento del Códice de Desden, de los mayas, en el que aparecen representados números. En la segunda columna por la izquierda y de arriba abajo pueden verse escritos los numerales 9, 9, 16, 0, 0, que forman el número $9 \times 144.000 + 9 \times 7.200 + 16 \times 360 + 0 + 0 = 1{,}366.560$. En la tercera columna figuran los numerales 9, 9, 9, 16, 0, que forman el número 1.364.360. El original está escrito utilizando los colores negro y rojo. (Tomado de Morley, *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs*, pág. 266.)

ordenación posicional era vertical, con las unidades de tiempo de orden mayor encima y decreciendo hacia abajo, por ejemplo, la expresión  representaba $352 = 17 \times 20 + 12$. Debido al hecho de que este sistema se utilizaba principalmente para contar días dentro de un calendario que consistía en un año de 360 días, la tercera posición se vio usualmente modificada, de manera que no representaba múltiplos de 20×20 como ocurre en un sistema vigesimal puro, sino múltiplos de $18 \times 20 = 360$. No obstante, a partir de esta posición volvía a funcionar permanentemente la base 20. En este sistema de notación posicional, los mayas representa-

ban las posiciones vacías por medio de un símbolo que aparece en diversas formas, pero que recuerda en todas ellas un ojo semiabierto. Así pues, la expresión  representaba en este sistema el número $17 \cdot (20 \times 18 \times 20) + 0 \cdot (18 \times 20) + 13 \cdot 20 + 0$.

Con la introducción del décimo numeral en el sistema de notación hindú para representar el cero, en la forma de un redondo huevo de oca, quedaba completo el moderno sistema de numeración para los enteros. Aunque las formas hindúes medievales de las diez cifras numerales son muy diferentes de las que usamos hoy en día, los principios teóricos del sistema quedaban ya definitivamente establecidos. El nuevo sistema de numeración que llamamos usualmente el sistema hindú no consiste más que en una nueva combinación de tres principios básicos, todos ellos con un origen mucho más antiguo: 1) una base decimal; 2) una notación posicional, y 3) una forma cifrada para cada uno de los diez numerales básicos. Ninguno de estos tres principios se debía, como hemos dicho, originalmente a los hindúes, pero lo que sí se debió a ellos probablemente fue la idea de reunir por primera vez los tres para construir el sistema de numeración moderno.

Puede ser interesante decir, para finalizar, un par de palabras acerca de la forma del símbolo hindú para el cero, que es también el nuestro. Hubo una época en la que se admitía que esta forma redonda tuvo su origen en la letra griega «omicron», que es la inicial de la palabra griega «ouden» o vacío, pero investigaciones más recientes parecen cuestionar tal explicación de su origen. Aunque el símbolo para representar una posición vacía en algunas de las versiones que conocemos de las tablas de cuerdas de Ptolomeo se parece a una «omicron», los símbolos primitivos para el cero en las fracciones sexagesimales griegas son formas redondas decoradas de diversas maneras y que difieren mucho de un simple huevo de oca. Además, cuando se adoptó al fin un sistema decimal posicional en el Imperio Bizantino durante el siglo XV, partiendo del viejo sistema alfabético para los numerales, suprimiendo las 18 últimas letras y añadiendo a las nueve primeras letras un símbolo para el cero, este símbolo adoptó formas muy distintas de la de una «omicron»[24]; a veces se parecía a una *h* minúscula invertida, y otras veces aparecía simplemente como un punto.

16. La trigonometría hindú

El desarrollo de nuestro sistema de notación para los números naturales fue sin duda una de las dos contribuciones más importantes de la India a la historia de la matemática. La otra consistió en la introducción de lo equivalente a la función seno en trigonometría, para reemplazar las tablas de cuerdas griegas; las tablas más antiguas de la relación seno que han llegado hasta nosotros son las que figuran en los *Siddhāntas* y en el *Aryabhatiya*, donde se dan los senos de los ángulos menores o iguales que 90° para 24 intervalos angulares iguales de $3\frac{3}{4}°$ cada uno. Para expresar la longitud del arco y la del seno en términos de la misma unidad, se

[24] Véase O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), pág. 14.

tomaba como radio 3.438 unidades y la circunferencia correspondiente como $360 \cdot 60 = 21.600$ unidades; estos valores implican un valor de π que coincide con el de Ptolomeo hasta la cuarta cifra significativa, pero Aryabhata utiliza en otros contextos el valor $\sqrt{10}$ para π, valor que aparece tan frecuentemente en la India que se le conoce a veces como «el valor hindú» de π.

Para el seno de $3\frac{3}{4}°$ tanto los *Siddhāntas* como el *Aryabhatiya* toman exactamente el número de unidades que contiene el arco, es decir $60 \times 3\frac{3}{4} = 225$; traducido a lenguaje moderno, el seno de un ángulo pequeño es casi igual a la medida del ángulo en radianes, que es justamente lo que hacían los hindúes. Para las entradas restantes de la tabla de senos utilizaban los hindúes una fórmula de recursión que puede expresarse en la forma siguiente: si designamos por S_n el n-ésimo seno en la sucesión que va de $n=1$ a $n=24$, y si la suma de los n primeros senos es R_n, entonces $S_{n+1} = S_n + S_1 - \frac{R_n}{S_1}$. A partir de esta regla uno puede deducir fácilmente que sen $7\frac{1}{2}° = 449$, sen $11\frac{1}{4}° = 671$, sen $15° = 890$, y así hasta sen $90° = 3.438$, que son los valores que aparecen en las tablas de los *Siddhāntas* y del *Aryabhatiya*. Las tablas incluyen además los valores de lo que nosotros llamamos hoy el seno verso de un ángulo, es decir, de $1 - \cos\theta$ en forma trigonométrica moderna, o de $3.438 \cdot (1 - \cos\theta)$ en forma trigonométrica hindú, desde sen vers. $3\frac{3}{4}° = 7$ a sen vers. $90° = 3.438$. Si dividimos los números que figuran en la tabla por 3.438 nos encontramos con resultados que se aproximan mucho a los valores correspondientes en las tablas trigonométricas modernas[25].

17. El método de multiplicación hindú

La trigonometría hindú fue evidentemente una herramienta auxiliar para la astronomía tan útil como precisa. El cómo llegaron los hindúes a resultados tales como la fórmula de recursión para los senos que acabamos de mencionar, nos es desconocido, pero sí se ha sugerido[26] que tales reglas pudieron venir motivadas por un desarrollo intuitivo o empírico del cálculo con ecuaciones en diferencias y de la práctica de la interpolación; de hecho, se suele caracterizar frecuentemente a la matemática hindú en general como «intuitiva», para ponerla en contraste con el severo racionalismo de la geometría griega. A pesar de que es evidente la influencia griega en la trigonometría hindú, los hindúes parecen no haber tenido ocasión de adoptar la geometría griega, o bien no aprovecharon la ocasión, interesados como estaban únicamente en reglas de medición sencillas. Hay muy escasa evidencia en la India del estudio de problemas geométricos que podríamos llamar clásicos, o de curvas distintas de la circunferencia, e incluso las secciones cónicas parecen haber sido ignoradas por los hindúes, lo mismo que por los chinos. En cambio, a los matemáticos hindúes les fascinaban las cuestiones numéricas, ya tuvieran que ver

[25] En Smith, *History of Mathematics*, vol. II, se reproduce la tabla del *Sūrya Siddhānta*.

[26] Véase E. S. Kennedy en su artículo «Trigonometry», en el *Yearbook on History of Mathematics* del National Council of Teachers of Mathematics.

solamente con las operaciones aritméticas usuales o con la resolución de ecuaciones determinadas o indeterminadas. La suma y la multiplicación se hacían en la India casi de la misma manera como las hacemos hoy, excepto en que los hindúes parecen haber preferido al principio escribir los números con las unidades de orden menor a la izquierda, y procedían por lo tanto de izquierda a derecha, utilizando pequeñas pizarras cubiertas de pintura blanca no permanente que se iba quitando al escribir sobre ellas, o bien una tabla cubierta de arena o de harina. Entre los métodos utilizados para multiplicar había uno que se conoce con varios nombres distintos: multiplicación en *gelosia* o multiplicación en celdillas o en cuadrilátero. Para explicar el esquema en el que se basa, lo mejor es recurrir a un par de ejemplos. En el primero de ellos (fig. 12.3) el número 456 aparece

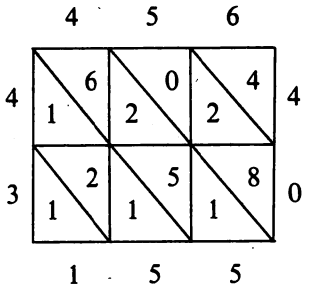


Figura 12.3

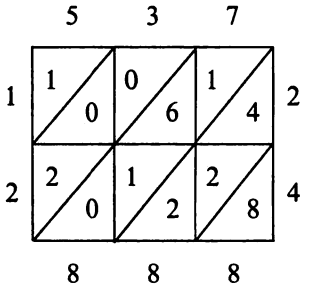
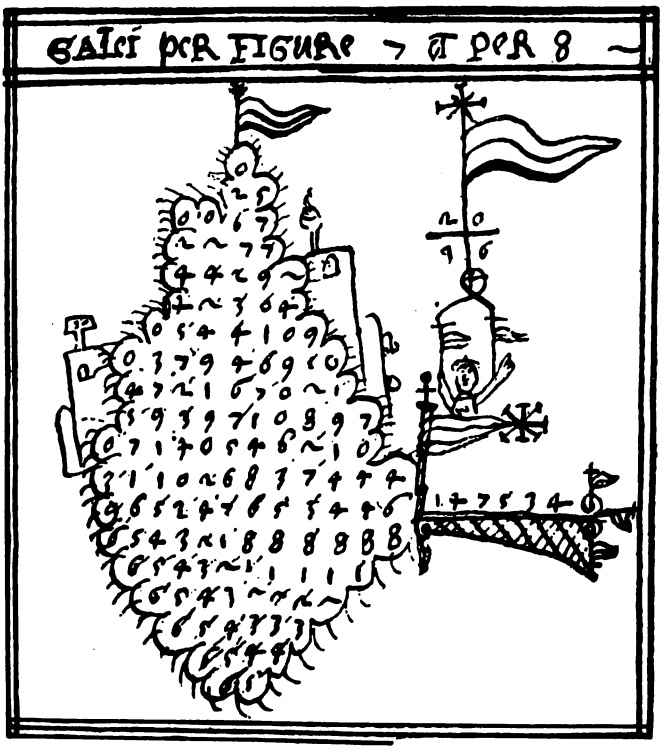


Figura 12.4

multiplicado por 34; el multiplicando está escrito en la parte superior del retículo y el multiplicador a la izquierda, y los productos parciales ocupan las celdas cuadradas, de manera que al sumar los dígitos en diagonal de arriba a la izquierda a abajo a la derecha se obtiene el producto 15.504 que aparece en la parte inferior y derecha del rectángulo. En la figura 12.4 se da otro ejemplo para indicar que los datos se podían disponer también de otras maneras; aquí vemos el multiplicando 537 situado de nuevo en la parte superior y el multiplicador 24 en cambio a la derecha, mientras que el producto 12.888 se lee por la izquierda y la parte inferior del rectángulo. Son posibles aún otras modificaciones de detalle, pero, en su principio fundamental, la multiplicación por *gelosia* es la misma que la nuestra, desde luego, y la distribución de los dígitos por celdillas no es más que un hábil recurso para evitar el trabajo mental de «llevar» de un lugar al siguiente las decenas que van apareciendo en los productos parciales; la única operación de «llevar» que no se evita en este método de multiplicación por retículo es la que resulta al sumar al final los productos parciales diagonalmente.

18. La «división larga»

No sabemos dónde tuvo su origen exactamente el método de multiplicación por *gelosia*, pero parece lo más probable que fuera en la India, puesto que allí se utilizaba ya en el siglo XII como mínimo, y de la India parece ser que se extendió a



División por el método de la galera, del siglo XVI, procedente de un manuscrito no publicado de un monje veneciano. El título de la obra es: «Opus Arithmetica D. Honorati veneti monachj coenobij S. Lauretig», Biblioteca de Mr. Plimpton.

China y a Arabia. De los árabes pasó a Italia durante los siglos XIV y XV, y aquí fue donde recibió el nombre de *gelosia* debido a la semejanza del diagrama con las rejillas de madera que adornaban y protegían las ventanas en Venecia y en otras ciudades italianas. De hecho, la palabra «celosía» parece provenir del italiano *gelosia*, y es de uso común en España, Francia, Alemania, Holanda y Rusia por lo menos, para designar las persianas venecianas. Los árabes, y a través de ellos más tarde los europeos, adoptaron la mayor parte de sus artificios aritméticos de los hindúes, y por lo tanto es muy probable que también provenga de la India el método de «división larga» conocido como el «método de la galera», por su semejanza con un barco con las velas desplegadas. Para ilustrar este método, supongamos la división de 44.977 por 382; en la figura 12.5 aparece hecha esta división por el método moderno, y en la 12.6 por el método de la galera[27]. Este segundo se parece mucho al primero excepto en que el dividendo aparece en el medio, ya que las restas se hacen cancelando los dígitos y poniendo las diferencias

[27] Para una descripción más completa de los innumerables métodos de cálculo que se han utilizado, véase F. A. Yeldham, *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (1926).

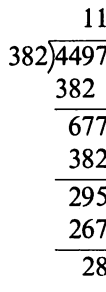


Figura 12.5

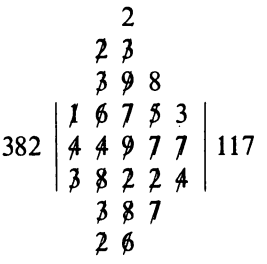


Figura. 12.6

encima de los minuendos y no *debajo*. Así pues, el resto final 283 aparece en la parte superior derecha y no en la parte inferior.

El proceso reproducido en la figura 12.6 es fácil de seguir si tenemos en cuenta que los dígitos de un substraendo dado, como el 2674, o de una diferencia dada, como la 2957, no figuran todos ellos necesariamente en la misma fila, y que los substraendos aparecen escritos por debajo de la línea central y las diferencias por encima; por otra parte, la posición en una columna es importante, pero no la posición en una fila. El cálculo de raíces de números probablemente siguió un esquema análogo al de la «galera», ligado en la época posterior al teorema binomial en la forma del «triángulo de Pascal», pero los matemáticos hindûes no daban nunca explicaciones de sus cálculos ni demostraciones de sus reglas; es posible que las influencias china o babilónica jugaran un papel importante en el proceso de evolución del cálculo de raíces. Se oye decir a veces que «la prueba de los nueves» es un invento hindú, pero parece que los griegos ya conocían esta propiedad mucho antes, aunque no la usaron de una manera general, y que este método se popularizó solamente con los árabes hacia el siglo XI.

19. Brahmagupta

Los últimos párrafos pueden haber dejado la impresión injustificada de que en la matemática hindú hubo un alto grado de uniformidad, puesto que varias veces hemos calificado diversos desarrollos simplemente como «de origen hindú», sin especificar el período al que corresponden. El problema está precisamente en que la cronología hindú es muy insegura. Por poner sólo un ejemplo, el material que aparece en el importante manuscrito de Bakshali, que contiene una aritmética anónima, data, según algunos historiadores, del siglo III o IV; según otros, del siglo VI; según otros, del siglo VIII o IX o más tarde aún, y hay incluso opiniones que mantienen que puede no ser ni siquiera de origen hindú[28]. Nosotros hemos situado la obra de Aryabhata alrededor del año 500, pero esta fecha no es segura, ya que

[28] Véase Florian Cajori, *A History of Mathematics* (1919), págs. 84-85; D. E. Smith, *History of Mathematics*, vol. I, pág. 164; Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, vol. I, pág. 59.

hubo dos matemáticos con el mismo nombre de Aryabhata, y no podemos atribuir con toda seguridad los resultados a nuestro Aryabhata, el más viejo. La matemática hindú presenta problemas históricos más difíciles de resolver que la matemática griega, debido a que los autores hindúes raramente mencionan a sus predecesores, a la vez que muestran una sorprendente independencia en sus planteamientos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, que Brahmagupta (*fl.* 628), que vivió en la India central algo más de un siglo después que Aryabhata, tiene muy poco que ver con su antecesor que había vivido en la región oriental de la India. Brahmagupta menciona dos valores de π, el «valor práctico» 3 y el «valor exacto» $\sqrt{10}$, pero no menciona en cambio el valor más aproximado de Aryabhata, y en la trigonometría que incluye su obra más conocida, el *Brahmasphuta Siddhānta*, adopta como radio del círculo el valor 3.270 en vez del 3.438 de Aryabhata. En un aspecto al menos sí se parece a su predecesor, y es en la mezcla indiscriminada de resultados correctos e incorrectos. Brahmagupta calcula el «área bruta» de un triángulo isósceles multiplicando la mitad de la base por uno de los lados iguales; para el triángulo escaleno de base 14 y lados 13 y 15 calcula el «área bruta» multiplicando la mitad de la base por la media aritmética de los otros dos lados. En cambio, para hallar el área «exacta» utiliza la fórmula de Arquímedes-Herón. Para el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo da lo equivalente al resultado trigonométrico correcto $2R = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$, pero esto no es, desde luego, más que una reformulación de un resultado conocido ya por Ptolomeo en su lenguaje de cuerdas. El resultado quizá más bello en la obra de Brahmagupta es su generalización de la «fórmula de Herón» para calcular el área de un cuadrilátero; esta fórmula, $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, donde a, b, c, d, son los lados del cuadrilátero y s el semiperímetro, aún lleva su nombre, pero la gloria de este descubrimiento queda un tanto empañada por su fracaso en darse cuenta de que tal fórmula sólo es correcta en el caso de un cuadrilátero *cíclico*[29]. La fórmula correcta para un cuadrilátero arbitrario es la $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha}$, donde α es la semisuma de dos ángulos opuestos en el cuadrilátero. Brahmagupta da también como regla para hallar el «área bruta» de un cuadrilátero la fórmula prehelénica que consiste en multiplicar las medias aritméticas de los dos pares de lados opuestos, y así, por ejemplo, para un cuadrilátero de lados $a=25$, $b=25$, $c=25$, $d=39$, da como «área bruta» el valor 800.

20. La fórmula de Brahmagupta

Las contribuciones de Brahmagupta al álgebra son mucho más importantes que sus reglas para el cálculo de áreas, ya que nos encontramos aquí con soluciones

[29] Puede verse una demostración de esta fórmula en R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York, Houghton Mifflin, 1929), págs. 81-82.

generales de ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa; de hecho, la primera vez que aparece sistematizada la aritmética de los números negativos y del cero es en la obra de Brahmagupta. Reglas esencialmente equivalentes a las que controlan las operaciones aritméticas con magnitudes negativas aparecían ya en los teoremas del álgebra geométrica de los griegos, pero referidas siempre a propiedades de la operación de *restar*, tales como, por ejemplo, $(a-b)\cdot(c-d)=ac+bd-ad-bc$, pero a los hindúes corresponde el mérito de haber dado un paso decisivo al convertir estas reglas en reglas *propiamente numéricas* acerca de números positivos y negativos. Además, aunque los griegos tuvieron un concepto de la nada o el vacío, no lo interpretaron nunca como un número, tal como hicieron los hindúes. Sin embargo, es justamente en este contexto donde Brahmagupta vuelve a estropear un poco las cosas afirmando que $0:0=0$, mientras que en la cuestión clave acerca del valor del cociente $a:0$, para $a\neq 0$, simplemente no se pronuncia:

> Positivo dividido por positivo, o negativo por negativo, es afirmativo. Cifra dividido por cifra es nada. Positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por afirmativo es negativo. Positivo o negativo dividido por cifra es una fracción que la tiene por denominador[30].

Hay que decir también que los hindúes consideraban igualmente como números las raíces irracionales de otros números, cosa que no hicieron nunca, desde luego, los griegos. Este paso supuso una ayuda enorme para el álgebra, y los matemáticos hindúes han sido muy elogiados por decidirse a adoptar esta medida, pero hay que recordar, no obstante, que en este caso la contribución hindú fue el resultado de una inconsciencia de tipo lógico más que de una profundidad matemática. Ya hemos visto que los matemáticos hindúes carecieron de una distinción clara entre los resultados exactos y los inexactos, y en consecuencia era lo más natural que no tomaran en consideración seriamente las diferencias profundas entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Para ellos no había ningún impedimento en aceptar los números irracionales, y las generaciones posteriores siguieron su mismo camino de una manera alegre e ingenua, hasta que en el siglo XIX consiguieron al fin los matemáticos fundamentar el sistema de los números reales sobre una base sólida.

La matemática hindú consistió, como hemos dicho ya, en una mezcla de bueno y malo, pero parte de lo bueno fue extraordinariamente bueno, y a este respecto Brahmagupta merece que no se le regateen elogios. El álgebra hindú es notable especialmente por su desarrollo del análisis indeterminado, al que Brahmagupta mismo hizo varias contribuciones; para mencionar sólo una, nos encontramos en su obra con una regla para la formación de ternas pitagóricas expresada en la forma $m, \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{m-n}, \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{m+n}$, aunque ésta sea solamente una forma modificada de la

---

[30] Véase H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (1817).

vieja regla babilónica que Brahmagupta pudo muy bien conocer. La fórmula de Brahmagupta del área para cuadriláteros, que hemos comentado más arriba, la utilizaba junto con las fórmulas

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)}{(ad+bc)}} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{(ab+cd)}}$$

para las diagonales[31], para hallar cuadriláteros cuyos lados, diagonales y áreas fueran todos ellos números racionales. Entre estos cuadriláteros se construye el que tiene por lados $a=52$, $b=25$, $c=39$ y $d=60$, y por diagonales 63 y 56. Brahmagupta da como «área bruta» de este cuadrilátero $1.933\frac{3}{4}$, pese al hecho de que en este caso su fórmula da el área exacta 1.764.

21. La teoría de ecuaciones indeterminadas

Es evidente que Brahmagupta amaba la matemática por sí misma, al igual que muchos de sus paisanos, ya que ningún ingeniero con mentalidad práctica se hubiera planteado nunca cuestiones tales como las que se planteaba Brahmagupta sobre los cuadriláteros. Cabe admirar aún más su actitud matemática al descubrir que él fue aparentemente el primero que dio una solución *general* de la ecuación diofántica lineal $ax+by=c$, con a, b y c enteros. Para que esta ecuación tenga soluciones enteras, el máximo común divisor de a y b debe dividir a c, y Brahmagupta sabía que si a y b son primos entre sí, entonces todas las soluciones de la ecuación vienen dadas por las fórmulas $x=p+mb$, $y=q-ma$, donde m es un entero arbitrario. Brahmagupta estudió también la ecuación diofántica cuadrática $x^2=1+py^2$, que recibe erróneamente el nombre de John Pell (1611-1685) y que apareció por primera vez en el problema de los bueyes de Arquímedes. Esta ecuación de Pell fue resuelta en algunos casos particulares por el matemático Bhaskara (1114-1185), hindú como Brahmagupta.

Es realmente muy notable el mérito de Brahmagupta al dar *todas* las soluciones enteras de la ecuación diofántica lineal, mientras que Diofanto se había contentado con dar una única solución particular de una ecuación indeterminada. Dado que Brahmagupta utiliza en algunos casos los mismos ejemplos que Diofanto, podemos ver de nuevo reforzada la evidencia de una influencia griega en la India, o bien la posibilidad de que ambos hicieran uso de una fuente común, verosímilmente de la antigua Babilonia. Un detalle interesante a subrayar es el de que el álgebra de Brahmagupta es sincopada como la de Diofanto: la suma se indica por una simple yuxtaposición, la resta colocando un punto sobre el substraendo, y la división escribiendo el divisor debajo del dividendo como en nuestra notación para las fracciones, pero sin la barra separadora. Las operaciones de multiplicación y de «evolución» (o de extracción de raíces), así como las cantidades incógnitas, vienen representadas por medio de abreviaturas de las palabras correspondientes.

[31] Véase Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), págs. 202-203, para un esbozo de demostración de estas fórmulas.

22. Bhaskara

La India produjo un cierto número de matemáticos medievales tardíos, pero nosotros sólo vamos a ocuparnos aquí de la obra de uno de ellos, Bhaskara (1114-*ca.* 1185), el matemático más importante del siglo XII y el que completó algunos de los huecos de la obra de Brahmagupta, como hizo al dar una solución de la ecuación de Pell y al enfrentarse con el problema de la división por cero. Aristóteles ya había hecho observar que no hay ninguna razón en la que un número tal como el cuatro exceda al número cero[32], pero lo cierto es que la aritmética del cero no formó parte de la matemática griega, y Brahmagupta no se había pronunciado sobre la división de un número distinto de cero por cero. Así pues, la primera vez que nos encontramos con la afirmación de que tal cociente es infinito es en el *Vija-Ganita* de Bhaskara:

> Proposición: Dividendo 3. Divisor 0. Cociente la fracción $\frac{3}{0}$. Esta fracción de la que el denominador es cifra se llama cantidad infinita. En esta cantidad que consiste en lo que tiene cifra como divisor, no hay alteración posible por mucho que se añada o se extraiga, lo mismo que no hay cambio en Dios infinito e inmutable.

Esta proposición suena muy prometedora, pero inmediatamente a continuación se revela una falta de entendimiento claro de la situación por parte de Bhaskara al afirmar que $\frac{a}{0}\cdot 0=a$.

Bhaskara fue el último matemático medieval importante de la India, y su obra representa la culminación de las contribuciones hindúes anteriores a su época. En su tratado más conocido, el *Lilavati*, reunió Bhaskara problemas diversos procedentes de Brahmagupta y de otros matemáticos, añadiéndoles nuevas observaciones de su propia cosecha. El título mismo del libro puede ser tomado como un buen ejemplo de la calidad desigual del pensamiento hindú, al menos desde un punto de vista occidental, ya que el nombre al que se reduce el título es precisamente el de la hija de Bhaskara que, según la leyenda, perdió la oportunidad de casarse debido a la confianza de su padre en sus predicciones astrológicas. Bhaskara había calculado que su hija sólo podría casarse en condiciones favorables a una hora concreta de un día determinado; el día que había de ser su afortunado casamiento la impaciente muchacha se encontraba observando atentamente la clepsidra, inclinada sobre ella, mientras se iba acercando la hora de su boda, cuando de pronto cayó al agua inadvertidamente una de las perlas de su tocado, obstruyendo la salida del agua de la clepsidra. Como era de esperar, antes de que se advirtiera el desgraciado accidente había transcurrido ya la hora propicia, y el padre, para tratar de consolar a la desdichada muchacha, puso su nombre al libro que comentamos.

23. El *Lilavati*

El *Lilavati*, lo mismo que el *Vija-Ganita*, contiene numerosos problemas que tratan de los temas favoritos de los hindúes: ecuaciones lineales y cuadráticas, tanto

[32] Véase C. B. Boyer, «An Early Reference to Division by Zero», *American Mathematical Monthly*, 50 (1943), págs. 487-491.

determinadas como indeterminadas, simples problemas de medida de áreas, progresiones aritméticas y geométricas, raíces, ternas pitagóricas y otros. El problema del «bambú roto», popular también en China e incluido ya por Brahmagupta, aparece aquí en la forma siguiente: Si un bambú de 32 codos de altura ha sido roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 16 codos de su base, ¿a qué altura sobre el suelo se produjo la fractura? Otro problema en el que se utiliza el teorema de Pitágoras es el siguiente: Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?

Estos dos problemas ilustran muy bien el carácter heterogéneo del *Lilavati*, puesto que, a pesar de su aparente semejanza y del hecho de que se pida una única solución, uno de los problemas es determinado y el otro indeterminado. Al tratar del círculo y de la esfera, no consigue tampoco el *Lilavati* distinguir entre resultados exactos y sólo aproximados; el área del círculo, por ejemplo, se expresa correctamente como un cuarto de la circunferencia por el diámetro, y el volumen de la esfera como un sexto del producto del área por el diámetro, pero en cambio Bhaskara sugiere como razón de la circunferencia al diámetro o bien $\frac{3927}{1250}$ o bien el «valor bruto» $\frac{22}{7}$. El primero es equivalente a la razón que menciona, pero no utiliza, Aryabhaka, pero nada nos hace sospechar, ni en Bhaskara ni en ningún otro matemático hindú, que fueran conscientes de que todas las razones propuestas eran solamente aproximaciones. Sin embargo, Bhaskara se apresura a condenar severamente a sus predecesores por haber utilizado las fórmulas de Brahmagupta para el área y las diagonales de un cuadrilátero en general, basándose en su acertada observación de que un cuadrilátero no queda unívocamente determinado por sus lados. Parece evidente, en cambio, que no se dio cuenta de que las fórmulas en cuestión sí que son correctas para todos los cuadriláteros cíclicos.

Ya hemos dicho que muchos de los problemas de Bhaskara que aparecen en el *Lilavati* y en el *Vija-Ganita* provienen de fuentes hindúes anteriores, y por lo tanto no constituye una sorpresa el ver al autor mostrando un gran dominio de la situación al tratar problemas de análisis indeterminado. Por lo que se refiere a la ecuación de Pell $x^2 = 1 + py^2$, de la que ya se había ocupado anteriormente Brahmagupta, Bhaskara da soluciones particulares para los cinco valores del parámetro $p = 8, 11, 32, 61$ y 67; para la ecuación $x^2 = 1 + 61y^2$, por ejemplo, da la solución $x = 1.776_1319.049$, $y = 22_1615.390$. Esto constituye sin duda una verdadera hazaña de cálculo, y sólo comprobar que la solución es correcta pondrá a prueba ya la paciencia del lector.

Los libros de Bhaskara están llenos, por otra parte, de ejemplos variados de problemas diofánticos[33].

---

[33] Puede verse una exposición muy completa de la obra de Bhaskara en J. F. Scott, *A History of Mathematics* (1958). Véase también Colebrooke, *op. cit.*

24. Ramanujan

Bhaskara murió a finales del siglo XII, y durante varios siglos a partir de esa fecha fueron muy pocos los matemáticos de estatura comparable que aparecieron en la India. Es interesante, sin embargo, hacer notar aquí precisamente que Srinivasa Ramanujan (1887-1920), el genial matemático hindú del siglo XX, tenía la misma habilidad manipuladora en aritmética y en álgebra que nos hemos encontrado en Bhaskara. El matemático inglés G. H. Hardy cuenta que en una de sus visitas a Ramanujan cuando éste estaba hospitalizado en Putney, le comentó a su amigo enfermo que había llegado en un taxi con el anodino número 1.729, a lo que contestó sin dudarlo Ramanujan que este número era realmente un número interesante, ya que es el mínimo número natural que puede representarse de dos maneras distintas como suma de dos cubos, $1^3 + 12^3 = 1.729 = 9^3 + 10^3$. En la obra de Ramanujan encontramos también el aspecto desorganizado, la potencia del razonamiento intuitivo y el desprecio por la geometría que aparecían de manera tan relevante en sus predecesores. Aunque es posible que estas características se desarrollaran quizá en Ramanujan de una manera especial por su formación autodidacta, no podemos por menos que observar lo sorprendentemente distinto que fue el desarrollo de la matemática en la India de como lo había sido en Grecia. Incluso cuando los hindúes adoptaron conocimientos tomados de sus vecinos, reestructuraron estos materiales a su peculiar manera. A pesar de que sus actitudes e intereses estaban más próximas a las de los chinos que a las de los griegos, no compartieron la fascinación que sentían estos últimos por los métodos exactos de aproximación, tales como los que conducen al método de Horner, y a pesar también de que compartían con los mesopotámicos un punto de vista preponderantemente algebraico, tendieron a evitar el sistema de numeración sexagesimal en álgebra. En resumen, los eclécticos matemáticos hindúes adoptaron y desarrollaron solamente aquellos aspectos que les atraían y, desde un cierto punto de vista al menos, puede decirse que fue desafortunado el hecho de que su primer amor haya sido la teoría de números en general y el análisis indeterminado en particular, porque el crecimiento y desarrollo posterior de la matemática no iba a surgir de esos campos; la geometría analítica y el cálculo infinitesimal tuvo raíces griegas y no hindúes, y el álgebra europea moderna provenía de los países árabes más bien que de la India. Hay, sin embargo, en la matemática moderna al menos dos cosas que nos recuerdan lo que debe la matemática a la India en su desarrollo, lo mismo que a tantos otros países. La trigonometría de la función seno proviene verosímilmente de la India, y nuestro sistema de numeración actual para los enteros recibe con toda propiedad el nombre de sistema hindú-árabe para indicar su probable origen en la India y su divulgación a través de Arabia.

Bibliografía

Boyer, C. B.: «Fundamental Steps in the Development of Numeration», *Isis*, **35** (1944), 153-168.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1919).

Clark, W. E. (ed.): *The Aryabhatiya of Aryabhata* (Chicago: Open Court, 1930).

Colebrooke, H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (Londres, 1817).
Datta, B., y A. N. Singh: *History of Hindu Mathematics* (Lahore, 1935-1938, 2 vols.; Bombay: Asia Publishing House, 1962).
Eves, Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Holt, 1964).
Goldschmidt, Victor: *Die Entstehung unserer Ziffern* (Heidelberg: C. Winter, 1932).
Hill, G. F.: *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford, 1915).
Ho Peng-Yoke, artículo sobre Liu Hui, Chu Shih-chieh, Ch'in Chiu-shao, Li Chih, y Yang Hui, en *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's); en prensa.
Juschkewitsch, A. P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964).
Kaye, G. R.: «Indian Mathematics», *Isis*, **2** (1914), 326-356.
Lattin, Harriet P.: «The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov», *Isis*, 19 (1933), 181-194.
Loeffer, Eugen: *Ziffern und Ziffernsysteme* (Leipzig y Berlín: Teubner, 1912).
Menninger, Karl: *Zahlwort und Ziffer* (2.ª ed., Göttingen: Vandenhoeck y Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.).
Mikami, Yoshio: *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913; reed., New York: Chelsea, n.d.).
Morley, S. G.: *An Introduction to the Study of Maya Hieroglyphics* (Washington: Carnegie Institution, 1915).
Needham, Joseph: *Science and Civilization in China* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959), vol. III.
Rajagopal, C. T., y T. V. Vedamurthi Aiyar: «On the Hindu Proof of Gregory's Series», *Scripta Mathematica*, XVII (1951), 65-74. Véase también XV (1949), 201-209, y XVIII (1952), 25-30.
Sarton, George: *An Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 vols. en 5).
Scott, J. F.: *A History of Mathematics* (Londres: Taylor & Francis, 1958).
Smith, D. E.: *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols., reed. en rústica, New York: Dover, 1958).
Smith, D. E., y L. C. Karpinski: *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn, 1911).
Struik, D. J.: «On Ancient Chinese Mathematics», *The Mathematics Teacher*, **56** (1963), 424-432.
Winter, H. J. J.: *Eastern Science* (Londres: John Murray, 1952).
Yeldham, F. A.: *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (Londres: G. G. Harrap, 1926).

Ejercicios

1. Compárese la matemática hindú con la matemática china tanto en lo que se refiere a los temas favoritos como a los niveles de desarrollo.
2. De entre las matemáticas china e hindú, ¿cuál tuvo una mayor influencia en el pensamiento moderno? Explíquese claramente.
3. ¿Qué clase de evidencia hay sobre una posible influencia griega en la matemática hindu? ¿Hay alguna evidencia de influencias hindúes en Grecia? Explíquese.
4. ¿Es posible que las antiguas matemáticas china y babilónica influyeran una en otra? Explíquese.
5. ¿Cómo podría explicarse la indiferencia china e hindú por las secciones cónicas?
6. Descríbanse algunos aspectos en los que el álgebra hindú difiera marcadamente del álgebra griega.

7. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$4x+y+z=40$$
$$2x+3y+z=30$$
$$x+y+2z=20$$

por el método «matricial» de los chinos.

8. Escríbase el número $7_1834.679$ en el sistema de numerales de barras chino y en notación posicional maya.
9. Usese el método de Ch'in Chiu-Shao para hallar la raíz cuadrada de 29.584.
10. Escríbanse, en la notación de Chu Shih-Chieh, los coeficientes del desarrollo de la quinta potencia de un binomio.
11. Justifíquese la regla de Aryabhata para calcular el número de términos de una progresión aritmética, dado el primer término, la diferencia y la suma de los términos.
12. Calcúlese sen 15° por medio de la fórmula de recursión de los *Siddhāntas* y compárese con el valor que aparece en las tablas modernas.
13. Usese el método de la *gelosia* para hallar el producto de 345 por 256.
14. Divídase 56.789 por 273 utilizando el método de la «galera».
15. Compruébese la multiplicación del ejercicio 13 por la regla de los «nueves» aplicada al multiplicando, multiplicador y producto.
16. Deducir la fórmula de Herón para el área de un triángulo de la de Brahmagupta, como caso particular.
17. Demuéstrese que la ecuación $21x+14y=3$ no tiene solución en los enteros.
18. Dedúzcase el teorema de Ptolomeo de las fórmulas de Brahmagupta para las diagonales de un cuadrilátero cíclico.
19. Resolver el problema de Bhaskara del bambú roto.
20. Resolver el problema de Bhaskara del pavo real y la culebra.

*21. Compruébese que el cuadrilátero de Brahmagupta de lados $a=52$, $b=25$, $c=39$ y $d=60$, y diagonales $e=56$ y $f=63$, es un cuadrilátero cíclico.

*22. ¿Es posible que sea cíclico el cuadrilátero de Brahmagupta de lados $a=25$, $b=25$, $c=25$ y $d=39$? Explíquese.

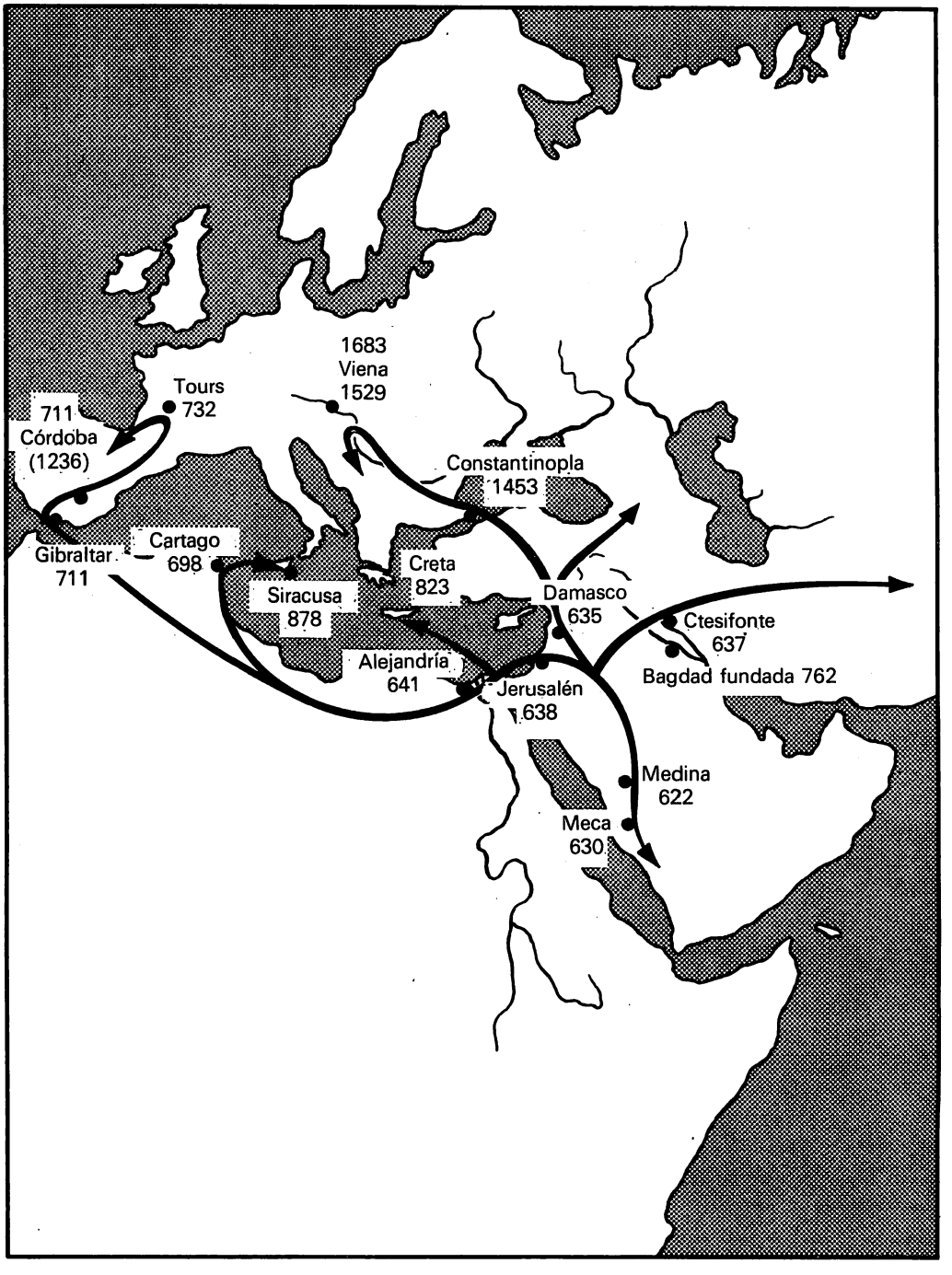
*23. Demuéstrese que la fórmula de Liu Hui es válida para calcular el volumen del tetraedro de vértices (0, 0, 0), (0, 0, a), (b, 0, 0), (c, d, 0). ¿Es válida esta fórmula para todos los tetraedros con un par de aristas opuestas ortogonales? Explíquese.

Capítulo XIII
LA HEGEMONIA ARABE

> ¡Ah!, pero mis Cálculos, según dice la Gente, han hecho cuadrar el Año con el Ritmo de los Hombres, ¿eh? Si esto es así, en el Calendario nos tropezamos con un Mañana que aún no ha nacido, y un Ayer que ya ha muerto.
>
> *Rubaiyat* de *Omar Khayyam*
> (según la versión de Fitzgerald).

1. Las conquistas árabes

Por la época en que Brahmagupta escribía sus tratados matemáticos ya se había derrumbado el Imperio Sabeo de la Arabia Felix, y la península arábiga se encontraba sumida en una profunda crisis. Arabia estaba habitada entonces en su mayor parte por nómadas del desierto, conocidos con el nombre de beduinos, que no sabían leer ni escribir, y en este marco sociopolítico surgió el profeta Mahoma, que nació en la Meca hacia el año 570. Durante sus viajes comerciales conduciendo caravanas, tuvo Mahoma la oportunidad de ponerse en contacto con diversas comunidades judías y cirstianas, y la fusión de sentimientos religiosos que se formó en su mente como resultado de estos encuentros lo llevó a considerarse el apóstol enviado por Dios a su pueblo para dirigirlo. Durante unos diez años predicó y enseñó su doctrina en la Meca, pero el 622, viendo su vida amenazada por un complot, aceptó una invitación para trasladarse a Yatrib, más tarde denominada Medina. Esta «huida», conocida como la Hégira, señala el comienzo de la Era Mahometana, que iba a ejercer durante siglos una poderosa influencia en el desarrollo de la matemática. Mahoma se convirtió en un líder militar a la vez que religioso, y diez años más tarde había conseguido formar un estado mahometano cuyo centro era La Meca, y en el que los judíos y los cristianos, que eran también monoteístas, gozaban de protección y de libertad de culto. En el año 632, mientras planeaba atacar al Imperio Bizantino, murió Mahoma en Medina; esta muerte repentina no logró impedir la expansión del Estado islámico apenas fundado, ya que sus seguidores invadieron los territorios fronterizos con una rapidez inusitada. En unos pocos años cayeron en poder de los conquistadores Damasco, Jerusalén y la mayor parte del valle mesopotámico, y el 641 fue capturada Alejandría, que había sido durante casi mil años el centro matemático del mundo. Hay una leyenda que cuenta que el jefe de las tropas victoriosas preguntó qué debía hacer con los libros de la Biblioteca, a lo que se le contestó, siempre según la leyenda, que debían ser quemados, puesto que si estaban en desacuerdo entonces eran peor que superfluos. Sin embargo, las historias acerca de los baños calentados durante largo tiempo quemando libros son sin duda exageradas. Después de las repetidas depredaciones llevadas a cabo por fanáticos religiosos y militares anteriores y de


1683
Viena
1529
Tours
732
711
Córdoba
(1236)
Constantinopla
1453
Cartago
698
Gibraltar
711
Creta
823
Siracusa
878
Damasco
635
Ctesifonte
637
Alejandría
641
Bagdad fundada 762
Jerusalén
638
Medina
622
Meca
630

los largos períodos de abandono total, probablemente quedaban ya relativamente pocos libros en la biblioteca que fue una vez la más grande del mundo.

Durante más de un siglo los conquistadores árabes lucharon entre sí y con sus enemigos, hasta que hacia el año 750 el espíritu guerrero cedió al fin. Por esta misma época surgió un cisma entre los árabes de Occidente que ocupaban España y Marruecos y los árabes del Oriente que habían establecido, bajo el califa Al-Mansur, su capital en Bagdad, ciudad que pronto iba a convertirse en el centro mundial del desarrollo de la matemática. Sin embargo, el califa de Bagdad no podía ni siquiera asegurarse la obediencia de todos los musulmanes de la mitad oriental de su imperio, a pesar de que su nombre figuraba en las monedas que circulaban a todo lo largo y lo ancho de su reino, y se incluía en las plegarias de sus «súbditos». En otras palabras, la unidad del mundo árabe era más económica y religiosa que política. El árabe no era necesariamente la lengua común, aunque sí era una especie de «lingua franca» de los intelectuales. Por lo tanto, sería mucho más correcto hablar de cultura islámica en vez de cultura árabe, pero nosotros, en una concesión a la costumbre establecida, utilizaremos estos términos de una manera más o menos intercambiable.

Durante el primer siglo de las conquistas árabes se produjo un ambiente de considerable confusión política e intelectual, y probablemente esto fue la causa de las dificultades con que nos encontramos para localizar los orígenes del sistema de numeración decimal moderno. Al parecer los árabes no manifestaron en un principio ningún interés intelectual, y contaban con un escaso bagaje cultural, poco más que un lenguaje, que imponer a los pueblos conquistados. A este respecto podemos ver aquí una especie de repetición de la situación que se dio cuando Roma conquistó el mundo griego, conquista de la cual pudo decirse que, en lo cultural, la Grecia cautiva capturó a la Roma invasora. Hacia el año 750 los árabes estaban listos para repetir la vieja historia, ya que por entonces los conquistadores empezaron a mostrarse deseosos de asimilar la cultura de las civilizaciones que habían invadido. Sabemos que hacia el 766 o antes llegó a Bagdad procedente de la India una obra astronómico-matemática que los árabes conocieron con el nombre de *Sindhind*. Se supone generalmente que esta obra era el *Brahmasphuta Siddhānta*, pero también puede haberse tratado del *Surya Siddhānta*. Unos años más tarde, quizá hacia el 775, se tradujo este *Siddhānta* al árabe, y poco después (*ca.* 780) se tradujo del griego al árabe el *Tetrabiblos*, el tratado astrológico de Ptolomeo. La alquimia y la astrología estuvieron entre los primeros temas que despertaron el interés intelectual de los conquistadores árabes. Lo que se ha llamado el «milagro árabe» podría decirse que no consiste tanto en la sorprendente rapidez con que se levantó un imperio político como en la celeridad con la que asimilaron los árabes la cultura de sus vecinos, una vez que comenzaron a saborearla.

2. La «Casa de la Sabiduría»

Durante el primer siglo del Imperio Musulmán no se produjo ningún desarrollo científico; este período de tiempo (desde el 650 hasta el 750 aproximadamente) fue, de hecho, una especie de «nadir» en el desarrollo de la matemática a lo largo de

toda la historia de la humanidad, ya que los árabes aún no habían conseguido el impulso intelectual necesario, mientras que el interés por el saber había desaparecido casi completamente en el resto del mundo. De no haber sido por el repentino despertar cultural en el Islam durante la segunda mitad del siglo VIII, sin duda se habría perdido mucho más de la ciencia y de la matemática antiguas. En esta época fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos entre ellos judíos y cristianos nestorianos; bajo los califatos de los tres grandes protectores abbasíes de la cultura, Al-Mansur Haroun Al-Raschid y Al-Mamun, se convirtió Bagdad en una nueva Alejandría. Durante el reinado del segundo de estos califas, conocido sobre todo por los cuentos de *Las mil y una noches*, se tradujo al árabe parte de la obra de Euclides, pero cuando los árabes dieron realmente rienda suelta a su pasión por las traducciones fue furante el califato de Al-Mamun (809-833). Se dice que el califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles, y en consecuencia Al-Mamun decidió hacer traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a mano, incluido el *Almagesto* de Ptolomeo y una versión completa al fin de los *Elementos* de Euclides. Mediante tratados suscritos a este fin, se obtuvieron manuscritos griegos del Imperio Bizantino, con el que los árabes mantenían una paz más que precaria.

Al-Mamun fue quien fundó en Bagdad la «Casa de la Sabiduría» (Bait Al-Hikma), comparable al antiguo Museo de Alejandría. Entre los miembros de esta especie de universidad estaba un matemático y astrónomo, Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, cuyo nombre, lo mismo que el de Euclides, iba a hacerse más tarde tan popular durante la baja Edad Media[1]. Este matemático, que debió morir algo antes del año 850, escribió más de media docena de obras astronómicas y matemáticas, de las cuales las primeras estaban basadas probablemente en el *Sindhind* recibido de la India. Además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió Al-Khowarizmi dos libros sobre aritmética y álgebra que jugaron un papel muy importante en la historia de la matemática. El primero de ellos nos ha llegado sólo a través de una copia única de una traducción latina con el título de *De numero indorum* (o «Sobre el arte de calcular hindú»), de la cual el original árabe se ha perdido. En esta obra, que estaba basada presumiblemente en una traducción árabe de Brahmagupta, daba Al-Khowarizmi una exposición tan completa del sistema de numeración hindú, que es él probablemente el responsable de la extendida aunque falsa impresión de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe. Al-Khowarizmi no formula, desde luego, ninguna reclamación de originalidad con respecto al sistema en cuestión, dando por descontado seguramente su origen hindú, pero cuando aparecieron en Europa las primeras traducciones latinas de esta obra, los lectores, que carecían de más información al respecto, comenzaron en seguida a atribuir al autor no sólo la obra, sino también el sistema de numeración expuesto en ella, y así el nuevo sistema de notación vino a ser conocido como «el de Al-Khowarizmi» y, a través de las deformaciones del nombre en la traducción y en la transmisión, simplemente como «algorismi». Por último, este sistema de numeración que hace

[1] Pueden verse dos estudios relativamente recientes sobre la obra de Al-Khowarizmi en *Isis*, 54 (1963), págs. 97-119.

uso de los numerales hindúes vino a ser denominado sin más como «algorismo» o «algoritmo», palabra derivada del nombre de Al-Khowarizmi, y que actualmente significa, de una manera mucho más general, cualquier procedimiento operativo para resolver un problema arbitrario de un cierto tipo, tal como el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números.

3. *Al-jabr*

Por medio de su aritmética, el nombre de Al-Khowarizmi se ha convertido en una palabra de uso común en todos los idiomas, pero hay más; a través del título de su obra más importante, el *Al-jabr wa'l muqābalah*, nos ha transmitido otro término aún más popular, puesto que de este título en árabe se ha derivado la palabra *álgebra*, cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que aprendió más tarde Europa la rama de la matemática que lleva ese nombre. A veces se le llama a Diofanto «el padre del álgebra», pero este título se le aplicaría mejor a Al-Khowarizmi. Es verdad que en dos aspectos al menos la obra de Al-Khowarizmi representa un retroceso respecto a la de Diofanto: en primer lugar es de un nivel mucho más elemental que el que nos encontramos en los problemas de Diofanto, y en segundo lugar, el álgebra de Al-Khowarizmi es completamente retórica, sin ninguna de las sincopaciones que encontramos en la *Arithmetica* de Diofanto o en la obra de Brahmagupta. ¡Incluso los números están escritos con palabras en lugar de con símbolos numerales! Es muy improbable que Al-Khowarizmi conociera la obra de Diofanto, pero sí que ha tenido que estar familiarizado por lo menos con las partes astronómicas y computacionales de la obra de Brahmagupta, y, sin embargo, ni Al-Khowarizmi ni otros matemáticos árabes hacen uso de la sincopación ni de los números negativos. No obstante, el *Al-jabr* viene a estar, por otro lado, más próxima al álgebra elemental moderna que las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que este libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente de las de segundo grado. A los árabes en general les gustaba extraordinariamente poder seguir una argumentación lógica correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática, aspectos ambos en los que ni Diofanto ni los hindúes brillaban precisamente. Los hindúes tenían muy desarrollada una capacidad de asociación y analogía, de intuición y de instinto estético unidos a una imaginación natural, mientras que los árabes tenían una mentalidad más práctica y más a ras de tierra en su enfoque de la matemática.

El *Al-Jabr* nos ha llegado en dos versiones, la árabe y una traducción latina, pero en la traducción latina, que lleva por título *Liber algebrae et almucabola*, falta una parte considerable del manuscrito original árabe. Por ejemplo, la versión latina no tiene prólogo, probablemente por una razón elemental de precaución por parte del traductor, ya que en su prólogo en árabe el autor formula las alabanzas usuales al profeta Mahoma y a Al-Mamun, «Jefe de los Creyentes». Al-Khowarizmi nos dice que este califa le animó a

> ...componer una obra breve sobre el Cálculo por las reglas de la Completación y de la Reducción, limitándose a lo que es a la vez más fácil y más útil en la aritmética, y tal como lo que los hombres necesitan constantemente en los casos de herencias, legados, particiones, pleitos, así como en el comercio y en todas sus relaciones unos con otros, o donde se necesitan mediciones de tierras, excavaciones de canales, cálculos geométricos y otros asuntos de muy diversos tipos[2].

No sabemos con toda seguridad lo que significaban los términos árabes «al-jabr» y «muqābalah», pero la interpretación usual es la misma que se utiliza en el párrafo anterior. La palabra «al-jabr» significaba probablemente algo así como «restauración» o «completación», y parece querer referirse a la transposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación, sumándolos. La palabra «muqābalah» parece referirse a la «reducción» o «compensación», es decir, a la cancelación de término iguales en los dos miembros de la ecuación[3]. Las influencias árabes en España largo tiempo después de la época en que vivió Al-Khowarizmi, se delatan en el *Quijote*, donde la palabra *algebrista* se usa para denominar a un curandero que arregla las articulaciones óseas desajustadas, es decir, un «restaurador».

4. Las ecuaciones cuadráticas

La traducción latina del *Algebra* de Al-Khowarizmi comienza con una breve introducción acerca del principio de notación posicional para los números, y a continuación se expone, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente en presencia los tres posibles tipos de cantidades: cuadrados, raíces, números (es decir, x^2, x y números). Tal como expresaba esta situación Abu-Kamil Shoja ben Aslam, un matemático ligeramente posterior,

> La primera cosa que es necesaria para los estudiantes de esta ciencia [el álgebra] es la de entender las tres especies que menciona Mohammed Ibn Musa Al-Khowarizmi en su libro. Estas son las *raíces*, los *cuadrados* y los *números*[4].

El capítulo I cubre, en tres breves párrafos, el caso de los cuadrados igual a raíces, que podemos expresar en notación moderna como $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ y $5x^2 = 10x$, ecuaciones para las que se dan las soluciones $x = 5$, $x = 12$ y $x = 2$, respectivamente (la raíz $x = 0$ no se reconoce como tal). El capítulo II cubre el caso

---

[2] Véase *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, ed. por L. C. Karpinski (1915), pág. 46. Las traducciones reproducidas en el texto están tomadas de esta edición.

[3] Tenemos que advertir, sin embargo, que esta interpretación ha sido cuestionada por Solomon Gandz, «The Origin of the term "Algebra"», *American Mathematical Monthly*, 33 (1926), págs. 437-440. Gandz cree que «jabr» era una palabra asiria para «ecuación», y que «al-muqābalah» es simplemente una traducción árabe de «al-jabr».

[4] L. C. Karpinski, «The Algebra of Abu Kamil», *American Mathematical Monthly*, 21 (1914), págs. 37-48.

de los cuadrados igual a números, y el capítulo III resuelve el caso de las raíces igual a números, ofreciendo de nuevo tres ejemplos en cada capítulo para cubrir los casos en que el coeficiente del término variable es igual, mayor o menor que uno. Los capítulos IV, V y VI son más interesantes, puesto que se ocupan de la resolución de los tres casos clásicos que presentan las ecuaciones cuadráticas completas: 1) cuadrados y raíces igual a números, 2) cuadrados y números igual a raíces, y 3) raíces y números igual a cuadrados. Las soluciones consisten en «recetas» para «completar el cuadrado», aplicadas a ejemplos concretos. Por ejemplo, el capítulo IV incluye los tres casos particulares $x^2+10x=39$, $2x^2+10x=48$ y $\frac{1}{2}x^2+5x=28$; en cada caso se da solamente la solución positiva. En el capítulo V se da un único ejemplo, la ecuación $x^2+21=10x$, de la que, sin embargo, se calculan las dos raíces, $x=3$ y $x=7$, obtenidas a partir de la regla $x=5\pm\sqrt{25-21}$. Al-Khowarizmi llama la atención en este caso sobre el hecho de que lo que nosotros llamamos el discriminante de la ecuación debe ser positivo:

> Debes comprender también que cuando tomas la mitad de las raíces en esta forma de la ecuación y multiplicas esta mitad por ella misma, si lo que resulta u obtienes de la multiplicación es menor que las unidades mencionadas anteriormente que acompañar al cuadrado, entonces tienes realmente una ecuación.

En el capítulo VI el autor vuelve a dar un único ejemplo, el $3x+4=x^2$, porque, como nos advierte inmediatamente, si el coeficiente de x^2 no es la unidad, entonces se debe reducir en primer lugar la ecuación a esta forma dividiendo ambos miembros por dicho coeficiente, como en el capítulo IV. Una vez más se explican con todo detalle las etapas que hay que seguir para completar el cuadrado, sin más justificación adicional, con lo que el método resulta equivalente a dar la solución $x=1\frac{1}{2}+\sqrt{(1\frac{1}{2})^2+4}$. De nuevo se da una sola raíz, ya que la otra es negativa.

5. El padre del álgebra

Los seis tipos de ecuaciones que hemos mencionado agotan todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva. La exposición de Al-Khowarizmi era tan sistemática y exhaustiva que sus lectores no han debido encontrar ninguna dificultad en dominar el método de resolución. En este sentido, pues, podría dársele con propiedad a Al-Khowarizmi mejor que a Diofanto el nombre de «padre del álgebra». Sin embargo, ninguna rama de la matemática nace ya completamente crecida, y no podemos por menos que preguntarnos de donde vino la inspiración que produjo el álgebra árabe. A esta pregunta no le podemos dar ninguna respuesta categórica, pero el carácter de «recetario» de las reglas y la forma estrictamente numérica de los seis capítulos nos recuerda tanto la matemática babilónica antigua como la hindú medieval. El hecho de que el análisis indeterminado esté completamente excluido, siendo como era uno de los temas favoritos hindúes, así como la ausencia de toda sincopación del tipo de la que utilizaba Brahmagupta, podría sugerir Mesopotamia como una fuente más verosímil que la India. Sin embargo, si continuamos leyendo en el

capítulo VI, nos encontramos con un párrafo que arroja una luz totalmente nueva sobre la cuestión. Al-Khomarizmi continúa:

> Ya hemos dicho lo suficiente, en lo que se refiere a los números, acerca de los seis tipos de ecuaciones. Ahora es necesario, sin embargo, que demostremos geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado con números.

Este pasaje nos suena obviamente más a griego que a babilónico o hindú. Hay pues tres escuelas de pensamiento principales sobre los orígenes del álgebra árabe: una pone el énfasis más bien en las influencias hindúes, otra subraya la tradición mesopotámica o sirio-persa, y la tercera apunta sin duda a una inspiración griega[5]. La verdad de la cuestión probablemente exija combinar en grados diversos las tres teorías que acabamos de mencionar. Los filósofos del Islam admiraron a Aristóteles hasta el punto de imitarlo sin reservas, pero los matemáticos mahometanos, más eclécticos, parecen haber tomado los elementos adecuados en cada momento de diversas fuentes.

6. La fundamentación geométrica

El *Algebra* de Al-Khowarizmi revela en su contenido elementos griegos inconfundibles, pero la primera demostración geométrica con que nos encontramos en ella tiene poco que ver con la matemática clásica griega. Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ traza Al-Khowarizmi un cuadrado *ab* para representar x^2, y sobre los cuatro lados de este cuadrado construye cuatro rectángulos *c*, *d*, *e* y *f*, de $2\frac{1}{2}$ unidades de ancho cada uno. Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados menores de las esquinas (que aparecen punteados en la fig. 13.1), cada uno de los cuales tiene un área de $6\frac{1}{4}$

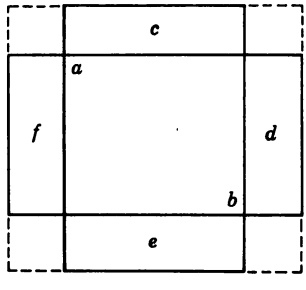


Figura 13.1

unidades. Por lo tanto, para «completar el cuadrado» añadimos cuatro veces $6\frac{1}{4}$ ó 25 unidades, obteniendo así un cuadrado de área total $39 + 25 = 64$ unidades, tal como resulta de la ecuación dada. Por lo tanto, el lado del cuadrado mayor debe

[5] Véase Solomon Gandz, «The Sources of Al-Khowarizmi's Algebra», *Osiris*, 1 (1936), págs. 263-277, así como H. J. J. Winter, «Formative Influences in Islamic Science», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 6 (1953), págs. 171-192.

ser igual a 8 unidades, del cual, restando dos veces $2\frac{1}{2}$ ó 5 unidades, obtenemos $x=3$ como solución, demostrando así que la solución hallada en el capítulo IV era correcta.

Las demostraciones geométricas correspondientes a los capítulos V y VI son algo más complicadas. Para la ecuación $x^2+21=10x$ Al-Khowarizmi dibuja un cuadrado *ab* que representa x^2 y un rectángulo *bg* que representa 21 unidades. Entonces el rectángulo total que comprende el cuadrado *ab* y el rectángulo *bg* debe tener como área $10x$, luego el lado *ag* o *hd* debe medir 10 unidades. Si trazamos entonces las mediatriz *et* de *ag* y de *hd*, la extendemos hasta *c* de manera que $tc=tg$ y completamos los cuadrados *tclg* y *cmne* (fig. 13.2), entonces el área *tb* es igual al

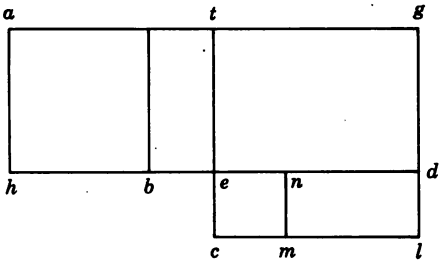


Figura 13.2

área *md*; pero el cuadrado *tl* mide 25 y el gnomon *tenmlg* 21 (ya que es igual al rectángulo *bg*). Por lo tanto, el cuadrado *nc* mide 4 y su lado *ec* 2; como $ec=be$ y $he=5$, tenemos que $x=hb=5-2=3$, lo que demuestra que la solución aritmética dada en el capítulo V es correcta. Para la solución $x=5+2=7$ se da una figura un poco modificada, y finalmente se utiliza una figura análoga para justificar geométricamente el resultado obtenido algebraicamente en el capítulo VI.

7. Problemas algebraicos

Si comparamos la figura 13.2 tomada del *Algebra* de Al-Khowarizmi con las figuras que nos encontramos en los *Elementos* de Euclides en conexión con el álgebra geométrica griega (tales como nuestra fig. 7.7), sacaremos inevitablemente la conclusión de que el álgebra árabe tenía mucho en común con la geometría griega; sin embargo, la primera parte puramente aritmética del *Algebra* de Al-Khowarizmi es completamente ajena al pensamiento griego, evidentemente. Lo que parece haber ocurrido en Bagdad fue justamente lo que se podía esperar de un centro intelectual cosmopolita como era entonces la ciudad. Los sabios árabes mostraron una gran admiración por la astronomía, la matemática, la medicina y la filosofía griegas, temas todos ellos en los que profundizaron llegándolos a dominar lo mejor que pudieron. No obstante, no podían dejar de observar que, como ya había subrayado el obispo nestoriano Sebokt cuando llamó la atención por primera vez el año 662 sobre los maravillosos nueve dígitos de los hindúes, «hay

otros que también saben algo». Es probable que Al-Khowarizmi sea uno de los más típicos ejemplos del eclecticismo árabe que se podrá observar tan a menudo más tarde en otros casos. Lo más seguro es que su sistema de numeración provenga de la India, su solución algebraica sistemática de las ecuaciones de segundo grado puede haber sido un desarrollo procedente de Mesopotamia, y el marco geométrico y lógico con que justifica sus soluciones tiene su origen evidente en Grecia.

El *Algebra* de Al-Khowarizmi contiene más cosas además de la resolución de ecuaciones, material que ocupa aproximadamente la primera mitad del libro. Hay, por ejemplo, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como $(10+2)\,(10-1)$ y $(10+x)\,(10-x)$; aunque los árabes rechazaban las raíces negativas y, en general, todo tipo de magnitudes absolutas negativas, sin embargo, estaban familiarizados con las reglas que rigen las operaciones con números enteros positivos y negativos (considerados éstos como restas indicadas únicamente). Nos encontramos también con otras demostraciones geométricas alternativas de algunos de los seis casos de resolución de ecuaciones que ya hemos visto y, por último, también incluye el *Algebra* una amplia variedad de problemas que sirven para ilustrar los casos tratados en los seis capítulos. Como ilustración del capítulo V, por ejemplo, se plantea Al-Khowarizmi el problema de dividir diez en dos partes tales que «la suma de los productos obtenidos multiplicando cada parte por sí misma sea igual a cincuenta y ocho». La versión original árabe que conocemos, pero no la traducción latina, incluye también una detallada discusión de problemas de herencias tales como el siguiente:

> Muere un hombre dejando dos hijos y legando un tercio de su capital a un extraño. El hombre deja unas propiedades que valen diez dirhams y una reclamación de deuda de diez dirhams a uno de sus hijos.

La respuesta correcta a las partes que corresponderían a cada heredero no es la que se podría esperar, ya que el extraño obtiene sólo cinco dirhams. La razón es la de que, según la ley árabe, un hijo que debe a su padre una cantidad mayor que su porción de herencia puede retener la suma total que debía, siendo considerada incluida en ella una parte que es exactamente su porción de herencia y el resto como un regalo de su padre. En cierta medida parecen haber sido las complicadas leyes que regían la herencia lo que estimuló el estudio del álgebra en Arabia.

8. Un problema de Herón

Algunos de los problemas de Al-Khowarizmi evidencian con toda claridad su dependencia de la corriente matemática que proviene de los babilonios pasando por Herón. Y uno de ellos al menos fue tomado directamente de Herón con gran probabilidad, ya que tanto la figura como las dimensiones son las mismas. Se trata de inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles de base 12 unidades y lados iguales de 10 unidades (fig. 13.3), preguntando el problema la medida del lado de dicho cuadrado. El autor del *Algebra* calcula en primer lugar, con ayuda del

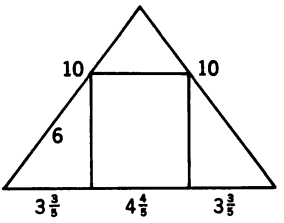


Figura 13.3

teorema de Pitágoras, la altura del triángulo, 8 unidades, así que el área del triángulo es 48. Llamando al lado del cuadrado «la cosa», se puede ver que se obtendrá el cuadrado de «la cosa» restándole al triángulo grande los tres triángulos pequeños que quedan fuera del cuadrado. La suma de las áreas de los dos triángulos menores inferiores es evidentemente el producto de «la cosa» por seis menos la mitad de «la cosa», y el área del triángulo pequeño superior es el producto de ocho menos «la cosa» por la mitad de «la cosa»; de todo ello se obtiene fácilmente la conclusión de que «la cosa» o lado del cuadrado es $4\frac{4}{5}$ unidades. La diferencia principal entre la forma de este problema en Herón y en Al-Khowarizmi es la de que Herón había expresado la solución en términos de fracciones unitarias como $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}$. Las analogías son tanto mayores que las diferencias, que podríamos tomar en este caso como una confirmación del principio general de que en la historia de la matemática la continuidad es la regla más que la excepción. Cuando parece presentarse una discontinuidad, lo primero que debemos pensar es que el aparente salto posiblemente se explique por la pérdida de documentos intermedios.

9. Abd Al-Hamid Ibn-Turk

Se suele admitir que el *Algebra* de Al-Khowarizmi es cronológicamente la primera obra árabe sobre el tema, pero recientemente se ha publicado en Turquía un libro que plantea algunas dudas sobre esto. Se ha encontrado el manuscrito de una obra escrita por Abd Al-Hamid Ibn-Turk y titulada «Sobre las necesidades lógicas en las ecuaciones mixtas», que debía formar parte de un libro sobre *Al-jabr wa'l muqābalah*, evidentemente muy parecido al de Al-Khowarizmi y publicado más o menos por la misma época, posiblemente incluso antes. Los capítulos de las «Necesidades lógicas» que han llegado hasta nosotros dan exactamente el mismo tipo de demostración geométrica que el *Algebra* de Al-Khowarizmi, y en un caso incluso el mismo ejemplo $x^2 + 21 = 10x$. En un aspecto al menos la exposición que presenta Abd Al-Hamid es más completa que la de Al-Khowarizmi, ya que demuestra por medio de figuras geométricas que una ecuación cuadrática no tiene solución cuando su discriminante es negativo. Las analogías entre las obras de estos dos hombres así como la organización sistemática con que nos encontramos en ambas, parecen venir a demostrar que en su época el desarrollo del álgebra ya no era un fenómeno histórico tan reciente como se había venido suponiendo

usualmente[6]; cuando aparecen al mismo tiempo libros de texto sobre una materia en los que se ofrece una exposición ya convencional y bien ordenada, lo más probable es que dicha materia haya sobrepasado ampliamente su etapa juvenil formativa y, de hecho, los sucesores de Al-Khowarizmi solían decir, una vez que habían reducido un problema a la forma de una ecuación, «opérese ahora según las reglas del álgebra y de la almucabala». En cualquier caso, el hecho de que el *Algebra* de Al-Khowarizmi haya sobrevivido puede considerarse como un indicio de que era uno de los mejores textos del típico álgebra árabe de la época. Este libro fue para el álgebra lo que los *Elementos* de Euclides fueron para la geometría, es decir, la mejor exposición elemental disponible hasta los tiempos modernos, aunque hay que decir que la obra de Al-Khowarizmi presentaba un defecto importante que había que eliminar antes de que pudiese cumplir sus fines de una manera efectiva en el mundo moderno: era necesario desarrollar una notación simbólica para reemplazar la forma retórica en que estaba escrita. Esta importante etapa nunca la llevaron a cabo los árabes, salvo en lo que se refiere a la sustitución de los números escritos con palabras del lenguaje ordinario por símbolos numéricos.

10. Thabit Ibn-Qurra

El siglo IX fue un siglo muy importante para la matemática árabe, que produjo no sólo un Al-Khowarizmi en su primera mitad, sino también un Thabit Ibn-Qurra (826-901) en su segunda mitad. Si Al-Khowarizmi puede ser comparado a Euclides en cuanto autor de «elementos», entonces Thabit es el equivalente árabe de Pappus, el comentarista de matemática avanzada. Thabit Ibn-Qurra fue el fundador de una escuela de traductores, especialmente del griego y del sirio, y a él le debemos la monumental tarea de la traducción al árabe de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Eutocio (nótense las importantes ausencias de Diofanto y Pappus en esta lista, autores ambos que evidentemente no fueron conocidos por los árabes al principio, aunque la *Arithmetica* de Diofanto se dio a conocer antes de que finalizara el siglo X). De no haber sido por los esfuerzos de Thabit Ibn-Qurra, habría sido mucho menor de lo que es el número de obras matemáticas griegas que han llegado hasta nosotros; por ejemplo, sólo dispondríamos de los cuatro primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio, en lugar de los siete primeros. Por otra parte, Thabit asimiló de una manera tan completa el contenido de los clásicos que traducía, que muchas veces sugiere modificaciones y generalizaciones. A él se debe una fórmula notable para los «números amigos»: Si p, q y r son números primos, respectivamente de la forma $p=3\cdot 2^n-1$, $q=3\cdot 2^{n-1}-1$ y $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$, entonces $2^n pq$ y $2^n r$ son números amigos, es decir, cada uno de ellos es igual a la suma de todos los divisores propios del otro. Ibn-Qurra da también, lo mismo que había hecho Pappus, una generalización del teorema de Pitágoras que se aplica a todos los triángulos, rectángulos, acutángulos u obtusángulos. Si

[6] Véase el libro de Aydin Sayili, *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (1963).

trazamos desde el vértice A del triángulo ABC rectas AB' y AC' tales que los ángulos $AB'B$ y $AC'C$ sean iguales al ángulo A (véase la fig. 13.4), entonces $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BB'} + \overline{CC'})$. Ibn-Qurra no da ninguna demostración de este teorema, pero puede improvisarse una fácilmente utilizando propiedades de triángulos semejantes. De hecho, este teorema nos ofrece una bella generalización

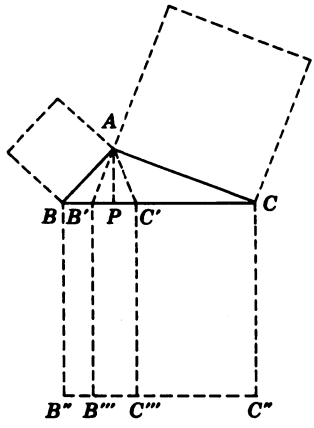


Figura 13.4

del diagrama del «molino de viento» que usa Euclides en su demostración del teorema de Pitágoras. Si el ángulo A es obtuso, por ejemplo, entonces el cuadrado sobre el lado AB es equivalente al rectángulo $BB'B''B'''$, y el cuadrado sobre AC al rectángulo $CC'C''C'''$, con $BB'' = CC'' = BC = B''C''$; es decir, la suma de los cuadrados sobre AB y AC es igual al cuadrado sobre BC menos el rectángulo $B'C'B'''C'''$. En cambio, si el ángulo A es agudo, entonces las posiciones de B' y C' están invertidas con respecto al punto P que es la proyección ortogonal de A sobre BC, y en este caso la suma de los cuadrados sobre AB y AC es igual al cuadrado sobre BC *más* el rectángulo $B'C'B'''C'''$. Y, por último, si A es un ángulo recto, entonces B' y C' coinciden con P, y en este caso el teorema de Ibn-Qurra se reduce al teorema de Pitágoras. Thabit Ibn-Qurra no dibuja, de hecho, las líneas punteadas que aparecen en la figura 13.4, pero sí considera los diversos casos posibles[7].

Otras contribuciones de Ibn-Qurra a la matemática incluyen demostraciones alternativas del teorema de Pitágoras, diversos resultados sobre segmentos de parábolas y de paraboloides, una discusión de los cuadrados mágicos, trisecciones de ángulos y nuevas teorías astronómicas. A veces se acusa a los árabes de ser unos imitadores serviles de los griegos en lo que se refiere a ciencia y filosofía, pero estas acusaciones no están justificadas; Thabit Ibn-Qurra, por ejemplo, añadió resueltamente una novena esfera a las ocho que se utilizaban en las versiones

[7] Véase Aydin Sayili, «Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagoream Theorem», *Isis*, 51 (1960), págs. 35-37. Véase también *Isis*, 55 (1964), págs. 68-70, y 57 (1966), págs. 56-66.

simplificadas de las teorías astronómicas de Aristóteles y Ptolomeo, y en lugar de la precesión de los equinoccios de Hiparco en una dirección o en un sentido único, propuso una «trepidación de los equinoccios» mediante un tipo de movimiento alternativo. El hecho mismo de poner en cuestión puntos importantes de la astronomía griega pudo muy bien haber sido un factor decisivo que preparase el camino para la revolución astronómica inaugurada más tarde por Copérnico.

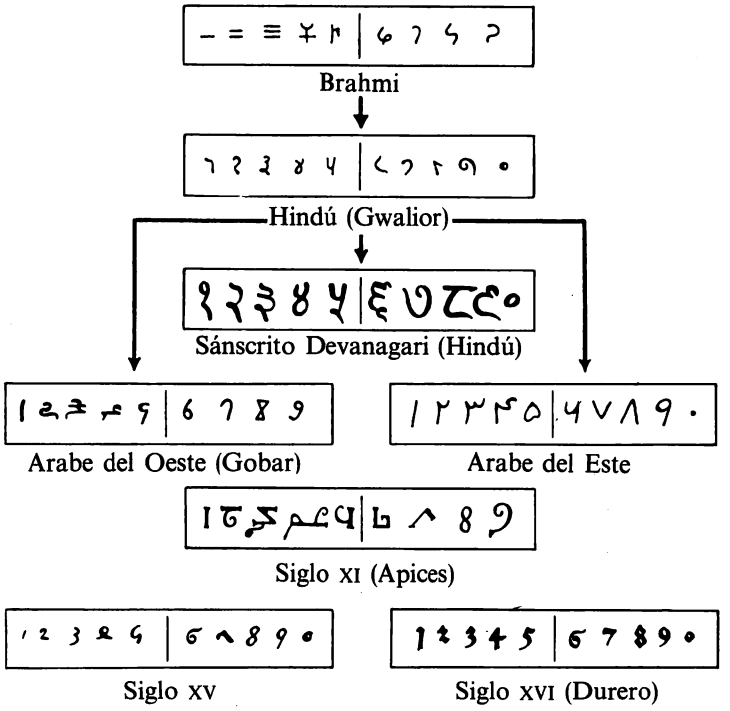
11. Los numerales árabes

Ya hemos dicho varias veces que los árabes asimilaron con gran rapidez la cultura de los pueblos vecinos conquistados por ellos; habría que subrayar también que dentro de los extensos confines del Imperio Arabe vivían pueblos de orígenes étnicos muy variados: aparte de los árabes puros había sirios, griegos, egipcios, persas, turcos, bereberes, andalusíes y muchos otros. De ellos la mayoría compartía una religión común, la fe en el Islam, aunque judíos y cristianos gozaban de una gran tolerancia; muchos compartían también un lenguaje común, el árabe, aunque también se utilizaban a veces el griego y el hebreo. A pesar de todo ello no sería lógico esperar un alto grado de uniformidad cultural, puesto que siempre hubo en el mundo árabe una división en facciones muy sensible, y esta división desembocaba a veces en conflictos declarados; el mismo Thabit Ibn-Qurra vivía en una comunidad de caracteres marcadamente griegos, la cual se oponía a sus tendencias proárabes. Estas diferencias culturales se manifestaron ocasionalmente de una manera muy clara en la matemática árabe, tal como ocurre en las obras de los matemáticos de los siglos X y XI Abu'l-Wefa (940-998) y Al-Karkhi o Al-Karagi (*ca.* 1029). En algunas de sus obras ambos utilizaron los numerales hindúes que habían llegado a Arabia junto con la obra astronómica del *Sindhind*, mientras que otras veces adoptaron el sistema de numeración griego alfabético (con las letras árabes sustituyendo a las equivalentes griegas, desde luego). Finalmente los numerales hindúes, muy superiores, ganaron la partida, pero incluso en el círculo de los que usaban la numeración india, la forma de los numerales difería considerablemente. Variaciones en la forma habían sido muy corrientes en la India, desde luego, pero las variantes con que nos encontramos en el mundo árabe son tan sorprendentes que hay teorías que sugieren orígenes completamente distintos para las formas utilizadas en la mitad oriental y en la mitad occidental del mundo árabe. Quizá los numerales de los sarracenos del este provenían directamente de la India, mientras que los numerales de los moros del oeste se derivaron de formas griegas o romanos más antiguas. Sin embargo, lo más probable es que estas variantes hayan sido el resultado de cambios paulatinos que tuvieron lugar en el espacio y en el tiempo puesto que los numerales árabes actuales son completamente distintos de los numerales Devanagari modernos (o «divinos») que aún se usan en la India; a fin de cuentas lo importante en un sistema de numeración son los principios en los que se basa y no la forma concreta de los numerales. Nuestros numerales se suelen llamar árabes a pesar de que se parecen bien poco a los que usan ahora en Egipto, Irak, Siria, Arabia, Irán y otros países de cultura islámica, es decir, los signos ١٢٣٤٥٦٧٨٩٠, y esta denominación de numerales árabes sólo se

debe a que los principios en que se basan los dos sistemas son los mismos, y a que los signos que utilizamos pueden haberse derivado de los árabes. Sin embargo, estos principios en los que se basa el sistema de numeración árabe provenían casi con toda seguridad de la India, y por lo tanto sería más correcto llamar a nuestro propio sistema, sistema hindú o hindú-árabe.

12. La trigonometría árabe

De la misma manera que se dio una competencia entre los sistemas de numeración de origen griego e hindú, también en los cálculos astronómicos hubo en Arabia al principio dos tipos de trigonometría: una la geometría de las cuerdas griega, tal como se encuentra en el *Almagesto*, y la otra basada en las tablas de senos hindúes, tales como las que aparecen en el *Sindhind*. Y también en este caso el conflicto se resolvió con el triunfo de la postura hindú, por lo que en última



Genealogía de nuestros dígitos, según Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer* (Göttingen, Vanderhoek and Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.), vol. II, pág. 233.

instancia la mayor parte de la trigonometría árabe se construyó basada en la función seno. De hecho, además, fue a través de los árabes y no directamente de los hindúes como pasó a Europa la trigonometría del seno. El vehículo de transmisión

primario fue la astronomía de Al-Battani (*ca.* 850-929), más conocido en Europa como Albategnius, aunque Thabit Ibn-Qurra parece haber utilizado el seno quizá algo antes. En su libro con el título *Sobre el movimiento de las estrellas* da Albategnius fórmulas tales como $b = a$ sen $(90° - A)$/sen A (véase la fig. 13.5), en la que aparecen las funciones seno y seno verso, pero por la época de Abu'l-Wefa, un siglo más tarde, la función tangente ya era bien conocida, y así se podía expresar la relación anterior, por ejemplo, de una manera más sencilla como $a = b$ tg A. Aquí nos encontramos ya más en contacto con las ideas básicas de la trigonometría

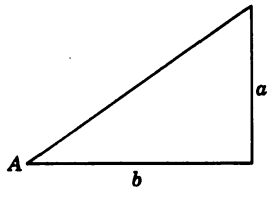


Figura 13.5

moderna, puesto que la función tangente árabe se daba generalmente para el círculo unidad, lo que no ocurría con la función seno de los hindúes. Además, con Abu'l-Wefa la trigonometría adopta una forma más sistemática, en la que se demuestran ya teoremas como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad; aunque la función seno de origen hindú había desplazado el uso de la cuerda de los griegos, no obstante era el *Almagesto* de Ptolomeo lo que motivaba la ordenación lógica de los resultados trigonométricos. El teorema de los senos ya lo conocía esencialmente Ptolomeo, y también aparece implícitamente en la obra de Brahmagupta, pero se suele atribuir a Abu'l-Wefa debido a su formulación clara y precisa del teorema para los triángulos esféricos. Abu'l-Wefa construyó también una nueva tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto de grado con ocho cifras decimales, una tabla de tangentes, e hizo uso en sus cálculos de todas las seis funciones trigonométricas usuales junto con diversas relaciones entre ellas, pero esta utilización de las nuevas funciones no parece haber sido muy seguida durante el período medieval.

A veces han intentado los historiadores atribuir las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante a épocas e incluso a matemáticos concretos, pero lo cierto es que no se ha conseguido ningún tipo de seguridad que apoye estas conjeturas. En la India y también en Arabia se utilizaba una teoría general de longitudes de sombras con respecto a una unidad determinada de longitud o gnomon, para alturas variables del sol sobre el horizonte; no había ninguna unidad de longitud estándar para la varilla o gnomon, aunque a menudo se adoptaba o bien un palmo o la altura media de un hombre. Entonces la sombra horizontal proyectada por el gnomon vertical de longitud fija era lo que nosotros llamamos la cotangente del ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. La «sombra invertida», es decir, la sombra proyectada sobre una pared vertical por una varilla o gnomon de longitud unidad fijado perpendicularmente a la pared, sería en cambio lo que nosotros llamamos la tangente del ángulo de elevación del sol. La «hipotenusa de la sombra», es decir, la distancia del extremo del gnomon vertical

unidad al extremo de su sombra era lo equivalente a nuestra función cosecante, y la «hipotenusa de la sombra invertida» jugaba el mismo papel que nuestra secante. Parece ser que esta tradición relativa a la medida de las sombras estaba ya bien establecida en Asia por la época de Thabit Ibn-Qurra[8], pero que los valores de estas dos hipotenusas (cosecante y secante) raramente se tabulaban.

13. Abu'l-Wefa y Al-Karkhi

Abu'l-Wefa no sólo se ocupó de trigonometría, sino también de álgebra, escribiendo un comentario sobre el *Algebra* de Al-Khowarizmi y, sobre todo, traduciendo del griego uno de los últimos grandes clásicos, la *Arithmetica* de Diofanto. Su sucesor Al-Karkhi debió utilizar sin duda esta traducción para convertirse en un discípulo árabe de Diofanto, ¡pero sin tratar del análisis diofántico! Es decir, Al-Karkhi se interesó más por el álgebra del tipo de la de Al-Khowarizmi que por el análisis indeterminado de los hindúes, pero en cambio, de la misma manera que Diofanto y al revés que Al-Khowarizmi, no se limitó en absoluto a las ecuaciones cuadráticas, pese a lo cual siguió la costumbre árabe de dar demostraciones geométricas para la resolución de las ecuaciones cuadráticas. Como caso particular, se le atribuye a Al-Karkhi la primera resolución numérica de ecuaciones de la forma $ax^{2n}+bx^{n}=c$ (considerando solamente, como siempre, las raíces positivas), en las que la restricción diofántica a números racionales se abandonaba. E iba a ser justamente en esta dirección de intentar resolver de manera algebraica, es decir, por medio de radicales, las ecuaciones algebraicas de grado mayor que dos, en la que iban a tener lugar los primeros desarrollos de la matemática en el Renacimiento.

14. Al-Biruni y Alhazen

La época en que vivió Al-Karkhi, aproximadamente la primera mitad del siglo XI, fue un período muy brillante en la historia de la cultura árabe, y algunos de sus contemporáneos merecen que los mencionemos aquí brevemente, y el hacerlo brevemente no significa que su importancia fuera menor, sino que no eran básicamente matemáticos. Ibn-Sina (980-1037), a quien se conoce mejor en Occidente como Avicena, fue sin duda el sabio y el científico más importante del Islam, pero en sus intereses enciclopédicos la matemática desempeñó un papel menos importante que la medicina y la filosofía. Ibn-Sina hizo una traducción de Euclides y dio una explicación de la regla de los nueves (por lo que a veces se le atribuye esta regla a él indebidamente), pero se le suele recordar más bien por sus aplicaciones de la matemática a la astronomía y a la física. Si podemos considerar a Avicena como el protagonista más importante de la reconciliación del saber griego con el pensamiento islámico, a su contemporáneo Al-Biruni (973-1048) le

[8] Véase E. S. Kennedy, «Overview on Trigonometry», en el *Yearbook on History of Mathematics* del National Council of Teachers of Mathematics.

corresponde el mérito de haber familiarizado a los árabes con la matemática y la cultura hindúes por medio de su libro muy conocido y titulado *La India*. Viajero infatigable y pensador crítico, nos da en esta obra una visión personal favorable, un tanto cándida, incluyendo entre otras muchas cosas una descripción detallada de los *Siddhāntas* y del principio posicional del sistema de numeración. Nos dice también que Arquímedes ya conocía la fórmula de Herón, y da una demostración de esta fórmula y de la análoga de Brahmagupta para el cuadrilátero, insistiendo de pasada, correctamente, en que esta última sólo se aplica a los cuadriláteros cíclicos. Al tratar el problema de inscribir un polígono regular de nueve lados en una circunferencia, lo reduce Al-Biruni a resolver la ecuación $x^3 = 1 + 3x$, por medio de la fórmula trigonométrica para cos 3θ, y para esta ecuación da la solución aproximada en forma de fracción sexagesimal 1; 52, 15, 17, 13, lo cual supone una aproximación decimal de más de seis cifras exactas[9]. En otro capítulo sobre las longitudes de los gnomos expone Al-Biruni el método hindú del cálculo de las sombras; la osadía de su pensamiento puede verse en su discusión de si la Tierra gira o no alrededor de un eje, cuestión ésta a la que no da ninguna respuesta concreta; anteriormente parece ser que Aryabhata ya había sugerido la idea de una Tierra girando en el centro del espacio. Al-Biruni hizo también algunas contribuciones a la física, especialmente en sus estudios sobre los pesos específicos y sobre las causas de los pozos artesianos, pero el hecho es que como físico y como matemático fue superado por su contemporáneo Ibn Al-Haitham (965-1039), más conocido en el Oeste como Alhazen. El tratado más importante escrito por Alhazen fue el *Tesoro de la óptica*, un libro que estaba inspirado en la obra de Ptolomeo sobre la reflexión y la refracción y que sirvió de inspiración, a su vez, a los científicos de la Europa medieval y de comienzos de la Era Moderna. Entre las cuestiones que estudia Alhazen en este libro están la estructura del ojo, el aparente aumento de tamaño de la luna cuando se acerca al horizonte y la estimación de la altura de la atmósfera a partir de la observación de que el crepúsculo dura hasta que el sol está aproximadamente 19° por debajo del horizonte. El problema de encontrar el punto de un espejo esférico en el que debe reflejarse la luz procedente de un cierto foco luminoso para incidir en el ojo de un observador, se conoce aún hoy en día como «el problema de Alhazen»; se trata de un «problema sólido» en el viejo sentido griego de la expresión, es decir, resoluble por medio de cónicas, método con el que Alhazen estaba muy familiarizado. También extendió algunos de los resultados de Arquímedes sobre conoides, calculando el volumen engendrado al girar el área limitada por un arco de parábola, el eje y una ordenada, alrededor de la tangente en el vértice.

15. Omar Khayyam

La matemática árabe puede clasificarse de una manera bastante natural en cuatro tipos diferentes: 1) una aritmética que provenía verosímilmente de la India, basada en el principio posicional; 2) un álgebra que, a pesar de sus orígenes

[9] Véase Pierre Dedron y Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (1959), pág. 126.

innegables en Grecia, la India y la antigua Babilonia, adoptó no obstante una forma característicamente nueva y sistemática en manos de los árabes; 3) una trigonometría cuyo contenido sustancial provenía de Grecia, pero a la que los árabes dieron la forma típica hindú y ampliaron con nuevas funciones y relaciones entre ellas, y 4) una geometría que venía directamente de Grecia, pero a la que contribuyeron los árabes con diversas generalizaciones y estudios críticos tales como los relativos al axioma del paralelismo. Con relación a 3) tenemos que añadir que Ibn-Yunus (m. 1008), contemporáneo y paisano de Alhazen (ambos vivieron en Egipto), introdujo la fórmula $2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, que es una de las cuatro fórmulas de transformación «de productos a sumas» que se utilizaron en Europa durante el siglo XVI, antes de que se inventaran los logaritmos, para convertir productos en sumas por el método conocido como «prostaphairesis» (término griego para la suma y la resta). Con respecto a 4) tenemos una importante contribución, aproximadamente un siglo después de Alhazen, por un hombre que en el Este es conocido como científico, pero que en Occidente se le recuerda mejor como uno de los más grandes poetas persas. Se trata de Omar Khayyam (*ca.* 1050-1123), el «fabricante de tiendas», que escribió un *Algebra*[10] que extendía la clásica de Al-Khowarizmi hasta incluir las ecuaciones cúbicas. Siguiendo la tradición de sus predecesores árabes, Omar Khayyam da los dos tipos de soluciones, aritméticas y geométricas, para las ecuaciones cuadráticas; acerca de las ecuaciones cúbicas en general parece haber creído (equivocadamente, como se llegaría a demostrar más tarde, durante el siglo XVI) que era imposible dar soluciones aritméticas, y por lo tanto Omar Khayyam da únicamente soluciones geométricas en estos casos. La idea de utilizar intersecciones de cónicas para resolver ecuaciones cúbicas no era nueva, sino que había sido explotada ya por Menecmo, Arquímedes y Alhazen, pero Omar Khayyam dio el paso decisivo de generalizar el método para cubrir todas las ecuaciones cúbicas que tengan alguna raíz positiva. En una obra anterior, al llegar a una ecuación de tercer grado hacía expresamente Omar Khayyam la observación siguiente: «Esto no puede resolverse por medio de la geometría plana [es decir, usando solamente regla y compás] debido a que contiene un cubo; para resolverlo necesitamos las secciones cónicas»[11].

Para las ecuaciones de grado mayor que tres Omar Khayyam evidentemente no intentó utilizar métodos geométricos análogos, por la sencilla razón de que el espacio no tiene más que tres dimensiones; «lo que llaman los algebristas cuadrado-cuadrado en el tratamiento de las magnitudes continuas es sólo una cuestión teórica que no existe de ninguna manera en la realidad». Los complicados procedimientos que aplicaba Omar Khayyam con justificado orgullo a las ecuaciones cúbicas los podemos formular ahora de una manera mucho más breve y elegante, usando la notación algebraica y los conceptos modernos, como sigue: Sea la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$; si sustituimos en ella x^2 por $2py$ obtenemos $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$, que es la ecuación de una hipérbola,

[10] Véase *The Algebra of Omar Khayyam*, ed. por D. S. Kasir (1931), y también D. J. Struik, «Omar Khayyam, Mathematician», en *The Mathematics Teacher*, 51 (1958), págs. 280-285.

[11] A. R. Amir-Moez, «A Paper of Omar Khayyam», *Scripta Mathematica*, 26 (1963), págs. 323-337, pág. 328.

mientras que la ecuación $x^2 = 2py$ de la sustitución representa una parábola. Está claro, pues, que si representamos la hipérbola anterior y esta parábola en un mismo sistema de ejes de coordenadas, entonces las abscisas de los puntos de intersección de las curvas (si los hay) serán las raíces de la ecuación cúbica dada. Es obvio que podrían haberse utilizado muchos otros pares de secciones cónicas distintos para resolver la cúbica de una manera análoga.

Nuestra exposición de la obra de Omar Khayyam realmente no hace justicia a su genio, puesto que, a falta del concepto de coeficiente negativo, tuvo que dividir el problema en muchos casos distintos según que los números a, b, c, fueran positivos, negativos o cero; además, Omar Khayyam tenía que identificar sus secciones cónicas de una manera específica para cada caso concreto, al no disponer aún en aquella época del concepto de parámetro en general. Por otra parte, no se daban todas las raíces reales de una cúbica, al no admitir las raíces negativas ni tampoco considerar, en general, todos los puntos de intersección de las secciones cónicas. Hay que subrayar también que en las soluciones geométricas de las ecuaciones cúbicas dadas por los griegos, los coeficientes siempre eran segmentos, mientras que en el tratamiento de Omar Khayyam son números concretos. Precisamente una de las contribuciones más fructíferas del eclecticismo árabe en este caso, fue la tendencia a cerrar el antiguo abismo abierto entre el álgebra numérica y el álgebra geométrica. El paso decisivo en esta dirección lo dio Descartes mucho más tarde, pero Omar Khayyam ya se movía por el mismo camino al afirmar que: «Quienquiera que piense que el álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de incógnitas, piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el álgebra y la geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del álgebra son hechos geométricos que están demostrados»[12]. Así pues, al reemplazar la teoría de proporciones geométrica de Euclides por un planteamiento numérico, Omar Khayyam se acercó a la definición de número irracional, y bregó de hecho con el concepto de número real en general[13].

16. El postulado de las paralelas

Omar Khayyam nos dice en su *Algebra* que ha expuesto en algún otro lugar una regla que había descubierto para hallar las potencias cuartas, quintas, sextas y de grado más elevado de un binomio, pero esta obra se ha perdido. Se supone que se refiere, naturalmente, a la distribución de números que conocemos con el nombre de triángulo de Pascal, que según todos los indicios apareció en China hacia la misma época. Tal coincidencia no es fácil de explicar, pero a falta de ninguna otra evidencia tenemos que suponer que se trata de un caso de descubrimiento independiente. Las comunicaciones entre China y Arabia no eran, desde luego, muy intensas en esta época, pero sí existía ya desde antiguo la ruta de

[12] Amir-Moez, *op. cit.*, pág. 329.

[13] Véase D. J. Struik, «Omar Khayyam Mathematician», *The Mathematics Teacher*, 51 (1958), págs. 280-285.

la seda que conectaba China con Persia, y la información científica pudiera haber goteado lentamente a través de ella.

Los árabes se sintieron mucho más atraídos por el álgebra y la trigonometría que por la geometría pura, pero sí que hubo un aspecto de la geometría que ejerció sobre ellos una fascinación especial; se trata del intento de demostrar el quinto postulado de Euclides. Ya incluso entre los griegos este intento de demostrar el postulado en cuestión se había convertido prácticamente en un «cuarto famoso problema de la geometría» y hubo varios matemáticos árabes que continuaron las investigaciones en este sentido. Alhazen comenzó considerando un cuadrilátero trirrectángulo, cuadrilátero que suele conocerse como «cuadrilátero de Lambert» en honor al matemático del siglo XVIII que lo estudió sistemáticamente y creyó haber demostrado que el cuarto ángulo debía ser también un ángulo recto; a partir de este «teorema» sobre el cuadrilátero trirrectángulo se puede demostrar fácilmente el quinto postulado de Euclides. En su «demostración» suponía Alhazen que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a una distancia constante de una recta dada es siempre otra recta paralela a la dada, hipótesis equivalente al postulado de Euclides, tal como se demostró en la época moderna. Omar Khayyam criticó la demostración de Alhazen basándose en el hecho de que Aristóteles había excluido de una manera terminante el uso del movimiento en geometría. Omar Khayyam partió de un cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a su base, cuadrilátero que se suele denominar actualmente como «cuadrilátero de Saccheri» en honor al matemático del siglo XVIII del mismo nombre que estudió sus propiedades e investigó las posibilidades que pueden darse sobre los ángulos superiores del cuadrilátero, que deben ser necesariamente iguales como se puede ver fácilmente. Hay, pues, tres posibilidades: los ángulos superiores pueden ser: 1) agudos, 2) rectos, o 3) obtusos. Las posibilidades 1) y 3) las excluye Omar Khayyam basándose en un principio que atribuye a Aristóteles y que asegura que dos rectas convergentes deben cortarse, lo que supone de nuevo una hipótesis equivalente al postulado del paralelismo de Euclides.

17. Nasir Eddin

Cuando murió Omar Khayyam en el año 1123, la ciencia árabe se encontraba ya iniciando un período de decadencia. Los excesos de una división política y religiosa en numerosas sectas, a veces fanáticas, como viene a ilustrar muy bien el origen de nuestra palabra «asesino» en la secta de los *hasisyyun* consumidores de *hasis* (o *assassins*) hacia el año 1100, podrían estar entre las causas de la decadencia. El Islam ya no volvió a alcanzar nunca el nivel cultural de la época gloriosa de Avicena y de Al-Karkhi, pero lo cierto es que las contribuciones científicas de los mahometanos no terminaron bruscamente después de Omar Khayyam. Durante el siglo XIII y más tarde otra vez durante el XV nos encontramos aún con un par de matemáticos importantes. En Maragha, Nasir Eddin Al-Tusi o At-Tusi (1201-1274), astrónomo de Hulagu Khan, nieto del gran conquistador Gengis Khan y hermano de Kublai Khan, continuó los esfuerzos por demostrar el postulado de las paralelas partiendo de las conocidas tres hipótesis posibles sobre el cuadrilátero de

Saccheri. Su «demostración» se basa en la siguiente hipótesis, que es equivalente de nuevo al axioma de Euclides:

> Si una recta u corta perpendicularmente a otra recta w en el punto A, y si la recta v corta oblicuamente a w en B, entonces las perpendiculares trazadas desde v a u son menores que AB del lado en que v forma un ángulo agudo con w, y mayores del lado en que v forma un ángulo obtuso con w[14].

La obra sobre el problema de las paralelas de Nasir Eddin, el último de los tres precursores árabes de la geometría no euclídea, fue traducida y publicada por Wallis en el siglo XVII, y parece ser que esta obra fue el punto de partida de los desarrollos llevados a cabo por Saccheri durante el primer tercio del siglo XVIII.

Nasir Eddin cultivó también otros de los campos característicos de los intereses árabes, como la trigonometría y la astronomía. Siguiendo las líneas de la obra de Abu'l-Wefa, le corresponde a Nasir Eddin el mérito de haber escrito el primer tratado sistemático de trigonometría plana y esférica, en el que el material se expone ya como si se tratase de una materia independiente en sí misma y no como una simple criada de la astronomía, como había sido el caso tanto en Grecia como en la India; en esta obra se estudian las seis funciones trigonométricas usuales y se dan reglas para resolver los diversos casos de triángulos plano y esféricos. Desgraciadamente la obra de Nasir Eddin tuvo una influencia muy limitada, debido al hecho de que fue poco conocida en Europa. En astronomía, sin embargo, se debe a Nasir Eddin un resultado que puede haber llamado la atención de Copérnico. Los árabes habían adoptado las teorías tanto de Aristóteles como de Ptolomeo para explicar los movimientos celestes, pero al observar que ambas cosmologías entraban en conflicto intentaron reconciliarlas y perfeccionarlas. Y fue en este contexto en el que Nasir Eddin observó que una combinación de dos movimientos circulares uniformes, tales como los que se usaban en el modelo de los epiciclos y deferentes, puede dar lugar a un movimiento rectilíneo alternativo. Es decir, si un punto se mueve con un movimiento circular uniforme en sentido directo sobre el epiciclo, mientras que el centro del epiciclo se mueve uniformemente en sentido retrógrado, con velocidad mitad, a lo largo de un deferente del mismo radio que el epiciclo, entonces el punto describirá un segmento rectilíneo en movimiento alternativo. Dicho aún con otras palabras y de una manera más sencilla, si un círculo rueda sin deslizar sobre la circunferencia de otro círculo de diámetro doble y por el interior, entonces el lugar geométrico de un punto de la circunferencia del círculo menor será un diámetro del círculo mayor. Este «teorema de Nasir Eddin» lo llegaron a conocer o bien lo redescubrieron independientemente Copérnico y Cardano en el siglo XVI[15].

---

[14] Véase Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (New York: Dover, reimpresión, 1955), pág. 10. Véase también D. E. Smith, «Euclid, Omar Khayyam and Saccheri», en *Scripta Mathematica*, 3 (1935), págs. 5-10.

[15] Véase G. B. Boyer, «Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire», *Isis*, 38 (1947).

18. Al-Kashi

La matemática árabe continuó su inevitable decadencia después de Nasir Eddin, pero nuestra exposición de la contribución de la cultura musulmana a esta ciencia no sería razonablemente completa si no hiciéramos referencia a una última figura que corresponde ya a principios del siglo XV. Se trata de Al-Kashi (*ca.* 1436), que fue protegido del príncipe Ulugh Beg, nieto del conquistador mongol Tamerlán. En Samarcanda, donde estableció su corte, hizo construir Ulugh Beg un observatorio, y Al-Kashi formó parte del equipo de científicos que se reunió en torno a este observatorio. Al-Kashi escribió numerosas obras, tanto en árabe como en persa, sobre matemática y astronomía. Es particularmente notable la exactitud de sus cálculos, sobre todo en la resolución de ecuaciones algebraicas por el método llamado de Horner, procedente quizá de los chinos. También puede ser que Al-Kashi adoptase de China la práctica de utilizar fracciones decimales; en realidad, Al-Kashi es una figura muy importante en la historia de la difusión de las fracciones decimales, y hasta tal punto se dio cuenta de la importancia de su contribución a este respecto que se consideró a sí mismo como el verdadero inventor de las fracciones decimales[16]. Aunque en cierta medida ya había tenido precursores, Al-Kashi es quizá el primero en utilizar las fracciones sexagesimales para sugerir al mismo tiempo que las fracciones decimales se prestan igualmente bien a la resolución de problemas cuyos cálculos exigen muchas cifras exactas. No obstante, para el cálculo sistemático de raíces continúa utilizando las fracciones sexagesimales; así, por ejemplo, para ilustrar su método de cálculo de raíces *n*-ésimas, calcula la raíz sexta del número sexagesimal

$$34,\ 59,\ 1,\ 7,\ 14,\ 54,\ 23,\ 3,\ 47,\ 37;\ 40$$

Se trata de un verdadero «tour de force» de cálculo, siguiendo los pasos usuales en el método de Horner: acotación de la raíz, reducción de la raíz, y cambio de origen, haciendo todas estas operaciones en un esquema parecido a una de nuestras divisiones modernas.

Al-Kashi era evidentemente un virtuoso del cálculo y estaba orgulloso con toda razón de su aproximación de π, que mejoraba todos los valores aproximados dados por sus predecesores. En la línea tradicional árabe de las notaciones alternativas, expresa Al-Kashi su valor para 2π tanto en forma sexagesimal como decimal: la primera de ellas 6; 16, 59, 28, 34, 51, 46, 15, 50 , nos parece ya casi un recuerdo del pasado, mientras que la segunda, 6,2831853071795865, viene a anunciar, en un cierto sentido, el futuro uso de las fracciones decimales. Ningún matemático consiguió emular la exactitud de este verdadero récord de cálculo

[16] Véase Abdul-Kader Kakhel, *Al-Kashi on Root Extraction* (1960), pág. 2. Una exposición excepcionalmente extensa de algunas de las obras de Al-Kashi puede verse en P. Luckey, «Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik», *Mathematische Annalen*, 120 (1948), págs. 217-274. Recientemente se ha sugerido que el uso de las fracciones decimales en Arabia se halla ya en una obra de Abu-Al-Hasan Ahmad Ibn-Ibrahim Al-Uqlidisi que data del año 952-953. Véase A. S. Saidan, «The Earliest Extant Arabic Arithmetic», *Isis*, 57 (1966), págs. 475-490.

hasta finales del siglo XVI. El siguiente recurso mnemotécnico puede ayudar a recordar de memoria una buena aproximación de π: «How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechnics»[17]. El número de letras de cada palabra da los valores de los sucesivos dígitos del valor de π dado por Al-Kashi bajo la forma de 2π, 3,14159265358979. En Al-Kashi nos encontramos también con el teorema binomial en la forma del «triángulo de Pascal», un siglo más o menos después de su publicación en China, y también un siglo antes aproximadamente de que apareciera impreso en libro en Europa.

Con la muerte de Al-Kashi hacia el año 1436 podemos dar por cerrada nuestra exposición de la matemática árabe, ya que el colapso cultural del mundo musulmán fue aún más completo que la desintegración política de lo que había sido un gran imperio. El número de matemáticos árabes importantes anteriores a Al-Kashi fue mucho mayor de lo que puede deducirse de nuestro resumen, ya que nos hemos concentrado sólo en las figuras más importantes[18], pero después de él el número es despreciable. Fue una afortunada coincidencia el que cuando la ciencia árabe empezaba a declinar, el clima intelectual en Europa estaba ya preparado para recibir el legado del saber heredado de la Antigüedad. A veces se afirma que los árabes hicieron poco más que poner la ciencia griega a conservar «en el frigorífico» hasta que Europa estuviera en condiciones de recibirla, pero creemos que el panorama que hemos recorrido en este capítulo demuestra que, por lo menos en el caso de la matemática, la tradición transmitida al mundo latino durante los siglos XII y XIII era considerablemente más rica que la que se encontraron los conquistadores árabes casi analfabetos en el siglo VII.

Bibliografía

Amir-Moez, A. R.: «A Paper of Omar Khayyam», *Scripta Mathematica*, 26 (1963), 323-337.

Cajori, Florian: *History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1919).

Dedron, Pierre, y Jean Itard: *Mathématiques et mathématiciens* (París: Magnard, 1959).

Gandz, Solomon: «The Sources of al-Khowarizmi's Algebra», *Osiris*, 1 (1936), 263-277.

Hill, G. F.: *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford: Clarendon, 1915).

Kakhel, Abdul-Kader: *Al-Kashi on Root Extraction* (Líbano, 1960).

Kasir, D. S. (ed.): *The Algebra of Omar Khayyam* (New York: Columbia Teachers College, 1931).

Karpinski, L. C.: «The Algebra of Abu Kamil», *American Mathematical Monthly*, 31 (1914), 37-48.

—— (ed.): *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* (New York: Macmillan, 1915).

Kennedy, E. S.: «Overview on Trigonometry», *Yearbook on History of Mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics (Washington, D. C.), en prensa.

Levey, Martin (ed.): *The Algebra of Abu Kamil* (Madison, Wis.: University of Wiosconsin Press, 1966).

[17] *Nota del traductor:* Reproducimos la frase en el original inglés puesto que al traducirla desaparecería su carácter. Reglas mnemotécnicas análogas las hay en todos los idiomas.

[18] Véase Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (1900), donde se mencionan más de 500 científicos.

Luckey, P.: «Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik», *Mathematischen Annalen*, 120 (1948), 217-274.
Rosenfeld, B. A., y A. P. Youschkevitch: *Omar Khayyam* (en ruso, Moscú: Izdatelestvo «Nauka», 1965).
Saidan, A. S.: «The Earliest Extant Arabic Arithmetic», *Isis*, 57 (1966), 475-490.
Sánchez Pérez, José: *La aritmética en Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asín, 1949).
Sarton, George: *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 vols. en 5).
Sayili, Aydin: *Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (Ankara, 1962).
——: «Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem», *Isis*, 51 (1960), 35-37.
Smith, D. E.: *History of Mathematics* (Bostn: Ginn, 1923-1925, 2 vols.; reed. en rústica, New York: Dover, 1958).
Smith, D. E., y L. C. Karpinski: *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston, 1911).
Struik, D. J.: «Omar Khayyam, Mathematician», *The Mathematics Teacher*, 51 (1958), 280-285.
Suter, Heinrich: *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (Leipzig, 1900).
Vogel, Kurt (ed.): *Mohammed ibn Musa Alchwarizmis Algorismus* (Aalen: O. Zeller, 1963).
Winter, H. J. J.: «Formative Influences in Islamic Science», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 6 (1953), 171-192.

Ejercicios

1. Compárese, desde el punto de vista de sus consecuencias para la cultura, la conquista árabe de los países vecinos con las conquistas anteriores de Alejandro Magno y de los romanos.
2. Explíquese por qué el *Algebra* de Al-Khowarizmi no contiene ninguna ecuación cuadrática correspondiente al caso en que los cuadrados más las raíces más los números son igual a cero.
3. ¿Cuáles de los numerales utilizados modernamente en Arabia se parecen más a los nuestros? ¿Hay alguna ventaja o alguna desventaja en las formas árabes de los numerales?
4. ¿Fue afortunado o desafortunado para el futuro de la matemática el hecho de que Carlos Martel derrotara y rechazara a los árabes en Tours el año 732? Razónese la respuesta.
5. ¿Cómo podría explicarse el hecho de que a partir de 1500 los árabes ya no hicieron prácticamente ninguna contribución a la matemática?
6. Menciónense algunas partes de la matemática griega que se habrían perdido de no ser por los árabes.
7. Compárense las matemáticas árabe e hindú en lo que se refiere a la forma, contenido, nivel e influencia.
8. Compárense los papeles de la lógica y de la filosofía en la matemática griega y en la árabe.
9. Resolver la ecuación $x^2 + 12x = 64$ utilizando un diagrama geométrico como los usados por Al-Khowarizmi.
10. Compruébese que es correcta la respuesta dada por Al-Khowarizmi y por Herón al problema de inscribir un cuadrado en un triángulo de lados 10, 10 y 12.

11. Demuéstrese el teorema de Thabit Ibn-Qurra sobre los números amigos.
12. Demuéstrese la generalización del teorema de Pitágoras de Thabit Ibn-Qurra.
13. Resolver la cúbica de Al-Biruni $x^3 = 1 + 3x$ hallando la raíz positiva aproximada hasta las centésimas y comprobar que hasta esa aproximación su respuesta es correcta.
14. Demostrar la fórmula de Ibn-Yunus, $2 \cos x \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$.
15. Utilícese la fórmula anterior para convertir en una suma el producto de 0,4567 por 0,5678.
16. Resolver la ecuación $x^3 = x^2 + 20$ de la manera geométrica de Omar Khayyam.
17. Resolver, como en el problema 16, la ecuación $x^3 + x = 20$.
18. Utilizando la estimación calculada por Alhazen de la duración del crepúsculo, y tomando como radio de la Tierra 6.000 km, calcúlese aproximadamente la altura de la atmósfera. (El crepúsculo viene provocado por la reflexión de los rayos del sol en las partículas atmosféricas.)
19. Calcúlese el volumen engendrado al girar alrededor del eje Oy el área limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = a$. ¿Quiénes de entre los griegos y los árabes fueron capaces de resolver este problema?
20. Muéstrese que las tres primeras cifras sexagesimales del valor de 2π dado por Al-Kashi concuerdan con las cinco primeras en notación decimal.
21. Nasir Eddin demostró que la suma de dos cuadrados impares no puede ser un cuadrado. Demuéstrese este teorema haciendo uso de las propiedades de los cuadrados de los números pares e impares.

*22. Como caso especial del problema de Alhazen, considérese un espejo esférico cuya sección máxima viene dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, y supóngase un foco luminoso situado en el punto (0, 3) y el ojo de un observador en el punto (4, 0). Demuéstrese que el punto en el que debe reflejarse la luz en el espejo puede determinarse como intersección de una circunferencia y una hipérbola.

Capítulo XIV
LA EUROPA MEDIEVAL

> El olvido de las matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo.
>
> *Roger Bacon*

1. De Asia a Europa

El tiempo y la historia son, desde luego, totalidades completas y sin suturas, lo mismo que el continuo matemático, y cualquier subdivisión en períodos es obra de la mano del hombre; pero al igual que un sistema de coordenadas puede ser muy útil en geometría, así también la subdivisión de los acontecimientos en eras y períodos resulta ser conveniente en la historia. Para los fines de la historia política se ha solido considerar la caída de Roma en el año 476 como el comienzo de la Edad Media, y la caída de Constantinopla en manos de los turcos en el 1453 como su final. Dejando a un lado la historia política podría ser más adecuado cerrar el período antiguo con el año 524, que es a la vez el año en que murió Boecio y la fecha aproximada en que el abad romano Dionisio Exiguo propuso utilizar la cronología basada en la Era Cristiana, que se ha hecho de uso común desde entonces. Por lo que se refiere a la historia de la matemática, ya indicamos en el capítulo II la razón de nuestra preferencia por el año 529 para señalar el comienzo del período medieval, y propondremos el año 1436, un tanto arbitrariamente, para marcar su final.

La fecha de 1436 es la más probable del año de la muerte de Al-Kashi, importante matemático que ya hemos descrito como una especie de Jano bifacial, a la vez mirando hacia el pasado antiguo y anticipando también en algún sentido los nuevos tiempos. El año 1436 señala además el nacimiento de otro eminente matemático, Johann Müller (1436-1476), más conocido bajo el nombre de Regiomontano, una forma latinizada derivada del nombre de su lugar de nacimiento, Königsberg. En otras palabras, el año 1436 viene a simbolizar el hecho de que durante la Edad Media la mayoría de los matemáticos destacados escribieron en árabe y vivieron en el Asia y en el Africa islámicas, mientras que durante la nueva era que estaba amaneciendo entonces, los matemáticos más importantes escribirían ya en latín y vivirían en la Europa cristiana.

A menudo se ofrece una visión excesivamente simplificada de la Edad Media, que resulta de una presentación de la historia centrada predominantemente en Europa, y por lo tanto tenemos que recordar insistentemente a nuestros lectores que el grueso de la historia de la matemática medieval fue obra de cinco grandes

civilizaciones, que escribieron en cinco lenguas diferentes. En los dos capítulos anteriores hemos expuesto las contribuciones de China, India y Arabia, tres de las cinco culturas medievales más importantes. En este capítulo vamos a estudiar la matemática de las otras dos: 1) el Imperio Bizantino o Imperio Romano de Oriente, con centro en Constantinopla (o Bizancio), donde el idioma oficial era el griego, y 2) el Imperio Romano de Occidente o sus restos, que no tuvo ningún centro especial ni tampoco un único idioma hablado, pero en el que el latín desempeñó el papel de *lingua franca* de los intelectuales.

2. La matemática bizantina

Cuando Justiniano cerró las escuelas filosóficas paganas de Atenas el año 529, los intelectuales se dispersaron y algunos de ellos establecieron su residencia permanente en Siria, Persia u otros lugares. Sin embargo, mientras que algunos de estos sabios se quedaron en el Este, otros regresaron unos años más tarde, con el resultado de que no hubo una discontinuidad importante de la cultura griega en el mundo bizantino. Ya hemos mencionado brevemente la obra de varios sabios griegos del siglo VI: Eutocio, Simplicio, Isidoro de Mileto y Antemio de Tralles; precisamente fue el mismo Justiniano el que encargó a estos dos últimos la construcción del templo de Hagia Sophia. A esta lista de intelectuales y científicos bizantinos tenemos que añadir ahora el nombre de Juan Filopón, que floreció en Alejandría a comienzos del siglo VI y que fue el físico más importante del mundo en su época. Filopón argumentaba en contra de las leyes aristotélicas del movimiento y de la imposibilidad del vacío, proponiendo en cambio la actuación de un cierto tipo de principio de inercia según el cual los cuerpos en movimiento tenderían a seguir moviéndose. Al igual que Galileo más tarde, Filopón negaba que la velocidad adquirida por un cuerpo en caída libre fuera proporcional a su peso:

> Si dejas caer desde la misma altura dos cuerpos, de los que uno es muchas veces más pesado que el otro, verás que las razones de los tiempos necesarios para completar la caída no depende de la razón de los pesos, sino que la diferencia de los tiempos es muy pequeña[1].

Filopón era un científico cristiano (como lo eran también probablemente Eutocio y Antemio) que hizo uso de las fuentes paganas antiguas, y cuyas ideas influyeron más tarde en los pensadores islámicos, en un claro ejemplo de la continuidad de la tradición científica a pesar de las diferencias religiosas y políticas.

Filopón no era, en principio, matemático, pero algunas de sus obras, tales como el tratado sobre el astrolabio, se pueden considerar como de matemática aplicada. La mayor parte de las contribuciones bizantinas a la matemática fueron de un nivel muy elemental y consistieron principalmente en comentarios de los clásicos antiguos. La matemática bizantina representó, más aún que la árabe, una especie de esfuerzo de conservación de todo lo que fuera posible de la Antigüedad hasta que

[1] Citado del libro de Marshall Clagett *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (1959), pág. 546.

el Occidente estuviera preparado para tomar el relevo. Filopón contribuyó a esta tarea por medio de su comentario a la *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco. El pensamiento neoplatónico continuaba ejerciendo una fuerte influencia en el Imperio de Oriente, lo que explica la popularidad de que disfrutó el tratado de Nicómaco. De nuevo en el siglo XI este mismo libro fue objeto de otro comentario, esta vez por Miguel Constantino Psellos (1018-¿1080?), filósofo que vivió en Atenas y en Constantinopla y que contó entre sus discípulos al emperador Miguel VII. Otra de las obras de Psellos, un compendio muy elemental del cuadrivium, gozó de gran popularidad en Occidente durante el período del Renacimiento correspondiente al siglo XVI. Dos siglos más tarde nos encontramos con otro resumen en griego del cuadrivium matemático, obra esta vez de Georgios Pachymeres (1242-1316). La importancia de estos compendios radica solamente en que son los testigos que nos muestran la existencia de una débil corriente de la vieja tradición griega, que continuó desarrollándose en el Imperio de Oriente hasta el final mismo de la época medieval.

Pachymeres escribió también un comentario sobre la *Aritmética* de Diofanto, lo mismo que hizo su contemporáneo Maximos Planudes (¿1255?-1310), un monje griego que fue embajador del emperador Andrónico II en Venecia, lo que nos indica que continuó habiendo algún tipo de contacto intelectual entre el Este y el Oeste. Planudes escribió también un libro sobre el sistema de numeración hindú, que había alcanzado por fin el mundo griego. En Bizancio los numerales alfabéticos nunca se abandonaron por completo, tal como podría haberse sospechado, ya que incluso en Grecia se han seguido usando hasta nuestros días en documentos legales, administrativos y eclesiásticos; así, la sección o apartado LXXVIII de un documento, por ejemplo, puede aparecer representada por $o\eta$ (es decir, ómicron eta) tal como en la época de Alejandro. Por otra parte, incluso dentro del nuevo sistema hindú, los escritores bizantinos del siglo XIV conservaron las nueve primeras letras del viejo esquema alfabético, añadiéndole un símbolo para el cero que recuerda a una *h* invertida; así, el número 7890, por ejemplo, vendría escrito en la forma $\zeta\eta\theta\mu$, forma que es, desde luego, tan sencilla como la nuestra. Manuel Moschopoulos (*fl.* 1300), discípulo de Planudes, escribió sobre cuadrados mágicos, y la exposición de Planudes sobre el sistema de numeración hindú fue comentada por el aritmético y geómetra Nicholas Rhabdas (†1350), que compuso además una obra sobre el cálculo con los dedos, pero la matemática bizantina, que nunca fue muy importante, se había convertido ya en esta época en algo insignificante. Para el siglo XIV el mundo latino de Occidente había sobrepasado ya claramente al mundo griego, y es a este Occidente latino al que tenemos que dirigir ahora nuestra atención.

3. La Epoca Oscura

En el capítulo XI incluimos ya la referencia de los tratados latinos de Boecio que marcan el final de la Edad Antigua, poniendo de relieve su nivel muy elemental. Pero aún a partir de este nivel tan bajo la matemática pudo deteriorarse todavía más, como podemos ver por el trivial compendio sobre las artes liberales que

escribió Casiodoro (*ca.* 480-*ca.* 575), un discípulo de Boecio que vivió los últimos años de su vida en un monasterio que él mismo había fundado. Las obras originales de Casiodoro se utilizaron como libros de texto en las escuelas eclesiásticas a comienzos de la Edad Media, y a veces también como fuente de inspiración para otras obras de nivel aún más bajo, tales como la de los *Orígenes* o *Etimologías* de Isidoro de Sevilla (570-636), en la que uno de los veinte libros de que consta presenta un breve resumen de la aritmética de Boecio. Cuando nos paramos a considerar que sus contemporáneos tenían a Isidoro por el hombre más sabio de su época, podemos entender mejor el lamento de aquellos tiempos en el sentido de que «el estudio de las letras está muerto entre nosotros». Esta fue verdaderamente la «Epoca Oscura» de la ciencia, pero no debemos cometer el error de suponer que esto fue cierto para la Edad Media como un todo. Durante los dos siglos siguientes la oscuridad continuó dominando, hasta tal punto que se ha llegado a decir que en aquel tiempo no se podía oír en Europa otra cosa que tuviera que ver con la cultura, que el rasguear de la pluma de Beda el Venerable (*ca.* 673-735) sobre el pergamino, mientras escribía en Inglaterra acerca de la matemática necesaria para el calendario eclesiástico, y sobre la representación de los números por medio de los dedos.

4. Alcuino y Gerberto

Alcuino de York (*ca.* 735-804) nació el mismo año de la muerte de Beda, y fue llamado por Carlomagno para intentar revitalizar la educación en Francia, consiguiéndose así una mejora suficiente como para que algunos historiadores hablen de un verdadero Renacimiento Carolingio. Alcuino explicaba que la creación del mundo había necesitado seis días porque seis era un número perfecto, pero aparte de algunas obras sobre aritmética, geometría y astronomía muy elementales que, según se dice, debió escribir Alcuino para principiantes, poca matemática circuló por Francia e Inglaterra en otros dos siglos. En Alemania, Hrabanus Maurus (784-856) fue un continuador de la débil obra matemática y astronómica de Beda, especialmente en lo que se refiere al cálculo aproximado de la fecha de la Pascua. Pero, repetimos, a lo largo del siglo y medio siguiente no hubo prácticamente ningún cambio en el ambiente matemático de Europa occidental, y cuando se produjo al fin alguno, fue debido a un personaje que alcanzó la dignidad del papado en los últimos años de su vida con el nombre de Silvestre II.

Gerberto (*ca.* 940-1003), como se llamaba, nació en Francia y se educó en España y en Italia para servir más tarde en Alemania como tutor y posteriormente consejero del sacro emperador romano Otón III. Después de ocupar el puesto de arzobispo, primero en Reims y más tarde en Ravena, Gerberto fue elegido papa el año 999, tomando el nombre de Silvestre probablemente como homenaje a otro papa anterior famoso por su sabiduría, pero también quizá porque Silvestre I, que había sido papa en la época de Constantino, era un símbolo de la unidad del papado y el imperio. Gerberto se mostró activo en política, tanto eclesiástica como laica, pero también dispuso de tiempo para ocuparse de cuestiones educativas.

Escribió tanto sobre aritmética como sobre geometría, siguiendo probablemente en la línea de la tradición que partía de Boecio, ¡que había dominado en la enseñanza de las escuelas eclesiásticas de Occidente durante quinientos años sin experimentar ninguna mejora! Más interesante que estas obras expositivas es, sin embargo, el hecho de que Gerberto fue probablemente el primero en Europa que enseñó el uso de los numerales hindú-arábigos. No está claro cómo llegó a conocerlos; una posible explicación es la de que cuando viajó a España el año 967 se pusiera en contacto, en Barcelona quizá, con la cultura árabe, incluida la numeración árabe en su forma occidental o *gobar* (polvo) de los numerales, a pesar de que es poca la evidencia que podemos encontrar de una influencia árabe en los documentos que han llegado hasta nosotros. Una copia española de los *Orígenes* de Isidoro, que data del año 992, contiene los numerales, sin el cero, y Gerberto probablemente nunca llegó a conocer este último aspecto del sistema hindú-arábigo. Sin embargo, en algunos manuscritos de las obras de Boecio aparecen ciertas formas numerales parecidas, o ápices, como signos para ser utilizados en una tabla de computación o un ábaco, y quizá fuese de estos manuscritos de los que Gerberto aprendió el nuevo sistema. Por otra parte, los ápices de Boecio también pudieron haber sido perfectamente interpolaciones posteriores. El hecho es que la situación que rodea a la introducción de los numerales indo-arábigos en Europa es casi tan confusa como la que sirvió de marco a la invención del sistema casi medio milenio antes. Además, ni siquiera está claro que se continuasen utilizando los nuevos numerales en Europa durante los dos siglos que siguieron a la época de Gerberto. Hasta el siglo XIII no se introdujeron de una manera ya definitiva los numerales hindú-arábigos en Europa, y cuando ocurrió este hecho no fue la obra de un hombre solo, sino de varios[2].

5. El siglo de las traducciones

Antes y durante la época de Gerberto aún no estaba preparada Europa para contribuir al desarrollo de la matemática. La actitud cristiana al respecto, que había sido expresada ya con toda claridad por Tertuliano, fue bastante parecida en principio a la que se dio en los primeros tiempos del Islam, que hemos mencionado al hablar de la Biblioteca de Alejandría. La investigación científica, escribía Tertuliano, se ha hecho superflua, ya que hemos recibido el Evangelio de Jesucristo. La época de Gerberto coincidió con uno de los puntos culminantes de la cultura musulmana, pero los intelectuales latinos contemporáneos a duras penas podrían haber apreciado los tratados árabes, caso de que los hubieran conocido. A comienzos del siglo XII la situación empezó a cambiar en un sentido que nos recuerda lo que ocurrió en Arabia en el siglo IX: no puede uno asimilar la sabiduría de sus vecinos si no es capaz de entender su lengua. Los musulmanes habían conseguido romper la barrera lingüística que les oponía la cultura griega hacia el

[2] Véase G. F. Hill, *The Development of Arabic Numerals in Europe* (1915), y D. E. Smith y L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (1911).

siglo IX, y los europeos latinos superaron a su vez la barrera lingüística de la cultura árabe durante el siglo XII. A comienzos de este siglo XII todavía ningún europeo podía esperar hacerse matemático o astrónomo en ningún sentido serio de la palabra, sin un buen conocimiento del árabe, y, de hecho, durante la primera parte del siglo XII Europa no podía jactarse de ni un solo matemático que no fuera moro, judío o griego. A finales del siglo, en cambio, el matemático más importante y más original del mundo en esta época había nacido ya en la Italia cristiana. Resulta tan evidente que éste fue un período de transición de un punto de vista antiguo a otro nuevo, que C. H. Haskins tituló una de sus obras más importantes *The Renaissance of the Twelfth Century*[3]. El renacimiento al que se refiere Haskins comenzó necesariamente por una verdadera oleada de traducciones. Al principio estas traducciones lo fueron casi exclusivamente del árabe al latín, pero hacia el siglo XIII hubo ya muchas variantes, del árabe al español, del árabe al hebreo, del griego al latín, o bien combinaciones tales como del árabe al hebreo y después del hebreo al latín. Los *Elementos* de Euclides figuraron entre las primeras obras matemáticas clásicas que aparecieron traducidas del árabe al latín, en la versión debida a Adelardo de Bath (*ca.* 1075-1160) que data del 1142. No sabemos exactamente cómo llegó a ponerse en contacto este traductor inglés con la cultura musulmana. En aquella época había tres puentes principales entre el Islam y el Mundo Cristiano, España, Sicilia y el Imperio Bizantino del Este, de los cuales el primero era el más importante; sin embargo, Adelardo no parece haber sido uno de los muchos que utilizaron el puente intelectual español. No es fácil decir si las Cruzadas religiosas tuvieron una influencia positiva en la transmisión del saber, pero lo más probable es que vinieran a destruir los pocos canales de comunicación existentes más que a facilitarlos. En cualquier caso, las vías que pasaban por España y por Sicilia eran las más importantes durante el siglo XII, y además no se vieron perturbadas apenas por los turbulentos ejércitos de los cruzados del 1096 al 1272. El renacimiento del saber en la Europa latina tuvo lugar *durante* las Cruzadas, pero muy probablemente *a pesar de* las Cruzadas.

La traducción de los *Elementos* de Adelardo no tuvo una gran influencia durante otro siglo, pero no fue de ninguna manera un hecho aislado. El mismo Adelardo había traducido ya casi veinte años antes (1126) las tablas astronómicas de Al-Khowarizmi del árabe al latín, y más tarde (*ca.* 1155) el *Almagesto* de Ptolomeo del griego al latín. Sin embargo, Adelardo constituye una excepción entre los primeros traductores al no formar parte del numeroso grupo que trabajaba en España. Allí, especialmente en Toledo, donde el arzobispo favorecía tales trabajos, se desarrolló una verdadera escuela de traductores; la ciudad, que había sido en tiempos la capital del reino visigodo y que permaneció más tarde en manos de los moros durante varios siglos hasta que cayó en poder de los cristianos el año 1085, constituía un centro ideal para la transmisión del saber. En las bibliotecas de Toledo se conservaba una gran riqueza de manuscritos árabes, y el pueblo, incluidos tanto cristianos como mahometanos y judíos, hablaba en su mayoría árabe, facilitando así el flujo de información de una lengua a otra. Resulta, por otra parte, evidente y un tanto sorprendente el origen cosmopolita de los

[3] Hay una edición en rústica (New York: Meridian Books, 1957).

traductores que trabajaban en España, como delatan sus nombres: Roberto de Chester, Hermann el Dálmata, Platón de Tívoli, Rodolfo de Brujas, Gerardo de Cremona y Juan de Sevilla, este último judío converso. Todos ellos constituyeron sólo una pequeña parte del grupo de personas que tomaron parte en los proyectos de traducción en España[4].

De todos los traductores que trabajaron en España, el más importante fue probablemente Gerardo de Cremona (1114-1187). Gerardo había venido a España para aprender árabe y poder estudiar a Ptolomeo, pero después dedicó el resto de su vida a hacer traducciones del árabe. Entre ellas figura la traducción al latín de una versión revisada de la traducción al árabe de los *Elementos* de Euclides por Thabit Ibn-Qurra, que mejoraba sensiblemente la obra de Adelardo. En 1175 Gerardo tradujo el *Almagesto*, y fue precisamente a través de esta traducción como se llegó a conocer a Ptolomeo en Occidente. A Gerardo de Cremona se le atribuyen las traducciones de más de 85 obras, pero de ellas la única cuya fecha nos es conocida es la traducción de Ptolomeo. Entre las obras de Gerardo había también una adaptación latina del *Algebra* de Al-Khowarizmi, pero ya había una traducción anterior y más popular del *Algebra* hecha en 1145 por Roberto de Chester. Esta, que fue la primera traducción del tratado de Al-Khowarizmi (lo mismo que la traducción del Corán, también por Roberto de Chester, unos años antes había señalado otra *première*) podemos considerar que marca el comienzo del álgebra europea.

Roberto de Chester regresó a Inglaterra el 1150, pero la marcha de los trabajos de traducción en España continuó sin interrupción gracias a Gerardo de Cremona y otros. Las obras de Al-Khowarizmi estaban sin duda entre las más populares de la época, y los nombres de Platón de Tívoli y de Juan de Sevilla quedaron asociados a otras adaptaciones del *Algebra*. De pronto la Europa occidental comenzó a mirar la matemática árabe de una manera mucho más favorable que lo había hecho nunca con la geometría griega. Probablemente parte de las razones para ello estaban en el hecho de que la aritmética y el álgebra árabes tenían un nivel más elemental que el que había tenido la geometría griega durante los días de la República y del Imperio Romanos. Los romanos, sin embargo, nunca mostraron demasiado interés por la trigonometría griega, por ejemplo, a pesar de lo elemental y relativamente útil que era; en cambio los intelectuales latinos del siglo XII devoraron realmente la trigonometría árabe tal como aparecía en las obras astronómicas. Precisamente fue de la traducción de Roberto de Chester del árabe de donde salió nuestra palabra «seno»; los hindúes habían utilizado el nombre *jiva* para designar la semicuerda que aparece en trigonometría, y los árabes habían adoptado este nombre bajo la forma *jiba*. Ahora bien, en árabe existe también la palabra *jaib* que significa «bahía» o «ensenada», y cuando Roberto de Chester se encontró con el término técnico *jiba*, al hacer su traducción, debió confundirlo, al parecer, con la palabra usual *jaib* (quizá debido a la omisión de las vocales en árabe), y lo tradujo por la palabra *sinus*, que es el nombre latino para «bahía» o «ensenada». A veces se utilizó para la semicuerda la frase más detallada *sinus rectus*

[4] Para otros nombres véase George Sarton, *Introduction to the History of Science*, vol. II (1), págs. 113 y sigs. y 338 y sigs.

o «seno recto o vertical», y de ahí el nombre de *sinus versus* o nuestro «seno verso» para la «sagita» o «seno vuelto sobre su lado».

Durante el período de las grandes traducciones correspondientes a los siglos XII y XIII fue cuando se produjo también la confusión en torno al nombre de Al-Khowarizmi que condujo a la invención y difusión de la palabra «algorismo» o «algoritmo», tal como se explicó en el capítulo anterior. Los numerales hindúes les fueron explicados a los lectores latinos por Adelardo de Bath y Juan de Sevilla, al mismo tiempo aproximadamente en que Abraham Ibn Ezra (*ca.* 1090-1167), autor de diversos libros sobre astrología, filosofía y matemáticas, presentaba un esquema análogo a los judíos. Como en la cultura bizantina los nueve primeros numerales alfabéticos griegos, suplementados por un símbolo especial para el cero, habían ocupado el lugar de los numerales hindúes, también Ibn Ezra utilizó los nueve primeros numerales alfabético-hebraicos y un pequeño círculo para el cero, en su sistema decimal posicional para los enteros. A pesar de las numerosas exposiciones del sistema de numerales hindú-arábigo que aparecieron, la transición del sistema romano al decimal fue sorprendentemente lenta. Quizá esto fuera debido a que el cálculo con ayuda del ábaco estaba muy extendido, y en este caso las ventajas del nuevo sistema no eran tan evidentes como al calcular con pluma y papel únicamente. Durante varios siglos se produjo una viva competencia entre los «abacistas» y los «algoristas», que acabó al fin con el triunfo definitivo de estos últimos, pero sólo tan tarde como en el siglo XVI.

6. La propagación de los numerales hindú-arábigos

A veces se afirma que en la baja Edad Media hubo dos clases de matemáticos, los que enseñaban en las escuelas de la Iglesia o en las universidades, y los que se ocupaban de la industria y el comercio, y que entre ambos grupos hubo frecuentes rivalidades. Sin embargo, parece haber poca base para sostener una teoría como ésta, y desde luego ambos grupos participaron en la divulgación y difusión de los numerales hindú-arábigos. Muchos autores del siglo XIII procedentes de muy diversos sectores sociales contribuyeron a popularizar el «algorismo», pero sólo mencionaremos a tres de ellos. El primero, Alexandre de Villedieu (*ca.* 1225), fue un franciscano francés; el segundo, John de Halifax (*ca.* 1200-1256), conocido también como Sacrobosco, era un maestro inglés, y el tercero, Leonardo de Pisa (*ca.* 1180-1250), más conocido como Fibonacci o «hijo de Bonaccio», era un mercader italiano. El *Carmen de algorismo* de Alexandre es un poema en el que se describen con detalle las operaciones fundamentales con los enteros utilizando los numerales hindú-arábigos y considerando al cero como un número. El *Algorismus vulgaris* de Sacrobosco era un manual práctico de cálculo que rivalizó en popularidad con su *Sphaera*, que era un tratado sobre astronomía que se usó en las escuelas a lo largo de toda la Edad Media tardía. El libro en el que describe Fibonacci el nuevo algorismo es un famoso clásico que fue escrito en 1202 y que lleva un título completamente engañoso: *Liber abaci* (es decir, «Libro del ábaco»); *no trata* del ábaco, sino que es un tratado muy completo sobre métodos y



Grabado de la *Margarita Philosophica* (Freiburg, 1503), de Gregor Reisch. La Aritmética está instruyendo al algorista y al abacista, representados inadecuada y bizarramente por Boecio y Pitágoras respectivamente.

problemas algebraicos, en el que se recomienda enérgicamente el uso de los numerales hindú-arábigos.

El padre de Leonardo era un mercader pisano que tenía negocios en el norte de Africa, y su hijo estudió con un maestro musulmán y viajó por Egipto, Siria y Grecia. Era natural, pues, que Fibonacci aprendiera los métodos algebraicos árabes, incluido, afortunadamente, el uso de los numerales hindú-arábigos y, desgraciadamente en cambio, la forma de expresión retórica. El *Liber abaci* comienza presentando una idea que nos suena casi sorprendentemente moderna, pero que caracterizó tanto al pensamiento medieval islámico como al cristiano, y es la de que la aritmética y la geometría están conectadas y se apoyan cada una en la otra. Este punto de vista recuerda inmediatamente, desde luego, el *Algebra* de Al-Khowarizmi, pero se aceptaba igualmente en la tradición latina que arrancaba de Boecio. Sin embargo, el *Liber abaci* se ocupa mucho más del número que da la geometría; en primer lugar describe «las nueve formas hindúes», junto con el signo 0, «que se llama "zephirum" en árabe». Precisamente fue de la palabra *zephirum* y de sus variantes de donde se derivaron nuestras palabras «cifra» y «cero». La

exposición del sistema de numeración hindú-arábigo que presenta Fibonacci fue muy importante para el proceso de transmisión, pero no fue, como hemos visto, ni la primera de dichas exposiciones ni alcanzó la popularidad que consiguieron las exposiciones más tardías, pero más elementales de Sacrobosco y de Villedieu. Así, por ejemplo, Fibonacci ya utilizaba regularmente la barra horizontal en las fracciones (que ya se usaba anteriormente en Arabia), pero que sólo llegó a utilizarse de una manera generalizada en el siglo XVI. (En 1845 De Morgan introdujo la barra oblicua.)

7. El *Liber abaci*

El *Liber abaci*[5] no es un libro cuya lectura resulte precisamente gratificante al lector moderno, ya que después de explicar los procesos algorísticos o aritméticos usuales, incluida la extracción de raíces, pone todo el énfasis en problemas de transacciones comerciales, utilizando para ello un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda. No deja de ser una de las ironías más notables de la historia el que la principal ventaja del sistema de notación posicional, es decir, su aplicación a las fracciones, pasase casi completamente desapercibida a los que utilizaron los numerales hindú-arábigos durante los primeros mil años de su existencia. A este respecto Fibonacci tuvo tanta culpa al menos como cualquier otro, puesto que utilizó tres tipos de fracciones, las comunes, las sexagesimales y las unitarias, pero nunca las decimales. De hecho, en el *Liber abaci* los que más se usan son los dos peores de esos tres sistemas, es decir, las fracciones comunes y las unitarias. Además, los problemas más abundantes son los del obtuso tipo siguiente: «Si un sueldo imperial, que vale 12 dinares imperiales, se vende por 31 dinares pisanos, ¿cuántos dinares pisanos se obtendrán por 11 dinares imperiales?» Y la respuesta viene calculada laboriosamente, en el típico estilo de exposición «recetario», como $\frac{5}{12}$ 28 ó, como nosotros escribiríamos hoy, $28\frac{5}{12}$. Fibonacci acostumbraba escribir la parte o partes fraccionarias de un número mixto delante de la parte entera, y así, en vez de escribir $11\frac{5}{6}$, por ejemplo, escribía $\frac{1}{3}\frac{1}{2}11$, donde la yuxtaposición de las fracciones unitarias y enteros debía entenderse como una suma.

Fibonacci era muy aficionado, evidentemente, a las fracciones unitarias (o pensaba que lo eran sus lectores), puesto que el *Liber abaci* incluye diversas tablas de conversión de fracciones comunes a unitarias. Por ejemplo, la fracción $\frac{98}{100}$ se descompone en $\frac{1}{100}\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$, y la $\frac{99}{100}$ aparece como $\frac{1}{25}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. Una chispa de ingenio inusual en lo que se refiere a la notación, le lleva a escribir la suma de $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$ como $\frac{1}{2}\frac{6}{9}\frac{2}{10}$, donde la notación $\frac{1}{2}\frac{6}{9}\frac{2}{10}$ significa en este caso

$$\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}$$

[5] No hay ninguna traducción al inglés de esta importante obra, ni tampoco una versión latina fácilmente accesible. Aparece incluida en el *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* de Baldassare Boncompagni (Roma, 1868-1887, 20 vols.). Véase, para las notaciones utilizadas por Fibonacci y otros, Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (Chicago, 1928-1929, 2 vols.).

Análogamente, en otro de los muchos problemas sobre conversiones monetarias del *Liber abaci* podemos leer que si $\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ de un rótulo vale $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ de un bizancio, entonces $\frac{1}{8}\frac{4}{9}\frac{7}{10}$ de un bizancio vale $\frac{3}{4}\frac{8}{10}\frac{83}{149}\frac{11}{12}$ de un rótulo. ¡Compasión nos merece el pobre hombre de negocios medieval que tenía que operar con tal sistema!

8. La sucesión de Fibonacci

La mayor parte del *Liber abaci* es de lectura más bien árida y aburrida, pero algunos de sus problemas presentaban un aspecto tan vivaz que los utilizaron también otros escritores posteriores. Entre ellos está un robusto veterano que puede provenir verosímilmente de un antepasado remoto muy parecido que figuraba ya en el papiro de Ahmes. Tal como nos lo presenta Fibonacci dice:

> Siete viejas van a Roma; cada vieja tiene siete mulas; cada mula lleva siete sacos; cada saco contiene siete hogazas; con cada hogaza van siete cuchillos, y cada cuchillo lleva siete vainas.

Pero el problema del *Liber abaci* que más ha inspirado a los matemáticos posteriores es, sin duda, el siguiente:

> «¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?»

Este famoso problema da lugar a la llamada «sucesión de Fibonacci», 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., u_n, ..., donde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ para $n \geqslant 3$, es decir, donde cada término a partir de los dos primeros es la suma de los dos términos inmediatamente anteriores. Se han descubierto muchas propiedades bellas e interesantes de esta sucesión. Por ejemplo, se puede demostrar que dos términos sucesivos cualesquiera son primos entre sí, y que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ es igual a la razón que define la sección áurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Esta sucesión se aplica también a cuestiones de filotaxia y del crecimiento de los seres vivos[6].

9. Una resolución de una ecuación cúbica

El *Liber abaci* fue la obra más conocida de Fibonacci, publicándose una segunda edición en 1228, pero parece evidente que no fue muy apreciada en las

[6] Véanse, para algunas otras propiedades, N. N. Vorob'ev, *Fibonacci Numbers*, trad. por H. Mors (New York: Blaisdell, 1961); S. M. Plotnick, «The Sum of Terms of the Fibonacci Series», *Scripta Mathematica*, 9 (1943), pág. 197. Sobre la importancia de esta cuestión en biología véase D. W. Thompson, *On Growth and Form*, 2.ª ed. (Cambridge University Press, 1952). Véanse también los diversos números de la revista *The Fibonacci Quaterly*. Otras aplicaciones interesantes y más referencias pueden verse en H. S. M. Coxeter, «The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game», *Scripta Mathematica*, 19 (1953), págs. 135-143.

escuelas, y no apareció impresa hasta el siglo XIX. Leonardo de Pisa fue sin duda el matemático más original y más importante del mundo medieval cristiano, pero la mayor parte de su obra era demasiado avanzada para ser entendida por sus contemporáneos. Sus restantes tratados, aparte del *Liber abaci*, también contienen muchas otras cosas interesantes. En el *Flos*, que data de 1225, nos encontramos con problemas indeterminados que nos recuerdan a Diofanto y con problemas determinados que nos recuerdan a Euclides, a los árabes y a los chinos.

Es evidente que Fibonacci se basó en muchas y muy variadas fuentes. Resulta especialmente interesante para entender su relación entre algoritmo y lógica, el tratamiento por Fibonacci de la ecuación cúbica $x^3+2x^2+10x=20$. Fibonacci muestra en su planteamiento una actitud que se parece mucho a la de la época moderna, al demostrar en primer lugar que es imposible una raíz en el sentido euclídeo tal como una razón de enteros o un número de la forma $a+\sqrt{b}$, donde a y b son racionales. Esto significa, dada la época, que la ecuación no podía resolverse de una manera exacta por métodos algebraicos. Así pues, Fibonacci no tenía otra opción sino expresar la raíz positiva de una manera aproximada, cosa que hizo al dar el valor aproximado como una fracción sexagesimal con media docena de cifras exactas: 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40. Se trata, sin duda, de un éxito notable, pero no sabemos cómo lo logró. Probablemente conocía de los árabes lo que llamamos el «método de Horner», artificio ya conocido en China antes de esta época. Esta es la aproximación más precisa de una raíz irracional de una ecuación algebraica en Europa hasta este momento, e incluso durante los 300 años siguientes por lo menos. Es muy revelador de la época el que Fibonacci haya utilizado fracciones sexagesimales en un problema matemático teórico y no, sin embargo, en los problemas mercantiles. Quizá esto explique el porqué los numerales hindú-arábigos no se utilizaron inmediatamente en las tablas astronómicas, tales como las «Tablas Alfonsíes» del siglo XIII. En el marco en que se utilizaban las «fracciones de los físicos» sexagesimales no era tan urgente el sustituirlas como lo era en lo que se refería al uso de las fracciones comunes y unitarias en el comercio.

10. Teoría de números y geometría

En el año 1225 Leonardo de Pisa publicó no sólo el *Flos*, sino también el *Liber quadratorum*, una obra brillante que trata de análisis indeterminado. Esta obra contiene, como el *Flos*, una gran variedad de problemas, algunos de los cuales provienen de los concursos matemáticos que se celebraban en la corte del emperador Federico II, a los que asistió Fibonacci como invitado. Uno de los problemas propuestos recuerda de una manera sorprendente el tipo de los que, al parecer, hacían las delicias de Diofanto: hallar un número racional tal que si se le suma o se le resta cinco al cuadrado de dicho número, el resultado sea el cuadrado de otro número racional. El problema y una solución, $3\frac{5}{12}$, aparecen en el *Liber quadratorum*. En este libro se hace uso frecuentemente de las identidades

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

que aparecían ya en Diofanto y habían sido utilizadas ampliamente por los árabes. En algunos de sus problemas y métodos Fibonacci parece seguir estrechamente a los árabes[7].

Fibonacci fue principalmente un algebrista, pero el año 1220 escribió un libro titulado *Practica geometriae*, que parece estar basado en una versión árabe de la *División de las figuras* de Euclides, que se ha perdido, así como en las obras de Herón sobre los problemas de medidas. Entre otras cosas, contiene una demostración de que las medianas de un triángulo se cortan unas a otras en segmentos que están en la razón 2:1, así como un análogo tridimensional del teorema de Pitágoras. Fibonacci, continuando una larga tradición babilónica y árabe, utilizaba el álgebra, como hemos visto, para resolver problemas geométricos.

11. Jordano Nemorario

Probablemente haya quedado claro a partir de las pocas ilustraciones que hemos dado, que Leonardo de Pisa fue un matemático excepcionalmente capaz. Pero si bien es cierto que no tuvo ningún rival de su misma talla durante los 900 años de cultura medieval europea, no fue, sin embargo, una figura tan aislada como a veces se ha querido hacer creer. De hecho, tuvo un contemporáneo también capaz, pero no tan excepcionalmente dotado, en Jordano Nemorario, cuyas fechas exactas de nacimiento y muerte nos son desconocidas. Algunos[8] identifican a este personaje con Jordano Teutónico o Jordano de Sajonia, uno de los líderes de la orden de los dominicos, que murió el año 1237. En cualquier caso, nuestro Jordano Nemorario o Jordano de Nemore representa un punto de vista sobre la ciencia más aristotélico que otros que nos hemos encontrado en el siglo XIII, y fue, de hecho, el fundador de lo que ha venido llamándose la escuela medieval de mecánica. A él le debemos la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado, ley que los antiguos habían buscado en vano: la fuerza que actúa en la dirección de un camino inclinado es inversamente proporcional a su inclinación, donde la inclinación viene medida por la razón de un segmento dado del camino inclinado al segmento vertical que intercepta esa parte del camino[9], es decir, la razón del «trayecto recorrido» a la «subida realizada». En el lenguaje de la trigonometría esto se traduce en la fórmula $\frac{F}{W} = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$, que es equivalente a la formulación moderna $F = W \operatorname{sen} \theta$, donde W es el peso, F es la fuerza actuante y θ el ángulo de inclinación.

Jordano escribió diversos libros sobre aritmética, geometría y astronomía y no sólo sobre mecánica. En particular, su *Arithmetica* sirvió de base para comentarios

[7] Véase L. C. Karpinski, «The Algebra of Abu Kamil», *American Mathematical Monthly*, 21 (1914), págs. 37-48.

[8] Véase, por ejemplo, D. E. Smith, *History of Mathematics*, vol. I, pág. 226, y George Sarton, *Introduction to the History of Science*, vol. II (2), págs. 613 y sigs. Tal identificación es rechazada por Joseph Hoffmann, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlín, 1963), vol. I, pág. 96.

[9] Véase Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, pág. 74.

populares en la Universidad de París hasta tan tarde como el siglo XVI. Este libro no estaba dedicado al estudio de la computación, sino que era una obra de orientación más bien filosófica, en la vieja tradición de Nicómaco y de Boecio. En ella aparecen algunos resultados teóricos, tales como el teorema que dice que cualquier múltiplo de un número perfecto o abundante es abundante, y que todo divisor de un número perfecto es deficiente. Un aspecto especialmente importante de la *Arithmetica* consiste en el uso de letras para representar números, en vez de los numerales usuales, lo que hace posible la formulación de teoremas algebraicos generales, y esto supone un avance considerable. En los teoremas aritméticos que aparecen en los libros VII al IX de los *Elementos* de Euclides, los números vienen representados por segmentos rectilíneos a los que se les asignan letras, y las demostraciones geométricas en el *Algebra* de Al-Khowarizmi también utilizan figuras con letras, pero en cambio todos los coeficientes de las ecuaciones que aparecen en el *Algebra* son números concretos, representados o bien por los numerales correspondientes o escritos con palabras. En la exposición de Al-Khowarizmi está implícita la idea de que los resultados son generales, pero lo cierto es que no disponía de ninguna manera de expresar algebraicamente las proposiciones generales que aparecen de una forma tan natural en la geometría. En la *Arithmetica* de Jordano el uso de las letras está sugiriendo ya claramente el concepto de «parámetro», pero sus sucesores ignoraron, en general, este importante aspecto del uso de las letras, estando más interesados al parecer en las características propiamente árabes del álgebra, que se encuentran en otra obra de Jordano, el *De numeris datis*, que es una colección de reglas algebraicas para calcular, a partir de un número dado, otros números relacionados con él por unas condiciones determinadas, o bien para demostrar que dichas condiciones restrictivas determinan efectivamente un número. Un ejemplo típico puede ser el siguiente: Si un número dado se divide en dos partes tales que el producto de las dos debe ser también otro número dado, entonces las dos partes están necesariamente determinadas. Esta simple regla la expresa Jordano de la confusa manera siguiente:

> Sea *abc* el número dado y divídasele en dos partes *ab* y *c*, y sea *d* el producto dado de las partes *ab* y *c*. Sea *e* el cuadrado de *abc* y sea *f* igual a cuatro veces *d*, y sea *g* el resultado de restar *f* de *e*. Entonces *g* es el cuadrado de la diferencia entre *ab* y *c*. Sea *h* la raíz cuadrada de *g*; entonces *h* es la diferencia entre *ab* y *c*, y como *h* es conocida, *c* y *ab* están determinados[10].

Obsérvese que el uso de las letras por parte de Jordano es un tanto equívoco, ya que, al igual que Euclides, a veces usa dos letras para representar un número y a veces una única letra. Es evidente que seguía a Euclides en su costumbre de dibujar el número dado como un segmento *ac*, y las dos partes en que queda dividido como *ab* y *bc*, pero utiliza las letras de los dos extremos para representar la primera parte del número mientras que usa solamente la letra *c* para representar el número correspondiente al segmento *bc*. Sin embargo, dice mucho en favor de Jordano el hecho de que formulase la regla anterior, equivalente a la resolución de una

[10] Para una extensa exposición de los diversos aspectos de la obra de Jordano véase Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1880-1908), vol. II, págs. 49-79.

ecuación cuadrática, de una manera completamente general. A continuación da un ejemplo concreto del caso general, expresando los números por medio de numerales romanos: dividir el número X en dos partes cuyo producto sea XXI. Jordano sigue paso a paso las etapas que se han indicado más arriba hasta llegar al resultado de que las partes deben ser III y VII.

12. Campano de Novara

A Jordano se le ha atribuido también un *Algorismus* (o *Algorithmus*) *demonstratus*, que consiste en una exposición de las reglas aritméticas elementales y que fue muy popular durante tres siglos; este *Algorismus demonstratus* muestra de nuevo de una manera clara tanto la influencia de Euclides y de Boecio como las características del álgebra árabe. Una preponderancia aún mayor de la influencia euclídea puede verse en la obra de Johannes Campano de Novara (*fl. ca.* 1260), que fue capellán del papa Urbano IV. A él le debe el período medieval tardío una buena traducción de Euclides del árabe al latín, que fue precisamente la primera que apareció impresa más de dos siglos más tarde, en Venecia el año 1482. En esta traducción Campano utilizó diversas fuentes árabes, así como la primitiva versión latina de Adelardo. Tanto Jordano como Campano discutieron el ángulo de contacto o «ángulo corneado», tema que dio lugar a vivas discusiones durante la Edad Media tardía, cuando la matemática adquirió un aspecto más filosófico y especulativo. Campano observó que, si uno compara el ángulo de contacto o de contingencia, es decir, el ángulo formado por un arco de circunferencia con la tangente en uno de sus extremos, con el ángulo entre dos semirrectas, parece haber una clara inconsistencia con la proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides, que es la proposición fundamental del método de exhausción. Cualquier ángulo rectilíneo es evidentemente mayor que un ángulo corneado; así pues, si restamos del ángulo rectilíneo, que es el mayor, una parte mayor que su mitad, y si del resto quitamos otra parte mayor que su mitad y continuamos de la misma manera, restando cada vez algo mayor que la mitad, deberíamos llegar a un ángulo rectilíneo menor que el ángulo corneado, pero esto es obviamente falso. Campano saca de esta situación la conclusión correcta de que la proposición X.1 sólo se puede aplicar a magnitudes del mismo tipo, y que los ángulos rectilíneos y corneados no lo son.

Una analogía clara entre los intereses de Jordano y de Campano se ve en el hecho de que Campano, al final del Libro IV de su traducción de los *Elementos* describe una trisección del ángulo que es exactamente la misma que aparecía en el *De Triangulis* de Jordano; la única diferencia está en que las letras de la figura de Campano son latinas, mientras que las de Jordano son greco-árabes. Esta trisección, bastante distinta de las de la antigüedad, es esencialmente como sigue. Sitúese el ángulo AOB que se va a trisecar con su vértice en el centro O de un círculo de radio arbitrario $OA=OB$ (fig. 14.1). Trácese por O un radio $OC \perp OB$, y por A una recta AED tal que $DE=OA$. Por último trácese por O la recta OF paralela a AED. Entonces FOB es un tercio de AOB tal como se pedía[11].

[11] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages* (1964), vol. I, pág. 681. Véase también Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. II, págs. 75 y sigs., 94. Una trisección más

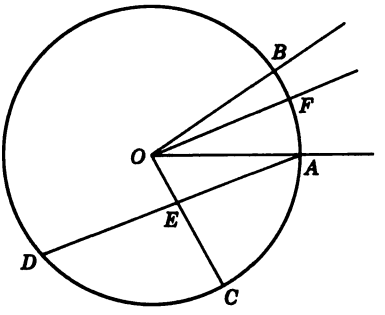


Figura 14.1

13. El saber del siglo XIII

El siglo XIII representa un avance tan sorprendente sobre toda la Edad Media anterior, que a veces se le ha considerado, de una manera no muy imparcial, como «el más grande de todos los siglos»[12]. Ya hemos visto cómo, en la obra de Leonardo de Pisa, la Europa Occidental alcanzó a rivalizar con las restantes civilizaciones en el nivel de sus progresos matemáticos, pero esto sólo era una pequeña parte de lo que estaba ocurriendo en la cultura latina, considerada como un todo. Muchas de las universidades más famosas, Bolonia, París, Oxford y Cambridge, se fundaron a finales del siglo XII y comienzos del XIII, y ésta fue también la época en la que se construyeron las grandes catedrales góticas, tales como las de Chartres, Notre Dame, Westminster, Reims, etc. La filosofía y la ciencia aristotélicas ya habían sido recuperadas y se enseñaban en las universidades y en las escuelas eclesiásticas. El siglo XIII es también la época de los grandes sabios y teólogos, tales como Alberto Magno, Robert Grosseteste, Tomás de Aquino y Roger Bacon. Dicho sea de paso, dos de estos últimos, Grosseteste y Bacon, hicieron enérgicas defensas de la importancia de la matemática en la enseñanza, a pesar de que ninguno de los dos fuera realmente matemático. Durante este siglo XIII se divulgaron por Europa muchos inventos prácticos: la pólvora y el compás de navegación o brújula, que seguramente provenían los dos de China, y los anteojos que venían de Italia, junto con los relojes mecánicos que aparecieron un poco más tarde.

El siglo XII había sido testigo de la gran oleada de traducciones del árabe al latín, pero ahora había ya otras diversas corrientes de traducción. La mayor parte de las obras de Arquímedes, por ejemplo, había sido casi completamente desconocidas, para el Occidente medieval, pero en 1269 Guillermo de Moerbeke (*ca.* 1215-1286) publicó una traducción (cuyo manuscrito original se descubrió el año 1884 en el Vaticano) del griego al latín de los principales tratados matemáticos y científicos de Arquímedes. Moerbeke, que era un dominico procedente de Flandes y que fue nombrado arzobispo de Corinto, sabía pocas matemáticas, y así su

complicada, utilizando una conchoide, se atribuye también a Jordano (véase Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, págs. 666-677).

[12] J. J. Walsh, *The Thirteenth, Greatest of Centuries* (New York, 1909).

traducción excesivamente literal (que ahora es útil para reconstruir el texto original griego) tuvo un impacto bastante limitado, pero por lo menos a partir de esta fecha estaban ya disponibles la mayor parte de las obras de Arquímedes en latín. De hecho, la traducción de Moerbeke incluía partes de Arquímedes que los árabes evidentemente no habían llegado a conocer, tales como el tratado *Sobre las espirales*, la *Cuadratura de la parábola* y el libro *Sobre conoides y esferoides*. Sin embargo, los musulmanes habían conseguido hacer más progresos en el entendimiento de la matemática de Arquímedes que los que hicieron los europeos durante el período medieval.

Durante el siglo XII las obras de Arquímedes no habían escapado del todo a la atención del infatigable Gerardo de Cremona, que tradujo al latín una versión árabe de la brevísima obra *Sobre la medida del círculo*, que se utilizó en Europa durante varios siglos. También había circulado ya anteriormente al 1269 un fragmento del libro de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro*. Estos dos ejemplos sólo podían llegar a dar una idea muy incompleta de lo que había hecho Arquímedes, y por lo tanto la traducción de Moerbeke fue de la mayor importancia, incluyendo como incluía un buen número de los tratados más significativos. Bien es verdad que esta traducción sólo se utilizó algunas veces durante los dos siglos siguientes, pero, como hemos dicho, al menos estaba ya disponible. Esta fue la versión que conocieron Leonardo da Vinci y otros sabios renacentistas, y también fue esta traducción de Moerbeke la primera que se imprimió en el siglo XVI[13].

14. La cinemática medieval

La historia de la matemática no ha sido, desde luego, el testimonio de un desarrollo continuo y paulatino, y por lo tanto no debería sorprendernos el hecho de que la ola ascendente que se produjo durante el siglo XIII perdiera, en su momento, parte de su ímpetu. No hubo ningún equivalente latino de Pappus, capaz de estimular un renacimiento de la geometría clásica avanzada. De hecho, las obras de Pappus no se conocían ni en latín ni en árabe, e incluso las *Cónicas* de Apolonio eran muy poco conocidas más allá de algunas de las propiedades más sencillas de la parábola, que aparecían en conexión con los múltiples tratados de óptica, rama de la ciencia que fascinó de una manera muy especial a los filósofos escolásticos. La ciencia de la mecánica atrajo también a los intelectuales de los siglos XIII y XIV, ahora que ya tenían a mano tanto la estática de Arquímedes como la cinemática de Aristóteles.

Ya hemos advertido que las conclusiones de Aristóteles sobre el movimiento no habían pasado sin sufrir la correspondiente contestación, y especialmente Filopón había sugerido ya modificaciones importantes. Durante el siglo XIV, uno de los temas favoritos en las universidades, sobre todo en Oxford y París, fue el estudio

[13] Para más detalles véase Marshall Clagett, «The Impact of Archimedes on Medieval Science», *Isis*, 50 (1959), págs. 419-429. Véase también la obra definitiva de Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, en varios tomos.

del cambio en general y del movimiento como caso particular. En Oxford, en el Merton College, los filósofos escolásticos consiguieron deducir una formulación para el caso de una velocidad de cambio uniforme que se suele conocer hoy como la «regla del Merton College». Expresado en términos de distancia y de tiempo, la regla dice esencialmente que si un cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, entonces la distancia recorrida será la misma que la que recorrería otro cuerpo moviéndose durante el mismo tiempo con un movimiento uniforme de velocidad igual a la del primer cuerpo exactamente en el punto medio del intervalo de tiempo. O, como diríamos nosotros, la velocidad media será la media aritmética de las velocidades inicial y final. Mientras tanto, en la Universidad de París se desarrolló una teoría del «ímpetus» más concreta y clara que la que había propuesto Filopón, y en la que se puede reconocer ya un concepto análogo al de inercia.

15. Thomas Bradwardine

Entre los físicos de finales de la Edad Media se encontraba un numeroso grupo de profesores universitarios y de eclesiásticos, pero nos vamos a referir solamente a dos de ellos que fueron también matemáticos importantes. El primero es Thomas Bradwardine (¿1290?-1349), filósofo, teólogo y matemático que llegó a ser arzobispo de Canterbury, y el segundo Nicole Oresme (¿1323?-1382), universitario parisino que más tarde llegaría a ser, a su vez, obispo de Lisieux. A estos dos hombres se debió una concepción muy amplia y general de la proporcionalidad[14]. En los *Elementos* de Euclides se incluía ya una teoría de proporciones o de igualdad de razones fundamentada rigurosamente, teoría que los sabios antiguos y medievales aplicaron a diversas cuestiones científicas. Así, por ejemplo, para un intervalo de tiempo, la distancia recorrida en un movimiento uniforme es directamente proporcional a la velocidad, mientras que para una distancia dada, el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad. Aristóteles creía, no muy acertadamente, que la velocidad de un objeto sobre el que actúa una fuerza motriz, dentro de un medio resistente, era directamente proporcional a la fuerza motriz e inversamente proporcional a la resistencia. Esta formulación cualitativa le pareció a los físicos posteriores contradecir el sentido común de alguna manera, puesto que, cuando la fuerza F sea igual o menor que la resistencia R, debería resultar una velocidad V de acuerdo con la ley $V=K\frac{F}{R}$, donde K es una cierta constante de proporcionalidad no nula, pero lo cierto es que cuando la resistencia equilibra o excede a la fuerza motriz, uno no espera que se mueva el cuerpo con velocidad alguna. Para evitar este absurdo hizo uso Bradwardine de una teoría de proporciones generalizada. En su libro *Tractatus de proportionibus* del año 1328, desarrolla Bradwardine la teoría de Boecio de las proporciones doble, triple o, de una manera más general, lo que

[14] Véase especialmente Nicole Oresme, *De proportionibus proportionum* y *Ad pauca respicientes*, ed. y trad. por Edward Grant (Madison, Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1966). Cf. también Edward Grant, «Part I of Nicole Oresme's Algorismus Proportionum», *Isis*, 56 (1965), págs. 327-341.

nosotros llamaríamos una «proporción n-tupla». Sus razonamientos están expresados en palabras usuales, pero en notación moderna nosotros diríamos en estos casos que las cantidades varían como la segunda, tercera o, en general, la n-ésima potencia. Y análogamente, la teoría de proporciones incluía también proporciones subdobles, subtriples y sub-n-tuplas, en las que las cantidades variaban como la raíz cuadrada, cúbica o la raíz n-ésima respectivamente. Con este aparato conceptual Bradwardine se encontraba ya preparado para proponer una alternativa a la ley aristotélica del movimiento. Para doblar la velocidad que se produce como consecuencia de una cierta razón o «proporción» $\frac{F}{R}$, afirmaba, es necesario elevar al cuadrado la razón $\frac{F}{R}$; para triplicar la velocidad se debe elevar al cubo la razón $\frac{F}{R}$; y para multiplicar, en general, por n la velocidad, debe conseguirse la n-ésima potencia de la razón $\frac{F}{R}$. Todo esto es equivalente a afirmar que la velocidad viene dada, en nuestra notación funcional moderna, por la relación $v = K \log \frac{F}{R}$, puesto que $\log \left(\frac{F}{R}\right)^n = n \log \frac{F}{R}$. Es decir, que si $v_0 = K \log \frac{F_0}{R_0}$, entonces $v_n = K \log \left(\frac{F_0}{R_0}\right)^n = nK \log \frac{F_0}{R_0} = nV_0$. Evidentemente Bradwardine mismo no intentó buscar una confirmación experimental de esta ley, la cual no parece haber logrado una aceptación general.

Bradwardine escribió además varias otras obras matemáticas, y todas ellas reflejan fielmente el espíritu de la época. Tanto su *Aritmética* como su *Geometría* muestran la influencia de Boecio, Aristóteles, Euclides y Campano. Bradwardine, que fue conocido en su época por el calificativo de «Doctor profundus», se vio atraído también por temas tales como el ángulo de contingencia y los polígonos estrellados, aunque ambos se encuentran ya en Campano y en obras anteriores. Los polígonos estrellados, que incluyen a los polígonos regulares como casos particulares, se remontan a los tiempos antiguos. Un polígono estrellado se forma al conectar por medio de rectas cada m-ésimo punto, a partir de uno dado, de los n puntos que dividen a una circunferencia en n partes iguales, siendo $n > 2$ y m primo con n. En la *Geometría* nos encontramos incluso con algo que nos recuerda la *Medida del círculo* de Arquímedes, pero la tendencia filosófica de toda la obra de Bradwardine puede verse más claramente en su *Geometrica speculativa* y en el *Tractatus de continuo*, en los que afirma[15] que las magnitudes continuas, aunque incluyen una cantidad infinita de indivisibles, no están formadas por tales átomos matemáticos, sino que están compuestas por una cantidad infinita de continuos del mismo tipo. Se ha dicho a veces que los puntos de vista de

[15] Véase Edward Stamm, «Tractatus de continuo von Thomas Bradwardina. Eine Handschrift aus dem XIV Jahrhundert», *Isis*, 26 (1936), págs.

Bradwardine recuerdan los de los intuicionistas modernos; en cualquier caso, las especulaciones medievales sobre el continuo, que fueron tan populares entre los pensadores escolásticos como Santo Tomás de Aquino, influenciaron más tarde de una manera decisiva la concepción cantoriana del infinito a finales del siglo XIX.

16. Nicole Oresme

Nicole Oresme es posterior a Bradwardine en unos treinta años, y en su obra podemos ver extensiones de las ideas de éste. En el *De proportionibus proportionum*, que fue escrito hacia el 1360, generaliza Oresme la teoría de proporciones de Bradwardine para incluir cualquier potencia racional y dar al mismo tiempo reglas para combinar proporciones, que vienen a ser equivalentes a nuestras leyes para operar con exponentes, que expresamos en nuestra notación por las fórmulas $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ y $(x^m)^n = x^{mn}$. Para cada una de las reglas se dan ejemplos concretos, y en la última parte de otra de sus obras, el *Algorismus proportionum*, se aplican dichas reglas a problemas geométricos y físicos. Oresme sugirió también el uso de un tipo de notación especial para las potencias de exponente fraccionario, y así en el *Algorimus proportionum* aparecen expresiones como la siguiente

p	1
1	2

para representar la «proporción uno y medio», es decir, el cubo de la raíz cuadrada, y fórmulas tales como

$$\frac{1 \cdot p \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2}$$

para $\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$. Nosotros solemos tomar ahora como lo más natural del mundo nuestra notación simbólica para las potencias y raíces, sin pararnos a pensar en la sorprendente lentitud con que se desarrolló esta notación a lo largo de la historia de la matemática. Más imaginativa aún que la notación de Oresme era su sugerencia de que son posibles incluso proporciones irracionales. Aquí vemos a Oresme anticipando en cierto sentido lo que nosotros escribiríamos como $x^{\sqrt{2}}$, por ejemplo, en lo que es quizá la primera sugerencia de una función trascendente de orden superior de toda la historia de la matemática, pero la falta de una terminología y de una notación adecuadas, entre otras cosas, le impidió desarrollar de una manera efectiva su concepción de las potencias irracionales[16].

[16] Véase, para una exposición admirable de esta obra, Edward Grant, «Nichole Oresme and his *De proportionibus proportionum*», *Isis*, 51 (1960), págs. 293-314. Cf. Edward Grant, «Bradwardine and Galileo: Equality of Velocities in the Void», *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1965), págs. 344-364. Véanse también las referencias de la nota 14.

17. La «latitud de las formas»

El concepto de las potencias irracionales puede haber sido la idea más brillante de Oresme, pero no fue en esa dirección en la que tuvo una mayor influencia su obra. Desde casi un siglo antes de su época llevaban discutiendo ya los filósofos escolásticos la cuantificación de las «formas» variables, un concepto de Aristóteles más o menos equivalente al de cualidades. Entre estas formas se encontraban cosas tales como la velocidad de un cuerpo móvil y la variación de la temperatura de un punto a otro en un cuerpo con temperatura no uniforme. Las discusiones fueron interminablemente prolijas, debido a que los instrumentos de análisis disponibles no eran los adecuados, según nuestra concepción actual. Pese a estas dificultades los lógicos del Merton College había conseguido, como hemos visto, un importante teorema relativo al valor medio de una forma «uniformemente diforme», es decir, tal que la velocidad de cambio de dicha forma es constante. A Oresme, que sin duda conocía bien este resultado, se le ocurrió, algo antes quizá del año 1361, una idea brillante: ¿por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían?[17]. Aquí vemos, desde luego, una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones. Todo lo que varía, se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo. Así pues, para el caso de un cuerpo moviéndose con un movimiento uniformemente acelerado, Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta, tal como vio Oresme, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades (que nosotros llamamos ordenadas) cubren el área de un triángulo rectángulo (véase fig. 14.2). Dado que este área representa la distancia recorrida,

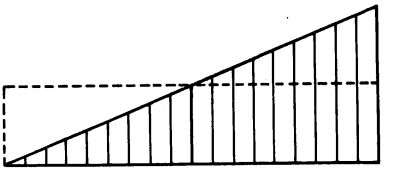


Figura 14.2

obtiene fácilmente Oresme una verificación geométrica de la regla del Merton College, puesto que la velocidad en el punto medio del intervalo de tiempo es exactamente la mitad de la velocidad al final de dicho intervalo. Además, este

[17] Presuponemos aquí, por sencillez de la exposición, que Oresme fue el primero que tuvo esta idea, pero probablemente no fue éste el caso. Marshall Clagett ha descubierto lo que parece una gráfica anterior, dibujada por Giovanni de Cosali, en la que la línea de longitudes aparece situada en posición vertical. Véase Marshall Clagett, *Science of Mechanics in the Middle Ages*, págs. 332-333 y 414. En cualquier caso la exposición de Oresme supera con mucho a la de Cosali tanto en su claridad como en su influencia, y así nuestra descripción no violenta la historia de ninguna manera esencial.

mismo diagrama conduce de una manera obvia a la ley del movimiento que se suele atribuir a Galileo, ya en pleno siglo XVII, puesto que resulta claramente de la figura que el área correspondiente a la primera mitad del intervalo de tiempo es a la que corresponde a la segunda mitad como 1 es a 3; si subdividimos el intervalo en tres partes iguales entonces las distancias recorridas (dadas por las áreas correspondientes) estarán en la razón 1 : 3 : 5; para cuatro subdivisiones iguales las distancias estarán en la razón 1 : 3 : 5 : 7. En general, tal como observaría más tarde Galileo, las distancias estarán entre sí como los números impares, y como la suma de los n primeros números impares consecutivos es igual al cuadrado de n, la distancia total recorrida variará como el cuadrado del tiempo, que es ya la conocida ley galileana de la caída de los cuerpos.

Los términos latitud y longitud que utilizaba Oresme vienen a ser completamente equivalentes a nuestras ordenadas y abscisas respectivamente, y sus representaciones gráficas se parecen mucho ya a nuestra geometría analítica. Su utilización de las coordenadas, digámoslo así, no era nuevo, desde luego, ya que Apolonio y otros matemáticos anteriores a Oresme habían usado lo que pueden llamarse sistemas de coordenadas, pero lo que sí era completamente nuevo era su representación gráfica de una cantidad variable. Oresme parece haberse dado cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esta observación salvo en el caso de la función lineal, como era inevitable. Por otra parte, Oresme estaba interesado principalmente en el área comprendida bajo la curva, y por lo tanto no era probable que se diera cuenta de la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica: la de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas concreto, como una función de una variable. Donde nosotros diríamos que el grafo de la velocidad con respecto al tiempo en un movimiento uniformemente acelerado es una recta, escribía Oresme: «Cualquier cualidad uniformemente diforme que termine en una intensidad cero se puede imaginar como un triángulo rectángulo.» Es decir, que Oresme estaba especialmente interesado en los aspectos de la situación que tienen más que ver, diríamos, con el cálculo infinitesimal: 1) la manera en que varía la función (es decir, la ecuación diferencial de la curva), 2) la manera en que varía el área bajo la curva (es decir, la integral de la función). Oresme subraya la propiedad que tiene su gráfica de un movimiento uniformemente acelerado de tener pendiente constante, observación que equivale a la ecuación de la recta que pasa por dos puntos en la geometría analítica moderna, y que a la vez conduce a la idea del triángulo diferencial local. Y, en segundo lugar, al calcular la función distancia, es decir, el área, Oresme se encuentra evidentemente calculando una simple integral que da como resultado la regla obtenida retóricamente por los físicos del Merton College. Curiosamente, Oresme no nos explica por qué el área bajo la curva velocidad-tiempo representa la distancia recorrida, pero es probable que, o bien lo considerase como una generalización inmediata (y arriesgada) de lo que ocurre en el caso trivial de un movimiento uniforme, o bien considerase el área como formada por muchos segmentos verticales o rectángulos muy estrechos, como indivisibles, cada uno de los cuales representando una velocidad constante que actuaba durante un intervalo de tiempo muy corto.

Esta representación gráfica de funciones, que se conocía entonces como la «latitud de las formas», se convirtió en un tema muy popular desde la época de Oresme a la de Galileo. El *Tractatus de latitudinibus formarun* escrito, si no por Oresme mismo, quizá por alguno de sus alumnos, apareció en numerosas copias manuscritas y se imprimió al menos cuatro veces entre 1482 y 1515, pero esto sólo era un resumen de una obra más larga de Oresme titulada *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum*[18]. En esta obra Oresme va tan lejos como para sugerir una extensión a tres dimensiones de su «latitud de las formas», en la que se representaba una función de dos variables independientes como un volumen formado por todas las ordenadas levantadas de acuerdo con una regla dada sobre los puntos de una región del plano de referencia. E incluso nos encontramos con un atisbo de lo que sería una geometría en cuatro dimensiones cuando Oresme habla de representar la intensidad de una forma que depende de cada punto de un cuerpo sólido o volumen de referencia. Lo que necesitaba aquí Oresme era, naturalmente, una geometría de tipo *algebraico* en vez de una representación gráfica tal como la que tenía en la mente, pero las imperfecciones y dificultades técnicas de diversos tipos obstaculizaron el desarrollo europeo a lo largo de todo el período medieval.

18. Las series numéricas

Los matemáticos del Occidente europeo mostraron durante el siglo XIV imaginación y notable claridad de pensamiento, pero lo que les faltaba era habilidad tanto algebraica como geométrica, y así sus contribuciones no consistieron en una extensión de la obra de los clásicos, sino en la exploración de nuevos puntos de vista. Entre estos nuevos puntos de vista tenemos que destacar por su importancia el tratamiento de las series infinitas, un tema esencialmente original y nuevo, anticipado solamente, en cierto sentido, por algunos algoritmos iterados de la antigüedad y por la suma de una progresión geométrica indefinida por Arquímedes. Mientras que los griegos habían mostrado casi siempre un *horror infiniti*, los filósofos escolásticos de la baja Edad Media recurrían frecuentemente al infinito, tanto en su sentido potencial como actual (es decir, como algo «completo»). En el siglo XIV hubo en Inglaterra un lógico llamado Richard Suiseth (*fl. ca.* 1350), pero más conocido por Calculator, que resolvió el siguiente problema planteado en la teoría de la latitud de las formas:

> Si, a lo largo de la primera mitad de un intervalo de tiempo dado, una forma se mantiene con una cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo al triple de esa intensidad, y así *ad infinitum*, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo subintervalo (es decir, el doble de la intensidad inicial).

[18] Véanse especialmente los dos artículos de Heinrich Wieleitner, «Der "Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme», *Bibliotheca Mathematica* (3), 13 (1913), págs. 113-145, y «Ueber den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme», *Bibliotheca Mathematica* (3), 14 (1914), págs. 193-243. Véase también Marshall Clagett, *Science of Mechanics in the Middle Ages.*

Esta afirmación formulada retóricamente es equivalente a decir que la suma de la serie numérica infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

es igual a 2. Calculator dio una larga y confusa demostración verbal, puesto que no conocía la representación gráfica, pero Oresme utilizó su método gráfico para demostrar este teorema de una manera mucho más fácil y elegante. Oresme consiguió resolver también por el mismo método otros casos más complicados, tales como la suma de la serie

$$\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{2\cdot 3}{16}+\frac{3\cdot 3}{64}+\cdots+\frac{n\cdot 3}{4^n}+\cdots$$

cuyo resultado es $\frac{4}{3}$. Problemas análogos a éstos continuaron ocupando a los filósofos durante el siguiente siglo y medio al menos[19].

Entre otras contribuciones de Oresme al estudio de las series numéricas infinitas está su bella demostración, y la primera de este tipo evidentemente en toda la historia de la matemática, de que la serie armónica es divergente: Oresme agrupó los sucesivos términos de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

colocando el primer término en el primer grupo, los dos términos siguientes en el segundo grupo, los cuatro términos que les siguen en el tercer grupo, y así sucesivamente, de manera que el grupo m-ésimo incluye 2^{m-1} términos de la serie. Entonces es obvio que tenemos infinitos grupos de términos y que la suma de los términos dentro de cada grupo es mayor o igual que $\frac{1}{2}$, y, por lo tanto, sumando una cantidad suficiente de términos, en su orden, podemos superar cualquier número dado[20].

19. El ocaso del saber medieval

Aquí finalizamos nuestro recorrido por la historia de la matemática en Europa desde la Epoca Oscura de los primeros siglos medievales hasta su punto culminante en la época de los filósofos escolásticos. Del melancólico nadir del siglo VII a la obra de Fibonacci y de Oresme en los siglos XIII y XIV, el progreso que hemos contemplado ha sido sorprendente, pero aún así el resultado de los esfuerzos

[19] Para más detalle véase C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1959), págs. 86-87, y H. Busard, «Über unendliche Reihen im Mittelalter», *L'Enseignement Mathématique*, 8, núms. 3-4 (1962).

[20] Véase John Murdoch, «Oresme's Commentary on Euclid», *Scripta Mathematica*, 27 (1964), págs. 67-91.

combinados de todas las civilizaciones medievales no fue comparable, en ningún sentido, al de los logros de la antigua Grecia en la matemática. El progreso en el conocimiento matemático nunca ha sido creciente de una manera continua en ninguna región del mundo, sea Babilonia, Grecia, China, India, Arabia o el mundo romano, y por lo tanto no nos puede coger de sorpresa el hecho de que se produzca en la Europa occidental un declinar de la matemática a partir de la obra de Bradwardine y de Oresme. El año 1349 murió Thomas Bradwardine a causa de la Peste Negra, la más terrible plaga que jamás sacudió a Europa. Se calcula que el número de los que murieron debido a la peste en el corto intervalo de un año o dos osciló, según los lugares, entre un tercio y la mitad de la población europea. Esta catástrofe tuvo que producir inevitablemente, entre otras consecuencias, graves dislocaciones sociales y una desmoralización general. Si tenemos en cuenta además que tanto Francia como Inglaterra, las naciones que habían detentado el liderazgo en matemáticas durante el siglo XIV, se vieron más tarde devastadas por las Guerras de los Cien Años y de las Dos Rosas durante el siglo XV, entonces la decadencia del saber nos resulta comprensible. Las universidades italianas, alemanas y polacas van a tomar durante el siglo XV el relevo, en lo que a la matemática se refiere, del ocaso del escolasticismo en Oxford y París, y nosotros vamos a centrar nuestra atención en los representantes de estos países en el capítulo siguiente.

Bibliografía

Boncompagni, Baldassare (ed.): *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze mathematische e fisiche* (Roma, 1868-1887, 20 vols; reed., New York: Johnson Reprint).

Boyer, C. B.: *History of the Calculus* (ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Busard, H.: «Über unendliche Reihen im Mittelalter», *L'Enseignement Mathématique*, 8, núms. 3-4 (1962).

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1900-1908, 4 vols.).

Clagett, Marshall: *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, Wis. University of Wisconsin Press, 1959).

——: *Archimedes in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964, 2 vols.).

Duhem, Pierre: *Les origines de la statique* (París, 1905-1906, 2 vols.).

Ginsburg, Benjamín: «Duhem and Jordanus Nemorarius», *Isis*, 25 (1936), 340-362.

Grant, Edward: «Bradwardine and Galileo: Equality of Velocities in the Void», *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1965), 344-364.

——: «Nicole Oresme and his *De proportionibus proportionum*», *Isis*, 51 (1960), 293-314.

——: «Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum», *Isis*, 56 (1965), 327-341.

—— (ed.): *Nicole Oresme: De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966).

Hill, G. F.: *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford: Clarendon, 1915).

Murdoch, John: «Oresme's Commentary on Euclid», *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 67-91.

Sarton, George: *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 vols. en 5).

Smith, D. E.: *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols.; reed. en rústica, New York: Dover, 1958).

Smith, D. E., y L. C. Karpinski: *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn, 1911).
Sullivan, J. W. N.: *The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour* (New York: Oxford University Press, 1925).
Wieleitner, Heinrich: «Der "Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme», *Bibliotheca Mathematica* (3), 13 (1913), 113-145.
——: «Ueber den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme», *Bibliotheca Mathematica* (3), 14 (1914), 193-243.
——: «Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter», *Bibliotheca Mathematica* (3), 14 (1914), 150-168.
Youschkevitch, A. P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964).

Ejercicios

1. Compárese la obra matemática de un representante de cada una de las siguientes civilizaciones que vivieran en torno al año 500: China, India, Roma, Grecia.
2. ¿De qué maneras es probable que las Cruzadas favorecieran o dificultaran la transmisión de la matemática del Islam al mundo cristiano?
3. Hacia el año 1150, ¿estaba la Europa occidental en más estrecho contacto con el mundo árabe o con el mundo griego? ¿Cuál de estos dos mundos tenía más que ofrecer comparativamente en términos matemáticos? Razónense detalladamente las respuestas.
4. Señale tres de los siguientes matemáticos: Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto, Boecio y Al-Khowarizmi, que fueron, en su opinión, los que ejercieron una mayor influencia en la matemática europea en torno al 1250. Dé razones convincentes para ello.
5. Compárense las formas de ganarse la vida de los matemáticos de la Europa medieval con las de los matemáticos árabes medievales.
6. Escríbase el número 980.765 en el sistema de notación de Planudes.
7. Exprésese, en el círculo unidad, el seno verso de un ángulo en términos del seno del mismo ángulo. Explíquese de dónde surgieron los nombres seno y seno verso.
8. Compruébese la solución dada por Fibonacci al problema de convertir una fracción de un bizancio en una fracción de un rótulo (véase el texto).
9. Calcúlese la razón de u_{12} a u_{13} en la sucesión de Fibonacci. ¿En cuántas cifras significativas coincide esta razón con la razón de la sección áurea?
10. Demuéstrese que la cúbica de Fibonacci, $x^3+2x^2+10x=20$, no tiene ninguna raíz racional.
11. Demuéstrese que la cúbica del ejercicio 10 no tiene ninguna raíz de la forma $a+\sqrt{b}$, con a y b racionales.
12. Calcúlese, aproximando hasta las centésimas, una raíz de la ecuación del ejercicio 10, y muéstrese que hasta este punto la solución de Fibonacci y la suya coinciden.
13. Compruébese la regla de Jordano (véase el texto) para dividir «un número dado *abc*».
14. Demuéstrese que la construcción de la trisección dada por Jordano y por Campano es correcta.
15. Utilizando la ley de Bradwardine, y suponiendo que una fuerza de 10 libras produce en un cuerpo una velocidad de 20 ft/seg actuando contra una resistencia de 2 libras, ¿qué velocidad producirá una fuerza de 40 libras en el mismo cuerpo, siendo la resistencia la misma que en el caso anterior?
16. Dibújese el polígono estrellado de Bradwardine correspondiente a 11 puntos sobre la circunferencia, al conectar ordenadamente los puntos de siete en siete.

17. Demuéstrese que, para tres subdivisiones iguales de un intervalo de tiempo, la razón de Oresme 1:3:5 para las distancias recorridas es correcta.

*18. Compruébese la suma de Calculator de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

*19. Compruébese la suma de Oresme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}$$

*20. Demuéstrese, utilizando el método de Oresme, que la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

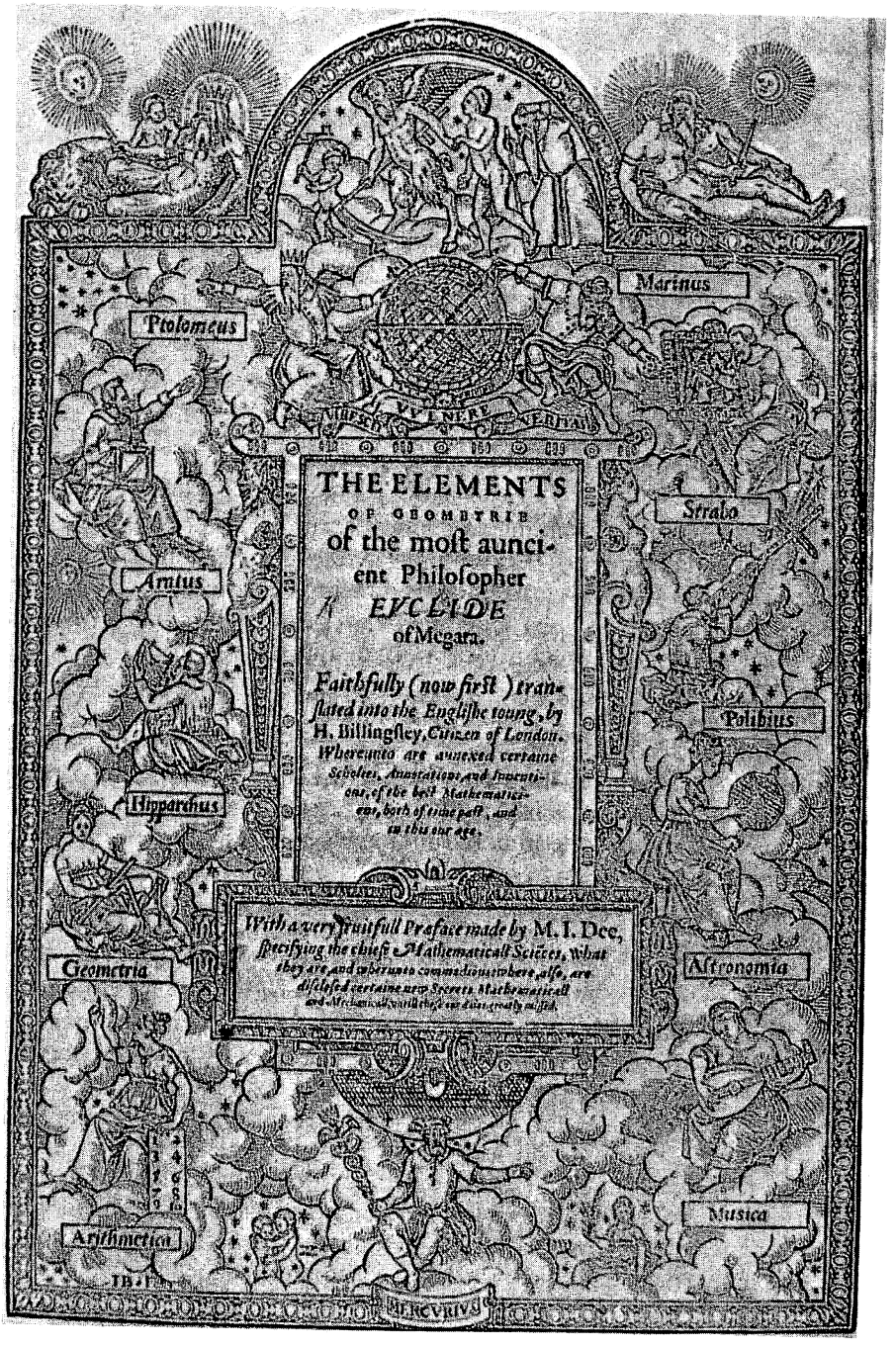
es divergente.

Capítulo XV
EL RENACIMIENTO

> Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así: ═══, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales.
>
> *Robert Recorde*

1. La época de los humanistas

La caída de Constantinopla en manos de los turcos en el año 1453 marcó el colapso definitivo del Imperio Bizantino, y a este respecto sirve como un hito cronológico útil en la historia de los acontecimientos políticos, pero el significado de esta fecha para la historia de la matemática es, sin embargo, más que discutible. Se afirma frecuentemente que con este motivo una gran cantidad de refugiados huyó a Italia llevándose con ellos valiosos manuscritos de antiguos tratados griegos, y contribuyendo así a poner en contacto al Occidente europeo con las obras de la antigüedad de una manera directa. Es igualmente probable, no obstante, que la caída de Constantinopla tuviera exactamente el efecto contrario, es decir, que desde entonces en adelante el Occidente no pudiera contar ya con lo que había sido una fuente segura de material manuscrito de los antiguos clásicos, tanto literarios como filosóficos y matemáticos. Sea la que sea la respuesta definitiva a este problema histórico, de lo que no hay duda es de que la actividad matemática estaba levantando cabeza de nuevo durante los años de mediados del siglo XV. Europa se recuperaba de la gran conmoción tanto física como espiritual de la Peste Negra, y la reciente invención de la imprenta con tipos movibles hizo posible que las obras cultas se extendieran y estuvieran disponibles con mucha más facilidad que nunca hasta entonces. El primer libro impreso en Europa occidental está fechado en 1447, y para finales del siglo se disponía ya de más de 30.000 ediciones de obras muy variadas; de estas obras sólo unas pocas trataban de matemáticas, pero estas pocas obras, junto con los manuscritos existentes, podían constituir ya una buen base para una expansión posterior. La recuperación de los clásicos geométricos griegos desconocidos o escasamente conocidos fue, en un principio, menos importante que la impresión de las traducciones latinas medievales de los tratados aritméticos y algebraicos árabes, puesto que, en cualquier caso, pocos hombres durante el siglo XV podían leer griego o bien tener un conocimiento de la matemática lo suficientemente avanzado como para entender las obras de los más grandes geómetras griegos. De hecho, una parte importante de la obra de Arquímedes hacía tiempo que estaba disponible en latín en la traducción de William de Moerbeke, pero esto de poco sirvió dado el escaso número de los que



Portada de la primera edición inglesa de los *Elementos* de Euclides (Londres, 1570). En ella se dice que la traducción es de Sir Henry Billingsley, más tarde Lord Mayor de Londres, pero al menos parte de ella (o quizá toda) puede ser debida a John Dee, autor del prólogo.

estaban en situación de apreciar la matemática clásica de este nivel de sofisticación. En este sentido hubo una gran diferencia entre la recepción que tuvo la matemática y la literatura, e incluso las ciencias naturales de la antigüedad griega. Según fueron cayendo los humanistas del siglo XV y del siglo XVI de una manera cada vez más profunda dentro del campo de fascinación que les producían los tesoros griegos de las ciencias y de las artes, recién descubiertos, su aprecio por los logros inmediatamente anteriores, tanto árabes como latinos, fue decayendo. La matemática clásica, exceptuando las partes más elementales de Euclides, era una materia fuertemente esotérica, accesible sólo a aquellos que contaban con un alto grado de entrenamiento previo, y por lo tanto la divulgación de los tratados griegos sobre estos temas no impidieron al principio, de ninguna manera seria, la continuidad de la tradición matemática medieval. Los estudios latinos medievales sobre geometría elemental y la teoría de proporciones, así como las contribuciones árabes a la teoría de las operaciones aritméticas y de los métodos algebraicos, no presentaban evidentemente dificultades comparables a las que ofrecían las obras de Arquímedes y de Apolonio. Así pues, las ramas más elementales de la matemática fueron las que atrajeron la atención general y las primeras en aparecer publicadas como libros impresos.

2. Nicolás de Cusa

Oresme había sostenido que todo lo que se puede medir se puede representar por un segmento (o «latitud» de dicha «forma»), y de hecho se desarrolló y floreció durante el primer período renacentista una matemática de la medida, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Un punto de vista parecido al de Oresme fue adoptado por Nicolás de Cusa (1401-1464), un hombre que representa muy bien las debilidades de la época debido a que se encontraba precisamente en la frontera entre los tiempos medievales y los modernos. Cusa es el nombre latinizado de Kues, una ciudad de la ribera del Mosela. Nicolás de Cusa vio que uno de los puntos débiles del pensamiento escolástico, en lo que se refiere a la ciencia, había sido su incapacidad para medir; según él creía, *mens* estaba relacionada etimológicamente con *mensura*, de manera que el conocimiento debería basarse en la medida. Cusa (o Cusanus, en su forma latinizada) se vio influenciado también por el interés general de los humanistas por la antigüedad, y adoptó una postura neoplatónica. Tuvo acceso además a una traducción de algunas de las obras de Arquímedes hecha por Jacobo de Cremona en 1450 pero, ¡lástima!, Nicolás de Cusa era mejor eclesiástico que matemático[1]; en la jerarquía eclesiástica alcanzó el rango de cardenal, pero en el campo de la matemática se le conoce más bien como un «cuadrador del círculo» mal orientado. Sus teorías filosóficas sobre la «concordancia de los contrarios» le condujo a pensar que los máximos y los

[1] Para una exposición excesivamente favorable de su obra, puede verse Max Simon, *Cusanus als Mathematiker* (Estrasburgo, 1911, en *Festschrift Heinrich Weber*, Leipzig y Berlín: Teubner, 1912, págs. 298-377). Para una edición moderna en alemán de las obras de Nicolás de Cusa véanse sus *Mathematische Schriften*, ed. por J. E. Hofmann (Hamburgo: F. Meiner, *ca.* 1950-1952).

mínimos están siempre relacionados, y por lo tanto que el círculo (un polígono con el máximo número posible de lados, infinito) tendría que ser conciliable con el triángulo (que es el polígono con el mínimo número posible de lados), y creyó haber llegado a una cuadratura basándose en un ingenuo proceso de promedio entre polígonos inscritos y circunscritos al círculo. El hecho de que su método fuera incorrecto tenía menos importancia que el de que él fuera uno de los primeros europeos modernos en intentar resolver un problema que había fascinado ya a las mejores mentes de la antigüedad, y que sus esfuerzos estimularan a algunos de sus contemporáneos a hacer una crítica de su obra.

3. Regiomontano

Entre los que señalaron los errores en el razonamiento de Cusa estaba Regiomontano (1436-1476), probablemente el matemático que ejerció una mayor influencia de todo el siglo XV, y cuya fecha de nacimiento podría tomarse como el comienzo de una nueva era. Regiomontano había estudiado en las Universidades de Leipzig y de Viena, en las que se desarrolló su gran afición a la matemática y la astronomía, acompañando más tarde al cardenal Besarión en su viaje a Roma, donde aprendió el griego y se familiarizó con las corrientes científicas y filosóficas entonces en boga. Besarión, arzobispo de Nicea, había logrado el capelo cardenalicio del papa de Roma Eugenio IV en 1439 por sus esfuerzos en unir las iglesias griega y latina; así se convirtió en un lazo de unión entre el saber clásico conservado en Constantinopla y el entonces joven movimiento renacentista de Occidente. Probablemente fue su asociación con el cardenal lo que le inspiró a Regiomontano la ambición por adquirir, traducir y publicar el legado científico de la antigüedad. Después de viajar y estudiar en Italia, regresó Regiomontano a Alemania, donde instaló una imprenta y un observatorio en Nuremberg con el objeto de promover el interés por la ciencia y la literatura. Tenía la intención de imprimir traducciones de Arquímedes, Apolonio, Herón y Ptolomeo, entre otros científicos, pero su trágica muerte a la edad de cuarenta años acabó con su ambicioso proyecto. En el año 1475 Regiomontano fue invitado a Roma por el papa Sixto IV para tomar parte en uno de los perennes intentos de reformar el calendario, y allí murió poco después de su llegada, algunos dicen que envenenado por sus anemigos. La lista de los libros que pensaba imprimir se conserva[2], y cabe pensar que el desarrollo de la matemática se habría acelerado, sin duda, si Regiomontano hubiera sobrevivido. Regiomontano era, por sus variados intereses, un típico «hombre del Renacimiento», como nos indica su propio nombre adoptivo: su verdadero nombre era Johann Müller de Königsberg, pero prefirió ser conocido, como tantos otros hombres de la época, por la forma latinizada del nombre de su lugar de nacimiento, y del nombre alemán de Königsberg o «Montaña del Rey», resultó su nombre de Regiomontanus.

Regiomontano se había puesto en contacto durante su estancia en Italia con

[2] Véase George Sarton, «The Scientific Literature Transmitted Through the Incunabula», *Osiris*, 5 (1938), págs. 41-247.



Portada de la *Margarita philosophica* (1503) de Gregor Reisch. En torno a la figura central con tres cabezas, se agrupan las siete artes liberales, con la aritmética sentada en el medio y sosteniendo en sus manos una tabla para calcular.

algunas de las figuras más importantes de la época, y con otras sostuvo una nutrida correspondencia sobre los temas de actualidad en el campo del pensamiento. Sus intereses intelectuales eran muy amplios, pero parece haber mostrado poca simpatía por el tipo de pensamiento especulativo que representaba Nicolás de Cusa, a quien criticó severamente. En lo que se refiere a astronomía, su contribución principal fue la de completar una nueva versión latina del *Almagesto* de Ptolomeo, que había comenzado su maestro en Viena Georg Peuerbach (1423-1469). La *Theoricae novae planetarum* de Peuerbach era un nuevo texto de astronomía que suponía una sensible mejora con respecto a las ubicuas copias de la *Esfera* de Sacrobosco, y que fue publicado en la imprenta de Regiomontano el año 1472, pero los humanistas sentían la necesidad de una edición latina del *Almagesto* mejor que las versiones medievales derivadas de la traducción árabe; de hecho, los humanistas insistían cada vez más en la elegancia y en la pureza de las lenguas

clásicas que se utilizaban, y aborrecían por lo tanto el bárbaro latín medieval de las primeras traducciones, así como el árabe del que procedían la mayor parte de las veces. Peuerbach tenía la intención de hacer un viaje a Italia acompañado por Regiomontano para buscar una buena copia manuscrita del *Almagesto*, pero murió prematuramente y la realización del plan recayó en su discípulo. El proyecto de traducción de Regiomontano dio lugar además a la publicación de varios libros escritos por él mismo, tales como su *Epítome del Almagesto de Ptolomeo*, notable por el énfasis que pone en la parte matemática de la obra, que era lo que se omitía casi siempre en los comentarios sobre astronomía descriptiva elemental. Mucho más importante desde el punto de vista matemático fue, no obstante, su *De triangulis omnimodis*, una exposición sistemática de los métodos de resolución de triángulos que marcó el verdadero renacimiento de la trigonometría.

Cada nueva obra astronómica venía acompañada invariablemente por unas tablas de funciones trigonométricas, y las obras de Peuerbach no eran una excepción, sino que incluían una nueva tabla de senos; en estos casos, sin embargo, la trigonometría hacía simplemente el papel de criada de la astronomía. En la India, donde tuvo precisamente su nacimiento la función seno, no se mostró apenas interés en ella aparte de su aplicación a los sistemas astronómicos o *Siddhāntas*. Incluso entre los árabes, para quienes la trigonometría era la segunda en el *ranking* del interés matemático, cediendo el primer lugar sólo al álgebra, esta materia no había tenido una existencia independiente, excepto en el *Tratado sobre el cuadrilátero* de Nasir Eddin, obra que debía más, desde luego, a los griegos que a los hindúes. La época de las grandes traducciones en Europa durante el siglo XII había incluido en el *corpus mathematicum* algo de trigonometría árabe, pero lo cierto es que durante varios siglos las contribuciones latinas occidentales se redujeron a pálidas imitaciones de los árabes. La *Practica geometriae* de Fibonacci y también las obras de Bradwardine contenían algunos fundamentos de trigonometría tomados de fuentes árabes, pero Europa no alcanzó un alto nivel en este campo hasta que Regiomontano se puso a escribir su libro *De triangulis*. Parece ser que Regiomontano conocía bien la obra de Nasir Eddin, y este hecho pudo haber sido el origen de sus deseos de organizar y sistematizar la trigonometría como una materia independiente de la astronomía.

El primer Libro del *De triangulis*, escrito hacia el año 1464, comienza con una exposición de los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, inspirada evidentemente por Euclides; a continuación vienen más de 50 proposiciones que tratan de la resolución de triángulos basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos. El Libro II comienza enunciando con claridad el teorema de los senos y demostrándolo, y siguen diversos ejemplos de problemas sobre determinación de lados, ángulos y áreas de triángulos planos, conocidos otros datos. Entre estos problemas está, por ejemplo, el siguiente: Si se conocen la base de un triángulo y el ángulo opuesto, y si además se conoce o bien la altura correspondiente a la base o bien el área, entonces pueden calcularse los otros lados. El Libro III contiene teoremas del tipo de los que nos encontramos en los antiguos textos griegos sobre «esférica», anteriores a la utilización de la trigonometría. El Libro IV, por último, trata de trigonometría esférica, incluyendo el teorema de los senos para la superficie esférica.

Entre las novedades que nos encontramos en el *De triangulis* de Regiomontano está el uso de «fórmulas» para el área, aunque escritas con palabras del lenguaje ordinario, pero en cambio esta obra desmerece un tanto el tratamiento de Nasir Eddin por su evitación sistemática de la función tangente. Sin embargo, la función tangente sí que se incluye en otro tratado trigonométrico de Regiomontano, sus *Tabulae directionum.* Las sucesivas revisiones de la obra de Ptolomeo habían puesto de manifiesto la necesidad de nuevas tablas de funciones trigonométricas y a calcularlas se dedicaron un cierto número de astrónomos del siglo XV, entre los que se contaba Regiomontano. Para evitar el uso de fracciones se acostumbraba, ya desde la antigüedad, adoptar como radio del círculo básico un valor grande, que recibía el nombre de *sinus totus.* En una de sus tablas Regiomontano sigue a sus predecesores inmediatos utilizando un radio de 600.000 unidades, mientras que para otras adoptó los valores de $10_1000.000$ ó de $600_1000.000$, y para su tabla de tangentes en las *Tabulae directionum* eligió como radio 100.000. Regiomontano no llama «tangente» a esta función, sino que usa solamente la palabra «numerus» para los valores, grado por grado, en la tabla titulada «Tabula fecunda» o «Tabla fructífera». A título de ejemplos, el valor correspondiente a 89° es $5_1729.796$, y para 90° simplemente *infinito.*

La repentina muerte de Regiomontano se produjo antes de que se publicaran sus dos obras trigonométricas, lo que retrasó considerablemente su efecto. Las *Tabulae directionum* se publicaron el año 1490, pero el tratado más importante, el *De triangulis*, tardó en aparecer impreso hasta el 1533 (y por segunda vez en 1561). No obstante, estas obras eran bien conocidas en forma manuscrita en el círculo de matemáticos de Nuremberg, donde trabajaba Regiomontano, y es muy probable que tuvieran influencia en los trabajos que se publicaron a principios del siglo XVI[3]. Durante los primeros cien años a partir de la caída de Constantinopla hubo varias ciudades en Europa central, tales como Viena, Cracovia, Praga y Nuremberg, que fueron los centros más importantes de la época en astronomía y matemáticas. La última de ellas, Nuremberg, no sólo fue un foco del saber, de las artes y de la invención, sino que llegó a ser un importante centro de impresión de libros, y en ella se publicaron algunos de los más grandes clásicos científicos, hacia mediados del siglo XVI.

4. La aplicación del álgebra a la geometría

El estudio general de los triángulos que emprendió Regiomontano le condujo a la consideración de ciertos tipos de problemas de construcciones geométricas que nos recuerdan un poco la *División de figuras* de Euclides. Por ejemplo, se pide construir un triángulo dados un lado, la altura correspondiente a este lado, y la razón de los otros dos lados. Aquí nos encontramos, sin embargo, con una

[3] Una exposición detallada de esta obra y de su influencia se incluye en el libro de Mary Claudia Zeller *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1944). Hay una traducción inglesa del *De triangulus* con el título *Regiomontanus On Triangles*, editada por Barnabas Hughes (1967).

significativa desviación de antiguas costumbres: mientras que Euclides formulaba invariablemente sus problemas en términos de cantidades geométricas generales, Regiomontano daba valores numéricos concretos a sus segmentos, incluso cuando trataba de mostrar que sus métodos eran completamente generales. Esto le permitía hacer uso de los métodos algorítmicos desarrollados por los algebristas árabes y transmitidos a Europa a través de las traducciones del siglo XII. En el problema anterior de la construcción geométrica, uno de los lados desconocidos se puede expresar como una raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes numéricos conocidos, y esta raíz es constructible geométricamente por medio de artificios conocidos de los *Elementos* de Euclides o del *Algebra* de Al-Khowarizmi. Tal como lo expresaba el mismo Regiomontano, le llamaba a uno de los lados la «cosa» y entonces resolvía el problema por la regla de la «cosa» y el «cuadrado», es decir, por medio de una ecuación de segundo grado. Otro problema en el que Regiomontano pedía construir un cuadrilátero cíclico dados los cuatro lados, puede resolverse de una manera análoga.

El álgebra de Regiomontano era de tipo retórico, como la de los árabes. Regiomontano conocía la *Arithmetica* de Diofanto, en la que se adoptaba la notación llamada sincopada, en su original griego, obra que esperaba traducir al latín, pero en definitiva fue de Al-Khowarizmi de quien aprendió la Europa medieval tardía los métodos algebraicos. La *Arithmetica*, a fin de cuentas, se ocupaba principalmente de los aspectos más recónditos de la teoría de números; además Regiomontano no llegó a publicarla traducida, y pocos matemáticos latinos conocieron su contenido durante los cien años siguientes, hasta que el año 1575 apareció publicada en latín. De hecho, la influencia de Regiomontano en álgebra se vio limitada no sólo por su adhesión a la forma de expresión retórica y por su temprana muerte. Después de su muerte, sus manuscritos fueron a parar a manos de un matemático de Nuremberg que no logró hacer efectivamente accesible esta obra a la posteridad. Así pues, Europa continuó aprendiendo su álgebra lenta y penosamente de la escasa tradición griega, árabe y latina que discurría a través de las universidades, los copistas eclesiásticos, la creciente actividad mercantil, y de los estudiosos que cultivaban otros campos del saber.

5. Una figura de transición

Regiomontano se encontró situado en un punto de unión crítico en la historia de la ciencia, y en él se dieron tanto las aficiones como la capacidad necesarias para sacar el mejor partido de todo ello. Compartía con los humanistas el amor por el saber clásico, pero se distinguía de ellos por su fuerte inclinación por las ciencias. Por otra parte, no se mostraba de acuerdo con el desprecio que manifestaban los humanistas por el saber escolástico y árabe, y su interés no sólo por el saber teórico sino también por las artes prácticas lo califica somo un típico hombre renacentista. ¿Qué mejor combinación podría haber deseado un científico moderno que una buena biblioteca, un observatorio astronómico, una imprenta, y junto con todo ello un ferviente deseo de conocer? Regiomontano sabía, por sus contactos con los averroístas en las universidades italianas, que los astronomos árabes habían estado

preocupados por las inconsistencias entre los sistemas de Aristóteles y Ptolomeo, y sin duda sabía también que tanto Oresme como Cusa se habían planteado seriamente la posibilidad del movimiento de la Tierra. Se dice que Regiomontano tenía la intención de abordar una reforma de la astronomía, y es muy posible que, caso de haber vivido lo suficiente, hubiera podido anticiparse a Copérnico, pero su muerte prematura acabó con todos estos proyectos, y tanto la astronomía como la matemática debieron buscar a otros que llevaran a cabo las siguientes etapas, entre los cuales se contó una importante figura en Francia, aislada de la corriente central del desarrollo científico.

6. El *Triparty* de Nicolás Chuquet

La mayor parte de los matemáticos de comienzos del Renacimiento provenían de Alemania y de Italia, pero el año 1484 apareció en Francia un manuscrito que, tanto por su nivel como por la importancia de las ideas expuestas, era quizá el más notable desde la publicación, casi tres siglos antes, del *Liber abaci* de Fibonacci, y que, al igual que el *Liber abaci*, tampoco fue impreso hasta el siglo XIX. La obra a que nos referimos, titulada *Triparty en la science des nombres*, fue escrita por Nicolás Chuquet (†*ca.* 1500), acerca del cual no sabemos prácticamente nada salvo que nació en París, se hizo bachiller en medicina y ejerció en Lyon. El *Triparty* apenas se parece a ninguna obra anterior sobre aritmética o álgebra, y los únicos autores que se citan en ella son Boecio y Campano. Sí se observa, sin embargo, una evidente influencia italiana, que debe provenir posiblemente de que Chuquet conociese bien el *Liber abaci* de Fibonacci.

La primera de las «Tres partes» trata de las operaciones aritméticas racionales con números, incluyendo una explicación detallada del sistema de numeración hindú-árabe. De los numerales hindú-árabes dice Chuquet que «la décima figura no tiene o significa ningún valor». La obra está escrita en un estilo esencialmente retórico, aunque con las importantes sincopaciones que veremos más adelante, y las cuatro operaciones fundamentales vienen representadas por las palabras *plus*, *moins*, *multiplier par* y *partyr par*, de las que las dos primeras aparecen a veces abreviadas a la manera medieval como $\bar{p}$ y $\bar{m}$. En conexión con el cálculo de promedios da Chuquet una *regle des nombres moyens*, según la cual $\frac{a+c}{b+d}$ está entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, siendo a, b, c, d, números positivos. En la segunda parte de la obra, que trata del cálculo con raíces de números, hay ya una cierta sincopación, y así lo que sería en nuestro lenguaje moderno $\sqrt{14-\sqrt{180}}$ aparece en la forma no demasiado distinta, aunque sí ambigua, $R)^2 \cdot 14 \cdot \bar{m} \cdot R)^2 \cdot 180$.

La última parte y, con mucho, la más importante del *Triparty* se refiere a la «Regle des premiers», es decir, la regla de las incógnitas o lo que nosotros llamaríamos álgebra. Durante los siglos XV y XVI se utilizaron diversos nombres para la «cosa desconocida», tales como *res* en latín, *chose* en francés, *cosa* en italiano o *coss* en alemán; en este contexto la palabra *premier* que utiliza Chuquet

es completamente inusual. A la segunda potencia le llama *champs*, mientras que el nombre latino solía ser el de *census*, la tercera potencia *cubiez*, y la cuarta *champs de champ*. Para los múltiplos de estas potencias, e incluso para ellas mismas, inventó Chuquet una notación exponencial muy notable. La *denominación* o potencia de la cantidad incógnita venía indicada por un exponente asociado con el coeficiente del término en cuestión, de manera que nuestras expresiones modernas $5x$, $6x^2$ y $10x^3$ aparecen en el *Triparty* como $.5.^1$, $.6.^2$ y $.10.^3$. Además, este sistema se aplicaba no sólo a las potencias positivas, sino también a los exponentes negativos o cero, de manera que nuestro 9 ó $9x^0$ se convertía en $.9.^0$ y $9x^{-2}$ en $.9.^{2.m}$, que significa .9. *seconds moins*. Este sistema de notación pone en evidencia claramente las leyes que rigen las operaciones con exponentes, con las que probablemente se había familiarizado Chuquet en la obra de Oresme sobre proporciones; Chuquet escribe, por ejemplo, que $.72.^1$ dividido por $.8.^3$ es igual a $.9.^{2.\tilde{m}.}$, es decir $\frac{72x}{8x^3} = 9x^{-2}$. En conexión con estas leyes de los exponentes hacé observar que, si construimos una tabla de las sucesivas potencias de 2 con exponentes desde 0 a 20, entonces a la suma de los exponentes corresponde el producto de las potencias; excepto por el tamaño de los intervalos entre las diferentes entradas en esta tabla, se puede decir que esto constituye ya una tabla de logaritmos en base dos en miniatura, como había hecho notar ya Arquímedes. Observaciones análogas a estas de Chuquet se iban a repetir varias veces a lo largo del siglo siguiente, y jugaron sin duda un papel importante en la invención final de los logaritmos.

La segunda mitad de la última parte del *Triparty* está dedicada a la resolución de ecuaciones. Aquí nos encontramos con muchos de los problemas que habían aparecido ya en sus predecesores, pero también hay por lo menos una novedad importante. Al escribir $.4.^1$ egaulx a $\tilde{m}.2.^0$ para lo que nosotros escribimos $4x = -2$, Chuquet está expresando por primera vez un número negativo aislado en una ecuación algebraica. Chuquet no admitía en general el cero como raíz de una ecuación, pero por lo menos en una ocasión hace observar que el número buscado era cero; al estudiar ecuaciones de la forma $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$, donde los coeficientes y los exponentes son todos ellos números positivos, se encontró con que en algunos casos habría raíces imaginarias, limitándose a añadir en estos casos que «tel nombre est ineperible»[4].

El *Triparty* de Chuquet es un libro en el que, como en la *Colección* de Pappus, es imposible determinar con exactitud cuál es la parte original del autor. Ambos fueron deudores indudablemente de sus respectivos predecesores inmediatos, pero lo cierto es que no podemos identificar a ninguno de ellos. Por añadidura, en el caso de Chuquet tampoco podemos determinar su posible influencia sobre los escritores posteriores. El *Triparty* no se imprimió hasta el 1880, y por lo tanto

[4] Pueden verse buenas exposiciones de esta obra en Ch. Lambo, S. J., «Une Algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet», *Revue des Questions Scientifiques* (3), 2 (1902), págs. 442-472, así como en Aristide Marre, «Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres», *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 13 (1880), págs. 555-659, 693-814; 14 (1881), págs. 413-460.

debieron conocerlo pocos matemáticos de la época, pero hubo uno al menos en cuyas manos debió caer y que utilizó tal cantidad del material que contiene que puede ser acusado sin reparos de plagio, incluso a pesar de que menciona a Chuquet por su nombre. Se trata de Etienne de la Roche, que publicó en Lyon su *Larismethique nouvellement composee* en 1520 y de nuevo en 1538, obra que debía a Chuquet, tal como ahora sabemos, gran arte de su contenido. Así pues, podemos decir con seguridad que el *Triparty* no dejó de ejercer su influencia.

7. La *Summa* de Luca Pacioli

Si bien es cierto que el primer libro de álgebra del Renacimiento, el de Chuquet, fue escrito por un francés, también lo es que el más conocido durante este período se publicó diez años más tarde en Italia. De hecho, la *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* del fraile Luca Pacioli (1445-1514) eclipsó el *Triparty* de una manera tan completa que las historias antiguas del álgebra solían pasar directamente del *Liber abaci* de 1202 a la *Summa* de 1494, sin mencionar ni la obra de Chuquet ni ninguna otra intermedia. Sin embargo, el camino que hizo posible la *Summa* había sido preparado ya por una generación al menos de algebristas, puesto que el *Algebra* de Al-Khowarizmi ya había sido traducida al italiano para el 1464 como muy tarde, fecha que aparece en una copia manuscrita de la Colección Plimpton en New York; el autor de este manuscrito afirma que para su obra se ha basado en numerosos predecesores en este campo, y da los nombres de algunos que datan de principios del siglo XIV. Se suele dar por sentado que el Renacimiento científico vino provocado por la chispa que supuso el redescubrimiento de las antiguas obras griegas, pero en matemáticas por lo menos el Renacimiento se caracterizó especialmente por el desarrollo del álgebra, y a este respecto no fue más que una continuación de la tradición medieval. Regiomontano conocía bien el griego, como hemos visto, pero no compartía en cambio la glorificación del helenismo de los humanistas, sino que se encontraba dispuesto a reconocer también la importancia del álgebra medieval árabe y latina. Estaba familiarizado evidentemente con las obras de Al-Khowarizmi y de Fibonacci, y en sus planes entraba el de imprimir el *De numeris datis* de Jordano Nemorario. Si Regiomontano hubiera conseguido ver hechos realidad sus planes de publicación, con toda seguridad no se consideraría hoy la *Summa* de Pacioli (o Paciuolo) como el primer libro de álgebra impreso.

La *Summa*, cuyo manuscrito estaba terminado ya hacia el 1487, tuvo una influencia mayor de la que correspondía a su originalidad. El libro consiste realmente en una impresionante recopilación de material de cuatro campos distintos (sin indicar generalmente las fuentes de donde está tomada la información): aritmética, álgebra, geometría euclídea muy elemental y contabilidad de doble entrada. Pacioli, conocido también como Luca di Borgo, fue durante cierto tiempo tutor de los hijos de un rico comerciante veneciano, y conocía bien, indudablemente, la importancia creciente que iba adquiriendo la aritmética comercial en Italia. La primera aritmética que apareció impresa anónimamente en Treviso en 1478 exponía simplemente las operaciones fundamentales, las reglas de

dos y de tres, y algunas aplicaciones mercantiles. Poco tiempo después aparecieron otras varias aritméticas comerciales ya más técnicas, de las qe Pacioli tomó material libremente para escribir su obra. Una de ellas, el *Compendio de lo abaco* de Francesco Pellos (*fl.* 1450-1500), publicada en Turín el mismo año que Colón descubría América, presentaba la característica de utilizar un punto para representar la división de un entero por una potencia de diez, anunciando ya de esta manera nuestra coma decimal.

La *Summa*, que fue escrita en lengua vernácula como el *Triparty*, resultaba ser un compendió tanto de otras obras no publicadas que había compuesto anteriormente el mismo autor, como de conocimientos generales de la época. La parte relativa a la aritmética trata, con mucho detalle, diversos artificios para multiplicar y para hallar raíces cuadradas, y la sección dedicada al álgebra incluye las soluciones usuales de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Aunque se echa de menos la notación exponencial de Chuquet, hay un uso creciente de cierta sincopación por medio de abreviaturas; por esta época ya se utilizaban ampliamente en Italia las letras p y m para representar la suma y la resta, y Pacioli utilizó además *co*, *ce* y *ae* para *cosa* (es decir, la incógnita), *censo* (el cuadrado de la incógnita) y *aequalis*, respectivamente; para la cuarta potencia de la incógnita usó, de una manera natural, *cece* (o cuadrado del cuadrado). Pacioli creía, haciendo eco con ello a una idea que había formulado ya Omar Khayyam, que las ecuaciones cúbicas no podrían ser resueltas algebraicamente.

La parte geométrica de la *Summa* de Pacioli carece de importancia y algunos de los problemas geométricos nos recuerdan la geometría de tipo algebraico de Regiomontano, utilizando siempre casos numéricos concretos. Por ejemplo, se pide en un problema hallar los lados de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita es cuatro y que los segmentos en que divide a uno de los lados el punto de tangencia miden seis y ocho. A pesar de que la geometría de Pacioli no llamó apenas la atención, los aspectos comerciales del libro se hicieron tan populares, sin embargo, que se suele considerar al autor como el padre de la moderna contabilidad de doble entrada.

8. Leonardo da Vinci

Pacioli, el primer matemático del que tenemos un retrato auténtico, volvió a probar suerte dos veces más con la geometría, en 1509, publicando una edición de Euclides que no ofrece nada destacable y otra obra con el impresionante título de *De divina proportione*, en la que se estudian los polígonos y los poliedros regulares y la razón que se conocería más tarde como «la sección áurea». Este libro es notable por sus magníficas figuras[5], que han sido atribuidas a Leonardo da Vinci (1452-1519). A menudo se suele considerar a Leonardo como un matemático, pero su mente inquieta no podía concentrarse en la aritmética, el álgebra o la geometría el tiempo suficiente como para hacer alguna contribución importante. En sus

[5] Véase, para una descripción más detallada de esta obra y de la actividad contemporánea, R. Emmett Taylor, *No Royal Road. Luca Pacioli and His Times* (1942).

cuadernos podemos encontrar cuadraturas de lúnulas, construcciones de polígonos regulares y consideraciones sobre centros de gravedad y sobre curvas de doble curvatura, pero lo cierto es que es más conocido por sus aplicaciones de la matemática a la ciencia y a la técnica y por su teoría de la perspectiva. A Leonardo da Vinci se le suele caracterizar como el prototipo de hombre renacentista, y sus actividades en otros campos, excluida la matemática, justifican plenamente esta imagen. Leonardo fue un genio de pensamiento audaz y gran originalidad, un



Grabado de la portada de una edición de uno de los *Rechenbücher* de Adam Riese, el famoso *Rechenmeister*, de 1529. En él se representa una competición entre un algorista y un abacista.

hombre a la vez de acción y de contemplación, un artista al mismo tiempo que ingeniero, pero no parece haber estado en estrecho contacto con la tendencia dominante en la matemática de la época: el desarrollo del álgebra. Pocas materias hay que dependan tanto de una tradición continuada en los libros así como de una larga concentración y meditación como la matemática, y Leonardo no era precisamente un hombre dispuesto a mantener la concentración de una investigación de biblioteca, y ni siquiera de perseguir sus imaginativas ideas hasta sus conclusiones. Al fin, cientos de años más tarde, las ideas renacentistas sobre la perspectiva matemática iban a florecer en una nueva rama de la geometría, pero este desarrollo no parece haber sido influenciado de ninguna manera perceptible por los pensamientos que el gran zurdo Leonardo nos dejó en sus cuadernos de notas, bajo la forma de su peculiar escritura invertida especularmente.

9. Las álgebras germánicas

La palabra misma Renacimiento nos trae ya a la mente de una manera inevitable los tesoros italianos, literarios, artísticos y científicos, debido a que este interés renovado por el arte y por el saber se manifestó antes en Italia que en otros lugares de Europa. Allí fue donde, en medio de un pendenciero enfrentamiento de ideas, aprendieron los hombres a confiar cada vez más en la observación independiente de la naturaleza y en los libres juicios de la mente. Italia había sido, además, uno de los dos principales caminos por los que penetró en Europa la ciencia árabe, incluida la aritmética y el álgebra. Sin embargo, algunos otros lugares de Europa no se quedaron tampoco muy rezagados, como vienen a demostrar los ejemplos de las obras de Regiomontano y Chuquet. En Alemania, por ejemplo, los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana *coss*, para designar a la incógnita, y el álgebra misma vino a llamarse «el arte cósico» o «arte de la cosa». Además, los símbolos germánicos para la suma y la resta terminaron por desplazar a los símbolos italianos p y m; el libro más antiguo en que aparecen impresos nuestros conocidos símbolos + y − es una aritmética comercial con el título *Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, publicada en 1489, antes de la publicación de la *Summa* de Pacioli, por un alemán, Johann Widman (nacido hacia el 1460), *Rechenmeister* o «maestro calculista», en Leipzig. Los signos + y −, que se utilizaban originalmente, al parecer, para indicar exceso o defecto en las medidas de mercancías en los almacenes, terminaron por pasar a ser símbolos para representar las dos operaciones aritméticas básicas de sumar y restar[6]. Incidentalmente sabemos que Widman disponía de una copia manuscrita del *Algebra* de Al-Khowarizmi, obra que era bien conocida también por otros matemáticos alemanes.

Entre las numerosas álgebras germánicas que ya hemos mencionado, está la *Die Coss*, escrita en 1524 por el famoso *Rechenmeister* alemán Adam Riese (1492-1559). Este autor fue el más influyente de los escritores alemanes en la tendencia a reemplazar los viejos métodos de cálculo basados en el uso de cuentas o fichas, o bien de los numerales romanos, por los nuevos métodos utilizando pluma y los numerales hindú-árabes. Sus numerosos textos de aritmética resultaron ser tan efectivos que aún se usa en Alemania la frase «nach Adam Riese» como un elogio a la exactitud en los cálculos aritméticos. Riese menciona también en su *Coss* el *Algebra* de Al-Khowarizmi y cita además a un cierto número de predecesores alemanes en este campo.

La primera mitad del siglo XVI vio surgir una verdadera multitud de álgebras germánicas, entre las más importantes de las cuales estaban la *Coss* (1525) de Christoph Rudolff (*ca.* 1500-*ca.* 1545), el *Rechnung* (1527) de Peter Apian (1495-1552) y la *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel (*ca.* 1487-1567). La primera es especialmente importante por ser uno de los primeros libros impresos que hace uso de las fracciones decimales, así como del símbolo moderno para las raíces; la

[6] Véase J. W. L. Glaisher, «On the Early History of the Signs + and − and on the Early German Arithmeticians», *Messenger of Mathematics*, 51 (1921-1922), págs. 1-148.

segunda es notable por el hecho de que en ella, en una aritmética comercial a fin de cuentas, aparece impreso en la portada el llamado «triángulo de Pascal», casi un siglo antes del nacimiento de Pascal. La tercera de las obras que hemos mencionado, la *Arithmetica integra* de Stifel, fue la más importante de todas las álgebras germánicas del siglo XVI. Incluye también el triángulo de Pascal, pero su importancia se debe realmente al tratamiento de los números negativos, las raíces y las potencias. Mediante el uso de coeficientes negativos en las ecuaciones, pudo Stifel reducir la multiplicidad de casos de ecuaciones cuadráticas a lo que aparece como una forma única, pero como contrapartida tenía que explicar por medio de una regla especial cuándo usar el signo + y cuándo el −; por otra parte, incluso él nos sorprende al no admitir los números negativos como posibles raíces de una ecuación. Stifel, que había sido monje y que se convirtió en un predicador luterano itinerante y, durante un cierto tiempo, en profesor de matemáticas en Jena, fue uno de los muchos escritores que popularizó los símbolos «germánicos» + y − a expensas de la notación «italiana» de la p y la m. Conocía bien las propiedades de los números negativos, a pesar de lo cual persistía en llamarlos *numeri absurdi*, y acerca de los números irracionales se mostraba un tanto indeciso, diciendo de ellos que estaban «ocultos bajo una cierta forma de nube de infinitud». Al tratar una vez más el tema de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, tal como había hecho ya Chuquet para las potencias de dos de exponente de 0 a 20, Stifel extendió la tabla para incluir en ella las potencias negativas $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$ y $2^{-3} = \frac{1}{8}$, sin usar, no obstante, la notación exponencial. Para las sucesivas potencias de la cantidad incógnita en álgebra, usó Stifel en su *Arithmetica integra* abreviaturas para las palabras alemanas *coss*, *zensus*, *cubus* y *zenzizensus*, pero en un tratado posterior, el *De algorithmi numerorum cossicorum*, propuso utilizar una única letra para representar la incógnita, y repetir dicha letra para las potencias más elevadas de la incógnita, tantas veces como indique la potencia en cuestión, sistema utilizado más tarde por Harriot[7].

10. El *Ars magna* de Cardano

La *Arithmetica integra* constituía un tratamiento muy completo y sistemático del álgebra tal como era conocida generalmente hacia el 1544, año de su publicación, pero un año más tarde exactamente ya se había quedado anticuada en cierto sentido. Stifel daba en su obra muchos ejemplos que conducían a ecuaciones cuadráticas, pero ninguno de sus problemas conducía a una ecuación cúbica propiamente dicha, por la sencilla razón de que no sabía nada más sobre la resolución algebraica de las cúbicas que lo que sabían Pacioli u Omar Khayyam. El año 1545, sin embargo, se divulgó la solución no sólo de la ecuación cúbica, sino también de la cuártica, gracias a la publicación del *Ars magna* de Jerónimo Cardano (1501-1576). Un avance tan sorprendente e inesperado como éste produjo

[7] Para una descripción detallada de los primitivos libros de aritmética y de álgebra, véase especialmente D. E. Smith, *Rara arithmetica* (1908). Y para una lista de estas aritméticas primitivas puede verse J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik* (1936), vol. I, págs. 142-145



Jerónimo Cardano

un impacto tan fuerte en el mundo de los algebristas, que el año 1545 se suele considerar a menudo como el que marca el comienzo del período moderno en la matemática. Hay que advertir inmediatamente, sin embargo, que Cardano (o Cardan) no fue el descubridor original de la solución de la ecuación cúbica ni de la cuártica, tal como él mismo admite francamente en su libro. La sugerencia para resolver la cúbica, según nos dice, la obtuvo de Niccolo Tartaglia (ca. 1500-1557), mientras que la solución de la cuártica fue descubierta por primera vez por el antiguo secretario de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565). Lo que no menciona Cardano en el *Ars magna* es el juramento solemne que le había hecho a Tartaglia, en el sentido de que no desvelaría el secreto, ya que éste intentaba labrarse su

reputación como matemático publicando la solución de la cúbica como la parte culminante de su futuro tratado de álgebra.

Para evitar sentir por este motivo una compasión excesiva por Tartaglia, hay que hacer notar que éste había publicado una traducción de Arquímedes (1543) derivada de la de Moerbeke, dejando la impresión de que era suya propia, y más tarde, en su obra *Quesiti et inventioni diverse* (Venecia, 1546), da la ley del plano inclinado, derivada presumiblemente de la obra de Jordano Nemorario, pero sin atribuirla adecuadamente a su verdadero autor. De hecho, es posible incluso que el mismo Tartaglia obtuviese la pista conducente a la resolución de la cúbica de alguna fuente anterior. Cualquiera que sea la verdad en el fondo de la controversia, complicada y un tanto sórdida, entre los partidarios de Cardano y los de Tartaglia, lo que está claro es que ninguno de los dos protagonistas fue el primero en hacer el descubrimiento. El héroe del caso fue evidentemente un personaje cuyo nombre apenas recuerda nadie hoy, Scipione del Ferro (*ca.* 1465-1526), que fue profesor de matemáticas en Bolonia, una de las más antiguas de las universidades medievales y una escuela con una gran tradición matemática. Cómo y cuándo hizo del Ferro su asombroso descubrimiento no lo sabemos, pero sí sabemos que no publicó la solución, sino que se la reveló antes de su muerte a uno de sus alumnos, Antonio María Fior (o Floridus, en forma latinizada), un matemático mediocre.

Alguna noticia sobre la existencia de una solución algebraica de la ecuación cúbica debió filtrarse, al parecer, y Tartaglia nos dice que al tener conocimiento de la posibilidad de resolverla, se le ocurrió dedicarse intensamente a descubrir el método por sí mismo. Ya fuera independientemente o sobre la base de alguna sugerencia, lo cierto es que Tartaglia consiguió aprender, hacia el año 1541, a resolver ecuaciones cúbicas. Cuando se extendió esta noticia, se organizó un desafío matemático entre Fior y Tartaglia. Cada uno de los dos contendientes propondría treinta cuestiones al otro para resolverlas en un intervalo de tiempo fijo. Cuando llegó el día de decidir el resultado, Tartaglia había resuelto todas las cuestiones propuestas por Fior, mientras que éste no había conseguido resolver ni una sola de las propuestas por su contrincante. La explicación de este resultado es relativamente sencilla. Hoy consideramos a todas las ecuaciones cúbicas como esencialmente de un tipo único y susceptibles por lo tanto de ser tratadas por un método de resolución unificado, pero en la época de Tartaglia, en que los coeficientes negativos todavía no se utilizaban prácticamente, había tantos tipos distintos de cúbicas como posibilidades en los signos positivos o negativos de los coeficientes, Fior sólo sabía resolver ecuaciones del tipo en el que son «los cubos y las raíces igual a un número», es decir, las del tipo $x^3+px=q$, aunque en esta época sólo se utilizasen coeficientes numéricos concretos (y positivos). Tartaglia, mientras tanto, había aprendido a resolver también las ecuaciones en que son «los cubos y cuadrados igual a un número». Es probable que Tartaglia supiera cómo reducir este caso al de Fior, eliminando el término cuadrático, puesto que en esta época se sabía ya que si el coeficiente del término de mayor grado es uno, entonces el coeficiente del término de segundo grado, cuando aparece en el segundo miembro de la ecuación, es igual a la suma de las raíces.

No tardaron en llegarle a Cardano las noticias del triunfo de Tartaglia, e inmediatamente invitó a su casa al ganador, sugiriéndole que arreglaría las cosas

para presentarle a un personaje que lo patrocinaría en el futuro. Tartaglia se encontraba sin ningún tipo de apoyo importante, debido quizá en parte a sus dificultades con el habla. De pequeño había recibido un sablazo en la caída de Brescia en manos de los franceses, en 1512, lo que le impedía hablar correctamente. Este hecho le ganó el apodo de Tartaglia o tartamudo, nombre que él mismo usó más tarde sin ninguna inhibición en lugar de su nombre propio Niccolo Fontana. En marcado contraste con Tartaglia, Cardano había conseguido un gran éxito mundano como médico; su fama era tan grande que en una ocasión fue llamado a Escocia para diagnosticar una enfermedad al arzobispo de St. Andrews, un caso de asma evidentemente. Siendo como era hijo ilegítimo, astrólogo por sus aficiones, jugador y hereje, sin embargo Cardano llegó a ser un respetado profesor en Bolonia y en Milán, y finalmente le fue concedida por el papa una pensión. Uno de sus hijos envenenó a su propia esposa, el otro salió un canalla y Ferrari, el secretario de Cardano, murió envenenado, probablemente a manos de su hermana. A pesar de todas estas distracciones, Cardano fue un escritor prolífico que trató temas que van desde su propia vida y otros temas mundanos a la ciencia y la matemática.

En su obra científica más importante, un grueso volumen con el título *De subtilitate*, Cardano se nos muestra claramente como un hijo de su época, discutiendo interminablemente la física aristotética transmitida por la filosofía escolástica, mientras que al mismo tiempo se entusiasma con los nuevos descubrimientos de los tiempos recientes. Lo mismo podría decirse esencialmente de sus matemáticas, que también eran típicas de la época que le tocó vivir. Cardano conocía muy poco de Arquímedes y todavía menos de Apolonio, pero estaba en cambio muy familiarizado con el álgebra y la trigonometría. Ya en 1539 había publicado una *Practica arithmetice* en la que se incluyen, entre otras cosas, la racionalización de denominadores que contengan raíces cúbicas, y en la época en que publicó el *Ars magna*, media docena de años más tarde, era probablemente el mejor algebrista de Europa. Sin embargo, el *Ars magna* constituye hoy un libro de lectura pesada; caso tras caso de la ecuación cúbica se tratan con detalle, laboriosamente, según que los términos de los diversos grados aparezcan en el mismo o en distinto miembro de la ecuación, puesto que todos los coeficientes han de ser necesariamente positivos. A pesar del hecho de que estudia siempre ecuaciones numéricas, sigue la costumbre de Al-Khowarizmi de razonar geométricamente, de manera que podríamos referirnos a su método como el de «completar el cubo». Hay, desde luego, ciertas ventajas en este planteamiento. Por ejemplo, como x^3 es un volumen, $6x$, en la ecuación de Cardano que estudiamos a continuación, debe considerarse también como un volumen, y por lo tanto el número 6 debe tener las dimensiones de un área, lo cual viene a sugerir el tipo de sustitución que utiliza Cardano, como vamos a ver en el párrafo siguiente.

11. La resolución de la ecuación cúbica

Cardano usaba poca sincopación, como buen discípulo de Al-Khowarizmi, y, como los árabes en general, consideraba a sus ecuaciones con coeficientes

numéricos concretos como representantes de tipos generales. Por ejemplo, cuando escribe «Sea el cubo y seis veces el lado igual a 20» (o, como escribiríamos nosotros, $x^3+6x=20$), está pensando obviamente en esta ecuación como típica de *todas* aquellas que presentan «el cubo y la cosa igual a un número», es decir, de la forma $x^3+px=q$. La solución de esta ecuación ocupa un par de páginas en estilo retórico, que nosotros escribiríamos en símbolos de la manera siguiente: Substitúyase x por $u-v$ y supóngase u y v relacionadas de manera que su producto, considerado como un área, sea igual a un tercio del coeficiente de x en la ecuación, es decir, $uv=2$. Haciendo la sustitución obtenemos como resultado $u^3-v^3=20$, y eliminando v nos queda $u^6=20u^3+8$, una ecuación de segundo grado en u^3, y por lo tanto se tiene que $u^3=\sqrt{108}+10$; de la relación $u^3-v^3=20$ obtenemos $v^3=\sqrt{108}-10$, luego como $x=u-v$ resulta $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Una vez efectuado todo el proceso para este caso concreto, termina Cardano dando una formulación verbal de la regla equivalente a nuestra solución moderna de $x^3+px=q$ como

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3+(q/2)^2}+q/2}-\sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3+(q/2)^2}-q/2}$$

A continuación Cardano pasa a estudiar otros casos, tales como el de «el cubo igual a la cosa y a un número»; aquí se hace la sustitución $x=u+v$ en vez de la $x=u-v$, con el resto del proceso esencialmente de la misma manera que antes. En este caso hay, sin embargo, una dificultad. Si se aplica la regla, por ejemplo, a la ecuación $x^3=15x+4$, el resultado a que se llega es

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Cardano sabía muy bien que no existe la raíz cuadrada de un número negativo, y, sin embargo, sabía también que $x=4$ era una raíz de esta ecuación, de manera que no podía entender qué sentido tenía su regla en esta situación. Cardano había jugado ya en otra ocasión con las raíces cuadradas de números negativos, al intentar resolver el problema de dividir 10 en dos partes tales que su producto valga 40. Las reglas usuales del álgebra conducen a la solución $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$ ó, en la notación de Cardano, 5p:Rm:15 y 5m:Rm:15. Refiriéndose a estas raíces cuadradas de números negativos las denominó Cardano como «sofísticas», concluyendo que en este caso su resultado era «tan sutil como inútil». A los matemáticos posteriores les correspondería la tarea de demostrar que tales manipulaciones eran de veras sutiles, pero que estaban muy lejos de ser inútiles. Hay que apuntar entre los méritos de Cardano el que al menos prestase cierta atención a esta situación desconcertante[8].

12. La resolución de la ecuación cuártica por Ferrari

Sobre la regla para resolver ecuaciones cuárticas nos dice Cardano en el *Ars magna* que «se debe a Luigi Ferrari, que la inventó a petición mía». Una vez más se

[8] Puede verse una traducción del *Ars magna* al inglés, por T. R. Witmer, con el título *The Great Art or The Rules of Algebra* (M. I. T., 1968). También puede consultarse una selección de esta obra en D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics* (1929).

consideran uno tras otro todos los casos posibles separadamente, veinte en total, pero para el lector moderno bastará con que expongamos un caso. Sea «el cuadrado del cuadrado, el cuadrado y el número igual al lado». Cardano sabía ya cómo eliminar el término de grado 3 en caso de que apareciese, aumentando o disminuyendo las raíces en un cuarto del coeficiente del término cúbico. Entonces las sucesivas etapas en la solución de $x^4+6x^2+36=60x$, las presenta Cardano esencialmente como sigue:

1. En primer lugar añádanse suficientes cuadrados y números a ambos miembros de la ecuación para convertir el primer miembro en un cuadrado perfecto, en este caso sería x^4+12x^2+36 o bien $(x^2+6)^2$.
2. Añádanse ahora a los dos miembros de la ecuación términos en los que aparezca una nueva incógnita y, de tal manera que el primer miembro siga siendo un cuadrado perfecto, tal como $(x^2+6+y)^2$. La ecuación se convierte entonces en

$$\begin{aligned}(x^2+6+y)^2 &= 6x^2+60x+y^2+12y+2yx^2\\ &=(2y+6)x^2+60x+(y^2+12y)\end{aligned}$$

3. La etapa siguiente, que es la crucial, consiste en elegir y de tal manera que el trinomio del segundo miembro se convierta en un cuadrado perfecto. Esto se consigue, obviamente, igualando el discriminante a cero, una receta antigua y bien conocida que en nuestro caso equivale a hacer $60^2-4(2y+6)\,(y^2+12y)=0$.
4. El resultado de la etapa 3 es una ecuación cúbica en y, $y^3+15y^2+36y=450$, que hoy conocemos como «la cúbica resolvente» de la ecuación cuártica dada. Esta cúbica se resuelve ahora en y por medio de las reglas dadas anteriormente para resolver ecuaciones cúbicas, con el resultado de

$$y=\sqrt[3]{287\tfrac{1}{2}+\sqrt{80449\tfrac{1}{2}}}+\sqrt[3]{287\tfrac{1}{2}-\sqrt{80449\tfrac{1}{4}}}-5$$

5. Sustitúyase un valor de y obtenido en la etapa 4, en la ecuación en x de la etapa 2, y tómese la raíz cuadrada de los dos miembros.
6. El resultado de la etapa 5 es una ecuación cuadrática que debemos resolver para hallar el valor buscado de x.

13. Las cúbicas irreducibles y los números complejos

La solución de las ecuaciones cúbica y cuártica fue probablemente la mayor contribución al álgebra desde que los babilonios, casi cuatro milenios antes, habían aprendido a completar el cuadrado para resolver las ecuaciones cuadráticas. Ningún otro descubrimiento había supuesto un estímulo tal para el desarrollo del álgebra como el que representaban los descubrimientos que se revelaban en el *Ars magna*. Las soluciones de la cúbica y de la cuártica no eran de ninguna manera el resultado de consideraciones de tipo práctico, ni tampoco eran de ningún valor especial para los ingenieros o los matemáticos aplicados. La resolución aproximada de algunos tipos de cúbicas había sido conocida ya en la antigüedad, y un siglo

antes de Cardano, Al-Kashi era capaz de resolver cualquier ecuación cúbica que se presentase en un problema práctico, con el grado de aproximación que se desease. Así pues, la fórmulas de Tartaglia-Cardano tenían una gran importancia lógica, pero para el hombre práctico no eran ni siquiera comparables en utilidad con los métodos de aproximaciones sucesivas.

La consecuencia más importante, sin la menor duda, de los descubrimientos publicados en el *Ars magna* fue el enorme estímulo que dieron a la investigación algebraica en distintas direcciones. Parecía natural intentar generalizar estos resultados a ecuaciones polinómicas de grado mayores que cuatro, y aquí el primer paso consistiría en la búsqueda de una solución para la quíntica. Los matemáticos se encontraron aquí, sin sospecharlo, y durante más de dos siglos y medio, con un problema algebraico insoluble comparable a los tres problemas geométricos clásicos de la antigüedad. El resultado de todo este trabajo iba a producir mucha y muy buena matemática, pero llevaría inevitablemente a una conclusión negativa. Otra consecuencia, y esta vez inmediata, de la solución de la cúbica fue que condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número. Los números irracionales habían sido aceptados ya con normalidad en la época de Cardano, a pesar de que no estaban fundamentados aún de una manera rigurosa, puesto que se les podía aproximar fácilmente por números racionales. Los números negativos producían más dificultades puesto que no se les podía aproximar en ningún sentido natural por números positivos, pero la idea de sentido o de dirección sobre una recta los hacía plausibles en tanto que magnitud orientada. De hecho, Cardano los utilizó, a pesar de llamarlos *numeri ficti*. Si un algebrista decidiese negar la existencia de los números irracionales o los negativos, simplemente tendría que decir, como hacían los antiguos griegos, que las ecuaciones $x^2=2$ ó $x+2=0$ son insolubles. De manera análoga habían podido evitar los algebristas los números imaginarios diciendo sencillamente que las ecuaciones del tipo de la $x^2+1=0$ son insolubles. No parecía haber ninguna necesidad de animales tales como las raíces cuadradas de números negativos. Pero con la solución algebraica de la cúbica la situación cambió radicalmente. Siempre que las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano-Tartaglia conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos. La meta buscada se sabía que era un número real, pero no se veía cómo alcanzarla sin entender el comportamiento de los «números imaginarios». Había, pues, que contar con estos números imaginarios incluso si uno quería restringirse a la búsqueda de raíces reales.

En esta situación de perplejidad, otro importante algebrista italiano, Rafael Bombelli (*ca.* 1526-1573), tuvo lo que él mismo llamó «una idea loca», puesto que todo el asunto «parecía basarse en sofística». Los dos radicandos bajo las raíces cúbicas que aparecen en la fórmula final sólo difieren en un signo, y, como hemos visto, para la ecuación $x^3=15x+4$ esta fórmula nos da $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, mientras que la única raíz positiva de la ecuación es $x=4$, como puede comprobarse por sustitución directa. (Cardano había hecho observar ya que cuando todos los términos que figuran a un lado del signo de igualdad son de grados mayores que los de los términos que figuran en el otro lado, entonces

la ecuación tiene una y sólo una raíz positiva, anticipando, en cierto modo, una pequeña parte de la futura regla de los signos de Descartes.) Bombelli tuvo la feliz idea de imaginar que los radicales mismos podrían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos, es decir, que, como diríamos ahora, son complejos conjugados que dan como suma el número real 4. Es obvio que si la suma de las partes reales debe ser 4, entonces la parte real común a ambos debe ser 2, y si un número de la forma $2+b\sqrt{-1}$ tiene que ser una raíz cúbica de $2+11\sqrt{-1}$, entonces se comprueba fácilmente que b tiene que ser 1, y por último nos queda que $x=2+1\sqrt{-1}+2-1\sqrt{-1}=4$.

Por medio de su ingenioso razonamiento venía a mostrar Bombelli el importante papel que estaban destinados a jugar en el futuro los números complejos conjugados, pero en aquel momento la observación en cuestión no tenía la menor utilidad para la tarea concreta de resolver ecuaciones cúbicas, puesto que Bombelli necesitaba conocer de antemano una de las raíces; en este caso la ecuación ya está resuelta y no se necesita ninguna fórmula, y sin tal conocimiento previo el planteamiento de Bombelli falla. Cualquier intento de calcular algebraicamente las raíces cúbicas de los números complejos que aparecen en la fórmula de Cardano-Tartaglia nos conduce a la mismísima cúbica de la que salieron las raíces cúbicas al tratar de resolverla, así que volvemos al punto de partida. Debido a que este callejón sin salida se presenta siempre que las tres raíces son reales, a este caso se le conoce como el «caso irreducible». En este caso la fórmula nos da realmente una expresión correcta para el valor de la incógnita, pero la forma en que aparece es inútil para la mayor parte de los fines.

Bombelli acabó de escribir su *Algebra*[9] hacia el 1560, pero no se publicó impresa hasta el 1572, aproximadamente un año antes de su muerte, y aun entonces sólo en parte. Uno de los aspectos interesantes de este libro es el de que contiene un simbolismo que nos recuerda el de Chuquet. Bombelli escribe a veces, por ejemplo, 1 Z p.5Rm.4, es decir, «1 zensus plus 5 res minus 4», para expresar x^2+5x-4, pero también utiliza otra forma de expresión, $1\overset{2}{\text{p}}\cdot 5\overset{1}{\text{m}}\cdot 4$, en que las potencias de la incógnita vienen representadas simplemente por los correspondientes numerales árabes escritos encima de un pequeño arco circular, de manera que x, x^2, x^3, aparecen como $\overset{1}{\frown}, \overset{2}{\frown}, \overset{3}{\frown}$, por ejemplo, por influencia quizá de la *Larismethique* de De la Roche. Bombelli usa, desde luego, en su *Algebra* los símbolos italianos estándar p y m para la suma y la resta, pero no tiene aún, en cambio, un símbolo para la igualdad. El símbolo que nosotros utilizamos para la igualdad había sido inventado ya antes de que Bombelli escribiera su libro, pero este símbolo apareció en 1557 en un lugar de Europa alejado de Italia, en Inglaterra, en el *Whetstone of Witte* de Robert Recorde (1510-1558).

14. Robert Recorde

Durante un período de casi dos siglos a partir de la muerte de Bradwardine, la matemática en Inglaterra no había hecho prácticamente ningún progreso, y lo

[9] No hay ninguna edición manejable de esta obra. Sobre la vida de Bombelli véanse los artículos por S. A. Jayawardine en *Isis*, 54 (1963), págs. 391-395; 56 (1965), págs. 298-306.

poco que se hizo a comienzos del siglo XVI dependió en gran parte de la influencia de escritores italianos tales como Pacioli. Recorde fue, de hecho, casi el único matemático de cierta talla en la Inglaterra del siglo XVI. Nació en Wales y estudió y después enseñó matemáticas tanto en Oxford como en Cambridge; en 1545 obtuvo su graduación en medicina por la Universidad de Cambridge, para convertirse a continuación en médico de Eduardo VI y de la reina Mary. Una de las características notables del período que estudiamos en este capítulo fue la gran cantidad de médicos que hicieron importantes contribuciones a la matemática, de los que los tres más conocidos quizá sean Chuquet, Cardano y Recorde. Probablemente Recorde fuera el más influyente de los tres dentro de su propio país, ya que a él se debe en principio la inauguración de la escuela matemática inglesa. Al igual que habían hecho Chuquet y Pacioli antes que él, y como iba a hacer más tarde Galileo, Recorde escribió en lengua vernácula; este hecho puede haber limitado su influencia en el continente, pero hay que hacer notar que la estructura retórica fácil que adoptó, en forma de diálogo, fue usada a su vez por Galileo, años más tarde. La primera obra matemática de Recorde que se conserva es su *Grounde of Artes* (1541), una aritmética popular que incluye el cálculo tanto por medio del ábaco como del algoritmo, junto con algunas aplicaciones comerciales. El nivel y el estilo de este libro, que está dedicado a Eduardo VI y que alcanzó más de dos docenas de ediciones, puede juzgarse por el siguiente problema:

> «Entonces ¿qué responderás a esta ecuación? Si te he vendido un caballo con sus cuatro herraduras, y cada herradura con sus seis clavos, bajo la condición de que tú pagarás por el primer clavo una moneda; por el segundo dos monedas; por el tercer clavo cuatro monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez hasta acabar con los clavos, ahora te pregunto, ¿a cuánto ascenderá el precio del caballo?»[10].

El *Castle of Knowledge* de Recorde, una obra astronómica en la que se menciona con aprobación el sistema copernicano, así como su *Pathewaie to Knowledge*, que es una versión abreviada de los *Elementos* a la vez que la primera geometría publicada en inglés, aparecieron ambos en 1551. La obra de Recorde que más se cita es el *The Whetstone of Witte*, publicada en 1557, un año solamente antes de su muerte en prisión. No se sabe si fue encarcelado por razones políticas o religiosas o debido a dificultades relativas a su cargo, desde el 1551, de inspector de Minas y de la Moneda de Irlanda[11]. El título de *The Whetstone of Witte* (o «La piedra de afilar el ingenio») era evidentemente un juego de palabras relativo a la palabra «coss», ya que *cos* es el nombre latino para *whetstone* o piedra de afilar, y el libro está dedicado, de hecho, a «the cossike practise», es decir, al álgebra. Este libro hizo por la matemática inglesa lo que Stifel había hecho por la alemana, con un detalle que lo distingue: nuestro familiar signo de igualdad aparece en él por

[10] Véase E. R. Ebert, «A Few observations on Robert Recorde and his "Grounde of Artes"», *The Mathematics Teacher*, 30 (1937), págs. 110-121. Véase también Joy B. Easton, «A Tudor Euclid», *Scripta Mathematica*, 27 (1966), págs. 339-355; F. R. Johnson y S. V. Larkey, «Robert Redorde's Mathemtical Teaching and the Anti-Aristotelian Movement», *Huntington Library Bulletin*, 7 (1935), págs. 59-87.

[11] Véase F. M. Clarke, «New Light on Robert Recorde», *Isis*, 7 (1926), págs. 50-70.

primera vez, y Recorde lo justifica por medio de la cita que hemos reproducido al comienzo del capítulo. Iba a hacer falta, sin embargo, otro siglo o más antes de que este signo triunfase sobre las demás notaciones rivales.

15. Nicolás Copérnico

Recorde murió el año 1558, el mismo año en que murió la reina Mary, y durante el largo reinado de Elizabeth I no surgió ningún matemático inglés de importancia comparable. Fue Francia, y no Inglaterra, Alemania o Italia la que produjo el matemático más importante de la época isabelina, pero antes de que nos dediquemos al estudio de su obra en el próximo capítulo, hay que clarificar algunos otros aspectos de la primera parte del siglo XVI. La dirección en la que apuntaban los progresos más importantes de la matemática durante el siglo XVI era, sin duda, la de álgebra, pero el desarrollo de la trigonometría no le iba muy a la zaga, pese a que no fue ni mucho menos tan espectacular. La laboriosa construcción de tablas trigonométricas es sin duda una tarea pesada y poco brillante, pero esas tablas resultaron ser de gran utilidad para los astrónomos y para los matemáticos en general; en este sentido, la labor realizada a comienzos del siglo XVI en Polonia y Alemania fue ciertamente muy útil. Hoy día se suele considerar a Nicholas Copernicus o Copérnico (1473-1543) como un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo de su época al conseguir con éxito poner la Tierra en movimiento alrededor del Sol (cosa que había intentado también siglos antes Aristarco, intento que fracasó históricamente); pero lo cierto es que un astrónomo tenía que ser casi inevitablemente también un especialista en trigonometría, y con Copérnico, que no era una excepción, tenemos una deuda matemática al mismo tiempo que astronómica.

Durante la época en que vivió Regiomontano, Polonia atravesó una verdadera «Edad de Oro» cultural, y la Universidad de Cracovia, en la que se matriculó Copérnico en 1491, gozaba de un gran prestigio en matemáticas y en astronomía. Después de ampliar estudios en derecho, medicina y astronomía en las universidades italianas de Bolonia, Padua y Ferrara, y de enseñar durante algún tiempo en Roma, Copérnico regresó a Polonia el 1510 para ocupar una canonjía en Frauenburg (hoy Frombork). A pesar de sus múltiples obligaciones administrativas, que iban de la reforma de la moneda a contener y refrenar a la Orden Teutónica, Copérnico consiguió completar su famoso tratado, el *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado en 1543, el mismo año de su muerte. Este libro contiene importantes secciones sobre trigonometría que ya habían sido publicadas separadamente el año anterior bajo el título de *De lateribus et angulis triangulorum*. El material trigonométrico es análogo al del *De triangulis* de Regiomontano, publicado diez años antes en Nuremberg, pero las ideas trigonométricas de Copérnico parecen datar de antes del 1533, época en la que probablemente no conocía los trabajos de Regiomontano. Es muy verosímil, sin embargo, que la forma final de la trigonometría de Copérnico proceda, en parte al menos, de la de Regiomontanto, ya que en 1539 recibió Copérnico como estudiante al joven matemático prusiano Georg Joachim Rheticus (o Rhaeticus, 1514-1576), un

The Arte

as their woꝛkes doe ertende) to diſtincte it onely into twoo partes. Whereof the firſte is, *when one nomber is equalle vnto one other*. And the ſeconde is, *when one nomber is compared as equalle vnto other nombers.*

Alwaies willyng you to remember, that you reduce your nombers, to their leaſte denominations, and ſmalleſte foꝛmes, beſoꝛe you pꝛocede any farther.

And again, if your *equation* be ſoche, that the greateſte denomination *Cubike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you ſhall tourne it ſo, that the nomber of the greateſte ſigne alone, maie ſtande as equalle to the reſte.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woꝛke.

Howbeit, foꝛ eaſie alteratiõ of *equations*. I will pꝛopounde a fewe exãples, bicauſe the extraction of their rootes, maie the moꝛe aptly bee woꝛoughte. And to auoide the tediouſe repetition of theſe woꝛdes: is equalle to: I will ſette as I doe often in woꝛke vſe, a paire of paralleles, oꝛ Gemowe lines of one lengthe, thus: =, bicauſe noe. 2. thynges, can be moare equalle. And nowe marke theſe nombers.

1. 14.ẓ. + .15.ȝ = 71.ȝ.

2. 20.ẓ. — .18.ȝ = .102.ȝ.

3. 26.ʒ + 10ẓ = 9.ʒ — 10ẓ + 213.ȝ.

4. 19.ẓ + 192.ȝ = 10ʒ + 108ȝ — 19ẓ.

5. 18.ẓ + 24.ȝ. = 8.ʒ. + 2.ẓ.

6. 34ʒ — 12ẓ = 40ẓ + 480ȝ — 9.ʒ

I. In the firſte there appeareth. 2. nombers, that is 14.ẓ.

Una página del *Whetstone of Witte* de Robert Recorde (1557). Obsérvese que su símbolo para la igualdad es mucho más largo que el que se usa actualmente.

matemático de Wittenberg que sin duda alguna había estado en contacto con la matemática que se hacía en Nuremberg. Rheticus trabajó con Copérnico durante unos tres años, y él fue quien publicó, con la aprobación de su maestro, la primera exposición resumida de la astronomía de Copérnico en una obra titulada *Narratio prima* (1540), y también el que hizo los primeros preparativos, completados más tarde por Andreas Osiander, para la publicación impresa del famoso *De revolutionibus*. Es probable, por lo tanto, que la trigonometría que aparece en la clásica obra de Copérnico esté relacionada estrechamente, a través de Rheticus, con la de Regiomontano.

Podemos darnos cuenta del concienzudo dominio de la trigonometría por parte de Copérnico no sólo por los teoremas que aparecen en el *De revolutionibus*, sino también por una proposición que Copérnico mismo incluyó en una primera versión manuscrita del libro, pero que no apareció en la versión impresa. Esta proposición suprimida es una generalización de un teorema de Nasir Eddin (que sí aparece en el libro) sobre el movimiento rectilíneo resultante de combinar dos movimientos circulares. El teorema de Copérnico es el siguiente. Si un círculo menor rueda sin deslizar por el interior de la circunferencia de un círculo mayor cuyo diámetro es doble que el del primero, entonces la trayectoria de un punto fijo del círculo menor, que no esté situado sobre su circunferencia, es una elipse. Incidentalmente, Cardano conocía el teorema de Nasir Eddin, pero no la generalización de Copérnico, teorema que fue redescubierto durante el siglo XVII[12].

16. Georg Joachim Rheticus

Copérnico contribuyó a extender la influencia de la obra de Regiomontano por medio de los teoremas trigonométricos que aparecían en su *De revolutionibus*, pero su alumno Rheticus aún fue más lejos, combinando las ideas de Regiomontano y de Copérnico con las suyas propias, en el tratado sobre el tema más completo y elaborado que se había compuesto hasta esa época, su obra en dos volúmenes *Opus palatinum de triangulis*. Aquí la trigonometría se hace ya realmente mayor de edad. En este libro el autor descarta el tratamiento tradicional de las funciones trigonométricas consideradas con respecto a un arco de circunferencia, y en lugar de ello se centra directamente en los lados de un triángulo rectángulo. Por otra parte, se estudian todas las seis funciones trigonométricas, y Rheticus calcula tablas detalladas de todas ellas. Dado que las fracciones decimales no habían logrado aún un reconocimiento general, Rheticus utiliza para las funciones seno y coseno una hipotenusa (o radio) de $10_1000.000$, y para las cuatro funciones restantes una base (o cateto adyacente o radio) de $10_1000.000$ de partes, para intervalos angulares de 10″. Rheticus comenzó a calcular también unas tablas de tangentes y secantes con una base de 10^{15} partes, pero no vivió lo suficiente como para terminarlas, y el

[12] Véase C. B. Boyer, «Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire», *Isis*, 38 (1947), págs. 54-56.

tratado lo completó y editó, con ampliaciones, su discípulo Valentin Otho (*ca.* 1550-1605) en 1596[13].

17. Pierre de la Ramée

La obra de Rheticus, que, por cierto, también había estudiado medicina como Copérnico, Chuquet, Cardano y Recorde, se ganó la admiración de Pierre de la Ramée o Petrus Ramus (1515-1572), un hombre que contribuyó a la matemática principalmente en un sentido pedagógico. En 1536, en el Collége de Navarre, había defendido, para conseguir el grado de *magister*, la atrevida tesis de que todo lo que había dicho Aristóteles era falso, y eso en una época en la que todavía las teorías peripatéticas venían a ser casi lo mismo que la ortodoxia. Por su actitud intelectual crítica y por sus intereses pedagógicos se le puede comparar con Recorde en Inglaterra. Ramus se encontraba enfrentado a su época en muchos aspectos, y mientras que sus contemporáneos humanistas encontraban de poca utilidad la matemática, él en cambio tenía una fe casi ciega en ella, y entre otras cosas propuso revisar los *curricula* universitarios de manera que recibieran más atención la lógica y la matemática. Su lógica gozó de una gran popularidad en los países protestantes, en parte debido a que murió como un mártir en la matanza de la noche de San Bartolomé. No satisfecho ni siquiera con los *Elementos* de Euclides, Ramus hizo su propia edición con las revisiones correspondientes. Sin embargo, su dominio de la geometría era muy limitado, y los cambios que sugería en la matemática iban en una dirección casi diametralmente opuesta a la que iba a seguir el espíritu moderno. Ramus tenía mucha más confianza en la matemática práctica elemental que en las ramas especulativas del álgebra o de la geometría avanzadas. Para nosotros, mirando retrospectivamente a su época, nos parece evidente que la matemática estaba ya excesivamente interesada en problemas aritméticos de tipo práctico, mientras que las debilidades en el campo de la geometría resaltaban de una manera conspicua.

18. El *Algebra* de Bombelli

Pappus, hacia el 320, había tratado de impulsar un renacimiento de la geometría, pero el hecho es que no encontró ningún sucesor capacitado para cultivar la geometría pura en Grecia. En China y en la India no hubo nunca un verdadero interés por la geometría que sobrepasara los problemas elementales de medición, pero los árabes, en cambio, que sí mostraban aprecio por el razonamiento deductivo, utilizaron argumentos geométricos en su álgebra. En la Europa medieval, como hemos visto, hubo una doble tendencia a aproximar el álgebra y la geometría. Siguiendo esta tradición medieval, los Libros IV y VI del *Algebra* de

[13] Véase J. D. Bond, «The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the XVth Century», *Isis*, 4 (1921-1922), págs. 295-323; puede verse también la obra de Mary Claudia Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1946).

Bombelli estaban llenos de problemas geométricos resueltos de una manera algebraica, algo parecido al estilo de Regiomontano, pero haciendo uso de un nuevo simbolismo. Por ejemplo, Bombelli pregunta por el lado de un cuadrado inscrito en un triángulo de lados $ac = 13$, $cf = 14$, $fa = 15$, tal que uno de sus lados esté situado sobre cf (fig. 15.1), problema que resuelve de la manera siguiente: sea bg

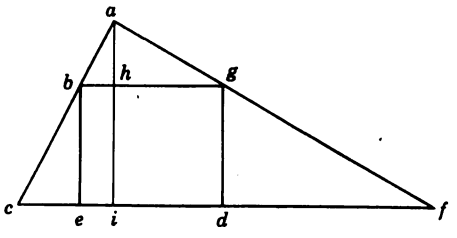


Figura 15.1

$= 14\frac{1}{}$, es decir, $14x$; entonces $ag = 15\frac{1}{}$ y $ab = 13\frac{1}{}$. Ahora bien, $ah = 12\frac{1}{}$ y $hi = 14\frac{1}{}$, y como $ai = 12$, tenemos que $26\frac{1}{} = 12$, luego la «cosa» o x es igual a $\frac{6}{13}$, de manera que hi, que es el lado del cuadrado, debe ser 14 veces $\frac{6}{13}$, o sea, $6\frac{6}{13}$. He aquí un álgebra ya bastante simbólica que viene en ayuda de la geometría, pero Bombelli investigó también en dirección opuesta: en el *Algebra*, la solución algebraica de la ecuación cúbica viene acompañada por una demostración geométrica en términos de subdivisiones del cubo. Desgraciadamente para el futuro de la geometría, y también de la matemática en general, los últimos libros del *Algebra* de Bombelli no se incluyeron en la publicación de 1572, sino que quedaron en forma manuscrita hasta 1929[14].

19. Johannes Werner

La geometría pura no dejó de tener, a pesar de todo, sus representantes en el siglo XVI, ya que algunas contribuciones, bien que no espectaculares, se deben a Johannes Werner (1468-1522) y a Albrecht Dürer o Durero (1471-1528) en Alemania, y a Pacioli y a Francesco Maurolico (1494-1575) en Italia. Una vez más constatamos la preeminencia de estos dos países en el progreso de la matemática durante el Renacimiento. Werner contribuyó a divulgar la trigonometría de Regiomontano, pero desde un punto de vista geométrico fue mucho más importante su obra en latín, en 22 libros, sobre los *Elementos de las cónicas*, impreso en Nuremberg en 1522. Esta obra no puede compararse de una manera favorable, desde luego, con las *Cónicas* de Apolonio, que era casi completamente desconocida en la época de Werner, pero hay que decir que marca una renovación en el interés por estas curvas casi por primera vez desde Pappus. Debido a que Werner estaba interesado principalmente en la duplicación del cubo, se centró en la

[14] Véase *L'algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna*, libros IV y V, que comprenden «La parte geométrica», editada por Ettore Bortolotti (1929).

parábola y la hipérbola, obteniendo las ecuaciones planas usuales de una manera estereométrica a partir del cono, lo mismo que habían hecho sus lejanos predecesores en la antigua Grecia. Parece haber, sin embargo, un elemento de originalidad en su método plano para construir puntos de una parábola con regla y compás. Se comienza por trazar un haz de circunferencias tangentes y que cortan a la normal común en puntos c, d, e, f, g, ... (fig. 15.2); a continuación se toma a lo

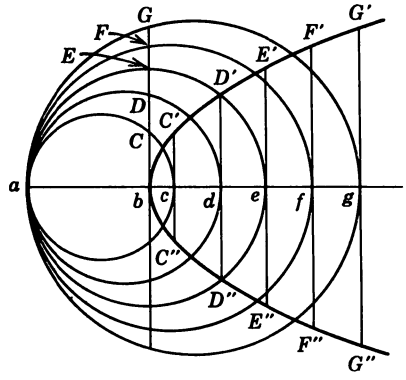


Figura 15.2

largo de la normal común una distancia ab igual a un parámetro dado. En b se levanta la línea bG perpendicular a ab y que corta a las circunferencias anteriores en puntos C, D, E, F, G, ..., respectivamente. Entonces tracemos por c segmentos cC' y cC'' perpendiculares a ab e iguales a bC; por el punto d tracemos los segmentos perpendiculares dD' y dD'' iguales a bD; por e tracemos los segmentos eE' y eE'' iguales a bE, y así sucesivamente. Entonces C', C'', D', D'', E', E'', ..., estarán todos ellos en la parábola de vértice b y de eje ab, y cuyo parámetro es igual al segmento ab, tal como se ve fácilmente de las relaciones $(cC')^2 = ab \cdot bc$, $(dD')^2 = ab \cdot bd$, etc.[15].

20. La teoría de la perspectiva

La obra de Werner está estrechamente relacionada con los antiguos estudios sobre las cónicas, pero mientras tanto se estaba desarrollando ya en Italia y en Alemania una aproximación entre la matemática y el arte que era relativamente nueva. Un aspecto importante en el que se diferenciaba el arte del Renacimiento del de la Edad Media era en el uso de la perspectiva para representar de una manera plana los objetos situados en el espacio real tridimensional. Según parece, el arquitecto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) prestó ya gran atención a este problema, pero la primera exposición formal de algunos de los problemas

[15] Véase J. L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945), págs. 26-28.

matemáticos que éste implica fue dada por Leon Battista Alberti (1404-1472) en un tratado escrito el año 1435 e impreso en 1511, titulado *Della pictura*. Alberti comienza su obra con una discusión general de los principios de la visión en escorzo, y a continuación describe un método que él mismo había inventado para representar en un «cuadro plano» vertical un conjunto de cuadrados situados en el «plano del suelo» horizontal. Supongamos el ojo del observador situado en un «punto de vista» S que está h unidades por encima del plano del suelo y k unidades por delante del plano del cuadro. La intersección del plano del suelo con el plano del cuadro se llama la «línea de tierra»; el pie V de la perpendicular desde S al plano del cuadrado recibe el nombre de «centro de visión» (o punto de fuga principal), la línea que pasa por V y es paralela a la línea de tierra se conoce como

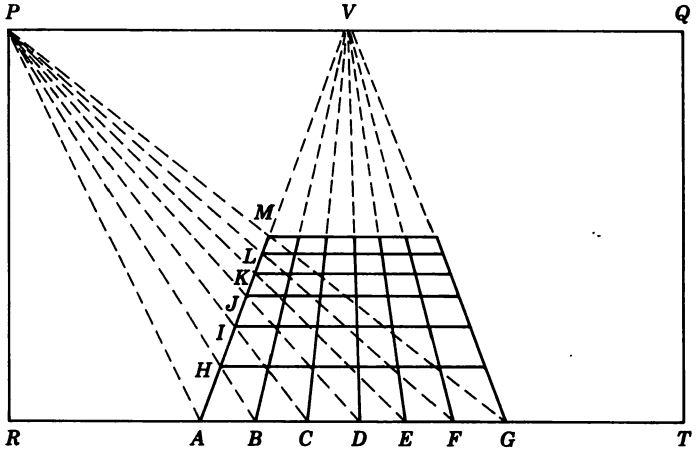


Figura 15.3

la «línea de fuga» (o «línea del horizonte»), y los puntos P y Q de esta línea que están a una distancia de k unidades de V se llaman «los puntos de distancia». Si tomamos ahora los puntos A, B, C, D, E, F, sobre la línea de tierra RT y separados por distancias iguales (fig. 15.3), donde D es la intersección de esta línea con el plano vertical que pasa por S y por V, y si trazamos rectas que unan cada uno de estos puntos con V, entonces las proyecciones de estas últimas rectas desde el punto S sobre el plano del suelo constituirán un conjunto de rectas paralelas y equidistantes. Si unimos P(o Q) con los puntos A, B, C, D, E, F, G, obtenemos otro sistema de rectas que cortan a AV en puntos H, I, J, K, L, M, y si trazamos después por estos puntos paralelas a la línea de tierra RT, entonces el conjunto de trapezoides que se ha formado sobre el plano del cuadro corresponderá a un conjunto de cuadrados en el plano del suelo[16].

Una etapa más en el desarrollo de la teoría de la perspectiva fue la que cubrió el

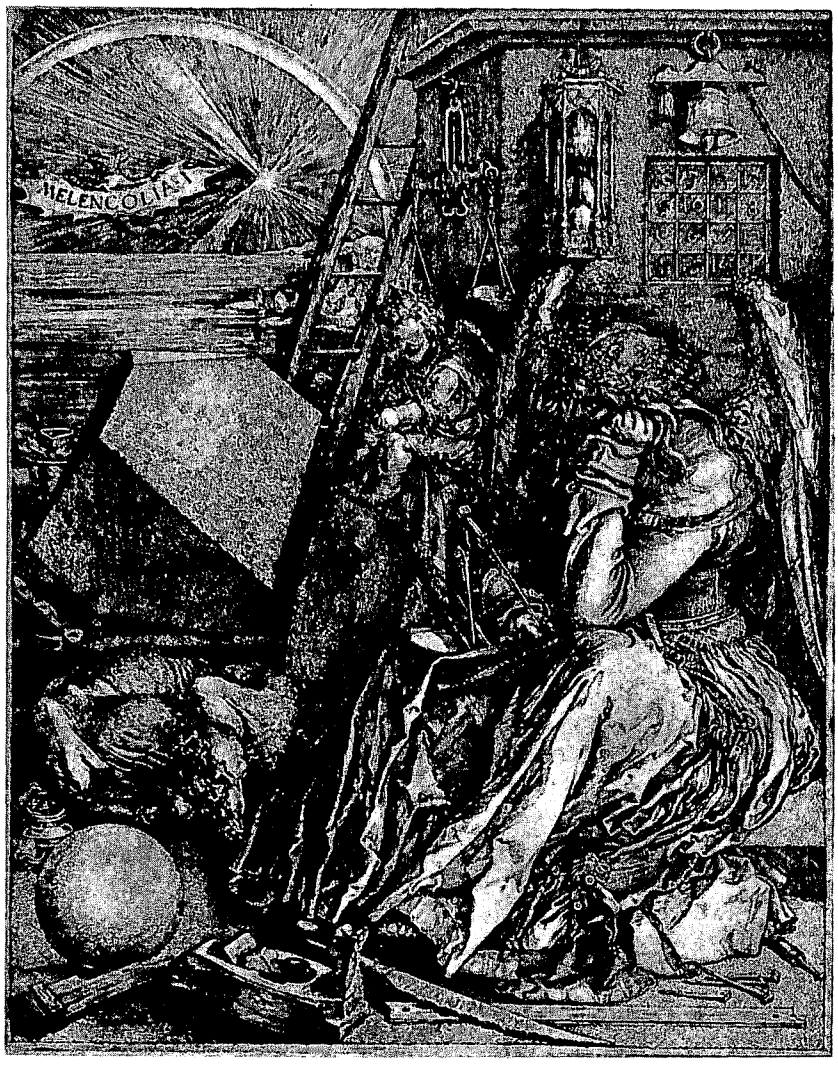
[16] Pueden verse más detalles sobre esto, así como una buena exposición de otras obras de Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y Albrecht Dürer, en J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford: Clarendor, 1949), págs. 30-70.

pintor de frescos italiano Piero della Francesca (¿1410?-1492), en su obra *De prospectiva pingendi* (*ca.* 1478). Mientras que Alberti se había centrado en la representación sobre el plano del cuadro de figuras situadas en el plano del suelo, Piero della Francesca se ocupó del problema más complicado de representar sobre el plano del cuadro objetos tridimensionales tal como se ven desde un punto de vista dado. También escribió un *De corporibus regularibus* en el que hace notar la «divina proporción» en que se cortan las diagonales de un pentágono regular, y donde calcula también el volumen encerrado por dos cilindros circulares iguales cuyos ejes se cortan perpendicularmente (desconocedor de que Arquímedes había calculado ya dicho volumen en su *Método*, obra que no había sido encontrada). La relación entre arte y matemática también se pone de relieve en la obra de Leonardo da Vinci, que incluso escribió un libro sobre perspectiva que se ha perdido, y que abre su *Trattato della pittura* parafraseando a Platón con el lema: «Nadie que no sea matemático lea mis obras»[17]. Y la misma combinación de intereses matemáticos y artísticos puede verse en Albrecht Dürer o Durero, que era contemporáneo de Leonardo y conciudadano de Werner, puesto que ambos residían en Nuremberg. En la obra de Durero puede apreciarse también cierta influencia de Pacioli, especialmente en el famoso grabado de 1514 titulado *Melancolía*, en el que aparece de una manera prominente el cuadrado mágico que reproducimos a continuación.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Este cuadrado mágico suele considerarse como el primero que aparece en Occidente, pero Pacioli había dejado un manuscrito inédito titulado *De viribus quantitatis* en el que trata ya de tales cuadrados. Sin embargo, el interés de Durero por la matemática tenía un carácter mucho más geométrico que aritmético, como indica claramente el título de su obra más importante: «Investigación sobre la medida de figuras planas y sólidas por medio de círculos y líneas rectas». Este libro, que apareció en varias ediciones tanto alemanas como latinas entre 1525 y 1538, contenía algunas sorprendentes novedades, de las que la más importante quizá era el estudio de nuevas curvas. Esta es una de las direcciones en la que el Renacimiento podría haber mejorado fácilmente la obra de los antiguos, que sólo habían estudiado un pequeño número de curvas. Durero tomó, por ejemplo, un punto fijo sobre un círculo, el cual podía girar sin deslizar sobre la circunferencia de otro círculo, engendrando así una epicicloide; el estudio de esta curva no podía ser

[17] Morris Kline, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford University Press, 1953). Este libro contiene una exposición muy legible de las relaciones entre arte y matemáticas.



Melancolía, de Albrecht Dürer (British Museum). Obsérvese el cuadrado mágico de dimensión cuatro en la parte superior a la derecha.

analítico, sin embargo, al no disponer Durero de las necesarias herramientas algebraicas. Y lo mismo puede decirse de otras curvas planas que obtuvo proyectando hélices en el espacio sobre un plano para obtener diversas espirales. Por otra parte, ocurría muy a menudo que los que se ocupaban de la perspectiva no estaban familiarizados con la matemática rigurosa y no distinguían entre resultados exactos y aproximados. Así, en esta obra de Durero nos encontramos con la construcción del pentágono regular de Ptolomeo, que es exacta, junto con otra construcción original que sólo es aproximada. También se dan ingeniosas construcciones para los polígonos regulares de siete y de once lados, aunque

inexactas desde luego. La construcción aproximada del polígono regular de nueve lados que da Durero es la siguiente: Sea *ABC* una circunferencia de centro *O*, en la que los puntos *A*, *B*, *C*, son los vértices de un triángulo equilátero inscrito (fig. 15.4); trácese el arco de circunferencia que pasa por *A*, *O* y *C*, y análogamente los que pasan por *B*, *O* y *C* y por *A*, *O* y *B*. Divídase el segmento *OA* en tres partes iguales por los puntos *D* y *E* y trácese la circunferencia de centro *O* que pasa por *E*, la cual cortará a los arcos *AFO* y *AGO* en los puntos *F* y *G*, respectivamente.

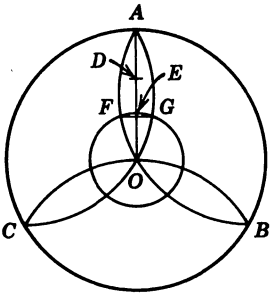


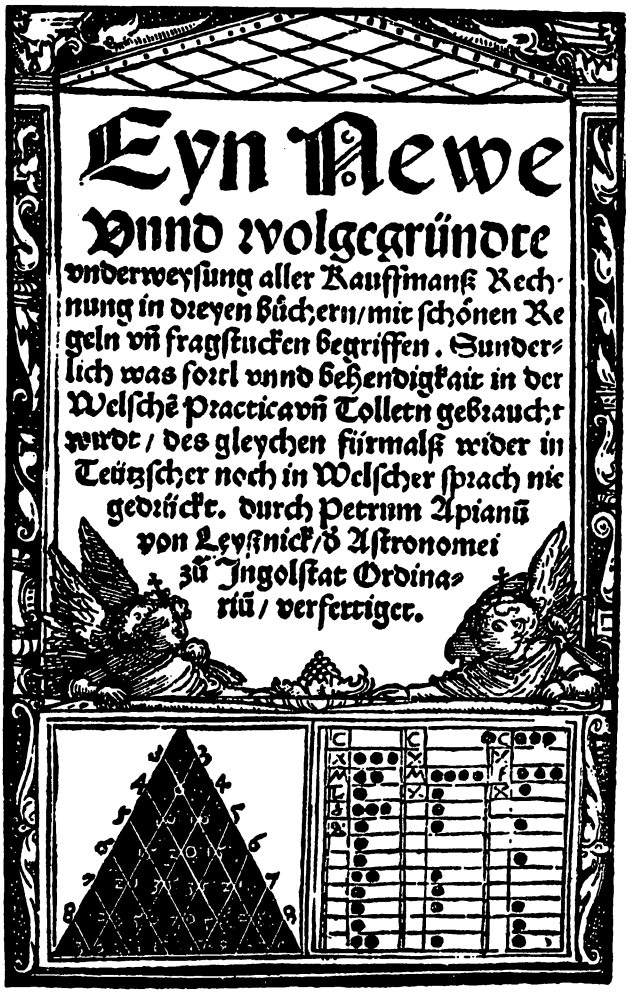
Figura 15.4

Entonces el segmento *FG* será muy aproximadamente igual al lado del polígono regular de nueve lados inscrito en la circunferencia más pequeña, ya que el ángulo *FOG* difiere de 40° en menos de 1°[18]. La relación entre el arte y la geometría podría haber sido realmente muy productiva si se hubiera ganado la atención de matemáticos más profesionales, por así decirlo, pero a este respecto fracasó casi completamente a lo largo de más de un siglo después de la época de Durero.

21. La cartografía

Los contemporáneos de Durero que se dedicaban a la matemática pura no llegaron a apreciar el futuro que iban a tener las transformaciones geométricas, pero a quienes sí les era esencial el utilizar proyecciones de diversos tipos era a los cartógrafos. Las exploraciones geográficas habían ensanchado los horizontes de la humanidad, y habían creado al mismo tiempo la necesidad de mejores mapas, pero en este problema tanto las corrientes escolásticas como las humanistas eran de poca ayuda, ya que precisamente eran los descubrimientos modernos los que habían dejado obsoletos los mapas tanto antiguos como medievales. Uno de los innovadores más importantes en esta época fue el matemático y astrónomo alemán Peter Apian o Petrus Apianus (o Bienewitz; 1495-1552). En 1520 publicó el que es quizá el primer mapa del Viejo y del Nuevo Mundo en el que aparece el nombre de «América», y en 1527 publicó una aritmética comercial en la que aparece impreso

[18] Véase Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematil* (Leipzig: Teubner, 1900-1908, 4 vols.), vol. II, pág. 425.



Triángulo de Pascal, tal como apareció impreso por primera vez en 1527. Portada de la aritmética de Petrus Apianus, Ingolstadt, 1527, más de un siglo antes de que Pascal investigara las propiedades de dicho triángulo.

por primera vez el triángulo aritmético o «de Pascal» en la portada. Los mapas de Apian estaban bien hechos, sin duda, pero aún seguían a Ptolomeo fielmente en todo lo posible. Así pues, para encontrarnos con ese tipo de novedades que uno espera como tan características del Renacimiento, tenemos que dirigir nuestra atención a otro geógrafo un poco posterior, flamenco esta vez, Gerard Mercator (o Gerhard Kremer, 1512-1594), que estuvo ligado durante un cierto tiempo a la corte del rey Carlos V en Bruselas. De Mercator sí puede decirse ya que rompió con Ptolomeo en geografía, tal como Copérnico había roto poco antes con la astronomía ptolemaica.

Durante la primera mitad de su vida Mercator estuvo fuertemente influenciado por Ptolomeo, pero para el año 1554 ya se había emancipado lo suficiente como para decidir reducir la anchura en longitud del mar Mediterráneo, estimada por Ptolomeo en 62°, a 53°; en realidad, y como ahora sabemos, es de unos 40°. Pero lo que es más importante es que publicó en 1569 el primer mapa, la *Nova et aucta orbis terrae descriptio*, diseñado basándose en un principio completamente nuevo. Los mapas que se utilizaban en la época de Mercator estaban basados usualmente en una red rectangular formada por dos familias de líneas paralelas equidistantes, una para representar las diferentes latitudes y la otra para las longitudes. La longitud geométrica de un grado de longitud geográfica varía, sin embargo, con el paralelo de latitud a lo largo del cual se mida, variación que se despreciaba en la práctica corriente, y cuyo resultado era una distorsión de las formas y un error, por lo tanto, en la dirección, por parte de los navegantes que trazaban su rumbo uniendo dos puntos del mapa por una línea recta. Por su parte, la proyección estereográfica de Ptolomeo conserva las formas, pero ha de renunciar en cambio a utilizar la red de meridianos y paralelos regular. Con la intención de poner un poco más de acuerdo la teoría y la práctica, introdujo Mercator la proyección que lleva su nombre y que, con algunos perfeccionamientos posteriores, ha sido fundamental desde entonces para la cartografía. La primera etapa en la proyección de Mercator consiste en considerar la Tierra esférica e inscrita en un cilindro circular recto indefinidamente largo, tangente a la Tierra a lo largo del ecuador (o de cualquier otro círculo máximo), y en proyectar desde el centro de la Tierra los puntos de su superficie sobre el cilindro. Si cortamos entonces el cilindro por una generatriz y lo desarrollamos sobre el plano, los meridianos y paralelos terrestres se han transformado en una red de rectas ortogonales; las distancias entre los sucesivos meridianos serán iguales, pero no en cambio las distancias entre los sucesivos paralelos. De hecho, estas últimas distancias crecen tan rápidamente según nos alejamos del ecuador, que aparecen en seguida distorsiones sensibles en las direcciones y en las formas, pero Mercator descubrió que era posible conseguir, por medio de una modificación de estas distancias determinada empíricamente, que se conservaran tanto las direcciones como las formas, aunque no los tamaños o dimensiones[19]. En 1599 Edward Wright (1558-1615), que procedía de la Universidad de Cambridge y que fue tutor de Enrique, Príncipe de Gales, y además un buen marino, desarrolló las bases teóricas de la proyección de Mercator, calculando la relación funcional $D = a \ln \operatorname{tg}(\theta/2 + 45°)$ que hay entre la distancia al ecuador D en el mapa y la latitud θ.

Durante el Renacimiento la matemática encontró un gran número de aplicaciones a la contabilidad, a la mecánica, a la agrimensura, al arte, a la cartografía y a la óptica, y se publicaron muchos libros dedicados a las artes prácticas. No obstante, también consiguió mantenerse latente un fuerte interés por las obras clásicas de la antigüedad, como vemos en el caso de Maurolico, un clérigo de ascendencia griega que nació, vivió y murió en Sicilia. Maurolico fue un

[19] Una exposición, en forma de resumen histórico, tanto de ésta como de otras proyecciones, puede verse en el artículo «Map», por E. G. Ravenstein *et alia*, en la *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª ed., 17, págs. 629-663.

erudito geómetra que hizo mucho por su parte para revivir el interés general por las obras más avanzadas de la antigua matemática griega[20]. Durante la primera mitad del siglo XVI la geometría que se cultivaba había dependido fuertemente de las propiedades más elementales que aparecen en Euclides, y aunque Werner había sido en cierto modo una excepción a esta regla, pocos más estaban realmente familiarizados con la geometría de Arquímedes, de Apolonio y de Pappus. La razón para este estado de cosas era muy sencilla: las traducciones latinas de estos matemáticos no estuvieron fácilmente disponibles hasta mediados de siglo. En este proceso de traducción Maurolico no se encontró solo, sino que a él se sumó otro entusiasta sabio italiano, Federico Commandino, que murió el mismo año, el 1575. Ya hemos mencionado que Tartaglia «tomó prestada» una traducción de Arquímedes, que se imprimió en 1543; a ésta siguió una edición griega en 1544 y otra traducción latina por Commandino publicada en Venecia en 1558.

Los cuatro libros de las *Cónicas* de Apolonio que habían sobrevivido en el original griego habían sido publicados en Venecia en 1537 traducidos al latín. La traducción de Maurolico, completa ya para el año 1548, no se publicó hasta un siglo largo más tarde, apareciendo en 1654, pero en cambio otra traducción hecha por Commadino se imprimió en Bolonia en 1566. La *Colección Matemática* de Pappus había sido prácticamente desconocida para los árabes y lo mismo para los europeos medievales, pero fue traducida también por el infatigable Commandino, aunque no se imprimió hasta el año 1588. Maurolico conocía bien los monumentales tesoros de la geometría antigua que se estaban poniendo en circulación en su época, ya que leía el griego tan bien como el latín y, de hecho, siguiendo algunas indicaciones que aparecen en Pappus sobre la teoría de máximos y mínimos de Apolonio, es decir, sobre las normales a las secciones cónicas, probó Maurolico a reconstruir el Libro V de las *Cónicas*, entonces perdido. A este respecto se le puede considerar como uno de los representantes de la auténtica moda que constituyó uno de los estímulos principales para la geometría anterior a Descartes, es decir, la reconstrucción de obras perdidas en general y de los cuatro últimos libros de las *Cónicas* en particular. Durante el intervalo de tiempo transcurrido entre la muerte de Maurolico en 1575 y la publicación de *La géométrie* por Descartes en 1637, la geometría podríamos decir que «hacía tiempo» hasta que los desarrollos del álgebra hubieran alcanzado un nivel que hiciera posible una geometría de carácter algebraico. El Renacimiento muy bien podría haber desarrollado la geometría pura en la dirección que venía a sugerir el arte y la perspectiva, pero lo cierto es que tal posibilidad pasó desapercibida hasta casi el mismo momento en que surgió la geometría algebraica. En el período que transcurre de Maurolico a Descartes, mientras tanto, la matemática se desarrolló siguiendo varias direcciones no puramente geométricas, y es a este desarrollo al que vamos a dedicar ahora nuestra atención.

---

[20] Puede hacerse uno una idea de la amplitud de sus escritos y de la dificultad de fecharlos consultando el artículo de Edward Rosen «The Editions of Maurolico's Mathematical Works», *Scripta Mathematica*, 24 (1959), págs. 59-76.

Bibliografía

Bond, J. D.: «The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the XVth Century», *Isis*, 4 (1921-1922), 295-323.

Bortolotti, Ettore: *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII* (Bologna, 1928).

—— (ed.): *L'algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna* (Bologna, 1929).

Cardan, Jerome: *The Book of My Life*, trad. Jean Stoner (ed. en rústica, New York: Dover, 1963).

Clarke, F. M.: «New Light on Robert Recorde», *Isis*, 7 (1926), 50-70.

Easton, Joy B.: «A Tudor Euclid», *Scripta Mathematica*, 27 (1966), 339-355.

Ebert, E. R.: «A Few Observations on Robert Recorde and his "Grounde of Artes"», *The Mathematics Teacher*, 30 (1937), 110-121.

Glaisher, J. W. L.: «On the Early History of the Signs + and − and on the Early German Arithmeticians», *Messenger of Mathematics*, 51 (1921-1922), 1-148.

Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlín: Walter de Gruyter, 1963), vol. I.

Hughes, Barnabas (ed.): *Regiomontanus on Triangles* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1967).

Lambo, Ch., S. J.: «Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet», *Revue des Questions Scientifiques* (3), 2 (1902), 442-472.

Marre, Aristide: «Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres», *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 13 (1880), 555-659, 693-814, **14** (1881), 413-460.

Ore, Oystein: *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953).

Sarton, George: «The Scientific Literature Transmitted Through the Incunabula», *Osiris*, 5 (1938), 41-247.

Simon, Max: *Cusanus als Mathematiker* (Strassburg, 1911, en *Festschrift Heinrich Weber*, Leipzig y Berlín: Teubner, 1912, págs. 298-337).

Smith, D. E.: *Rara arithmetica* (Boston: Ginn, 1908).

—— (ed.): *A Source Book in Mathematics* (New York: Mc Graw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).

Sullivan, J. W. N.: *The History of Mathematics in Europe, from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour* (New York: Oxford University Press, 1925).

Taylor, R. Emmett: *No Royal Road. Luca Pacioli and His Times* (Chapel Hill, N. C.: University of North Carolina Press, 1942).

Waters, W. G.: *Jerome Cardan, a Biographical Study* (Londres, 1898).

Zeller, Sister Mary Claudia: *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich.: University of Michigan, tesis doctoral, 1944).

Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes factores fueron particularmente importantes para el desarrollo de la matemática durante el Renacimiento?: *a*) la caída de Constantinopla, *b*) la Reforma Protestante, *c*) el nacimiento del Humanismo, *d*) la invención de la imprenta, *e*) el crecimiento de una clase social mercantil. Explíquese claramente la respuesta.
2. ¿Cómo explicaría usted el hecho de que tanto el álgebra como la trigonometría se desarrollaran durante el Renacimiento de una manera más rápida que la geometría?

3. ¿Por qué fue tan importante la resolución de la cúbica para el desarrollo de los números imaginarios?
4. ¿Cómo explicaría usted el hecho de que tantos matemáticos importantes del siglo XVI fueran a la vez médicos?
5. ¿Qué países ocuparon el liderazgo, durante el Renacimiento, en el desarrollo de *a*) el álgebra, *b*) la trigonometría, *c*) la geometría? Cítense en cada caso las contribuciones específicas.
6. Compárese el valor dado por Regiomontano para tg 89° con el que aparece en una tabla moderna y dedúzcanse las consecuencias. ¿Cómo podría haber encontrado Regiomontano su valor?
7. Construir, con regla y compás, un triángulo con un lado igual a 5, la altura correspondiente a dicho lado igual a 3 y la razón entre los otros dos lados igual a $\sqrt{2}:1$ (*Sugerencia:* aplíquese el método algebraico de Regiomontano y de Bombelli).
8. Resolver el problema de Pacioli en el que se pide hallar los tres lados de un triángulo si el radio del círculo inscrito es 4, y si los segmentos en que queda dividido un lado por el punto de tangencia son 6 y 8.
9. Obténgase una solución de la ecuación de Bombelli $x^3=15x+4$ como suma o diferencia de raíces cúbicas de números imaginarios.
10. Reducir la solución de la cuártica de Ferrari $x^4+6x^2+36=60x$ a la solución de una ecuación cúbica.
11. Compruébese la afirmación de Bombelli de que $4+\sqrt{-1}$ es una raíz cúbica de $52+\sqrt{-2209}$.
12. El *Grounde of Artes* de Recorde contiene el siguiente esquema «simplificado» para multiplicar dos números de un solo dígito (ambos mayores que 6): Réstese en primer lugar cada número de 10; el producto de estas diferencias es el dígito de las unidades en el producto de los números originales, y si cualquiera de las dos diferencias se resta del otro número original, esta diferencia dará el dígito de las decenas en el producto de los dos números originales. Demuéstrese esta regla.
13. Fórmese la ecuación cúbica cuyas raíces son $1\pm\sqrt{3}$ y -3 y aplíquese a continuación el método de Cardano y Tartaglia para resolver esta cúbica.
14. Resolver el problema de Cardano de dividir 10 en dos partes cuyo producto sea 40. Compruébese la respuesta.

*15. Justifíquese la construcción de la parábola de Werner, indicando además la posición de la directriz.

*16. ¿Cómo demostraría usted que la construcción del polígono regular de nueve lados dada por Durero no es exacta? Calcúlese el ángulo *FOG* con un error menor que un minuto.

*17. Muéstrese cómo construir el cuadrilátero cíclico de lados sucesivos $a=25$, $b=33$, $c=60$ y $d=16$.

*18. Demuéstrese el teorema copernicano relativo a la generación epicíclica de la elipse.

*19. Justifíquese el método de Alberti para representar en el plano del cuadro un embaldosado formado por cuadrados situado en el plano del suelo.

Capítulo XVI
PRELUDIO A LA MATEMATICA MODERNA

> En la matemática no encuentro ninguna imperfección, excepto quizá en el hecho de que los hombres no comprenden de manera suficiente el excelente uso de la Matemática Pura.
>
> *Francis Bacon*

1. François Viète

Cuando Maurolico y Commandino murieron el año 1575, Europa occidental había recuperado ya la mayor parte de las obras matemáticas más importantes de la antigüedad que se han conservado hasta hoy. Por otra parte, el álgebra árabe había sido no sólo asimilada sistemáticamente, sino mejorada de una manera notable con la resolución de la cúbica y de la cuártica y con el uso, en parte al menos, de un cierto simbolismo, y la trigonometría se había convertido en una disciplina independiente. La época estaba ya casi madura para llevar a cabo rápidos avances que superaran las contribuciones tanto antiguas como medievales y renacentistas, pero aún no lo estaba del todo. En la historia de la matemática se suele poner de manifiesto un alto grado de continuidad entre una época y la siguiente, y la transición del Renacimiento al mundo moderno se hizo también a través de un considerable número de figuras intermedias, de las que estudiaremos en este capítulo algunas de las más importantes. Dos de estos hombres eran italianos, Galileo Galilei (1564-1642) y Bonaventura Cavalieri (1598-1647); otros varios, tales como Henry Briggs (1561-1639), Thomas Harriot (1560-1621) y William Oughtred (1574-1660) eran ingleses; dos de ellos eran flamencos, Simon Stevin (1548-1620) y Albert Girad (1590-1633); y otros aún que provenían de diversos países, como el escocés John Napier (1550-1617), el suizo Jobst Bürgi (1552-1632) y el alemán Johann Kepler (1571-1630). Como puede verse, casi toda la Europa occidental participaba en el progreso de la matemática, pero la figura central y la más brillante de la transición fue sin duda un francés, François Viète (1540-1603) o, en su forma latinizada, Franciscus Vieta.

Viète no era lo que podríamos llamar un matemático profesional; en su juventud estudió derecho, que más tarde cultivó, llegando a ser miembro del Parlamento de Bretaña. Posteriormente fue nombrado miembro del consejo real, en el que sirvió bajo Enrique III y más tarde bajo Enrique IV. Fue durante la época en que estuvo al servicio de este último, Enrique de Navarra, cuando consiguió un éxito tal descifrando mensajes en clave del enemigo, que los españoles lo acusaron de estar aliado con el diablo. A pesar de que Viète sólo dedicó a la matemática sus ratos de ocio, sin embargo hizo importantes contribuciones a la

aritmética, al álgebra, a la trigonometría y a la geometría. Hubo un período de casi media docena de años, antes de la ascensión al poder de Enrique IV, durante el cual Viète cayó políticamente en desgracia, y así pudo dedicar estos años en gran parte a sus estudios matemáticos. En aritmética tenemos que recordar su decidida defensa del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales. Así, escribía en una de sus primeras obras, el *Canon-mathematicus* de 1579:

> Los sexagesimales y los sesentas han de ser usados raramente o nunca en la matemática, mientras que los milésimos y los miles, los centésimos y los cientos, los décimos y los dieces, y las progresiones semejantes, ascendentes y descendentes, deben usarse frecuentemente y aún exclusivamente[1].

Tanto en sus cálculos como en sus tablas sigue Viète al pie de la letra este principio y utiliza fracciones decimales. Por ejemplo, al hablar de los lados de los cuadrados inscrito y circunscrito a una circunferencia de diámetro 200.000, los expresa como $141.421.\frac{356.24}{}$ y $200.000.\frac{000.00}{}$ respectivamente, y su media como $177.245.\frac{385.09}{}$. Unas páginas más adelante escribe la longitud de la semicircunferencia como $314.159.\frac{265.35}{1.000.00}$, y un poco más adelante aún este mismo número aparece como **314.159**.265.36, con la parte entera en negrita. En algunas ocasiones utiliza un guión vertical para separar la parte entera de la fraccionaria, como al escribir la apotema del polígono regular de 96 lados inscrito en una circunferencia de diámetro 200.00, como **99.946**|458.75 aproximadamente.

El uso del punto para separar la parte entera de la parte decimal de un número se atribuye o bien a G. A. Magini (1555-1617), cartógrafo amigo de Kepler y, en su día, rival de Galileo para una cátedra en Bolonia, en su *De planis triangulis* de 1592, o bien a Christoph Clavius (1537-1612), un jesuita amigo también de Kepler, en una tabla de senos de 1593. Sin embargo, el punto decimal no se popularizó hasta que lo usó Napier más de veinte años más tarde.

2. El concepto de parámetro

Indudablemente, el campo en el que Viète hizo sus contribuciones más importantes fue el álgebra, ya que en él fue en el que más se aproximó a un punto de vista moderno. La matemática consiste en una forma de razonamiento y no en un saco de trucos como los que ofrecía Diofanto; sin embargo, durante la época árabe y los comienzos de la época moderna, el álgebra no había ido demasiado lejos en el esfuerzo por liberarse del tratamiento de casos especiales únicamente. Poco podía avanzar una teoría algebraica mientras la preocupación principal fuera la de hallar «la cosa» en una ecuación con coeficientes numéricos concretos. En realidad sí se habían introducido ciertos símbolos y abreviaturas para representar una incógnita y las primeras potencias de esa misma incógnita, así como para las operaciones algebraicas y para la relación de igualdad; Stifel había llegado a escribir *AAAA* para representar la cuarta potencia de la incógnita *A*, pero no

[1] Para más detalles véase C. B. Boyer, «Viète's Use of Decimal Fractions», *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), págs. 123-127.

disponía, sin embargo, de una manera general de escribir una ecuación que pudiera representar a cualquiera de una clase total de ecuaciones del mismo tipo, por ejemplo, de todas las ecuaciones cuadráticas o de todas las cúbicas. Un geómetra podía representar por una figura y llamar *ABC* a un triángulo arbitrario, pero un algebrista en cambio no disponía de ningún recurso para poder escribir una ecuación general de segundo grado que las incluyese a todas. Ya desde los tiempos de Euclides se habían utilizado letras para representar magnitudes, conocidas o desconocidas, y Jordano en particular lo había hecho libremente, pero no se había inventado ningún método para distinguir las magnitudes que se suponen conocidas de las cantidades desconocidas que se tratan de calcular. Y aquí fue precisamente donde Viète propuso utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una consonante en cambio para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Aquí nos encontramos por primera vez en álgebra una distinción clara entre el importante concepto de parámetro y la idea de incógnita.

3. El arte analítica

Si Viète hubiera adoptado además otros simbolismos que ya existían, de hecho, en su época, podría haber escrito *todas* las ecuaciones cuadráticas bajo la forma única $BA^2+CA+D=0$, donde A es la incógnita y B, C y D son parámetros; pero desgraciadamente sólo era moderno en algunos sentidos, y antiguo o medieval en otros. Su álgebra es básicamente sincopada más que simbólica, ya que, a pesar de haber adoptado sabiamente los símbolos germánicos para la suma y la resta y, más sabiamente aún, utilizar símbolos diferentes para los parámetros y las incógnitas, el resto de su álgebra consistía en palabras y abreviaturas. Así, por ejemplo, la tercera potencia de la incógnita no se representaba por A^3, ni siquiera por AAA, sino por *A cubus*, y la segunda potencia era análogamente *A quadratus*; la multiplicación venía representada por la partícula latina *in*, la división se indicaba por medio de la línea de fracción, y para la igualdad usaba Viète una abreviatura de la palabra latina *aequalis*. Hay que reconocer que no le suele ser dado a un hombre solo completar un proceso de cambio, sino que lo más usual es que un proceso de este tipo se realice en etapas.

Una de estas etapas, que iba más lejos de lo que alcanzó la obra de Viète, fue la que llevó a cabo Harriot al recuperar la idea de Stifel de escribir el cubo de la incógnita como *AAA*. Esta notación la utiliza Harriot sistemáticamente en su obra póstuma titulada *Artis analyticae praxis*, que fue impresa en 1631. El título de esta obra estaba inspirado por la obra anterior de Viète, a quien no le gustaba el nombre árabe «álgebra». Buscando un sustituto para este nombre, observó Viète que en los problemas relativos a la «cosa» o cantidad incógnita uno suele proceder de una manera que Pappus y los antiguos habían descrito ya con el nombre de análisis. Es decir, que en vez de razonar de lo que se conoce a lo que hay que demostrar, los algebristas razonan invariablemente a partir de la hipótesis de que la incógnita es, como si dijéramos, conocida, y de ello deducen una condición necesaria, a partir de la cual precisamente se puede calcular el valor de la incógnita.

En terminología moderna, si queremos resolver, por ejemplo, la ecuación $x^2-3x+2=0$, procedemos a partir de la premisa de que existe un valor de x que satisface la ecuación; de esta hipótesis deducimos la conclusión necesaria de que $(x-2)(x-1)=0$, de manera que o bien se verifica $x-2=0$ ó $x-1=0$ (o ambas), y por lo tanto x es necesariamente 2 ó 1. Sin embargo, esto no significa que uno o los dos números en cuestión satisfagan la ecuación dada salvo que podamos invertir las etapas que se han seguido en el proceso de razonamiento; es decir, que el análisis tiene que venir seguido por la demostración sintética.

En vista del tipo de razonamiento utilizado tan frecuentemente en álgebra, Viète decidió llamarle «el arte analítica». Por otra parte, Viète parecía ser claramente consciente del amplio campo que cubría esta materia, dándose cuenta de que la cantidad incógnita no necesitaba ser un número o un segmento geométrico; el álgebra razona más bien sobre «tipos» o «especies», y Viète oponía por lo tanto una *logistica speciosa* a la *logistica numerosa* usual. Presentó su versión del álgebra en su obra *Isagoge* (o *Introducción*), impresa en 1591, pero el resto de sus diversas obras algebraicas no se publicaron hasta muchos años después de su muerte. En todas ellas respetaba Viète estrictamente el principio de homogeneidad dimensional en las ecuaciones, de manera que en una ecuación tal como la $x^3+3ax=b$, la a se denomina *planum* y la b *solidum*. Esto sugiere una cierta inflexibilidad, que Descartes se encargará de eliminar una generación más tarde, pero lo cierto es que la homogeneidad también tenía sus ventajas, tal como vio sin duda Viète.

4. Las relaciones entre las raíces y los coeficientes en una ecuación

El álgebra de Viète resulta notable, desde luego, por la generalidad de su expresión, pero aún hay otros aspectos originales. Como ejemplo, Viète propuso un nuevo enfoque de la resolución de la cúbica: Una vez reducida a la forma canónica del tipo $x^3+3ax=b$, introducía una nueva incógnita y relacionada con la x por medio de la ecuación $y^2+xy=a$. Este cambio transforma la cúbica en x en una ecuación cuadrática en y^3, para la que la solución se obtiene ya fácilmente. Viète conocía también algunas de las relaciones que hay entre las raíces y los coeficientes de una ecuación algebraica, pero aquí se encontró con las dificultades obvias derivadas de su fallo al no admitir ni coeficientes ni raíces negativas. Viète comprobó, por ejemplo, que si la ecuación $x^3+b=3ax$ tiene dos raíces positivas x_1 y x_2, entonces $3a=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ y $b=x_1x_2^2+x_2x_1^2$. Esto no es, desde luego, más que un caso particular de nuestro teorema que dice que en una cúbica mónica (es decir, con el coeficiente del término de mayor grado igual a 1), el coeficiente del término en x es igual a la suma de los productos de las raíces, tomadas de dos en dos, mientras que el término constante es el opuesto del producto de las raíces. Así pues, Viète estuvo cerca de descubrir el papel de las funciones simétricas de las raíces en la teoría de ecuaciones. Quedó, sin embargo, para Girard la formulación clara y precisa de las relaciones entre raíces y coeficientes, en 1629, en su obra *Invention nouvelle en l'algèbre*, al permitir las raíces tanto negativas como imaginarias, mientras que Viète sólo había admitido las positivas. De una manera

muy general se dio cuenta Girard de que las raíces negativas vienen a estar dirigidas en un sentido opuesto al de los números positivos, anticipándose así en cierto sentido a la idea de la recta numérica. «Lo negativo en geometría indica un retroceso», decía Girard, «mientras que lo positivo es un avance». También parece haber sido en gran medida Girard el responsable de la primera constatación de que una ecuación puede tener tantas raíces como indique su grado. Girard admitía las raíces imaginarias de las ecuaciones debido a que muestran los principios generales de formación de la ecuación a partir de sus raíces.

5. Thomas Harriot y William Oughtred

Descubrimientos muy parecidos a los de Girard los hizo Thomas Harriot incluso antes que Girard, pero no aparecieron publicados hasta diez años después de que Harriot muriera de cáncer el año 1621. A Harriot le había sido difícil publicar debido a un conflicto de intereses políticos durante los últimos años del reinado de Isabel I. Harriot se había visto enviado por sir Walter Raleigh como topógrafo en la expedición que envió este último al Nuevo Mundo el año 1585, convirtiéndose así en el primer matemático de importancia que posó su pie en América del Norte. (El hermano Juan Díaz, un joven capellán con cierta formación matemática, había tomado parte ya anteriormente en una expedición de Cortés al Yucatán en 1518.) Harriot publicó, a su regreso, la obra *A Briefe and True Report of the New-Found Land of Virginia* en 1586. Cuando su protector perdió el favor de la reina y fue ejecutado, el conde Enrique de Northumberlad le concedió a Harriot una pensión de 300 libras al año, hasta que el 1606 el conde fue encarcelado en la Torre de Londres por el sucesor de Isabel, Jaime I. Harriot continuó visitando a Enrique en la Torre, y tanto las distracciones como su mala salud contribuyeron a impedirle publicar sus resultados.

Harriot sabía las relaciones que hay entre las raíces y los coeficientes de una ecuación y entre las raíces y la descomposición en factores, pero, al igual que Viète, se encontró con las inevitables dificultades derivadas de no tener en cuenta ni las raíces negativas ni las imaginarias. En materia de notación, sin embargo, se le deben algunos avances importantes en el uso del simbolismo, al ser el responsable de la introducción de los signos $>$ y $<$ para «mayor que» y «menor que»[2]. También fue en parte su utilización del signo de igualdad de Recorde lo que condujo a su adopción generalizada. Harriot fue, en cualquier caso, mucho más moderado en el uso de notaciones nuevas que su contemporáneo más joven William Oughtred, que publicó su *Clavis mathematicae* el mismo año 1631 en que se publicaba la *Praxis* de Harriot póstumamente. En la *Clavis*, la notación para las potencias suponía un retroceso hacia Viète, puesto que, por ejemplo, donde Harriot

[2] Véase J. A. Lohne, «Thomas Harriot als Mathematiker», *Centaurus*, 11 (1965), págs. 19-45. Acerca de la vida de Harriot, véase el artículo de Agnes M. Clerke en el *Dictionary of National Biography*, vol. XXIV (1890), págs. 437-439. Véase también R. C. H. Tanner, «On the Role of Equality of Mathematics», en el *British Journal of the History of Science*, 1 (1962), págs. 159-169, y Robert Kargon, «Thomas Harriot, the Northumberland Circle and Early Atomism in England», en el *Journal of the History of Ideas*, 27 (1966), págs. 128-136.

había escrito *AAAAAAA*, Oughtred usaba *Aqqc* (es decir, *A quadratus quadratus cubus*). De todas las notaciones nuevas introducidas por Oughtred sólo hay una que se utilice actualmente de una manera general, y es el aspa × para la multiplicación[3].

La forma homogénea que debían tener sus ecuaciones muestra claramente que el pensamiento de Viète se encontraba siempre próximo a la geometría, pero su geometría no era la de nivel elemental de tantos de sus predecesores, sino que era la de alto nivel de Apolonio y de Pappus. Interpretando las operaciones algebraicas elementales de una manera geométrica, constató Viète que bastan la regla y el compás para llegar hasta las raíces cuadradas. Sin embargo, si se permite la interpolación de dos medias geométricas entre dos magnitudes dadas, entonces uno pude construir raíces cúbicas o, *a fortiori*, resolver geométricamente cualquier ecuación cúbica. En este caso podemos, como demostró Viète, construir el heptágono regular, ya que esta construcción conduce a una cúbica de la forma $x^3 = ax + a$. De hecho, toda ecuación cúbica o cuártica puede resolverse por medio de trisecciones de ángulos e interpolaciones de dos medias geométricas entre dos magnitudes dadas. Aquí podemos ver con toda claridad una tendencia muy significativa, la de la asociación de la nueva álgebra superior con la antigua geometría superior. La geometría analítica ya no podía estar, pues, muy lejos, y Viète podría haber descubierto esta tierra prometida él mismo si no hubiera evitado el estudio geométrico de las ecuaciones indeterminadas. Los intereses matemáticos de Viète fueron extraordinariamente amplios, y había leído, en consecuencia, la *Arithmetica* de Diofanto, pero cuando un problema geométrico conducía a Viète a una ecuación final en dos incógnitas, lo desechaba con la ligera observación de que el problema era entonces indeterminado. Uno hubiera querido que, basándose en su punto de vista tan general, hubiera investigado Viète precisamente las propiedades geométricas de tal «indeterminación».

6. De nuevo el método de Horner

En muchos aspectos la obra de Viète se ha visto escandalosamente subvalorada, pero en un caso al menos es posible que se le haya atribuido indebidamente un método que ya había sido conocido mucho antes en China. En una de sus obras tardías, la *De numerosa potestatum... resolutione* (1600), da Viète un método para la resolución aproximada de ecuaciones, que es prácticamente el mismo que hoy conocemos como método de Horner. Para resolver la ecuación $x^2 + 7x = 60.750$, por ejemplo, Viète parte de una primera aproximación inferior para x dada por $x_1 = 200$. Sustituyendo entonces $x = 200 + x_2$ en la ecuación original (o, como también podríamos decir, reduciendo en 200 la raíz) se obtiene $x_2^2 + 407x_2 = 19.350$. Esta ecuación nos conduce a una segunda aproximación $x_2 = 40$, y sustituyendo ahora

[3] Para una biografía de Oughtred y más referencias véase Florian Cajori, *William Oughtred, a Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics* (1916), así como el artículo sobre Oughtred por J. B. Mullinger en el *Dictionary of National Biography*, vol. XLII (1895), págs. 356-358. Sobre el tema del simbolismo en general uno puede siempre recurrir con seguridad a la obra básica de Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (1929).

$x_2 = 40 + x_3$ se obtiene la ecuación $x_3^2 + 487x_3 = 1.470$, de la que su raíz positiva es 3, luego $x_2 = 43$ y $x = 243$. Este ejemplo tomado de Viète (pero escrito en notación moderna), se podría haber resuelto, por supuesto, completando el cuadrado, pero el autor resuelve de la misma manera otros casos en los que no se encuentra a mano ninguna otra alternativa más sencilla, hallando así, por ejemplo, una solución de la ecuación $x^6 + 6.000x = 191_1246.976$. Una de las bellezas del método radica en que es aplicable a cualquier ecuación polinómica de coeficientes reales y con una raíz real.

7. Trigonometría y prostafairesis

La trigonometría de Viète se caracteriza, lo mismo que su álgebra, por el énfasis que se pone de manifiesto en la generalidad y amplitud de miras. Ya hemos visto que Viète fue el verdadero creador del álgebra literal, pero también puede considerársele, con cierta justificación, como el padre del enfoque analítico general de la trigonometría que a veces recibe el nombre de goniometría. También aquí parte Viète, desde luego, de la obra de sus predecesores, especialmente de Regiomontano y de Rheticus. Al igual que el primero, consideró Viète la trigonometría como una rama independiente de la matemática y, como en el segundo, trabajó generalmente sin ninguna referencia directa a las semicuerdas en una circunferencia. En su *Canon mathematicus* (1579) calculó Viète unas extensas tablas de las seis funciones trigonométricas para ángulos de minuto en minuto. Ya hemos visto que propugnaba enérgicamente el uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales, pero en este caso, y para evitar cualquier tipo de fracciones todo lo posible, eligio Viète un «sinus totus» o hipotenusa de 100.000 partes para las tablas de senos y consenos, y una «base» o «perpendiculum» de 100.000 partes para las tablas de tangentes, cotangentes, secantes y cosecantes. Sin embargo, y salvo para la función seno, Viète no utilizó estos nombres, lógicamente.

En la resolución de triángulos obtusángulos en el *Canon mathematicus*, los descompone Viète en triángulos rectángulos, pero en otra obra posterior a ésta en casi quince años, la *Variorum de rebus mathematicis* (1593), hay ya un teorema equivalente a nuestra ley de las tangentes:

$$\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

Aunque Viète puede haber sido el primero que utilizó esta fórmula, fue publicada unos años antes por un oscuro personaje, Thomas Finck, en 1583, en su libro *Geometria rotundi.*

Por esta época comenzaron a aparecer diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa, como resultado de un menor énfasis en los cálculos de resolución de triángulos, y mayor en cambio en las relaciones funcionales de tipo

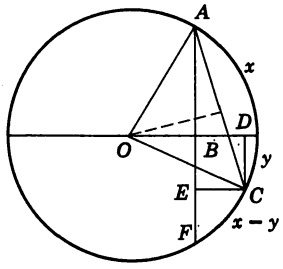


Figura 16.1

analítico. Entre estas identidades estaba un grupo de fórmulas conocidas como las «reglas de prostafairesis», es decir, fórmulas que permitían convertir un producto de funciones circulares en una suma o una diferencia (de donde les venía el nombre de *prosthaphaeresis*, palabra griega que significa suma y resta). A partir de la figura siguiente obtuvo Viète, por ejemplo, la fórmula

$$\text{sen } x+\text{sen } y=2 \text{ sen } \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Sea sen $x=AB$ (fig. 16.1) y sen $y=CD$. Entonces se tiene que

$$\text{sen } x+\text{sen } y=AB+CD=AE=AC \cos \frac{x-y}{2}=2 \text{ sen } \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

Haciendo la sustitución $\frac{x+y}{2}=A$ y $\frac{x-y}{2}=B$ obtenemos la forma más útil de la identidad anterior

$$\text{sen } (A+B)+\text{sen } (A-B)=2 \text{ sen } A \cos B$$

De una manera análoga se obtiene

$$\text{sen } (A+B)-\text{sen } (A-B)=2 \cos A \text{ sen } B$$

colocando los ángulos x e y del mismo lado del radio OD.

Las fórmulas

$$2 \cos A \cos B=\cos (A+B)+\cos (A-B)$$
$$2 \text{ sen } A \text{ sen } B=\cos (A-B)-\cos (A+B)$$

pueden obtenerse por un método parecido.

Todas estas reglas llevan el nombre de «fórmulas de Werner», debido a que, al parecer, fueron utilizadas por Werner para simplificar los cálculos astronómicos. Por lo menos una de ellas, la que convierte un producto de cosenos en una suma, la habían conocido ya los árabes de la época de Ibn-Yunus, pero sólo en el siglo XVI, y más concretamente a finales de este siglo, fue cuando se popularizó el método de prostafairesis. Si uno tiene que multiplicar, por ejemplo, 98.436 por 79.253, puede poner cos $A = 49.218$, es decir, $\frac{98.436}{2}$ y cos $B = 79.253$. (En notación moderna situaríamos, temporalmente, la coma decimal al comienzo de cada uno de los números, y después ajustaríamos la coma decimal convenientemente en el resultado.) Entonces puede uno leer los valores de los ángulos A y B directamente en las tablas de funciones trigonométricas y buscar después en las mismas tablas cos $(A+B)$ y cos $(A-B)$, cuya suma nos dará el producto buscado; obsérvese que se halla este producto sin tener que hacer ninguna multiplicación. En el ejemplo de multiplicación prostafairética que hemos puesto no se consigue un gran ahorro de tiempo ni de energía, pero basta recordar que en aquella época ya no eran raras las tablas trigonométricas con doce o quince decimales para darse cuenta de que las posibilidades de ahorro de trabajo de la prostafairesis son muy notables. Este artificio se adoptó en todos los observatorios astronómicos importantes, incluido el de Tycho Brahe (1546-1601) en Dinamarca, de donde le llegó la noticia a Napier en Escocia. Los cocientes, por su parte, se manejan de la misma manera, pero utilizando esta vez una tabla de secantes y cosecantes.

Quizá donde se pueda apreciar más claramente lo que supone la generalización de Viète de la trigonometría sea en conexión con sus fórmulas para las funciones trigonométricas de ángulos múltiplos de uno dado. Las fórmulas para el seno y el coseno del ángulo doble ya las conocía Ptolomeo, desde luego, y las fórmulas para el ángulo triple se pueden obtener fácilmente de las de Ptolomeo para el seno y el coseno de una suma de dos ángulos. Si se siguen utilizando las fórmulas de Ptolomeo de una manera recursiva, se pueden obtener, pues, fórmulas para sen nx y cos nx, aunque a costa de un gran esfuerzo. Viète hizo uso de una ingeniosa manipulación de triángulos rectángulos y de la conocida identidad

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2=(ad-bc)^2+(bd+ac)^2$$

para llegar a unas fórmulas para los ángulos múltiplos que son equivalentes a las que nosotros escribiríamos de la forma

$$\cos nx=\cos^n x-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x\,\operatorname{sen}^2 x$$

$$+\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x\,\operatorname{sen}^4 x-\cdots$$

y

$$\operatorname{sen} nx=n\cos^{n-1} x\,\operatorname{sen} x-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x\,\operatorname{sen}^3 x+\cdots$$

donde los signos van alternados y los coeficientes son, en valor absoluto, números alternados de la fila correspondiente del triángulo aritmético. Vemos pues aquí una relación sorprendente entre la trigonometría y la teoría de números.

8. La resolución trigonométrica de ecuaciones

Viète observó también una importante conexión entre sus fórmulas y la resolución de la ecuación cúbica: La trigonometría podría servir de ayuda al álgebra precisamente en el caso en que esta última se había estrellado contra un muro de piedra, es decir, en el caso irreducible de las ecuaciones cúbicas. Esta idea se le ocurrió a Viète evidentemente cuando observó que el problema de la trisección del ángulo conducía a una ecuación cúbica. Si en la ecuación $x^3+3px+q=0$, hacemos la sustitución $mx=y$ para obtener un grado de libertad al determinar más tarde el valor de m, resulta $y^3+3m^2py+m^3q=0$. Comparando este resultado con la fórmula $\cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 3\theta=0$, se puede comprobar que si $y=\cos\theta$ y si $3m^2p=-\frac{3}{4}$, entonces $-\frac{1}{4}\cos 3\theta=m^3q$, y como p es conocido se puede calcular m (que será real siempre que las tres raíces sean reales), y, por lo tanto, se puede calcular 3θ al ser q conocido, luego conocemos $\cos\theta$, es decir, y, de donde se obtiene inmediatamente el valor de x. Además, considerando todos los ángulos posibles que satisfagan las condiciones anteriores pueden calcularse todas las tres raíces reales. Esta resolución trigonométrica del caso irreducible de la cúbica, sugerida por Viète, fue llevada a cabo más tarde con todo detalle por Girard en 1629 en su *Invention nouvelle en l'algèbre.*

Viète encontró en 1593 una oportunidad inesperada de aplicar sus fórmulas de los ángulos múltiplos. Un matemático belga, Adriaen van Roomen o Romanus (1561-1615) había lanzado un desafío público a cualquiera que se sintiera con fuerzas para resolver la ecuación de grado 45:

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-\cdots-3795x^3+45x=K$$

El embajador de los Países Bajos en la corte de Enrique IV se jactaba de que no había en Francia ningún matemático capaz de resolver el problema propuesto por su compatriota. Viète, llamado en esta ocasión a defender el honor de sus paisanos, observó que la ecuación propuesta era exactamente la que resulta al expresar $K=\text{sen}\,45\theta$ en términos de $x=2\,\text{sen}\,\theta$, y así pudo calcular rápidamente las raíces positivas. El éxito de Viéte impresionó tanto a van Roomen que le hizo una visita especial con esta ocasión.

Al aplicar la trigonometría a los problemas aritméticos y algebraicos, estaba ampliando Viète considerablemente el marco de esta materia[4]. Por otra parte, sus

[4] No hay ninguna edición fácilmente asequible de las obras de Viète, ni siquiera una buena exposición general en inglés de su vida y su obra. Su *Opera mathematica*, editada por Fr. van Schooten (Leiden, 1646) es rara, lo mismo que lo son la mayor parte de los libros publicados de Viète. La obra de Frédérik Ritter *François Viète* (1895) puede resultar útil. Una comunicación reciente del profesor D. J. Struik me informa de que existe una traducción inglesa (mecanografiada) del *Isagoge* de Viète por J. Winfree Smith; St. John's College, Annapolis, Md., 1955.

fórmulas para los ángulos múltiplos deberían haber revelado el carácter periódico de las funciones goniométricas, pero probablemente fue su aversión a los números negativos lo que le impidió (tanto a Viète como a sus contemporáneos) llegar tan lejos. A finales del siglo XVI y comienzos del XVII se desarrolló un entusiasmo considerable por la trigonometría, pero este entusiasmo tomó básicamente la forma de las síntesis y los libros de texto. Durante este período fue cuando se le aplicó por vez primera el nombre de «trigonometría» a esta parte de la matemática; el nombre aparecía en el título de una exposición por Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) que se publicó por primera vez el año 1595 como suplemento a un libro sobre «esférica», y de nuevo de una manera independiente en 1600, 1606 y 1612[5]. No deja de ser una coincidencia, en cierto sentido, el hecho de que el desarrollo de los logaritmos, que desde entonces han constituido un fiel aliado de la trigonometría, estaba teniendo lugar también durante estos mismos años.

9. John Napier

John Napier (o Neper) no era, lo mismo que Viète, un matemático profesional, sino que era un hacendado escocés que, con el título de Barón de Murchiston, administraba sus extensas propiedades y aprovechaba el tiempo para escribir sobre temas variados. Por ejemplo, en un comentario sobre el Apocalipsis de San Juan, sostenía Napier que el papa de Roma era el Anticristo. Sólo estaba interesado en algunos aspectos de la matemática, principalmente los relacionados con el cálculo numérico y la trigonometría. Las «varillas o huesos de Napier» eran unas varillas en las que aparecían impresas tablas de multiplicar de tal manera que se podían aplicar fácilmente a la multiplicación por el método de la *gelosia*, y las «analogías de Napier» y la «regla de Napier de las partes circulares» eran reglas mnemotécnicas para ayudar a recordar fórmulas de trigonometría esférica.

Napier nos dice que había trabajado durante veinte años en su invención de los logaritmos antes de publicar sus resultados, afirmación que nos permite situar los orígenes de sus ideas al respecto hacia el año 1594. Evidentemente, Napier debió reflexionar sobre las sucesiones de potencias de un número dado, que habían aparecido publicadas aquí y allá, tal como, por ejemplo, en la *Arithmetica integra* de Stifel cincuenta años antes, y en las obras de Arquímedes. En tales sucesiones era evidente que a los productos o cocientes de las potencias corresponden respectivamente las sumas o diferencias de los índices o exponentes de las potencias mismas, pero el caso era que una sucesión de potencias enteras de una base entera, tal como, por ejemplo, dos, no resultaba útil para el cálculo debido a que los grandes huecos entre los términos sucesivos hacen la interpolación demasiado imprecisa. Mientras Napier se encontraba enfrascado en estas reflexiones, le visitó el doctor John Craig, médico del rey Jaime VI de Escocia, y le habló del uso que se hacía en Dinamarca del método de prostafairesis. Probablemente Craig había tomado parte en la expedición que llevó a Jaime VI de Escocia, junto con una delegación, a

[5] Véase, para una exposición completa de esta obra, Sister Mary Claudia Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1944).

Dinamarca el año 1590 para encontrarse con su futura esposa la princesa Ana. La expedición se vio forzada por las tormentas a buscar refugio en la costa y amarrar no lejos del observatorio de Tycho Brahe, donde, mientras esperaban a que mejorase el tiempo, fueron agasajados por el astrónomo. Al parecer debió hacerse referencia al maravilloso método de la prostafairesis, muy utilizado en los cálculos que se hacían en el observatorio, y las noticias acerca de ello que recibió más tarde Napier lo animaron a redoblar sus esfuerzos y llegar a publicar finalmente en 1614 su obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* («Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos»).

10. La invención de los logaritmos

La idea clave de la obra de Napier se puede explicar con gran sencillez: Para conseguir que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estén muy próximos unos a otros, es necesario tomar este número muy próximo a uno. En consecuencia, Napier decidió tomar $1-10^{-7}=0{,}9999999$ como el número dado; entonces los términos de la progresión (decreciente) de potencias enteras crecientes, están ciertamente muy próximos entre sí, demasiado próximos de hecho. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplicó Napier todas las potencias por 10^7. Entonces, si $N=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$, L será el «logaritmo» de Napier del número N; así pues, el logaritmo de 10^7 será 0, el logaritmo de $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=9999999$ será 1, etc. Si dividiéramos tanto los números como los logaritmos por 10^7, tendríamos prácticamente un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, puesto que $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ no se diferencia ya demasiado del

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

Hay que recordar, sin embargo, que Napier no utilizaba ninguna idea de lo que es una base de un sistema de logaritmos, siendo como es su definición diferente de la nuestra. Los principios de su obra los explica Napier en términos geométricos de la manera siguiente: Sea un segmento AB y una semirecta CDE dados (fig. 16.2). Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia a B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB.

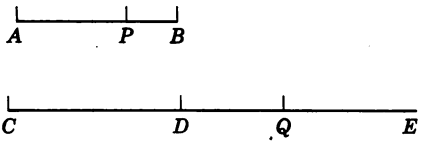


Figura 16.2

Esta segunda definición geométrica de Napier está de acuerdo, desde luego, con la primera definición numérica dada más arriba. Para demostrarlo, sea $PB=x$ y $CQ=y$. Si AB lo tomamos igual a 10^7 y también tomamos igual a 10^7 la velocidad inicial de P, entonces, en el simbolismo moderno del cálculo infinitesimal, tenemos que $\frac{dx}{dt}=-x$ y $\frac{dy}{dt}=10^7$, $x_0=10^7$, $y_0=0$. Entonces $\frac{dy}{dx}=\frac{-10^7}{x}$, o bien $y=-10^7 \ln cx$, donde la constante c puede calcularse a partir de las condiciones iniciales y resulta ser 10^{-7}; así pues, $y=-10^7 \ln \frac{x}{10^7}$ o bien

$$\frac{y}{10^7}=\log_{1/e}\frac{x}{10^7}$$

Es decir, que si las distancias PB y CQ estuvieran divididas por 10^7, entonces la definición de Napier nos conduciría precisamente a un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, tal como decíamos anteriormente. No es necesario decir que Napier calculó sus tablas numéricamente y no geométricamente, desde luego, tal como indica la palabra «logaritmo» inventada por él. Al principio Napier llamó a sus índices de potencias o exponentes «números artificiales», pero más tarde se decidió por la palabra compuesta de las dos palabras griegas *logos* (o razón) y *arithmos* (o número).

Napier no pensaba, como hemos hecho notar ya, en una base para su sistema, pero no obstante sus tablas venían calculadas por medio de multiplicaciones repetidas, equivalentes a elevar a potencias el número 0,9999999. Obviamente la potencia (o número) disminuye según el índice (o logaritmo) aumenta, lo cual era de esperar ya que estaba utilizando esencialmente como base $\frac{1}{e}$ que es menor que 1. Una diferencia más notable entre sus logaritmos y los nuestros consiste en el hecho de que su logaritmo de un producto (o de un cociente) no es igual, en general, a la suma (o a la diferencia) de los logaritmos. Si $L_1=\log N_1$ y $L_2=\log N_2$, entonces $N_1=10^7\cdot(1-10^{-7})^{L_1}$ y $N_2=10^7(1-10^{-7})^{L_2}$, y por lo tanto $\frac{N_1N_2}{10^7}=10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}$, de manera que la suma de los logaritmos de Napier L_1+L_2 no será el logaritmo de N_1N_2, sino de $\frac{N_1N_2}{10^7}$. Modificaciones análogas tienen lugar, desde luego, en los casos de logaritmos de cocientes, potencias y raíces. Por

ejemplo, si $L = \log N$, entonces $nL = \log \frac{N^n}{10^{7(n-1)}}$. Estas diferencias no son, hay que reconocerlo, demasiado importantes, ya que se refieren únicamente a un corrimiento de la coma decimal, según los casos. Es evidente que Napier estaba totalmente familiarizado con las reglas de cálculo para los productos y potencias, en vista de su observación de que todos los números (él los llama «senos») en la razón de 2 a 1 tienen una diferencia entre sus logaritmos de $6_1931.469{,}22$, mientras que los que están en la razón 10 a 1 tienen como diferencia de logaritmos $23_1025.842{,}34$. En estas diferencias podemos ver, si corremos adecuadamente la coma decimal, los logaritmos naturales de 2 y de 10. Por lo tanto, resulta razonable utilizar el nombre de «naperianos» para los logaritmos naturales, incluso a pesar de que estos logaritmos no son exactamente los que inventó Napier.

La idea de la función logarítmica está ya implícita en la definición de Napier y en toda su obra sobre los logaritmos, pero el hecho es que esta relación funcional no ocupaba el primer plano en su pensamiento. Napier construyó laboriosamente su sistema con un objetivo concreto, la simplificación de los cálculos, especialmente en el caso de los productos y cocientes. Además, es muy revelador de que tenía en la mente los cálculos trigonométricos concretos el hecho de que lo que nosotros hemos llamados, para simplificar la exposición, logaritmo de Napier de un número, él lo llama el logaritmo de un seno. En la figura 16.2 el segmento CQ recibió el nombre de logaritmo del seno PB, lo cual no supone diferencia alguna ni en la teoría ni en la práctica.

11. Henry Briggs

La publicación del sistema logarítmico en 1614 fue acogida y aceptada con gran rapidez, y entre los admiradores más entusiastas de la nueva teoría estaba Henry Briggs, que fue el primer Savilian Professor de geometría en Oxford. Al año siguiente, en 1615, Briggs visitó a Napier en su residencia en Escocia, donde discutieron ambos las posibles modificaciones del método de los logaritmos. Briggs proponía que se utilizasen potencias de diez, a lo que contestó Napier que ya había pensado en ello y que estaba de acuerdo. Napier mismo había sugerido en un cierto momento una tabla basada en las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$, para evitar las fracciones, pero al final los dos hombres llegaron a la conclusión de que lo más conveniente sería que el logaritmo de uno fuese cero y que el logaritmo de diez fuese uno. Sin embargo, Napier se encontraba ya viejo y sin las energías necesarias

[6] Existen muchas y buenas exposiciones de la obra de Napier. Entre las mejores está el artículo sobre «Logarithms» por J. W. L. Glaisher en la *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª ed., vol. 16, págs. 868-877. También es excelente el artículo de Florian Cajori «History of the Exponential and Logarithmic Concepts», en el *American Mathematical Monthly*, 20 (1913), págs. 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210, así como el artículo de Glaisher «On Early Tables of Logarithms and Early History of Logarithms en el *Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48 (1920), págs. 151-192. Véase también E. W. Hobson, *John Napier and the Invention of Logarithms* (1914), y el *Napier Tercentenary Memorial Volume*, editado por C. G. Knott (1915). Este último, sin embargo, atribuye a Napier unos méritos un tanto excesivos.

para llevar a la práctica estas ideas, y murió en 1617, el mismo año en que apareció su *Rhabdologia* exponiendo el método de las varillas. El segundo de sus tratados clásicos sobre los logaritmos, el *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, en el que daba Napier una exposición completa de los métodos que utilizó para calcular sus tablas, apareció póstumamente en 1619[6]. Así pues, recayó en Briggs la tarea de construir la primera tabla de logaritmos llamados logaritmos vulgares o de Briggs. En vez de tomar *potencias* de un número muy próximo a uno, como había hecho Napier. Briggs comenzó a partir de la igualdad $\log 10 = 1$, y después fue calculando otros logaritmos tomando *raíces* sucesivamente. Por ejemplo, de $\sqrt{10} = 3{,}162277$ obtiene Briggs que $\log 3{,}162277 = 0{,}5000000$, y análogamente, de $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{31{,}62277} = 5{,}623413$, que $\log 5{,}623413 = 0{,}7500000$. Continuando de esta misma manera calculó otros logaritmos vulgares. En el año 1617, el de la muerte de Napier, publicó Briggs su obra *Logarithmorum chilias prima*, es decir, los logaritmos de los números del 1 al 1.000, todos ellos con catorce cifras decimales. En 1624, en su *Arithmetica logarithmica*, extendió Briggs su tabla hasta incluir los logaritmos vulgares de los números del 1 al 20.000 y del 90.000 al 100.000, siempre con catorce cifras decimales. Ahora se podía trabajar ya con los logaritmos exactamente igual que lo hacemos hoy, puesto que las tablas de Briggs gozan de todas las propiedades usuales de los logaritmos. Incidentalmente, hay que decir que nuestros nombres «característica» y «mantisa» se derivan del libro de Briggs de 1624. Mientras que Brigss calculaba estas tablas de logaritmos vulgares, un contemporáneo suyo, John Speidell, calculaba los logaritmos naturales (o naperianos) de las funciones trigonométricas, publicándolos en su obra *New Logarithmes* de 1619; de hecho, ya anteriormente, en 1616, habían aparecido algunos logaritmos naturales, en una traducción inglesa de la primera obra de Napier sobre los logaritmos, hecha por Edward Wright (1559-1615). Raramente un descubrimiento nuevo ha «pegado» tan rápidamente como el invento de los logaritmos, y el resultado de ello fue la inmediata aparición de tablas de logaritmos que eran más que suficientes para la época.

12. Jobst Bürgi

De lo que hemos dicho más arriba parece deducirse que la invención de los logaritmos fue obra de un hombre solo, pero se trata de una impresión incorrecta que debemos corregir en seguida. Napier fue realmente el primero en publicar una obra sobre los logaritmos, pero casi al mismo tiempo desarrollaba Jobst Bürgi en Suiza ideas muy parecidas y de forma totalmente independiente. De hecho, es posible que la idea de los logaritmos se le ocurriera a Bürgi[7] tan pronto como en el año 1588, lo que supondría media docena de años antes de que Napier comenzara a trabajar en la misma dirección. Sin embargo, Bürgi no publicó sus resultados hasta 1620, es decir, media docena de años después de que Napier hubiera publicado su *Descriptio*. La obra de Bürgi apareció impresa en Praga, en un libro

[7] Véase J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik* (1963), pág. 167.

titulado *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*, lo que indica que las motivaciones que le condujeron a su obra fueron muy parecidas a las que actuaron en el caso de Napier. Ambos partieron de las propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas, impulsados probablemente por el método de la prostafairesis. Las diferencias entre las obras de estos dos hombres radican principalmente en la terminología y en los valores numéricos que utilizaron; los principios fundamentales, en cambio, eran los mismos. En lugar de partir de un número un poco *menor* que 1, como había hecho Napier al tomar $1-10^7$, Bürgi eligió un número un poco *mayor* que 1, el número $1+10^{-4}$, y en vez de multiplicar las potencias de este número por 10^7, las multiplicó Bürgi por 10^8. Hay además otra diferencia menor: Bürgi multiplica en sus tablas todos los índices o exponentes de las potencias por 10. Es decir, que si $N=10^8(1+10^{-4})^L$, entonces Bürgi llama a $10\cdot L$ el «número rojo» correspondiente al «número negro» N. Por lo tanto, si dividiéramos en este sistema todos los números negros por 10^8 y todos los números rojos por 10^5, tendríamos virtualmente un sistema de logaritmos naturales. Por ejemplo, Bürgi da para el número negro $1.000_1000.000$ el número rojo 230.270,022, que, previo el oportuno corrimiento de las comas decimales, es equivalente a decir que $\ln 10=2{,}30270022$. Esta no es una mala aproximación al valor moderno, especialmente si tenemos en cuenta que $(1+10^{-4})^{10^4}$ no es exactamente lo mismo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

aunque ambos valores concuerdan hasta la cuarta cifra significativa.

Al publicar sus tablas situó Bürgi sus números rojos a lo largo de uno de los lados de cada página, y sus números negros en el cuerpo de la tabla, luego lo que se tenía realmente era lo que nosotros llamaríamos una tabla de antilogaritmos, pero ésta es una cuestión menor, evidentemente. La esencia del principio de los logaritmos se encuentra aquí, sin duda, y tenemos que considerar a Bürgi como un descubridor independiente de los logaritmos, en el que no recayeron los honores de la invención debido a la prioridad de Napier a la hora de publicarla. En un aspecto importante al menos sus logaritmos están más próximos a los nuestros que los de Napier, ya que según van tomando valores crecientes los números negros de Bürgi, aumentan también los números rojos, pero los dos sistemas comparten la desventaja de que el logaritmo de un producto o de un cociente no es igual a la suma o la diferencia de los logaritmos.

13. La matemática aplicada y las fracciones decimales

La invención de los logaritmos terminó por producir un tremendo impacto en la estructura de la matemática, pero en la época a la que nos estamos refiriendo no podía compararse, en cuanto a importancia teórica con la obra, digamos, de un Viète. Los logaritmos fueron saludados con complacencia por Kepler, no como

una contribución al pensamiento, sino porque aumentaban enormemente la capacidad de cálculo del astrónomo. Viète no fue exactamente una «voz clamando en el desierto», pero lo que sí es cierto es que la mayor parte de sus contemporáneos estaban interesados principalmente en los aspectos prácticos de la matemática. Bürgi era un fabricante de relojes, Galileo un físico y un astrónomo y Stevin un ingeniero. Era inevitable que estos hombres mostraran preferencia por partes de la matemática que prometieran ser aplicables a sus respectivos campos. Bürgi y Stevin, por ejemplo, contribuyeron al desarrollo y divulgación de las fracciones decimales, y Bürgi y Galileo rivalizaron en la fabricación y venta de un artificio para la práctica del cálculo, conocido como compás proporcional. El llamado Renacimiento científico, ilustrado por la obra de hombres tales como Leonardo da Vinci y Copérnico, fue un fermento que surgió, en gran medida, del contacto entre viejas y nuevas ideas y entre los puntos de vista de los artesanos y los de los intelectuales.

En la matemática del siglo XVI se dieron tendencias muy diversas e incluso conflictivas, pero podemos percibir aquí, lo mismo que en la ciencia en general, los resultados de la confrontación de ideas muy arraigadas con los conceptos nuevos, y de puntos de vista teóricos con las exigencias que imponen los problemas prácticos. Ya hemos visto que la obra de Viète tuvo sus raíces en dos hechos concretos: 1) la recuperación de los antiguos clásicos griegos, y 2) los desarrollos relativamente nuevos del álgebra medieval y de comienzos de la época moderna. A lo largo del siglo XVI los matemáticos teóricos tanto *amateurs* como profesionales mostraron un gran interés por las técnicas prácticas del cálculo, lo que contrasta enérgicamente con la dicotomía en la que había puesto tanto énfasis Platón dos milenios antes. Viète, el más importante matemático de Francia de la época, había insistido ya en 1579 en la necesidad de reemplazar las fracciones sexagesimales por las fracciones decimales. En 1585 se formuló una petición, incluso más enérgica que la de Viète, favorable al uso de la escala de base 10 para las fracciones lo mismo que para los enteros, debida al matemático más eminente de los Países Bajos, Simon Stevin de Brujas.

Stevin, que apoyaba la facción protestante encabezada por Guillermo de Orange en su lucha contra la católica España, fue tolerante, si no indiferente, en materia religiosa. Bajo el príncipe Mauricio de Nassau ocupó el cargo de intendente general y de comisario de obras públicas y durante un cierto tiempo fue tutor del príncipe en matemáticas. A pesar de que Stevin era un gran admirador de los tratados teóricos de Arquímedes, corre por todas las obras del ingeniero flamenco una corriente de tipo práctico que es más característica del período del Renacimiento que de la antigüedad clásica. Así, por ejemplo, Stevin fue en gran medida el responsable de la introducción en los Países Bajos de la contabilidad de doble entrada al estilo de la que había popularizado Pacioli en Italia hacía casi un siglo[8]. Una influencia mucho más amplia en la práctica económica, en la ingeniería y en el uso de las notaciones matemáticas fue la que ejerció el librito de Stevin con el título flamenco de *De Thiende* (o «El décimo»), publicado en Leyden

[8] Para una exposición de la vida y de la obra de Stevin véase *The Principal Works of Simon Stevin* (editadas por E. J. Dijksterhuis, D. J. Struik y otros), Amsterdam, 1955-1958.

en 1585. El mismo año apareció una versión francesa titulada *La disme*, y el libro alcanzó tal popularidad que frecuentemente se ha interpretado mal su papel en el desarrollo de la matemática.

Está claro que Stevin no fue en absoluto ni el *inventor* de las fracciones decimales ni el primero en utilizarlas de una manera sistemática. Se encuentra ya un uso más que casual de las fracciones decimales en la antigua China, en la Arabia medieval y en la Europa renacentista; por la época en la que Viète proclama su decidido apoyo a las fracciones decimales en 1579, ya se las aceptaba, en general, por parte de los matemáticos que estaban en las fronteras de la investigación. En cambio, entre la gente corriente e incluso entre los matemáticos que se ocupaban de problemas prácticos, las fracciones decimales sólo se popularizaron cuando Stevin acometió la tarea de explicarlas con todo detalle y de una manera muy elemental. Lo que pretendía Stevin era enseñar a todo el mundo «cómo efectuar, con una facilidad insospechada, los cálculos necesarios en la vida diaria por medio de enteros sin fracciones». Es decir, que Stevin consideraba, de una manera bastante singular, sus décimas, centésimas, milésimas, etc., simplemente como los correspondientes numeradores enteros, de una manera muy parecida a como hacemos nosotros al medir el tiempo en minutos y segundos. ¿Quién de nosotros piensa en una fracción al hablar de 3 minutos y 4 segundos, por ejemplo? Estamos mucho más acostumbrados a considerar 3 minutos como un entero que no como $\frac{3}{60}$ de una hora, y éste era precisamente el punto de vista de Stevin. Por esta razón no escribía sus expresiones decimales con denominadores, tal como había hecho Viète; en vez de hacerlo así, escribía Stevin dentro de un círculo, encima o a continuación de cada dígito, la potencia de 10 que debería llevar como divisor. Así, por ejemplo, el valor aproximado de π aparecía escrito como

		⓪	①	②	③	④
3⓪ 1① 4② 1③ 6④	o	3	1	4	1	6

y en lugar de las palabras «décima», «centésima», etc., utilizaba Stevin «primo», «segundo», etc., de la misma manera que designamos nosotros aún hoy los diferentes lugares en las fracciones sexagesimales[9].

Stevin tenía evidentemente una idea correcta de las fracciones decimales, pero su notación para los diferentes lugares, inspirada por la de Bombelli, era más adecuada para el álgebra que para la aritmética. Pero por fortuna la notación moderna no iba a tardar ya en llegar. En la traducción al inglés de la *Descriptio* de Napier, el 1616, las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria. En su *Rhabdologia* de 1617, en la que describe la manera de calcular utilizando sus

[9] Véase D. J. Struik, «Simon Stevin and the Decimal Fractions», *The Mathematics Teacher*, 52 (1959), págs. 474-478, y también George Sarton, «Simon Stevin of Bruges (1548-1620)», *Isis*, 21 (1934), págs. 241-303, y «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585)», *Isis*, 23 (1935), págs. 153-244. Véase también D. E. Smith, «The Invention of the Decimal Fraction», *Teachers College Bulletin*, 5 (1910), págs. 11-21.

THIENDE. 13

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Weſende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③. T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men ſal de ghegheven ghetalen in oirden ſtellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene manier der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onſer Franſcher Arith.) 941304 dat ſijn (twelck de teeckenen boven de ghetalen ſtaende, anwijſen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick ſegghe de ſelve te weſen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē t'ſamen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de ſelve reden ſullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich ſijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②

Una página del libro de Stevin (edición de 1634), mostrando la notación de Stevin para las fracciones decimales.

varillas, se refiere Napier a la aritmética decimal de Stevin y propone un punto o una coma como signo de separación decimal. En la *Constructio* de Napier de 1619 se consagró el uso del punto decimal en Inglaterra, pero en muchos otros países europeos se continúa utilizando hoy la coma decimal. Stevin insitía además en el uso de un sistema decimal de pesos y medidas, pero esta parte de su obra ha encontrado grandes dificultades para imponerse al fin en Inglaterra y en los Estados Unidos.

Stevin es una figura importante no sólo en la historia de la matemática, sino en la de la ciencia en general. Junto con un amigo realizó el experimento de dejar caer

dos esferas de plomo, una diez veces más pesada que la otra, desde una altura de 30 pies, sobre una tabla, y descubrió que los sonidos producidos por sus respectivos choques contra la tabla eran casi simultáneos. Pero al informe sobre el experimento, publicado por Stevin en holandés en 1586, se le concedió mucha menos atención que al experimento análogo más tardío atribuido, con muy escasa evidencia, a Galileo. Por otra parte, se le suele atribuir a Stevin el descubrimiento de la ley del plano inclinado, justificándola por medio de su conocido diagrama de la «guirnalda de esferas», cuando esta ley la había formulado mucho antes Jordano Nemorario[10].

14. La notación algebraica

Stevin era un matemático con una mentalidad práctica, que consideraba de escaso interés los aspectos más especulativos de esta ciencia. Por ejemplo, escribía sobre los números imaginarios que «hay suficientes cosas legítimas en las que trabajar sin necesidad de ocuparse de temas inseguros». Sin embargo, tampoco manifestó Stevin estrechez de miras ni intransigencia, y así su lectura de Diofanto le impresionó por la importancia de elegir una notación adecuada como ayuda para el pensamiento, y aunque siguió la costumbre de Viète y de otros contemporáneos de utilizar algunas palabras o sus abreviaturas, tales como la de «igualdad», prefirió para las potencias una notación puramente simbólica. Trasladando al álgebra su notación posicional para las fracciones decimales, escribía ② en vez de Q (o cuadrado), ③ para C (o cubo), ④ en lugar de QQ (o cuadrado-cuadrado), etc.; este tipo de notación se la pudo haber sugerido muy bien el *Algebra* de Bombelli, aunque también se parece mucho a una notación de Bürgi en la que representaba las potencias de una incógnita escribiendo los números romanos correspondientes sobre los coeficientes. Así, por ejemplo, Bürgi escribía x^4+3x^2-7x como

$$\begin{matrix} \text{iv} & \text{ii} & \text{i} \\ 1 & + 3 & - 7 \end{matrix}$$

mientras que Stevin como

$$\begin{matrix} ④ & ② & ① \\ 1 & + 3 & - 7 \end{matrix}$$

Pero Stevin fue más lejos que Bombelli y que Bürgi al proponer que este tipo de notación se extendiera a las potencias fraccionarias. (Es interesante observar que, aunque Oresme había usado ya tanto los exponentes o índices fraccionarios como el método de las coordenadas en geometría, ambas cosas parecen haber tenido únicamente una influencia muy indirecta, si es que tuvieron alguna, en el progreso

[10] Véase Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959).

de la matemática en Francia y en los Países Bajos a comienzos del siglo XVII). A pesar de que Stevin no tuvo ocasión de utilizar esta notación de los exponentes fraccionarios, formuló claramente el convenio de que $\frac{1}{2}$ dentro de un círculo significaría una raíz cuadrada, y que $\frac{3}{2}$ en un círculo representaría la raíz cuadrada del cubo. Un poco más tarde, Girard, el editor de las obras de Stevin, adoptó esta misma notación de los números dentro de círculos para las potencias, añadiendo también que esto podía utilizarse para representar las raíces, en vez de los símbolos tales como $\sqrt{\ }$ y $\sqrt[3]{\ }$. El álgebra simbólica se desarrollaba rápidamente, y alcanzó su madurez solamente ocho años después de la *Invention nouvelle* de Girard, en *La Géométrie* de Descartes.

15. Galileo Galilei

Simón Stevin mostró ser un típico matemático de su época en que disfrutaba con las aplicaciones elementales de la matemática, y en este sentido se parecía a Galileo. Al principio de sus estudios Galileo había intentado graduarse en medicina, pero su interés por la obra de Euclides y de Arquímedes le llevó a convertirse en profesor de matemáticas, primero en Pisa y más tarde en Padua. Esto no significa, sin embargo, que enseñara al mismo nivel de los autores que admiraba. En los programas universitarios de la época se incluía muy poca matemática, y gran parte de lo que Galileo enseñaba en sus cursos lo podríamos clasificar hoy más bien como física o astronomía o aplicaciones a la ingeniería. Además, evidentemente Galileo no era un «matemático para matemáticos» como lo había sido Viète, sino que estaba más cerca de lo que podríamos llamar un matemático aplicado. Esto se ve claramente en su interés por las técnicas del cálculo que lo llevó a construir y comercializar en 1597 un aparato que denominó su «compás geométrico y militar».

En un folleto publicado en 1606 con el título de *Le operazioni del compasso geometrico et militare*, explicaba Galileo con detalle de qué manera podía utilizarse este instrumento para efectuar rápidamente diversos cálculos sin pluma y papel y sin un ábaco. La teoría en la que se apoyaba este aparato era extremadamente elemental, y el grado de exactitud muy limitado, pero el éxito económico que tuvo este invento de Galileo nos muestra que los ingenieros militares y otros profesionales necesitaban una ayuda de este tipo en sus cálculos. Bürgi había construido un aparato parecido, pero Galileo tenía un sentido comercial más desarrollado, lo que le dio ventaja. El compás de Galileo consistía en dos brazos articulados por sus extremos, tal como en un compás actual, que llevaban grabadas escalas de diversos tipos. La figura 16.3 muestra solamente las escalas graduadas uniformemente hasta 250, así como el cálculo más sencillo de todos los posibles, que es el primero que explicaba Galileo. Si uno quiere dividir, por ejemplo, un segmento dado en cinco partes iguales, lo que tiene que hacer es tomar con un compás de puntas normal la longitud del segmento dado y transportarla al compás geométrico, que debe abrirse hasta que la distancia entre dos señales, una sobre cada brazo y las dos correspondientes a dos múltiplos de 5 (por ejemplo 250

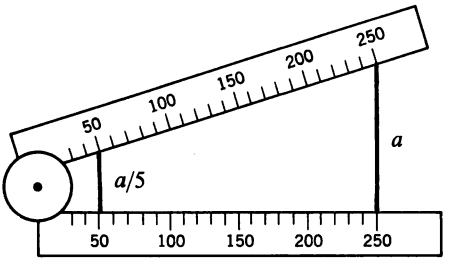


Figura 16.3

en cada una), sea la longitud del segmento dado, que hemos transportado con el compás de puntas. Entonces, si mantenemos fija la apertura del compás geométrico y tomamos con el compás de puntas la distancia que separa a las señales que resultan de dividir por 5 las anteriores (en nuestro caso 50 en ambos brazos), la distancia entre las puntas del compás será exactamente $\frac{1}{5}$ de la longitud del segmento dado. Las instrucciones de Galileo para el uso de su compás incluían muchas otras operaciones, desde el cambio de escala en un dibujo al cálculo con cantidades de dinero colocadas a interés compuesto[11].

16. Los valores de π

Por elemental que nos parezca, tal como lo era en realidad, el folleto de Galileo de 1606 sobre el compás geométrico, publicado cuando tenía ya más de cuarenta años, se trata de su único tratado estrictamente matemático. Sin embargo, ésta no fue en absoluto su única contribución a este campo. Mucho más importantes son las muchas referencias al pensamiento matemático dispersas por sus obras astronómicas y físicas, en las que frecuentemente aparece muy próximo a los desarrollos que iban a conducir al cálculo infinitesimal. Casi lo mismo podríamos decir de Stevin y de Kepler. La física y la astronomía habían alcanzado un punto en el que cada vez eran más necesarios razonamientos que hacían referencia a lo infinitamente grande y a lo infinitamente pequeño, es decir, al núcleo esencial de lo que iba a llamarse más tarde cálculo o análisis infinitesimal. Viète había sido uno de los primeros que utilizó la palabra «análisis» como sinónimo de «álgebra», pero al mismo tiempo fue uno de los primeros analistas en el sentido más moderno del que estudia procesos infinitos.

Antes de la época de Viète se habían dado ya muchas aproximaciones, buenas y malas, de la razón de una circunferencia a su diámetro[12], tales como las de V. Otho y A. Anthonisz, que redescubrieron, evidentemente de manera independiente, en

[11] Un breve resumen, traducido al inglés, de *Le operazioni del compasso geometrico et militare* puede verse en D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), págs. 186-191. El original italiano puede verse en Galileo, *Opere* (Florencia, 1890-1909, 20 vols.), vol. II, págs. 335-424.

[12] Una extensa lista de muchos de estos valores puede verse en el artículo de H. C. Schepler «The Chronology of Pi», *Mathematics Magazine*, 23 (1949-1950), págs. 162-170, 216-288, 279-283.

torno al año 1573, la aproximación $\pi \approx \frac{355}{113}$, restando los numeradores y los denominadores de los valores ptolemaico y arquimediano, $\frac{377}{120}$ y $\frac{22}{7}$ respectivamente. Viète calculó π con diez decimales exactos, ignorando al parecer que Al-Kashi había obtenido ya una aproximación mejor. El logro más impresionante en este campo fue el de Ludolph van Ceulen (1540-1610) que publicó en 1596 en primer lugar, una aproximación de π con 20 decimales exactos, obtenida partiendo del polígono regular de 15 lados y duplicando sucesivamente el número de lados 37 veces. Utilizando un número de lados aún mayor, consiguió van Ceulen al fin una aproximación con treinta decimales exactos, aproximación que su viuda hizo grabar sobre su tumba. Esta proeza de cálculo impresionó tanto a sus sucesores que en algunos países se le llama aún frecuentemente a π la «constante ludolphina». Este tipo de hazañas no tienen, sin embargo, ningún significado teórico; mucho más importante sería obtener una expresión exacta, y a este respecto fue Viète el primero que dio una expresión numérica para π que era teóricamente exacta, bajo la forma de un producto infinito que puede escribirse como

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

En un cierto sentido el planteamiento de Viète no encierra nada nuevo. Su producto infinito se puede obtener fácilmente inscribiendo un cuadrado en un círculo dado y aplicando la fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n \sec \frac{\pi}{n}$, donde a_n es el área del polígono regular inscrito de n lados, y haciendo finalmente crecer n indefinidamente. El mismo producto infinito se puede obtener fácilmente, de una manera alternativa, calculando los radios vectores de los sucesivos puntos de la cuadratriz de Hipias $r \cdot \operatorname{sen} \theta = 2\theta$, obtenidos por sucesivas bisecciones del ángulo θ, comenzando por $\theta = \frac{\pi}{2}$ y observando que $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \cos \frac{\pi}{2^n}$ y que $\lim_{n \to \infty} r_n = \frac{2}{\pi}$. Sin embargo, y a pesar de la sencillez del proceso, fue Viète el primero que expresó π analíticamente, un resultado muy importante porque el lenguaje de la artimética, el álgebra y de la trigonometría estaba invadiendo cada vez más los dominios de lo infinitamente pequeño, dominios que desde los griegos hasta entonces habían estado casi exclusivamente controlados por la geometría.

Los últimos años de Viète se vieron amargados por una controversia de la que, en gran parte, tuvo él mismo la culpa. Christopher Clavius (1537-1612), un matemático contemporáneo muy conocido, había aconsejado al papa Gregorio XIII sobre la reforma del calendario, y Viète atacó la exactitud de la reforma propuesta. La acritud de la intervención de Viète pudo ser el resultado del resentimiento debido a que sus oponentes no parecieron apreciar debidamente la importancia de la nueva «logistica speciosa». Viéte contó con algunos apasionados discípulos, uno de los cuales, Alexander Anderson (1582-*ca.* 1620), procedente de Escocia, publicó parte de su obra en 1615, pero hasta la década de los 1630 no comenzó a recibir el «arte analítica» la atención que merecía. Este retraso está en agudo contraste con la rapidez con que se popularizaron los logaritmos.

17. Reconstrucción de la obra de Apolonio *Sobre tangencias*

Viète fue principalmente un «analista», pero también constribuyó a la geometría pura. En ella su obra se centró sobre todo en los problemas que planteaban las obras de Apolonio. Regiomontano ya había puesto en duda que el famoso problema de Apolonio (propuesto en su libro perdido *Sobre tangencias*) de construir una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas, pudiera resolverse con regla y compás, y en consecuencia van Roomen lo resolvió por medio de una intersección de dos hipérbolas. Viète sabía, por una referencia en la *Colección* de Pappus, que era posible realmente una construcción elemental, y en su *Varia responsa* de 1600 publicó su solución. Haciendo una reconstrucción de lo que, según él, debía haber contenido el libro de Apolonio, procedió Viète a través de los casos más sencillos, en los que una o más de las tres circunferencias se reducen a puntos o rectas, hasta llegar el caso décimo y el más difícil, el de tres circunferencias. Esta construcción es una de las más bellas contribuciones de Viète a la matemática. Este tipo de problemas geométricos ejercieron más tarde una fuerte influencia en Descartes, pero los sucesores inmediatos de Viète se vieron mucho menos atraídos por los resultados teóricos de Apolonio que por la obra de Arquímedes, más próxima a las aplicaciones inmediatas.

18. El análisis infinitesimal

Tanto Stevin como Kepler y Galileo necesitaban para sus problemas prácticos los métodos de Arquímedes, pero todos ellos querían evitar las sutilezas lógicas del método de exhausción. Fueron en gran medida las modificaciones resultantes de los antiguos métodos infinitesimales las que condujeron finalmente al cálculo infinitesimal propiamente dicho, y Stevin fue uno de los primeros que sugirió modificaciones. En su *Estática* de 1586, casi exactamente un siglo antes de que Newton y Leibniz publicaran sus versiones del cálculo, demostraba el ingeniero de Brujas que el centro de gravedad de un triángulo está situado sobre una mediana, de la manera siguiente: Inscríbanse en el triángulo en cuestión ABC un cierto número de paralelogramos de la misma altura y cuyos lados sean dos a dos paralelos a uno de los lados AB del triángulo y a la mediana trazada desde el vértice opuesto a este lado, CD (fig. 16.4). El centro de gravedad de la figura formada por la reunión de todos los paralelogramos inscritos estará situado sobre la mediana, por el principio arquimediano de que figuras bilateralmente simétricas están en equilibrio. Ahora bien, podemos inscribir en el triángulo una cantidad

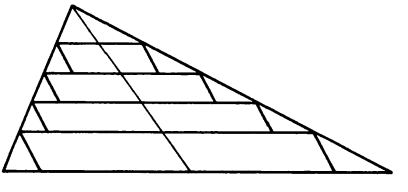


Figura 16.4

infinita de tales paralelogramos, y como a mayor número de paralelogramos menor será la diferencia entre la figura inscrita y el triángulo, diferencia que puede hacerse obviamente tan pequeña como se quiera, la conclusión que se impone es la de que el centro de gravedad del triángulo debe estar situado también sobre la mediana. En algunas de las proposiciones sobre la presión ejercida por un fluido, acostumbraba suplementar Stevin este planteamiento geométrico con una «demostración por números» en la que aparecía una sucesión de números que tendían a un valor límite, pero lo cierto es que el «Arquímedes holandés» tenía más confianza en una demostración geométrica que en una aritmética[13].

19. Johann Kepler

Stevin estaba interesado en las aplicaciones físicas de la idea de infinitos elementos infinitamente pequeños, mientras que Kepler los necesitaba para aplicarlos a la astronomía, especialmente en conexión con sus órbitas elípticas de 1609. Tan pronto como en 1604 ya se había visto Kepler conducido a las secciones cónicas en sus estudios de óptica y de las propiedades de los espejos parabólicos. Mientras que Apolonio había considerado a las cónicas como tres tipos distintos de curvas, elipses, parábolas e hipérbolas, Kepler prefería considerar cinco tipos de cónicas, pertenecientes todos ellos a una única familia o género. Haciendo gala de una gran imaginación y de un sentido pitagórico de la armonía, desarrollo Kepler en 1604 para las cónicas (en su obra *Ad Vitellionem paralipomena*, es decir, «Introducción a la óptica de Vitelio») lo que podríamos llamar un principio de continuidad. A partir de la sección cónica formada simplemente por un par de rectas que se cortan, en la que los dos focos coinciden con el punto de intersección, podemos pasar gradualmente por un conjunto infinito de hipérbolas, según uno de los focos va alejándose más y más del otro. Cuando el segundo foco se haya alejado infinitamente, no tenemos ya una hipérbola con sus dos ramas, sino una parábola. Según el foco móvil traspasa el punto del infinito y se va acercando de nuevo por el otro lado, vamos pasando por un conjunto infinito de elipses, hasta que, cuando los dos focos coinciden de nuevo, tendremos una circunferencia como quinto y último tipo de cónica.

La curiosa idea de que una parábola tiene dos focos, uno de ellos infinitamente lejano, se debe a Kepler, lo mismo que la palabra «foco» (del latín «focus» para «hogar», «fuego»); nos encontraremos esta audaz y fructífera especulación sobre los «puntos del infinito», generalizada, una generación más tarde, en la geometría de Desargues. Mientras tanto, Kepler descubría un planteamiento de lo infinitamente pequeño útil en astronomía. En su *Astronomia Nova* del año 1609 anunció Kepler sus dos primeras leyes astronómicas: 1) los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas uno de cuyos focos es el Sol, y 2) el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. En los problemas relativos a áreas, tales como este último, suponía Kepler que el área en cuestión estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los

[13] Para más detalles véase C. B. Boyer, *The Concepts of the Calculus* (1939), págs. 99-104.



Johann Kepler

otros dos vértices en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta. De esta manera pudo aplicar Kepler un tipo de cálculo integral rudimentario que nos recuerda los métodos de Oresme. Por ejemplo, el área del círculo puede calcularse de esta manera teniendo en cuenta que las alturas de los triángulos infinitamente estrechos (fig. 16.5) son «casi iguales» al radio del círculo. Si llamamos a las bases infinitamente pequeñas situadas sobre la circunferencia del círculo b_1, b_2, ..., b_n, ..., entonces el área del círculo, es decir, la suma de las áreas de los triángulos, será igual a $\frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + \cdots + \frac{1}{2}b_nr + \cdots$, o bien $\frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots)$. Y como la

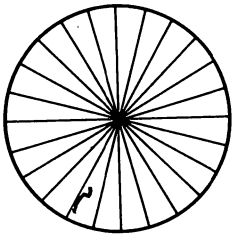


Figura 16.5

suma de las b es la circunferencia C, el área A vendrá dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}rC$, el antiguo y bien conocido teorema que había demostrado Arquímedes de una manera mucho más cuidadosa.

Por un razonamiento análogo había obtenido Kepler el área de la elipse, un resultado de Arquímedes que no se conocía en esta época. La elipse la podemos obtener a partir de una circunferencia de radio a por medio de una transformación bajo la cual la ordenada de cada punto resulta acortada según una razón dada $\frac{b}{a}$. Entonces, siguiendo a Oresme, podemos considerar el área de la elipse y el área del círculo como formadas por todas las ordenadas correspondientes a los puntos de ambas curvas (fig. 16.6), pero como la razón de las componentes de estas dos áreas es la razón constante $\frac{b}{a}$, las áreas totales deben estar en la misma razón, y como el área del círculo se conoce y es igual a πa^2, el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene que

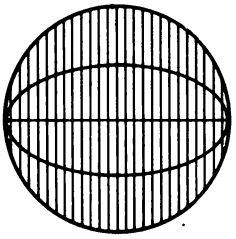


Figura 16.6

ser igual a πab. Este resultado es correcto, pero en lo que se refiere a la longitud de la elipse lo único que pudo hacer Kepler fue dar la fórmula aproximada $\pi(a+b)$. Las longitudes de curvas en general, y de la elipse en particular, iban a eludir los esfuerzos de los matemáticos durante otro medio siglo por lo menos.

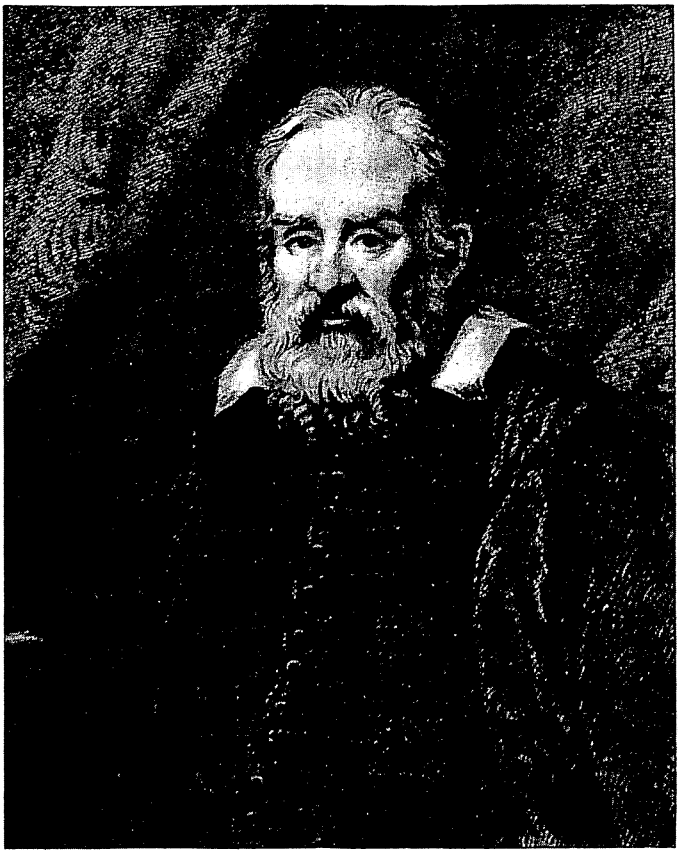
Kepler trabajó con Tycho Brahe, primero en Dinamarca y más tarde en Praga, donde, después de la muerte de Brahe, Kepler pasó a ocupar el puesto de matemático del emperador Rodolfo II. Una de sus obligaciones era la de redactar horóscopos; los matemáticos de la época, ya trabajasen para los emperadores o en

las universidades, encontraban muy diversas maneras de aplicar su talento, tal como descubrió Kepler mientras se encontraba en Linz, en Austria. El año 1612 había sido un año de vino excepcionalmente bueno, y Kepler comenzó a meditar, con este motivo, en los burdos métodos que se utilizaban entonces para calcular los volúmenes de los toneles para el vino, comparando estos métodos con los que había utilizado Arquímedes para calcular los volúmenes de conoides y esferoides, y a partir de estas consideraciones procedió a calcular los volúmenes de diversos sólidos de revolución que no habían sido considerados previamente por Arquímedes. Por ejemplo, haciendo girar un segmento de círculo alrededor de su cuerda, obtuvo Kepler lo que llamó un «limón» si el segmento era menor que un semicírculo, y una «manzana» si el segmento era mayor que un semicírculo. Su método general para el cálculo de volúmenes consistía en considerar los sólidos como compuestos de una cantidad infinita de elementos de volumen infinitesimalmente pequeños, y proceder entonces de una manera idéntica a como hemos explicado más arriba para el cálculo de áreas. Kepler renuncia a la típica doble *reductio ad absurdum* que era el núcleo del razonamiento arquimediano, y en esta manera de proceder fue seguido por la mayor parte de los matemáticos, desde su época a la actual[14].

20. *Las dos nuevas ciencias* de Galileo

Kepler reunió sus investigaciones sobre el cálculo de volúmenes en un libro que apareció en 1615 con el título de *Stereometria doliorum* (o «Medida de los volúmenes de toneles»). Durante una veintena de años el libro no pareció despertar mayor interés teórico, pero en 1635 las ideas de Kepler, en forma un tanto modificada, fueron desarrolladas sistemáticamente y generalizadas en un libro famoso titulado *Geometria indivisibilibus*, escrito por Bonaventura Cavalieri, un discípulo de Galileo. Mientras que Kepler se dedicaba a sus estudios de los volúmenes de barriles de vino, Galileo escudriñaba los cielos con su telescopio y hacía rodar bolas por planos inclinados. Los resultados de los estudios de Galileo fueron dos famosos tratados, uno de ellos astronómico y el otro físico. Los dos estaban escritos en italiano, pero nos referimos a ellos por sus títulos traducidos al español y abreviados, como *Los dos sistemas principales del mundo* (1632) y *Las dos nuevas ciencias* (1638). El primero es un diálogo acerca de los méritos relativos de las dos concepciones del universo, la ptolemaica y la copernicana, diálogo que sostienen tres amigos: Salviati (un intelectual bien informado científicamente), Sagredo (un inteligente profano en la materia) y Simplicio (un obtuso aristotélico). A lo largo de este diálogo Galileo deja pocas dudas acerca de a dónde se inclinan sus preferencias, y las consecuencias de ello fueron su juicio por la Inquisición y la consiguiente condena a prisión. Durante los años de su detención preparó Galileo, sin embargo, su obra sobre *Las dos nuevas ciencias*, un nuevo diálogo acerca de la dinámica y de la resistencia de materiales, sostenido por los mismos tres personajes.

[14] Véase D. J. Struik, «Kepler as a Mathematician», *Johann Kepler*, 1571-1630. *A Tercentenary Commemoration of His Life and Works*, ed. por F. E. Brasch (1931).



Galileo Galilei

Aunque ninguno de estos dos grandes tratados galileanos era estrictamente de tipo matemático, hay en ambos muchos puntos en los que se hacen consideraciones matemáticas, y frecuentemente éstas se refieren a las propiedades de lo infinitamente grande y de lo infinitamente pequeño.

Lo infinitamente pequeño tenía para Galileo una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba esencialmente en su dinámica, Galileo daba la impresión de que la dinámica era una ciencia totalmente nueva creada por él, y desde entonces demasiados escritores han aceptado este punto de vista. Es prácticamente seguro, no obstante, que Galileo estuviera muy familiarizado con la obra de Oresme sobre la latitud de las formas, y en *Las dos nuevas ciencias* tiene ocasión de usar varias veces un diagrama de velocidades muy parecido a la representación gráfica triangular de Oresme. Sin embargo, Galileo organizó las ideas de Oresme y les dio la precisión matemática de que carecían. Entre las contribuciones nuevas a la dinámica estaba el análisis que hacía Galileo del movimiento de un proyectil, en una componente horizontal uniforme y una componente vertical uniformemente acelerada. Como resultado de esta descompo-

sición consiguió demostrar Galileo que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Es un hecho sorprendente que se estudiaran las secciones cónicas casi durante 2.000 años antes que dos de ellas encontrasen, casi de manera simultánea, aplicación a la ciencia, la elipse a la astronomía y la parábola a la física. Galileo creyó equivocadamente que había encontrado otra aplicación de la parábola en la curva de suspensión libre de una cuerda o de un cable flexible o de una cadena (*catena*), pero los matemáticos posteriores de este mismo siglo demostraron que esta curva, la catenaria, no sólo no es una parábola, sino que no es ni siquiera una curva algebraica.

Galileo nos recuerda un poco a Durero en que ambos reconocieron rápidamente nuevas curvas, pero ninguno de los dos estaba preparado matemáticamente para analizarlas. Galileo había observado la curva que hoy llamamos cicloide, que es la que describe un punto del perímetro de una rueda circular cuando rueda sin deslizar sobre un camino rectilíneo horizontal, e intentó hallar el área bajo uno de sus arcos. Lo mejor que pudo hacer fue trazar la curva sobre una chapa homogénea, recortar la parte encerrada bajo un arco y pesarla, llegando a la conclusión de que este área era probablemente un poco menor que tres veces el área del círculo generador. (Los matemáticos franceses e italianos demostraron, un poco más tarde, que el área encerrada por un arco de cicloide es exactamente igual a tres veces el área del círculo generador.) Galileo abandonó después el estudio de esta curva, sugiriendo sólo que la cicloide haría un arco de puente muy bello; muchos años más tarde su discípulo Torricelli abordó el estudio de esta misma curva con gran éxito.

21. Galileo y el infinito

Una contribución más importante de Galileo a la matemática es la que aparece en *Los dos sistemas principales del mundo*, de 1632, en un momento de la «tercera jornada», cuando Salviati le replica que la distancia QR que el objeto en cuestión tendría que «caer» para mantenerse sobre la superficie de la Tierra mientras que ésta gira un ángulo pequeño θ (fig. 16.7), es infinitamente pequeña comparada con

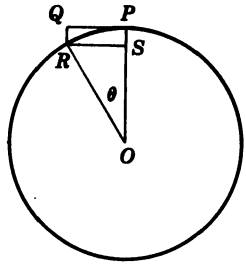


Figura 16.7

la distancia tangencial PQ que recorrería el objeto horizontalmente. Por lo tanto, una tendencia a la caída incluso muy pequeña comparada con el ímpetu tangencial

será suficiente para mantener el objeto sobre la superficie de la Tierra[15]. El argumento que expone aquí Galileo es equivalente a decir que $PS = \text{sen vers } \theta$ es un infinitésimo de orden superior, con respecto a las distancias PQ o RS o al arco PR.

Un razonamiento parecido nos lo encontramos de nuevo en la segunda obra de Galileo, *Las dos nuevas ciencias*, de 1638, un tratado sobre dinámina y resistencia de materiales que ejerció una gran influencia. En este libro el autor utiliza a veces lo infinitamente pequeño de una manera que roza lo caprichoso, como cuando Salviati intenta convencer a Simplicio de que es igual de fácil dividir un segmento en un número infinito de partes que en un número finito. En primer lugar consigue que Simplicio admita que uno no necesita para ello separar las partes, sino simplemente señalar los puntos de división. Si, por ejemplo, doblamos un segmento para formar un cuadrado o un octógono regular, hemos conseguido evidentemente dividirlo en cuatro o en ocho partes iguales. Salviati saca entonces la conclusión de que si doblamos el segmento dándole la forma de una circunferencia, entonces «hemos reducido a una presencia actual aquel número infinito de partes que, según vos afirmabais, estaban contenidas en el segmento sólo potencialmente, mientras estaba recto», ya que la circunferencia es lo mismo que un polígono de un número infinito de lados. En otra ocasión, sin embargo, Galileo hace manifestar a Salviati la interesante opinión de que los infinitos y los indivisibles «trascienden nuestro entendimiento finito, los primeros por su excesiva magnitud, los segundos por su pequeñez. Imagínese lo que resultaría cuando aparezcan combinados».

Del infinito en geometría Salviati conduce a Simplicio al infinito en aritmética, haciendo observar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre todos los números naturales y los cuadrados perfectos, a pesar de que, según uno avanza por la sucesión de los números naturales, los cuadrados perfectos se van haciendo cada vez más escasos. Por medio del sencillo truco de ir contando los cuadrados perfectos, vamos estableciendo una correspondencia biunívoca en la que cada número natural queda inevitablemente asociado a uno y sólo un cuadrado perfecto y viceversa. A pesar de que hay muchos números naturales que no son cuadrados perfectos (y la proporción de éstos aumenta según vamos considerando números cada vez mayores) «tenemos que decir que hay tantos cuadrados como números». Galileo se ve aquí cara a cara con la propiedad fundamental de un conjunto infinito, la de que una parte propia puede tener el mismo número de elementos que el conjunto total, pero Galileo no saca, naturalmente, esta conclusión. Mientras que Salviati concluye correctamente que el número de cuadrados perfectos no es menor que el número de los enteros, no puede resignarse a aceptar que ambos números sean iguales, y en vez de hacerlo así concluye simplemente que «los atributos "igual", "mayor" y "menor" no son aplicables al infinito, sino sólo a cantidades finitas». Llega incluso a afirmar (incorrectamente, según lo que admitimos hoy) que no podemos decir que un número infinito es mayor que otro número infinito, y ni siquiera que un número infinito es mayor que

[15] Hay dos excelentes ediciones inglesas de *Los dos sistemas principales del mundo*, una editada por Stillman Drake (1953) y la otra por Giorgio de Santillana (1953).

un número finito. Galileo, al igual que Moisés, llegó a vislumbrar la tierra prometida, pero no pudo entrar en ella[16].

22. Bonaventura Cavalieri

Al parecer, Galileo tenía la intención de escribir un tratado sobre el infinito en la matemática, pero no se ha encontrado tal obra. Mientras tanto, su discípulo Cavalieri se había sentido estimulado, tanto por la *Stereometria* de Kepler como por las concepciones antiguas y medievales y por el ánimo que recibía de Galileo, a organizar sus ideas sobre los infinitésimos en forma de libro. Cavalieri era miembro de una orden religiosa (un jesuato, y no un jesuita como se suele decir frecuentemente de manera incorrecta) que vivió en Milán y en Roma antes de ocupar el cargo de profesor de matemáticas en Bolonia en 1629. Tal como era la costumbre de la época, escribió sobre aspectos muy diversos tanto de matemática pura como aplicada, geometría, trigonometría, astronomía, óptica, etc., y fue el primer matemático italiano que apreció en todo su valor los logaritmos. En su obra *Directorium universale uranometricum* de 1632 publicó tablas de senos, tangentes, secantes y senos versos junto con sus logaritmos, con ocho cifras decimales, pero la historia no lo recuerda por esta obra, sino por uno de los libros que ejercieron una más profunda influencia a comienzos del período moderno, la *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicada en 1635. La idea fundamental en la que se basa el libro es esencialmente una variante de las que se presuponían implícitamente por Oresme, Kepler y Galileo, es decir, que un área se puede considerar formada por segmentos rectilíneos o «indivisibles», y que un volumen sólido se puede considerar análogamente como compuesto de secciones o áreas que son indivisibles o volúmenes «quasi-atómicos». Aunque Cavalieri difícilmente podía haberlo sospechado en aquel momento, se encontraba siguiendo, sin saberlo, unas huellas verdaderamente venerables, ya que éste fue exactamente el tipo de razonamiento que utilizó Arquímedes en el *Método*, que era entonces desconocido. Pero Cavalieri, y aquí radica la gran diferencia, no sintió ningún escrúpulo acerca de las obvias deficiencias lógicas que se escondían detrás de tales métodos, al contrario que había hecho Arquímedes.

El principio general de que en una ecuación en la que intervienen infinitésimos los de orden superior pueden despreciarse porque no afectan al resultado final, suele ser frecuente y erróneamente atribuido al Cavalieri de la *Geometria indivisibilibus*. Cavalieri debía estar indudablemente familiarizado con esta idea, puesto que está sugerida en algunas de las obras de Galileo, y aparecía también de una manera más concreta en los resultados de algunos matemáticos franceses contemporáneos, pero lo cierto es que Cavalieri suponía casi exactamente lo contrario de este principio. En el método de Cavalieri no había ningún proceso de aproximación continua, ni tampoco omisión alguna de términos, ya que lo que utilizaba era una estricta correspondencia biunívoca entre los elementos de dos

[16] El *Diálogo sobre las dos nuevas ciencias* de Galileo se puede conseguir fácilmente en traducción inglesa, editado en rústica por Dover Publications, New York (sin fecha).

configuraciones; no se desprecian elementos algunos, sea cual sea su dimensión. El planteamiento general y la engañosa plausibilidad del método de los indivisibles viene expresado con toda claridad en la proposición que aún se conoce en muchos libros de geometría del espacio como el «teorema de Cavalieri»:

> Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en esa misma razón[17].

Evidentemente Cavalieri ya había desarrollado su método para el año 1626, puesto que en ese año escribía a Galileo anunciándole que iba a publicar un libro sobre este tema. Galileo mismo había tenido la intención de escribir un libro sobre el infinito, y probablemente Cavalieri retrasó premeditadamente la publicación de su propia obra como deferencia hacia Galileo. Sin embargo, el libro de Galileo, caso de que se hubiera publicado, habría sido sin duda más filosófico y especulativo, con el énfasis puesto en la naturaleza de lo infinitamente grande y de lo infinitamente pequeño, tema que Cavalieri evitó casi completamente. En lugar de ello, Cavalieri se concentró en un teorema geométrico extraordinariamente útil que viene a ser equivalente al resultado que se fórmula en la terminología moderna del cálculo infinitesimal como

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Tanto el enunciado como la demostración del teorema son muy distintos de los que está acostumbrado a ver cualquier lector moderno, ya que Cavalieri comparaba potencias de segmentos que son paralelos a la base en un paralelogramo, con las correspondientes potencias de los segmentos en uno cualquiera de los dos triángulos en que una diagonal divide el paralelogramo. Sea *AFDC* el paralelogramo dividido en dos triángulos por la diagonal *CF* (fig. 16.8) y sea *HE*

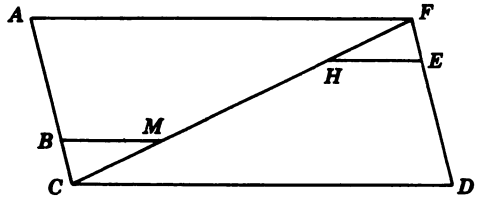


Figura 16.8

un indivisible del triángulo *CDF* que es paralelo a la base *CD*. Entonces, tomando *BC*=*EF* y trazando *BM* paralela a *CD*, es fácil ver que el indivisible *BM* en el triángulo *ACF* será igual al *HE* en el *CDF*. Por lo tanto, podemos poner en correspondencia biunívoca los indivisibles del triángulo *CDF* con indivisibles

[17] D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, págs. 605-609.

iguales dos a dos del triángulo ACF, y en consecuencia los dos triángulos son iguales. Y como el paralelogramo es la suma de los indivisibles en los dos triángulos, resulta claramente que la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los dos triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo; dicho en otras palabras,

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$$

Utilizando un razonamiento análogo, sólo que considerablemente más complicado, consigue demostrar Cavalieri que la suma de los cuadrados de los segmentos en el triángulo es igual a un tercio de la suma los cuadrados de los segmentos en el paralelogramo[18]. Para los cubos de los mismos segmentos halló que la razón es $\frac{1}{4}$, y más tarde extendió la demostración a potencias más altas, hasta considerarse autorizado a afirmar, en su obra posterior *Exercitationes geometricae sex* («Seis ejercicios geométricos»), de 1647, la importante generalización de que para las potencias n-ésimas en general de dichos segmentos, la razón ha de ser $\frac{1}{n+1}$. Este hecho lo conocían ya los matemáticos franceses por la misma época que Cavalieri, pero éste fue el primero en publicar el teorema en cuestión, teorema que iba a abrir la vía a muchos algoritmos del cálculo infinitesimal. La *Geometria indivisibilibus*, que tanto facilitó el problema de las cuadraturas, apareció de nuevo en una segunda edición en 1653, pero para entonces los matemáticos habían conseguido ya resultados notables en nuevas direcciones que dejaban obsoleto el planteamiento geométrico tan laborioso de Cavalieri.

23. La espiral y la parábola

El teorema más importante de Cavalieri, con mucho, fue su equivalente de la igualdad moderna

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

pero también se le debe otro resultado que iba a tener igualmente consecuencias importantes. La espiral de Arquímedes $r=a\theta$ y la parábola $x^2=ay$ habían sido bien conocidas desde la antigüedad, pero nadie había descubierto previamente ninguna relación entre ellas hasta que Cavalieri tuvo la idea de comparar indivisibles rectilíneos con indivisibles curvilíneos. Si se deseara, por ejemplo, torcer la parábola $x^2=ay$ (fig. 16.9) en torno a su vértice O dándole la forma de una espiral de reloj, de manera que el punto O permanezca fijo mientras que el punto P

[18] Para más detalles véase C. B. Boyer, «Cavalieri, Limits and Discarded Infinitesimals», en *Scripta Mathematica*, 8 (1941), págs. 79-91.

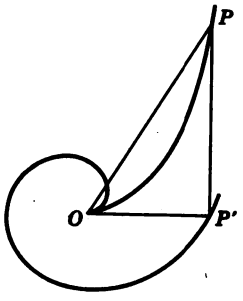


Figura 16.9

pase a ocupar la posición P', entonces las ordenadas de los puntos de la parábola las podemos considerar como transformadas en radios vectores por medio de las relaciones $x=r$ e $y=r\theta$ entre lo que ahora llamamos coordenadas cartesianas y polares. Los puntos de la parábola de Apolonio $x^2=ay$ se transformarán así en los de la espiral de Arquímedes $r=a\theta$. Cavalieri observó además que si PP' se toma igual a la longitud de la circunferencia de radio OP', entonces el área barrida por el radio vector en la primera vuelta de la espiral ($O\leqslant\theta\leqslant 2\pi$) es exactamente igual al área comprendida entre el arco parabólico OP y el radio vector OP. En este problema podemos ver una interacción de elementos que pertenecen a la geometría analítica con otros que corresponden al cálculo infinitesimal, y, sin embargo, Cavalieri escribía cuando aún ninguna de estas dos ramas de la matemática había sido inventada formalmente. Lo mismo que pasa en otras partes de la historia de la matemática, vemos aquí que los grandes hitos históricos no aparecen casi nunca de una manera repentina y espontánea, inesperada, sino que suelen ser simplemente las formulaciones más claras y precisas que culminan un largo y espinoso camino de desarrollos irregulares.

Bibliografía

Boyer, C. B.: *The Concepts of the Calculus* (New York, 1939; ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Brasch, F. E. (ed.): *Johann Kepler*, 1571-1630. *A Tercentenary Commemoration of His Life and Works* (Baltimore: Williams and Wilkins, 1931).

Braunmühl, Anton von: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig: Teubner, 1900, 2 vols.).

Cajori, Florian: *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments* (New York: McGraw-Hill, 1909).

——: «History of the Exponential and Logarithmic Concepts», *American Mathematical Monthly*, 20 (1913), 5-14, 35-47, 75-84, 107-117.

——: *Willian Oughtred, a Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics* (Chicago: Open Court, 1916).

——: *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1929, 2 vols.).

Caspar, Max: *Kepler*. Trad. C. Doris Hellman (New York: Abelard-Schuman, 1959).

Dedron, Pierre, y Jean Itard: *Mathématique et mathématiciens* (París: Magnard, 1959).
Dijksterhuis, E. J., y D. J. Struik (eds.): *The Principal Works of Simon Stevin* (Amsterdam: Swets and Zeitlinger, 1955-1958).
Galilei, Galileo: *Dialogue Concerning Two New Sciences*, ed. Henry Crew y Alfonso de Salvio (ed. en rústica, New York: Dover, m. d.).
——: *Discourses on the Two Chief Systems*, ed. Stillman Drake (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1953).
——: *Discourses on the Two Chief Systems*, ed. Giorgio de Santillana (Chicago: University of Chicago Press, 1953).
Glaisher, J. W. L.: «Logarithms», *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª ed. (1910-1911), vols. XVI, págs. 868-877.
——: «On Early Tables of Logarithms and Early History of Logarithms», *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48 (1920), 151-192.
Hobson, E. W.: *John Napier and the Invention of Logarithms* (Cambridge, 1914).
Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlín: Walter de Gruyter, 1963).
Kepler, Johann: *Gesammelte Werke* ed Walther von Dyck y Max Caspar (München: C. H. Beck, 1937).
Knott, C. G.: *Napier Tercentenary Memorial Volume* (Londres: Longmans, Green, 1915).
Riter, Frédéric: *Francois Viète* (París, 1895).
Sarton, George: «Simon Stevin of Bruges (1548-1620), *Isis*, 21 (1934), 241-303.
——: «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585)», *Isis*, 23 (1935), 153-244.
Smith, D. E.: *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).
Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementar-Mathematik* (Berlín: De Gruyter, 1923), vol. V.
Turnbull, H. W.: *The Great Mathematicians* (New York: New York University Press, 1961).
Zeller, Sister Mary Claudia: *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich.: University of Michigan, tesis doctoral, 1944).

Ejercicios

1. Compárense las contribuciones de Stevin a la matemática con las de Bürgi.
2. ¿Por qué se suele considerar a Viète a veces como el primer matemático realmente moderno? Explíquese claramente.
3. ¿Cuáles fueron las dos primeras curvas, que no fueran ni la recta ni la circunferencia ni combinaciones de ambas, que encontraron alguna aplicación en la ciencia? Explíquese cómo se llegó a aplicarlas.
4. ¿Qué ventajas tienen las fracciones decimales sobre las sexagesimales? ¿Qué razones puede usted dar de la tardía aparición de las primeras en Europa?
5. ¿Qué es un parámetro? ¿Puede usted señalar ejemplos de parámetros anteriores a Viète? Explíquese claramente.
6. Compárese el uso que hace Viète del método analítico con el de Euclides.
7. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de las notaciones algebraicas de Viète y de Harriot?
8. Demuéstrese la observación de Viète de que si x_1 y x_2 son raíces positivas de la ecuación $x^3+b=3qx$, entonces $3a=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ y $b=x_1x_2^2+x_2x_1^2$.
9. Resolver, utilizando el método de Viète, la ecuación $x^3=232x^2+465x+702$, buscando su raíz positiva que está entre 200 y 300.
10. Demuéstrese la forma de Viète del teorema de las tangentes.

11. Demuéstrese, utilizando el método de Viéte, que

$$\text{sen } x - \text{sen } y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \text{sen}\frac{x-y}{2}$$

12. Demuéstrese, utilizando el método de Viète, que

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$

13. Multiplíquese 8.743 por 5.692 por prostafairesis.
14. Divídase 8.743 por 5.692 por prostafairesis.
15. Escribir las expresiones de sen $10x$ y de cos $10x$ en términos de potencias de sen x y de cos x.
16. En el sistema de logaritmos de Napier, ¿cuál es la relación entre log x, log y y $\log\frac{x}{y}$? Justifíquese la respuesta.
17. Calcúlese aproximadamente el número cuyo logaritmo de Napier es 3.
18. Calcúlese aproximadamente el número cuyo logaritmo de Bürgi es 4.
19. ¿Cuál es la diferencia entre los logaritmos de Napier de dos números que están en la razón de 3 a 1?
20. Calcúlese, utilizando el método de Briggs, antilog 0,2500 con cuatro cifras decimales.

*21. Utilizando los logaritmos de Bürgi, ¿cuál es la relación entre log x, log y, log z y $\log\frac{x \cdot y}{z}$?

22. Utilizando el tipo de razonamiento de Kepler, demostrar que el volumen de una esfera es igual a un tercio de la superficie por el radio.

*23. Demuéstrese la afirmación de Galileo de que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen vers } \theta}{\theta} = 0$$

*24. Compruébese la comparación de Cavalieri entre las áreas de la espiral y de la parábola.
*25. Demuéstrese la fórmula del producto infinito para π dada por Viète, partiendo de un cuadrado inscrito en la circunferencia y duplicando sucesivamente el número de lados.
*26. Utilícese el método trigonométrico de Viète y Girard para resolver la ecuación $x^3 - 9x^2 + 15x + 7 = 0$, calculando una raíz hasta las milésimas.

Capítulo XVII
LA EPOCA DE FERMAT Y DESCARTES

Fermat, el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Laplace

1. Los matemáticos más importantes de la época

El año 1647 en que murió Cavalieri se vio marcado también por la muerte de otro de los discípulos de Galileo, el joven Evangelista Torricelli (1608-1647), pero desde diversos puntos de vista Torricelli representaba ya a la nueva generación de matemáticos que estaban edificando con gran rapidez sobre los fundamentos infinitesimales que Cavalieri sólo había bosquejado de una manera demasiado vaga. Si Torricelli no hubiera muerto tan prematuramente, Italia habría podido seguir compartiendo el liderazgo en los nuevos progresos que se anunciaban, pero tal como sucedieron las cosas, fue Francia el centro indiscutido del mundo matemático durante el segundo tercio del siglo XVII. Las dos figuras más importantes fueron René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), pero hubo al menos otros tres matemáticos franceses contemporáneos que también hicieron importantes contribuciones, al mismo tiempo que Torricelli, que fueron Gilles Persone de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591-1661) y Blaise Pascal (1623-1662). Este capítulo, que cubre uno de los períodos más críticos de la historia de la matemática, va a centrar la atención en la obra de estos seis hombre, no sólo de una manera individual, sino también colectivamente, porque desde la época de Platón no se había dado una intercomunicación tan intensa entre los matemáticos como en el siglo XVII.

Aún no existía ninguna organización matemática de tipo profesional, pero tanto en Italia como en Francia e Inglaterra había ya algunos grupos de científicos más o menos organizados: la Accademia dei Lincei (a la que perteneció Galileo) y la Accademia del Cimento en Italia, el Cabinet Du Puy en Francia y el Invisible College en Inglaterra. Hubo además, durante el período que estamos considerando, un personaje que, a título individual, sirvió como central de información matemática gracias a sus amplios contactos por correspondencia. Se trataba del fraile minimita Marin Mersenne (1588-1648), muy amigo de Descartes y de Fermat, así como de muchos otros matemáticos de la época. Si Mersenne hubiera vivido un siglo antes, el retraso en circular la información relativa a la resolución de la cúbica no se habría producido, porque en cuanto que Mersenne tenía noticias de alguna cosa nueva, toda la «República de las Letras» era puntualmente



René Descartes

informada acerca de ella. Así pues, a partir del siglo XVII la matemática se desarrolló más bien movida por su propia lógica interna que por fuerzas de tipo económico, social o tecnológico, tal como se pone de manifiesto claramente en la obra de Descartes, el matemático más conocido de la época.

2. El *Discours de la méthode*

Descartes nació en una familia bien situada económicamente, y recibió una educación sólida y esmerada en el colegio de los jesuitas de La Flèche, en el que los libros de texto de Clavius ocupaban un lugar destacado. Después se graduó en la

Universidad de Poitier, en la que estudió derecho sin demasiado entusiasmo. Más tarde viajó Descartes por diversos países durante unos cuantos años, participando en algunas campañas militares, primero en Holanda con Mauricio, príncipe de Nassau, después con el duque Maximiliano I de Baviera, y más tarde aún con la armada francesa en el asedio a La Rochelle. Descartes no fue nunca realmente un militar profesional, y sus breves períodos de servicio en conexión con las campañas que hemos mencionado estuvieron separados por largos intervalos de viajes independientes y de estudio, durante los cuales entró en contacto con algunos de los intelectuales más importantes entonces de varias partes de Europa: Faulhaber en Alemania y Desargues en Francia, por ejemplo. En París conoció a Mersenne y al círculo de científicos que discutían y criticaban libremente el pensamiento peripatético; estimulado por este ambiente intelectual, Descartes llegó a convertirse en el «padre de la filosofía moderna», así como a presentar una nueva concepción científica del mundo y a crear una nueva rama de la matemática. En el más famoso de todos sus tratados, el *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* («Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias»), de 1637, anunciaba Descartes su programa de investigación filosófica, por medio del cual, y a través de la aplicación de la duda sistemática, esperaba alcanzar unas ideas claras y distintas de las que sería posible entonces deducir una cantidad innumerable de consecuencias válidas. Este planteamiento le condujo, en el campo de la ciencia, a suponer que todo podía explicarse en términos de materia (o extensión) y de movimiento. El universo entero, según postulaba Descartes, estaba hecho de materia moviéndose incesantemente en forma de «vórtices» o remolinos, y todos los fenómenos debían ser explicados mecánicamente en términos de fuerzas ejercidas por porciones de materia sobre otras en contacto directo con ellas. La ciencia cartesiana gozó de una gran popularidad durante casi un siglo, pero finalmente cedió su lugar a la teoría razonada matemáticamente de Newton. No deja de ser irónico que fuera en gran parte la matemática de Descartes la que hizo posible más tarde la derrota de la ciencia cartesiana.

3. La invención de la geometría analítica

La filosofía y la ciencia de Descartes eran ciertamente revolucionarias en su ruptura con el pasado; su matemática, en cambio, estaba más ligada a las tradiciones anteriores. En cierta medida esto pudo haber sido el resultado de la teoría generalmente aceptada que procedía de la herencia humanística, una creencia en que hubo en el pasado una Edad de Oro o «reino de Saturno», cuyas grandes ideas había que redescubrir. Probablemente también, y en mayor medida, fue el resultado natural del hecho de que el crecimiento de la matemática consiste más en una acumulación progresiva que en el caso del desarrollo de otras ramas del saber. La matemática crece generalmente por acumulaciones sucesivas, en las que raramente se necesita desechar partes innecesarias, mientras que la ciencia natural crece casi siempre por medio de sustituciones, cuando se ha encontrado una teoría más satisfactoria que las anteriores. No debe sorprendernos, pues, el ver

que la contribución más importante de Descartes a la matemática, es decir, la creación de la geometría analítica, estuvo motivada por un intento de volver al pasado.

Descartes se interesó seriamente por la matemática ya durante el frío invierno de 1619, que pasó con el ejército bávaro, cuando podía permanecer en la cama por la mañana hasta las diez, debido a su frágil salud, tiempo que dedicaba a pensar en problemas matemáticos. Fue durante este período de su juventud cuando descubrió la fórmula poliédrica, que se suele conocer como fórmula de Euler, es decir, $c+v=a+2$, donde c, v, a, son respectivamente los números de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo. Nueve años más tarde escribía Descartes a un amigo en Holanda diciéndole que había hecho tales progresos en aritmética y geometría que no le quedaba ya nada por desear. No sabemos exactamente cuáles eran estos progresos, ya que Descartes no publicó nada durante estos años, pero la dirección en que iban sus pensamientos se nos revela en otra carta de 1628 a su amigo holandés en la que le comunica una regla para la construcción de las raíces de cualquier ecuación cúbica o cuártica por medio de una parábola. Se trata, desde luego, esencialmente de la misma cosa que había hecho Menecmo para resolver la duplicación del cubo unos 2.000 años antes, y que Omar Khayyam había aplicado a las cúbicas en general en torno al año 1100.

No está claro el hecho de si Descartes había descubierto ya su geometría analítica, en toda su generalidad, para el año 1628 o no, pero, en cualquier caso, la fecha concreta de la invención de la geometría cartesiana no puede ser muy posterior a ésta. Por esta misma época Descartes abandonó Francia y se instaló en Holanda, donde vivió los siguientes veinte años de su vida. Al cabo de tres o cuatro años de establecerse allí, otro de sus amigos holandeses, un estudioso de los clásicos, llamó su atención sobre el problema de las tres y cuatro rectas, de Pappus. Partiendo de la impresión errónea de que los antiguos habían sido incapaces de resolver este problema, Descartes le aplicó sus nuevos métodos y consiguió resolverlo sin dificultad. Este hecho le hizo darse cuenta claramente de la potencia y la generalidad de su punto de vista, y en consecuencia decidió escribir su famosa obra *La géométrie*, cuya lectura permitió conocer la geometría analítica a sus contemporáneos.

4. La aritmetización de la geometría de nuevo

La géométrie no se presentó al público matemático como un tratado independiente, sino como uno de los tres apéndices al *Discours de la méthode*, en los que Descartes intentaba dar ejemplos de la aplicación de su método filosófico general. Los otros dos apéndices eran *La dioptrique*, que contenía, entre otras cosas, la primera exposición publicada de la ley de la refracción (descubierta anteriormente por Snell), y *Les météores*, que incluían la primera explicación cuantitativa satisfactoria del arco iris. Los sucesores de Descartes no consiguieron ver con claridad en qué sentido exactamente estaban relacionados los tres apéndices citados con su método general, y por lo tanto en las ediciones posteriores del *Discours* casi siempre se omitieron. La edición original del *Discours* se publicó sin el nombre del autor, pero todo el mundo sabía bien quién era.

Hoy en día geometría cartesiana es sinónimo de geometría analítica, pero la finalidad principal que perseguía Descartes estaba muy lejos de la que persiguen los libros de texto modernos. La motivación general queda determinada por la primera frase del libro:

> Cualquier problema de geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que el conocimiento de las longitudes de determinados segmentos es suficiente para su construcción.

Tal como se indica en esta primera afirmación, la meta perseguida es generalmente una construcción geométrica, y no necesariamente la reducción de la geometría al álgebra. La obra de Descartes se suele describir demasiado a menudo simplemente como la aplicación del álgebra a la geometría, mientras que, de hecho, podría caracterizársela igualmente bien como la traducción de las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría. Precisamente el primer capítulo de *La géométrie* se titula «Cómo se relacionan los cálculos de la aritmética con las operaciones de la geometría», mientras que el segundo trata de «Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas». Descartes se dedica a hacer aquí lo que ya habían hecho, en cierta medida, desde Al-Khowarizmi a Oughtred, es decir, suministrar un marco geométrico para las operaciones algebraicas. Se demuestra que las cinco operaciones aritméticas corresponden a construcciones sencillas con la regla y el compás, lo que justifica la introducción de términos aritméticos en la geometría.

Descartes fue mucho más sistemático que sus predecesores en su álgebra simbólica y en la interpretación geométrica del álgebra. El álgebra simbólica formal, que había seguido desde el Renacimiento un proceso más o menos continuo de avance, encuentra su culminación en *La géométrie* de Descartes, el primer texto matemático que un estudiante de álgebra actual puede leer sin encontrarse con dificultades de notación. Prácticamente el único símbolo arcaico que se utiliza en el libro es el de $\propto$ en vez del $=$ para la igualdad. El uso por parte de Descartes de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes, y de las últimas para las incógnitas o variables, adoptando para ellas la notación exponencial, y la utilización de los símbolos germánicos $+$ y $-$ hacen, combinados todos estos elementos, que la notación algebraica de Descartes se parezca tanto a la nuestra, debido obviamente a que ésta se deriva de aquélla. Hay, sin embargo, una diferencia importante de punto de vista, ya que donde nosotros consideramos a los parámetros y a las incógnitas como números, Descartes los considera como segmentos. En un aspecto esencial rompe, no obstante, con la tradición griega, al no considerar, por ejemplo, x^2 y x^3 como un área y un volumen respectivamente, sino que los interpreta también como segmentos, lo que le permite abandonar el principio de homogeneidad, al menos explícitamente, y conservar, sin embargo, el significado geométrico. Descartes podía escribir, pues, perfectamente una exposición tal como la $a^2b^2 - b$, pues, tal como él mismo lo expresaba, «uno debe considerar la cantidad a^2b^2 dividida una vez por la unidad (es decir, el segmento de longitud unidad), y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad». Es claro, pues, que Descartes sustituía la homogeneidad formal por una homogeneidad

convencional en el pensamiento, posible en todos los casos, lo cual hacía su álgebra geométrica mucho más flexible, tan flexible en realidad que nosotros seguimos leyendo hoy xx como «x cuadrado», sin imaginarnos nunca al hacerlo un cuadrado de lado x.

5. El álgebra geométrica

El Libro I de *La géométrie* contiene un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no en el sentido algebraico de los antiguos babilonios, sino geométricamente, algo así como lo que hacían los griegos de la antigüedad. Por ejemplo, para resolver la ecuación $z^2 = az + b^2$, Descartes procede de la manera siguiente: trácese un segmento LM de longitud b (fig. 17.1), y levántese en L un segmento NL perpendicular a LM y de longitud $\frac{a}{2}$. Con centro

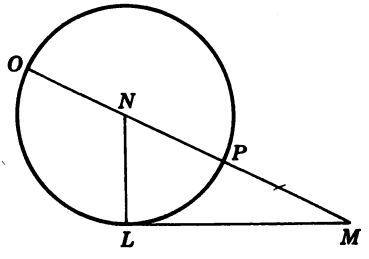


Figura 17.1

en N dibújese la circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ y trácese la recta MN, que corta a la circunferencia en O y en P; entonces $z = OM$ es el segmento buscado. (Descartes ignora la raíz PM de la ecuación porque es «falsa», es decir, es negativa.) Construcciones análogas se dan para $z^2 = az - b^2$ y para $z^2 + az = b^2$, las únicas ecuaciones cuadráticas restantes con raíces positivas.

Después de mostrar cómo se pueden interpretar geométricamente las operaciones algebraicas, incluida la resolución de las ecuaciones cuadráticas, se centra Descartes en la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos, formulando el planteamiento general de una manera mucho más clara que los «cosistas» del Renacimiento:

> Si queremos, pues, resolver un problema cualquiera, supondremos en primer lugar la solución ya efectuada, y daremos nombres a todos los segmentos que parecen necesarios para su construcción, tanto a los que son desconocidos como a los conocidos. Después, y sin establecer ninguna diferencia entre los segmentos conocidos y desconocidos, se debe desentrañar la dificultad que muestre de una manera natural las relaciones entre estos segmentos, hasta que se pueda expresar una misma cantidad

> de dos maneras distintas. Esto constituirá una ecuación (en una única incógnita), ya que los términos de una de estas dos expresiones son, considerados juntos, iguales a los términos de la otra[1].

A los largo de los Libros I y III de *La géométrie* se dedica Descartes principalmente a este tipo de problema geométrico, en el que la ecuación algebraica resultante sólo puede contener una incógnita. Descartes sabía muy bien que era el grado de esta ecuación algebraica final el que determinaba los métodos geométricos con ayuda de los cuales podría efectuarse la construcción geométrica pedida.

> Si se puede resolver por medio de la geometría ordinaria, es decir, mediante el uso de rectas y circunferencias trazadas en una superficie plana, entonces cuando la última ecuación haya sido reducida completamente, no quedará, como máximo, más que el cuadrado de una incógnita igualado al producto de su raíz por alguna cantidad conocida, al cual vendrá sumada o restada alguna otra cantidad también conocida.

Vemos aquí enunciado con toda claridad el hecho de que, los que los griegos habían llamado «problemas planos», conducen simplemente a una ecuación cuadrática, en el peor de los casos. Y como Viète había mostrado ya que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo conducían a ecuaciones cúbicas, Descartes afirma, dando una demostración incorrecta, que estos problemas no se pueden resolver con regla y compás. Así pues, de los tres problemas clásicos de la antigüedad, sólo parecía quedar abierto el de la cuadratura del círculo.

El título de *La géométrie* no debe llevarnos a pensar equivocadamente que este tratado es básicamente un tratado geométrico. Ya en el *Discours*, al que sirve de apéndice *La géométrie*, se había ocupado Descartes de discutir los méritos relativos que corresponden al álgebra y a la geometría, sin llegar a inclinarse a favor de una o de la otra. Acusaba a la geometría de apoyarse excesivamente en diagramas y figuras que llegan a fatigar de manera innecesaria la imaginación, y a la vez acusaba al álgebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierta a la mente. El objetivo de su método era pues doble: 1) el de liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras, y 2) darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica. Descartes estaba convencido de que todas las ciencias matemáticas procedían de los mismos principios básicos, y así decidió utilizar lo mejor de cada rama. Su manera de proceder en *La géométrie* era, pues, la de comenzar con el estudio de un problema puramente geométrico, para traducirlo a continuación al lenguaje de una ecuación algebraica, y entonces, una vez simplificada dicha ecuación todo lo posible, resolver esta ecuación de una manera geométrica, análogamente a como había hecho previamente con las ecuaciones cuadráticas. Siguiendo las ideas de Pappus, insistía Descartes en que, al resolver geométricamente una ecuación se deberían utilizar únicamente los métodos más sencillos compatibles con el grado

[1] Las traducciones de pasajes de *La géométrie*, tanto aquí como en cualquier otro lugar de este libro, están tomadas de *The Geometry of René Descartes*, trad. por D. E. Smith y Marcia L. Latham (New York; Dover repr., 1954). Para el pasaje anterior, véanse págs. 7 a 9.

de la ecuación. Para las ecuaciones cuadráticas son suficientes rectas y circunferencias, y para las cúbicas y las cuárticas bastan las cónicas. En este punto Descartes se encontraba ya dispuesto a avanzar más allá de los límites en que se habían detenido los griegos.

6. La clasificación de curvas

Descartes quedó muy satisfecho por la potencia demostrada por su método para tratar el problema del lugar geométrico de las tres y cuatro rectas, y en consecuencia pasó a ocuparse de las generalizaciones naturales de este problema, problema que, como un nuevo hilo de Ariadna, recorre los tres libros de *La géométrie*. Descartes sabía que Pappus había sido incapaz de decir nada acerca de los lugares geométricos en cuestión cuando el número de rectas ascendía a seis, ocho o más, así que decidió estudiar tales casos. Sabía, desde luego, que para cinco o seis rectas el lugar geométrico es una cúbica, para siete u ocho es una cuártica, y así sucesivamente, pero Descartes realmente no demostró ningún interés en la forma de estos lugares geométricos, ya que lo que lo tenía obsesionado era la cuestión de los métodos necesarios para construir geométricamente las ordenadas correspondientes a abscisas dadas. Para cinco rectas, por ejemplo, Descartes hace observar triunfalmente que, si no son todas ellas paralelas, entonces el lugar geométrico es elemental en el sentido de que, dado un valor de x, el segmento que representa a y se puede construir con regla y compás únicamente. Si cuatro de las rectas son paralelas entre sí y a distancias iguales a, y si la quinta es perpendicular a las cuatro primeras (fig. 17.2), entonces, tomando la constante de proporcionalidad

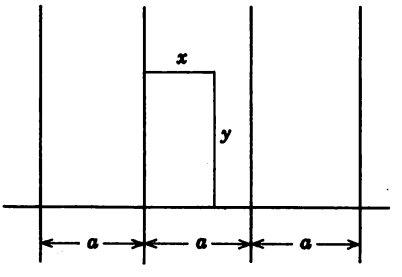


Figura 17.2

en el problema de Pappus como esta misma constante a, el lugar geométrico vendrá dado por la ecuación $(a+x)\,(a-x)\,(2a-x)=axy$, una cúbica que Newton llamaría más tarde parábola cartesiana o tridente, $x^3-2ax^2-a^2x+2a^3=axy$. Esta curva aparece repetidamente en *La géométrie*, y, sin embargo, Descartes no da nunca una representación completa de ella. Su interés por esta curva incluía tres objetivos distintos: 1) obtener su ecuación como un lugar geométrico en el sentido de Pappus; 2) mostrar cómo podría generarse por medio de movimientos de curvas

de menor grado, y 3) utilizarla a su vez para hallar las raíces de ecuaciones de grados más altos.

Descartes consideraba al tridente constructible por métodos planos únicamente, en tanto que, para cada punto x del eje de abscisas, la ordenada y correspondiente se puede construir con regla y compás únicamente. Esto no es posible en general, para cinco rectas o más tomadas al azar en el plano, en el problema original de Pappus. En el caso en que el número de rectas no sea mayor que ocho, el lugar geométrico nos lleva a una ecuación definida por un polinomio en x e y tal que, para cada punto dado sobre el eje de las x, la construcción de la ordenada correspondiente y exige la resolución geométrica de una ecuación cúbica o una cuártica, que, como hemos visto, implica en general la utilización de secciones cónicas. Para un número de rectas no superior a doce en el problema de Pappus, el lugar geométrico vendrá dado por un polinomio en x e y de grado no mayor que seis, y la construcción requiere, en general, curvas más complejas que las cónicas. Aquí lleva a cabo Descartes un importante avance con respecto a los griegos en lo que se refiere a los problemas de constructibilidad geométrica. Los antiguos en realidad nunca habían llegado a legitimar las construcciones en las que se hacía uso de curvas que no fueran rectas y circunferencias, aunque a veces reconocían, de mala gana, como en el caso de Pappus, las clases de problemas que llamaron problemas sólidos y problemas lineales. En particular esta segunda categoría consistía en un verdadero cajón de sastre de problemas sin ninguna caracterización determinada.

Descartes abordó entonces la tarea de dar de una manera concreta una clasificación ortodoxa de determinados tipos de problemas geométricos. Aquellos que conducían a ecuaciones cuadráticas, y que podían ser construidos por lo tanto por medio de rectas y circunferencias, los situó en su clase 1; los que conducían a ecuaciones cúbicas y cuárticas, cuyas raíces se pueden construir por medio de secciones cónicas, los situó en la clase 2; aquellos que conducen a ecuaciones de grados cinco o seis pueden construirse introduciendo una curva cúbica auxiliar, tal como el tridente o la simple parábola cúbica $y=x^3$, y estos problemas fueron a parar a la clase 3. Descartes continuó de esta misma manera, agrupando los problemas geométricos y las correspondientes ecuaciones algebraicas en clases, suponiendo que la construcción de las raíces de una ecuación de grado $2n$ o $2n-1$ constituía un problema de clase n.

Esta clasificación cartesiana por parejas de grados seguidos parecía venir confirmada por consideraciones de tipo algebraico. Se sabía que la resolución de la cuártica se podía reducir a la de la correspondiente cúbica resolvente, y Descartes extrapoló de una manera prematura e injustificada al suponer que la solución de cualquier ecuación de grado $2n$ se podría reducir a la de una ecuación resolvente de grado $2n-1$. Muchos años más tarde se demostró que esta tentadora generalización de Descartes no se verifica. No obstante, algunos de sus contemporáneos únicamente se mostraron extremadamente impacientes por señalar un error más serio cometido por Descartes en este contexto, ya que resulta claramente de la teoría de la eliminación algebraica que las curvas de grado n bastan para resolver ecuaciones no sólo hasta las de grado $2n$, sino hasta las de grado n^2. Así pues, la clasificación de Descartes, comprobadamente incorrecta, cayó en el olvido, pero su

obra tuvo el saludable efecto de favorecer la relajación de las reglas de constructibilidad admitidas, de manera que se pudieran utilizar también curvas planas de orden superior.

7. La rectificación de curvas

Hay que hacer notar que la clasificación cartesiana de los problemas geométricos incluye algunos, pero no todos aquellos que Pappus había reunido bajo el nombre un tanto impreciso de «lineales». Al introducir las nuevas curvas que necesitaba para sus construcciones geométricas más allá del cuarto grado, Descartes añade a los axiomas usuales de la geometría un axioma nuevo:

> Dos o más rectas (o curvas) pueden moverse una sobre otra, determinando por medio de sus intersecciones otras curvas.

Esto no se diferencia realmente en nada de lo que habían hecho ya los griegos para engendrar de una manera cinemática curvas tales como la cuadratriz, la cúspide, la conchoide y la espiral; pero mientras que los antiguos griegos habían reunido todas estas curvas en una única clase, Descartes distinguía ahora cuidadosamente entre aquellas que, como la cisoide y la conchoide, nosotros llamaríamos algebraicas, y las otras, tales como la cuadratriz y la espiral, que conocemos como trascendentes. Al primer tipo le concedió Descartes el pleno *status* geométrico a todos los efectos, junto con la recta, la circunferencia y las cónicas, llamándolas a todas ellas las verdaderas «curvas geométricas», mientras que al segundo tipo lo excluyó completamente de la geometría, estigmatizándolas con el oprobioso nombre de «curvas mecánicas». La base en la que se apoyaba Descartes para tomar esta decisión era la de «exactitud de razonamiento». Las curvas mecánicas, decía, «tenemos que imaginarlas como descritas por dos movimientos separados e independientes, cuya relación no admite una determinación exacta», tal como ocurre con la razón de la circunferencia al diámetro en el caso de los movimientos que describen la cuadratriz y la espiral. En otras palabras, Descartes consideraba a las curvas algebraicas como descritas *de una manera exacta*, y a las curvas trascendentes como descritas *de una manera inexacta*, ya que estas últimas vienen definidas, en general, en términos de longitudes de arcos. Sobre este tema escribe Descartes en *La géométrie:*

> La Geometría no debería incluir líneas (es decir, curvas) que son como cuerdas, en el sentido de que son a veces rectas y a veces curvas, ya que las razones entre líneas rectas y curvas no son conocidas, y creo que no pueden llegar a ser descubiertas por mentes humanas, y por lo tanto ninguna conclusión que se base en tales razones puede ser aceptada como rigurosa y exacta.

Descartes no hace aquí otra cosa sino reiterar el dogma, sugerido ya por Aristóteles y formulado explícitamente por Averroes, de que ninguna curva algebraica puede ser rectificada de una manera exacta. Resulta pues interesante recordar que en 1638, el año siguiente al de la publicación de *La géométrie*, se

tropezó Descartes con una «curva mecánica» que era rectificable después de todo. A través de Mersenne, «representante», como si dijéramos, de Galileo en Francia, se había divulgado y discutido ampliamente el problema, planteado en *Las dos nuevas ciencias*, de la trayectoria de caída de un cuerpo a través de una tierra en rotación (suponiendo dicha tierra permeable al movimiento), problema que condujo a Descartes a la espiral equiangular o logarítmica $r=ae^{b\theta}$ como posible trayectoria[2]. Si Descartes no se hubiese mantenido tan firme en rechazar tales curvas no-geométricas, podría haberse anticipado a Torricelli en descubrir, en 1645, la primera rectificación de una curva de la era moderna. Torricelli demostró, utilizando los métodos infinitesimales que había aprendido de Arquímedes, Galileo y Cavalieri, que la longitud total de la espiral logarítmica desde $\theta=0$ hacia atrás, según se enrolla asintóticamente en torno al polo O, es exactamente igual a la longitud de la tangente polar PT (fig. 17.3) correspondiente al punto P para el que $\theta=0$. Este resultado sorprendente no viene a refutar, desde luego, la teoría cartesiana de la imposibilidad de rectificar ni siquiera las curvas *algebraicas*. De hecho, Descartes podía haber argumentado no sólo que tal curva no estaba determinada de una manera exacta, al ser una curva mecánica, sino también que el arco considerado de la curva sólo tiene un extremo, al ser el polo un punto asintótico que la curva nunca llega a alcanzar.

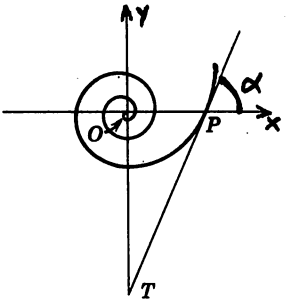


Figura 17.3

8. La identificación de cónicas

Prácticamente la totalidad de *La géométrie* está dedicada a la aplicación sistemática y completa del álgebra a la geometría y de la geometría al álgebra, pero lo cierto es que a lo largo de todo el tratado hay bien poco que se parezca a lo que hoy solemos considerar como geometría analítica. No hay nada sistemático acerca del uso de las coordenadas rectangulares, ya que se suele tomar como dado un sistema de coordenadas oblicuas *ad hoc* para el problema que se estudia. Por lo tanto, no hay fórmulas para distancias, pendientes, división de un segmento en partes iguales, ángulo entre dos rectas u otro tipo de material introductorio

[2] Véase *Oeuvres de Descartes*, ed. por Charles Adam y Paul Tannery (1897-1913), vol. II, págs. 222-245.

análogo. Por otra parte, no se encuentra en toda la obra ni una sola curva nueva representada directamente a partir de su ecuación y, de hecho, el autor se tomó tan poco interés por la representación de curvas que nunca llegó a entender plenamente el significado de las coordenadas negativas. Descartes reconocía, de una manera muy general, que las ordenadas negativas estaban dirigidas en un sentido opuesto al que se toma como positivo, pero nunca hizo uso, en cambio, de abscisas negativas. Además, el principio fundamental de la geometría analítica, que consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas corresponden a lugares geométricos, no aparece hasta el segundo libro, y aun entonces sólo de una manera un tanto accidental.

> La solución de uno cualquier de estos problemas de lugares geométricos consiste nada más que en hallar un punto para cuya completa determinación falta una condición... En cualquiera de estos casos se llega a una ecuación que contiene dos cantidades incógnitas.

Solamente en un caso examina Descartes con detalle un lugar geométrico, y es en conexión con el problema del lugar de las tres y cuatro rectas de Pappus, para el que obtiene Descartes la ecuación $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Esta es la ecuación general de una cónica que pasa por el origen de coordenadas; incluso a pesar de que los coeficientes literales se entiende que han de ser positivos, se trata aquí del planteamiento más general, con mucho, hecho hasta entonces del análisis de la familia de todas las secciones cónicas. Descartes presenta condiciones sobre los coeficientes para que la cónica sea una recta (doble), una parábola, una elipse o una hipérbola, haciendo un análisis de casos posibles que viene a ser equivalente, en un cierto sentido, al reconocimiento de la característica de la ecuación de la cónica en cuestión. El autor sabía que eligiendo adecuadamente tanto el origen de coordenadas como los ejes, podía reducirse la ecuación a su forma más sencilla, pero el hecho es que no da ninguna de las formas canónicas. La omisión de muchos de los detalles elementales hizo la obra extremadamente difícil de seguir para la mayoría de sus contemporáneos; en las observaciones finales Descartes intenta justificar su exposición insuficientemente detallada con la afirmación un tanto incongruente de que ha dejado muchas cosas sin decir con objeto de no robar al lector el placer de descubrirlas por sí mismo. Siendo como era él mismo un genio, no podía darse cuenta de las dificultades que otros iban a encontrarse para entender sus nuevos y profundos pensamientos. No es de extrañar, pues, que el número de ediciones de *La géométrie*, dejando aparte las que aparecieron considerablemente ampliadas y en latín, fuera relativamente pequeño durante el siglo XVII, y desde entonces ha sido aún menor.

A pesar de su forma de exposición inadecuada, es precisamente el Libro II de *La géometrie* el que más se aproxima a la concepción moderna de la geometría analítica. Nos encontramos incluso con una formulación de lo que podríamos llamar el principio fundamental de la geometría analítica del espacio tridimensional:

> Si son necesarias dos condiciones para la determinación de un punto, entonces el lugar geométrico del punto es una superficie.

Sin embargo, Descartes no da ningún ejemplo de tales ecuaciones ni tampoco desarrolla más esta brevísima insinuación de lo que sería una geometría analítica en el espacio de tres dimensiones.

9. Normales y tangentes

Descartes se daba cuenta de una manera tan clara de la importancia de su obra, que la consideraba como en la misma relación con la geometría antigua, en cierto sentido, que la que hay entre la retórica de Cicerón y el *a*, *b*, *c*, de los niños. Su error, desde nuestro punto de vista, fue el de poner el énfasis en las ecuaciones determinadas en vez de en las ecuaciones indeterminadas. Descartes se dio cuenta de que todas las propiedades de una curva, tales como la medida del área encerrada por ella o la dirección de su tangente, están completamente determinadas cuando se da su ecuación en dos incógnitas, pero en realidad no sacó las importantes consecuencias de este conocimiento; escribe:

> Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que éste es no sólo el problema más útil y más general de la geometría que conozco, sino incluso de los que hubiera deseado nunca conocer.

Descartes tenía mucha razón, sin duda, al afirmar que el problema de hallar la normal (o, equivalentemente, la tangente) a una curva era de gran importancia, pero el método que desarrolla en *La géométrie* no era tan directo ni fácil de aplicar como el que había desarrollado Fermat al mismo tiempo aproximadamente. Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto fijo P de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable Q sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje de abscisas) y que pase por los puntos P y Q. Igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que Q coincide con P y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto P.

El Libro II de *La géométrie* contiene también muchos resultados sobre los «óvalos de Descartes», curvas que son muy útiles en óptica y pueden obtenerse por medio de una generalización del «método del jardinero» para construir una elipse utilizando una cuerda. Si D_2 y D_2 son las distancias de un punto variable P a dos puntos fijos F_1 y F_2, respectivamente, si m y n son dos enteros positivos y K una constante positiva cualquiera, entonces al lugar geométrico del punto P tal que $mD_1 + nD_2 = K$ se le conoce con el nombre de un «óvalo de Descartes», pero lo cierto es que él no utilizó las ecuaciones de estas curvas. Descartes se dio cuenta de que sus métodos podían extenderse a «todas aquellas curvas que pueden concebirse como engendradas por el movimiento regular de los puntos de un cuerpo en el espacio tridimensional», pero no da más detalles. La frase con la que cierra el

Libro II, «y así, creo que no he omitido nada esencial para el entendimiento de las líneas curvas», resulta ser, pues, ciertamente presuntuosa.

El tercero y último libro de *La géométrie* vuelve a tomar el tema del Libro I, el de la construcción de las raíces de ecuaciones determinadas. Aquí advierte Descartes que en tales construcciones «Deberemos elegir siempre con cuidado la curva más sencilla que pueda ser utilizada para resolver un problema». Esto significa, desde luego, que tenemos que ser plenamente conscientes de la naturaleza de las raíces de la ecuación que estamos estudiando, y en particular tenemos que saber si la ecuación es o no reducible. Por este motivo, el Libro III se reduce prácticamente a un curso de teoría elemental de ecuaciones, en el que se explica cómo hallar las raíces racionales, si las hay, cómo rebajar el grado de la ecuación si se conoce una raíz, cómo incrementar o disminuir las raíces de una ecuación en una cantidad dada, o multiplicarlas o dividirlas por un número, cómo eliminar el segundo término de la ecuación, cómo determinar el número de posibles raíces «verdaderas» y «falsas» (es decir, de raíces positivas y negativas) por medio de la bien conocida «regla de los signos de Descartes», y cómo hallar las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas algebraicamente. Al final del libro el autor recuerda al lector que ha dado las construcciones más sencillas posibles para los problemas de los diversos tipos mencionados anteriormente; así, en particular, tanto la trisección del ángulo como la duplicación del cubo están en la clase dos de los que no requieren para su construcción más que rectas y circunferencias.

10. Las concepciones geométricas de Descartes

Nuestra breve exposición de la geometría analítica de Descartes ha debido dejar claro lo alejado que se encontraba su pensamiento de las consideraciones de tipo práctico que hoy se suelen asociar tan frecuentemente al uso de las coordenadas. Descartes no toma un cierto sistema de ejes de coordenadas para localizar con respecto a él la posición de determinados puntos, como podría hacer un topógrafo o un geógrafo, ni tampoco consideraba a sus coordenadas como parejas de números; a este respecto el nombre de «producto cartesiano» (debido al matemático francés M. Fréchet), tan extendido actualmente, resulta un evidente anacronismo. *La géométrie* fue en su día un triunfo de la pura teoría sin intención práctica, en la misma medida en que lo fueron las *Cónicas* de Apolonio en la antigüedad, a pesar del papel tan extraordinariamente útil que ambas obras estaban destinadas a jugar en el futuro. Por otra parte, el uso de coordenadas oblicuas era prácticamente el mismo en ambos casos, confirmando así que los orígenes de la geometría analítica moderna arrancan de la antigüedad más bien que de la teoría medieval de la latitud de las formas. Resulta evidente, sin embargo, que las coordenadas de Oresme, que influyeron en Galileo, están más próximas, tanto en su motivación como en su aspecto, al punto de vista moderno que las de Apolonio y de Descartes. Incluso si Descartes llegó a familiarizarse con la representación gráfica de funciones de Oresme, cosa que no es evidente en absoluto, no hay nada en las ideas cartesianas que indique que hubiera visto ninguna analogía entre el objetivo de la latitud de las formas y su propia clasificación de las

construcciones geométricas. Como sabemos, la teoría de funciones sacó finalmente un gran partido de la obra de Descartes, pero lo cierto es que la idea de «forma» o de «función» no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana.

Hablando en términos de capacidad matemática, Descartes fue probablemente el pensador más capaz de su época, pero lo que ocurre es que, en el fondo, no era realmente un matemático. Su geometría no es más que un episodio en una vida dedicada a la ciencia en general y a la filosofía, y aunque en los años posteriores hiciera ocasionalmente algunas otras contribuciones a la matemática, sobre todo en sus cartas, no dejó ninguna otra obra importante sobre el tema. En 1649 aceptó Descartes una invitación de la reina Cristina de Suecia para trasladarse a ese país y enseñarle filosofía, y para fundar una academia de ciencias en Estocolmo. Descartes no había disfrutado nunca de buena salud, y los rigores del invierno escandinavo fueron demasiado para él, muriendo a principios del año 1650.

11. Los lugares geométricos de Fermat

Si Descartes tuvo un rival, en lo que a capacidad matemática se refiere, éste era Fermat, que, por cierto, tampoco fue en absoluto un matemático profesional. Fermat estudió derecho en Toulouse, para incorporarse más tarde a las tareas del parlamento local, primero como abogado y después como miembro del consejo. De todo esto se deduce que Fermat debió ser un hombre muy ocupado, a pesar de lo cual parece haber conseguido sacar el tiempo libre suficiente para cultivar, como pasatiempo, su gusto por la literatura clásica, incluida la ciencia y la matemática. Como resultado de ello, hacia el año 1629 comenzó a hacer descubrimientos matemáticos de una gran importancia. Ese mismo año se incorporó a la práctica de uno de los deportes favoritos de la época, la «restauración» de obras perdidas de la antigüedad, a base de la información contenida en los tratados clásicos que se han conservado. Fermat abordó la tarea de reconstruir los *Lugares planos* de Apolonio, apoyándose en las referencias contenidas en la *Colección matemática* de Pappus. Un importante subproducto de este esfuerzo fue el descubrimiento, probablemente antes de 1636, del principio fundamental de la geometría analítica:

> Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva.

Esta afirmación, tan breve como profunda, escrita un año antes de que apareciese *La géométrie* de Descartes, parece haberle venido sugerida a Fermat por su aplicación del análisis de Viète al estudio de los lugares geométricos de Apolonio. En este caso, como puede verse, al igual que en el de Descartes, el uso de las coordenadas no surge de consideraciones de tipo práctico ni de la representación gráfica de funciones medieval, sino que aparece al aplicar el álgebra renacentista a problemas geométricos de la antigüedad griega. Sin embargo, el punto de vista de Fermat tampoco era el mismo que el de Descartes, ya que Fermat ponía el énfasis en la representación gráfica de las soluciones de ecuaciones

indeterminadas, en vez de la construcción geométrica de las raíces de ecuaciones algebraicas *determinadas*. Además, mientras que Descartes había construido su *Géométrie* a partir del difícil problema de Pappus, Fermat se limitó en su exposición, contenida en el breve tratado titulado *Ad locos planos et solidos isagoge* («Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos»), únicamente a los lugares geométricos más sencillos. Mientras que Descartes había comenzado por el lugar de las tres y cuatro rectas, utilizando una de ellas como eje de abscisas, Fermat comienza por la ecuación lineal y elige un sistema de coordenadas arbitrario para representarla.

Utilizando la notación de Viète, representa Fermat en primer lugar el caso más sencillo de una ecuación lineal, dada en latín en la forma «*D* in *A* aequetur *B* in *E*» (es decir, en simbolismo moderno, $Dx=By$). La gráfica es, naturalmente, una recta que pasa por el origen de coordenadas, o mejor una semirrecta con origen en el origen de coordenadas, dado que Fermat, lo mismo que Descartes, no utilizaba abscisas negativas. La ecuación lineal más general $ax+by=c^2$ (pues Fermat admitía el principio de homogeneidad de Viète) viene representada por un segmento rectilíneo en el primer cuadrante, con extremos en los ejes de coordenadas. A continuación, y para demostrar la potencia de su método para el estudio de lugares geométricos, nos presenta Fermat el problema siguiente, que ha resuelto con ayuda de este método:

> Dado un número cualquier de rectas en un plano, el lugar geométrico de un punto tal que la suma de cualesquiera múltiplos de los segmentos trazados desde dicho punto a las rectas dadas, formando con ellas ángulos dados, sea constante, es una línea recta.

Este resultado es, desde luego, un simple corolario del hecho que los segmentos en cuestión son funciones lineales de las coordenadas, y de la proposición de Fermat de que toda ecuación de primer grado representa una línea recta[3].

A continuación demuestra Fermat que la representación de $xy=k^2$ es una hipérbola, y que una ecuación de la forma $xy+a^2=bx+cy$ se puede reducir a otra de la forma $xy=k^2$ por medio de una traslación de los ejes. A la ecuación $x^2=y^2$ la consideraba representada por una única recta (o, mejor dicho, semirrecta), puesto que trabajaba únicamente en el primer cuadrante, y reducía a esta forma otras ecuaciones homogéneas de segundo grado. Demuestra también que $a^2 \pm x^2 = by$ es una parábola, que $x^2+y^2+2ax+2by=c^2$ es una circunferencia, que $a^2-x^2=ky^2$ es una elipse y que $a^2+x^2=ky^2$ es una hipérbola, de la que da las dos ramas. Para el caso de las ecuaciones cuadráticas más generales, en las que aparecen varios términos de segundo grado, Fermat aplica una rotación de los ejes con objeto de reducirlas a las formas anteriores. Fermat consideraba como el punto culminante de su tratado la proposición siguiente:

> Dado un número cualquier de rectas, el lugar geométrico de un punto tal que la suma de los cuadrados de los segmentos trazados desde dicho punto a las rectas dadas, formando con ellas ángulos dados, sea constante, es un lugar sólido.

[3] Para éste y otros aspectos de la obra de Fermat véanse sus *Oeuvres*, editadas por Paul Tannery y Charles Henry (1891-1922), 4 vols.

Esta proposición es trivial a la vista del exhaustivo análisis de Fermat de los diversos casos posibles de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. Al final del *Ad locos planos et solidos isagoge* añadió Fermat un apéndice titulado «La resolución de problemas sólidos por medio de lugares geométricos», en el que muestra que las ecuaciones cúbicas y cuárticas determinadas se pueden resolver por medio de cónicas, tema que también aparecía repetidas veces en *La géométrie* de Descartes.

12. La geometría analítica multidimensional

La obra de Fermat *Ad locos planos et solidos isagoge* no se publicó en vida del autor, lo que favoreció la impresión general de que la geometría analítica había sido invención de Descartes únicamente. Ahora está ya perfectamente claro que Fermat había descubierto esencialmente el mismo método bastante antes de que apareciera publicada *La géométrie*, y que su obra al respecto circuló únicamente en forma manuscrita hasta que se publicó al fin en 1679 en la *Varia opera mathematica* de Fermat. Fue realmente una pena que Fermat no publicase prácticamente nada a lo largo de su vida, porque su exposición era mucho más sistemática y didáctica que la de Descartes. Además, su geometría analítica es algo que está mucho más próximo a la nuestra, entre otras cosas en el hecho de que el eje de ordenadas se toma generalmente perpendicular al eje de abscisas. Fermat se dio cuenta también, lo mismo que Descartes, de la posibilidad de una geometría analítica de más de dos dimensiones, ya que escribe, en otro contexto:

> Hay ciertos problemas en los que interviene una única incógnita, a los que podemos llamar *determinados* para distinguirlos de los problemas relativos a lugares geométricos. Hay otros en los que intervienen dos incógnitas que no pueden reducirse nunca a una sola; éstos son los problemas de lugares geométricos. En el primer tipo de problemas buscamos un único punto, mientras que en el segundo una curva. Pero si el problema propuesto involucra a tres incógnitas, entonces hay que encontrar, para satisfacer la ecuación, no sólo un punto o una curva, sino una superficie completa. De esta manera aparecen los lugares geométricos que son superficies, etc.[4].

Aquí precisamente, en este final y prometedor «etc.», hay una insinuación de lo que sería una geometría de más de tres dimensiones, pero si Fermat tenía esto en realidad en su mente, lo cierto es que no llevó a cabo esta idea. Incluso la geometría analítica tridimensional tuvo que esperar aún hasta el siglo XVIII para alcanzar su pleno desarrollo.

13. Las diferenciaciones de Fermat

Es muy posible que Fermat estuviera ya en posesión de su geometría analítica en una fecha tan temprana como el año 1629, puesto que por esta época hizo dos

[4] Véase Fermat, *Oeuvres*, vol. I, págs. 186-187.

importantes descubrimientos que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. El más importante de ellos lo expuso unos años más tarde en un tratado, que tampoco se publicó durante su vida, titulado *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* («Método para hallar máximos y mínimos»). Fermat había estado estudiando lugares geométricos dados (en notación moderna) por ecuaciones de la forma $y=x^n$, por lo que se les conoce hoy como «parábolas de Fermat» si n es positivo, o «hipérbolas de Fermat» si n es negativo. Aquí tenemos ya una geometría analítica de curvas de orden superior, pero Fermat fue aún más lejos: Para curvas polinómicas de la forma $y=f(x)$ descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor $f(x+E)$ en un punto próximo; en general estos dos valores serán claramente distintos, pero en una «cumbre» o en el fondo de un «valle» de una curva «lisa», la diferencia será casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a valores máximos o mínimos de la función, Fermat iguala $f(x)$ a $f(x+E)$, teniendo en cuenta que estos valores, aunque no son exactamente iguales, son «casi iguales». Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los dos puntos, más cerca estará dicha seudo-igualdad de ser una verdadera ecuación; así pues, Fermat, después de dividir todo por E, hace $E=0$. El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica. Aquí podemos ver ya en esencia el proceso que ahora llamamos de diferenciación, pues el método de Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$$

e igualar este límite a cero. Resulta completamente justo, por lo tanto, reconocer la razón que asistía a Laplace al aclamar a Fermat como el verdadero descubridor del cálculo diferencial, así como co-descubridor de la geometría analítica. Obviamente Fermat no disponía del concepto de límite, pero salvo esto, su método para determinar máximos y mínimos sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver hoy en los libros de cálculo, excepto en la mínima diferencia de que hoy se suele utilizar el símbolo h o Δx en vez de la E de Fermat para el incremento de la variable. El procedimiento de Fermat, que consiste en cambiar ligeramente el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado, ha constituido desde entonces la verdadera esencia del análisis infinitesimal.

Durante los mismos años en que Fermat se encontraba desarrollando su geometría analítica, descubrió también cómo aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable, para hallar la tangente a una curva algebraica de la forma $y=f(x)$. Si P es un punto de la curva $y=f(x)$ en el que se desea hallar la tangente, y si las coordenadas de P son (a, b), entonces un punto próximo P' sobre la curva, de coordenadas $x=a+E$, $y=f(a+E)$, estará tan próximo a la tangente que podemos considerarlo situado sobre la tangente a la vez que sobre la curva, aproximadamente. Por lo tanto, si la subtangente en el punto P es $TQ=c$ (fig.

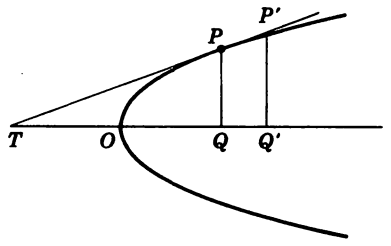


Figura 17.4

17.4), entonces los triángulos TPQ y $TP'Q'$ los podemos considerar como semejantes aproximadamente, y de esta semejanza obtenemos la proporción

$$\frac{b}{c}=\frac{f(a+E)}{c+E}$$

a partir de la cual, multiplicando en cruz, simplificando términos iguales por ser $b=f(a)$, dividiendo todo por E y haciendo, por último, $E=0$, se puede calcular fácilmente la subtangente c que nos determina unívocamente, con el punto P, la tangente buscada.

El método de Fermat resulta, pues, equivalente a decir que el

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$$

es la pendiente de la curva en el punto $x=a$, pero lo cierto es que Fermat no explicó este procedimiento de una manera satisfactoria, limitándose a decir simplemente que era análogo a su método para determinar máximos y mínimos. Por este motivo, Descartes en particular, cuando fue informado por Mersenne de este método en 1638, lo atacó acusándolo de carecer de validez general, a la vez que proponía como desafío, para demostrar su acusación, la curva que se conoce desde entonces con el nombre de «folium de Descartes», $x^3+y^3=3axy$. Lo poco familiarizados que estaban todavía los matemáticos de la época con las coordenadas negativas se refleja de una manera clara en el hecho de que esta curva se solía representar simplemente por un *folium* u «hoja» en el primer cuadrante (o, a veces incluso, ¡como un trébol de cuatro hojas, una en cada cuadrante!). Finalmente Descartes reconoció a regañadientes la validez del método de Fermat para las tangentes, pero, a pesar de ello, a Fermat nunca se le reconoció el mérito que le correspondía en justicia.

14. Las integraciones de Fermat

Mersenne contribuyó a divulgar algunos de los resultados de Fermat por Francia e Italia, tanto a través de su nutrida correspondencia como en sus propias

obras impresas, pero habría sido mucho mejor que el mismo Fermat hubiera publicado sus magníficos descubrimientos. Fermat no sólo disponía de un método para hallar las tangentes a curvas de la forma $y=x^m$, sino que también descubrió, algo más tarde del año 1629, un teorema relativo al área encerrada bajo estas curvas, esencialmente el teorema que publicó Cavalieri en 1635 y 1647. En el cálculo de este área parece haber utilizado Fermat al principio fórmulas para las sumas de potencias de enteros, o desigualdades de la forma

$$1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m>\frac{n^{m+1}}{m+1}>1^m+2^m+3^m+\cdots+(n-1)^m$$

para demostrar el resultado en cuestión para todos los valores de m enteros positivos. Este resultado supondría ya en sí mismo un considerable avance sobre la obra de Cavalieri, que se había limitado a demostrarlo, como hemos visto, para los casos de $m=1$ a $m=9$, pero más tarde Fermat desarrolló un método mucho mejor para tratar el problema[5], que se podía aplicar además tanto a valores enteros como fraccionarios del exponente m. Consideremos la curva $y=x^n$ y supongamos que se desea calcular el área comprendida bajo la curva, entre los valores $x=0$ y $x=a$. Fermat subdividía entonces el intervalo de $x=0$ a $x=a$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando los puntos de abscisas a, aE, aE^2, aE^3, ..., donde E es un número menor que 1; en estos puntos considera las ordenadas de los correspondientes puntos de la curva, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos tal como se indica en la figura 17.5. Las áreas de los

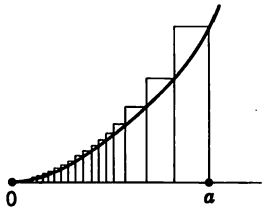


Figura 17.5

sucesivos rectángulos, empezando por el mayor, correspondiente al punto $x=a$, vienen dadas por los términos de la progresión geométrica $a^n(a-aE)$, $a^nE^n(aE-aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2-aE^3)$, ... La suma de estos infinitos términos es

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \quad \text{o} \quad \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

Según E tiende a 1, es decir, según se van haciendo los rectángulos cada vez más estrechos, la suma de las áreas de estos rectángulos va aproximándose cada vez

[5] Véase Fermat, *Oeuvres*, vol. I, págs. 255-288, y vol. III, págs. 216-240.

más al área bajo la curva. Y haciendo $E=1$ en la fórmula anterior que nos daba la suma de los rectángulos, obtenemos $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, que nos da el área buscada bajo la curva $y=x^n$ desde $x=0$ a $x=a$. Para demostrar que esto es válido también para el caso de exponentes fraccionarios $\frac{p}{q}$, sea $n=\frac{p}{q}$; la suma de la progresión geométrica anterior será entonces

$$a^{(p+q)/q}\left(\frac{1-\tilde{E}^q}{1-\tilde{E}^{p+q}}\right)=a^{(p+q)/q}\left(\frac{1+\tilde{E}+\tilde{E}+\cdots+\tilde{E}^{q-1}}{1+\tilde{E}+\tilde{E}^2+\cdots+\tilde{E}^{p+q-1}}\right)$$

donde $\tilde{E}=E^1/^q$. Cuando $E=1$ también es $\tilde{E}=1$ y obtenemos

$$\frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}$$

Si quisiéramos calcular, en notación moderna, $\int_a^b x^n dx$, lo único que necesitaríamos sería reducirla a la expresión $\int_0^b x^n dx-\int_0^a x^n dx$.

Para los valores negativos de n (excepto $n=-1$) Fermat utilizaba un procedimiento análogo, excepto en que consideraba E mayor que 1 y la hacía tender a 1 por valores superiores, calculando así el área bajo la curva desde $x=a$ a infinito. Para calcular $\int_a^b x^{-n} dx$ basta observar entonces que se reduce a $\int_b^\infty x^{-n} dx-\int_b^\infty x^{-n} dx$.

15. Gregory de St. Vincent

Para $n=-1$ el método falla evidentemente, pero el matemático Gregory de St. Vincent (1584-1667), contemporáneo de Fermat, un poco más viejo que él, vino a resolver este singular y exótico caso en su obra *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* («Obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas»). La mayor parte de esta obra había sido escrita antes de la época en que Fermat se encontraba trabajando sobre los problemas de tangentes y áreas, probablemente tan pronto como durante el período 1622-1625, aunque desgraciadamente no se publicó hasta 1647. Gregory de St. Vincent nació en Gante, se hizo jesuita y fue profesor de matemáticas en Roma y en Praga, y más tarde ocupó el puesto de tutor en la corte de Felipe IV de España. A lo largo de sus múltiples viajes se vio frecuentemente separado de sus papeles, con la consecuencia de que la publicación del *Opus geometricum* se retrasó mucho. En este tratado demostraba Gregory que si tomamos a lo largo del eje Ox puntos a partir del $x=a$, tales que los intervalos que determinan van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos puntos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola $xy=1$, entonces las áreas bajo la curva entre cada dos ordenadas sucesivas son iguales. Es decir, con otras palabras, según crece la abscisa geométricamente el área bajo la curva crece aritméticamente. Por lo tanto, lo equivalente (aunque en

términos todavía un tanto imprecisos) de nuestra igualdad $\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln b - \ln a$ era ya familiar a Gregory y a sus contemporáneos. Desgraciadamente una aplicación errónea del método de los indivisibles llevó a Gregory de St. Vincent a creer que había conseguido cuadrar el círculo, error que perjudicó su reputación.

Fermat se interesó por muchos aspectos de lo que hoy llamaríamos análisis infinitesimal, tangentes, cuadraturas, volúmenes, longitudes de curvas, centros de gravedad, etc. Por lo tanto, difícilmente pudo dejar de observar que al hallar las tangentes a la curva $y = kx^n$ se multiplica el coeficiente por el exponente y se disminuye el exponente en una unidad, mientras que al hallar el área bajo la curva se eleva el exponente en una unidad y se divide por este nuevo exponente. ¿Cómo podría haberle pasado inadvertido el carácter inverso de estos dos problemas? Aunque esto resulte a todas luces improbable, lo cierto es, no obstante, que al parecer Fermat no prestó atención en ninguna parte a la importante relación que conocemos hoy con el nombre de teorema fundamental del cálculo. Es muy probable que se diera cuenta efectivamente del carácter inverso de estos dos problemas, pero que no lo considerase particularmente importante. La integración de x^n, que fue casi la única función que consideró en realidad, era prácticamente tan fácil para él, después de todo, como su diferenciación, y cronológicamente la primera puede haber precedido a la segunda, por lo menos para los valores enteros positivos de n, en las investigaciones de Fermat. Y así también en la obra de Gregory de St. Vincent el cálculo integral se anticipó al cálculo diferencial para la función logarítmica.

La relación inversa entre los problemas de áreas y de tangentes debería haberse puesto de manifiesto a partir de la comparación del cálculo del área bajo la hipérbola por Gregory de St. Vincent y del análisis por Descartes de los problemas inversos de tangentes propuestos a través de Mersenne en 1638. Los problemas en cuestión habían sido propuestos por Florimond Debeaune (1601-1652), un jurista de Blois que era a la vez un consumado matemático, por el que incluso Descartes expresó su admiración. Uno de los problemas pedía determinar una curva cuya tangente cumpliese la condición que expresaríamos hoy por la ecuación diferencial a $\frac{dy}{dx} = x - y$. Descartes reconoció que la solución no era algebraica, pero es evidente que ni siquiera llegó a sospechar que estaban involucrados los logaritmos en el problema[6].

16. La teoría de números

Las contribuciones de Fermat a la geometría analítica y al análisis infinitesimal fueron sólo dos aspectos de su obra, y probablemente no fueron sus temas favoritos. El año 1621 había vuelto a revivir una vez más la *Arithmetica* de Diofanto gracias a la edición greco-latina de Claude Gaspard de Bachet (1591-1639), que era uno de los miembros de un grupo informal de científicos constituido

[6] Véase C. J. Scriba, «Zur Lösung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), págs. 406-419.

en París. La *Arithmetica* de Diofanto no era en absoluto una obra desconocida, puesto que incluso Regiomontano había pensado ya en imprimirla; durante el siglo XVI habían aparecido varias traducciones, aunque su influencia en el desarrollo de la teoría de números fuera muy pequeña. Probablemente la obra de Diofanto resultaba demasiado poco práctica para los matemáticos aplicados, y demasiado algorítmica y combinatoria para los matemáticos más especulativos, pero lo cierto es que llamó fuertemente la atención de Fermat, que posiblemente gracias a ello se convirtió en el creador de la moderna teoría de números. Muchos de los aspectos del tema le fascinaron, incluidos los números perfectos y amigos, los números figurados, los cuadrados mágicos, las ternas pitagóricas, la teoría de divisibilidad y, sobre todo, los números primos. Algunos de sus teoremas los demostró por un método que él mismo llamó de «descenso infinito», una cierta forma de inducción matemática a la inversa, procedimiento que Fermat fue de los primeros en utilizar. Para ilustrar la aplicación de este proceso de descenso infinito, veamos un ejemplo en la demostración de un hecho bien conocido desde antiguo, el de que $\sqrt{3}$ no es un número racional. Supongamos que $\sqrt{3}=\frac{a_1}{b_1}$, donde a_1 y b_1 son enteros positivos con $a_1>b_1$. Dado que

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

sustituyendo el primer $\sqrt{3}$ por $\frac{a_1}{b_1}$, tenemos que

$$\sqrt{3}=\frac{3b_1-a_1}{a_1-b_1}$$

En vista de la desigualdad $\frac{3}{2}<\frac{a_1}{b_1}<2$, resulta que $3b_1-a_1$ y a_1-b_1 son enteros positivos a_2 y b_2, cada uno de ellos respectivamente menor que a_1 y b_1, y tales que $\sqrt{3}=\frac{a_2}{b_2}$. Este mismo razonamiento lo podemos repetir indefinidamente, lo que nos conduce a un proceso de descenso infinito en el que a_n y b_n son enteros positivos cada vez más pequeños, verificando siempre la igualdad $\sqrt{3}=\frac{a_n}{b_n}$. Esto implica la falsa conclusión de que no existe un mínimo número positivo. Por lo tanto, la hipótesis de que $\sqrt{3}$ es igual a un cociente de números enteros es falsa.

Utilizando su método de descenso infinito consiguió demostrar Fermat la conjetura de Girard de que todo número primo de la forma $4n+1$ puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados. Fermat demostró que si $4n+1$ no es la suma de dos cuadrados, entonces existe otro número menor del mismo tipo que tampoco es suma de dos cuadrados. Utilizando

esta relación recursiva hacia atrás, se llega a la falsa conclusión de que el mínimo número entero de esta forma, el 5, no se puede expresar como suma de dos cuadrados, mientras que obviamente $5 = 1^1 + 2^2$; por lo tanto, queda demostrado el teorema general. Dado que, como se puede demostrar fácilmente, ningún entero de la forma $4n-1$ puede ser suma de dos cuadrados, y todos los primos excepto 2 son de la forma $4n+1$ o $4n-1$, se pueden clasificar fácilmente, por el teorema de Fermat, los números primos que se pueden expresar y los que no se pueden expresar como suma de dos cuadrados. El número primo 23, por ejemplo, no puede expresarse de dicha forma, mientras que el 29 sí puede expresarse como $2^2 + 5^2$. Fermat sabía también que un número primo de cualquiera de los dos tipos se puede expresar siempre como diferencia de dos cuadrados de una y sólo una manera.

17. Teoremas de Fermat

Fermat utilizó también su método de descenso infinito para demostrar que no hay ningún cubo que pueda descomponerse en dos cubos, es decir, que no hay números enteros positivos x, y, z, tales que $x^3 + y^3 = z^3$. Fermat fue aún más lejos, formulando la proposición general de que, para $n > 2$, no hay números enteros positivos x, y, z, tales que $x^n + y^n = z^n$. Y escribió en el margen de su ejemplar del *Diofanto* de Bachet que había descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de este célebre «teorema», que se conoce desde entonces con el nombre de «último teorema de Fermat» o «gran teorema de Fermat». Desgraciadamente Fermat no dejó escrita su pretendida demostración, de la que nos dice únicamente que «este margen es demasiado estrecho para contenerla». Si Fermat encontró realmente una demostración de su «teorema», se perdió irremediablemente hasta hoy, y a pesar de todos los innumerables esfuerzos que se han hecho por hallar una demostración tal, estimulados incluso por un premio instituido poco antes de la Primera Guerra Mundial en el que se ofrecían 100.000 marcos alemanes por una solución (positiva o negativa), el problema sigue sin resolverse, aunque se han hecho recientemente (verano de 1984) progresos importantes en el camino de su solución. Hay que decir, sin embargo, que los esfuerzos por resolver este problema han conducido a más y más importante desarrollos matemáticos que los que resultaron en la antigüedad de los intentos por resolver los tres famosos problemas geométricos clásicos insolubles. Los matemáticos, al igual que los tres príncipes de Serendip, de Horace Walpole, parecen haber recibido el regalo inesperado de encontrar en su camino gran cantidad de cosas agradables que no buscaban en realidad.

No sabemos aún si Fermat estaba o no en lo cierto al formular su «gran teorema», pero sí se han conseguido resolver otras dos de sus conjeturas en teoría de números. Quizá dos milenios antes de la época de Fermat se había formulado ya la «hipótesis china» de que n es primo si y sólo si $2^n - 2$ es divisible por n, donde n es un entero mayor que 1. La mitad de esta conjetura sabemos ya que es falsa, puesto que, por ejemplo, $2^{341} - 2$ es divisible por 341 y, sin embargo, $341 = 11 \cdot 31$ es un número compuesto, pero la otra mitad de la conjetura es correcta, y el

«teorema menor» de Fermat consiste exactamente en una generalización de este caso. Del estudio de muchos números de la forma $a^{p-1}-1$, incluido el $2^{36}-1$ parecía deducirse la propiedad general de que siempre que p sea primo y a primo con p, $a^{p-1}-1$ es divisible por p. Sobre la base de una inducción finita correspondiente a los cinco únicos casos $n=0$, 1, 2, 3, 4, formuló Fermat una segunda conjetura, la de que los números de la forma $2^{2^n}+1$, que se conocen hoy como «números de Fermat», son todos ellos primos. Euler demostró un siglo más tarde que esta conjetura es falsa, dado que precisamente el número siguiente $2^{2^5}+1$ es ya un número compuesto. Se sabe, de hecho, que $2^{2^n}+1$ *no es* primo para n entre 5 y 16 inclusive, y los matemáticos comienzan a preguntarse si habrá algún otro «primo de Fermat» aparte de los que encontró Fermat mismo[7].

El teorema menor de Fermat tuvo más suerte que su conjetura sobre los números primos de Fermat. Leibniz nos dejó una demostración de este teorema en forma manuscrita, y Euler publicó en 1736 otra demostración sencilla y elegante. Esta segunda demostración de Euler hace un ingenioso uso del principio de inducción matemática, recurso con el que Fermat, lo mismo que Pascal, estaba muy familiarizado, como hemos visto. De hecho, al principio de inducción matemática, o razonamiento por recurrencia, se le llama a veces «inducción de Fermat», para distinguirla de la inducción científica ordinaria o «baconiana». (Actualmente también se suele denominar a la primera «inducción completa», y a la segunda «inducción incompleta».)

18. Gilles Persone de Roberval

Fermat fue realmente el «príncipe de los *amateurs*» en matemáticas. Ninguno de los matemáticos profesionales de su época hizo descubrimientos más importantes que él ni contribuyó con más resultados a la matemática. Y, sin embargo, Fermat era tan modesto que prácticamente no publicó nada a lo largo de su vida; se contentaba con comunicar sus ideas por carta a Mersenne (cuyo nombre, dicho sea de paso, se ha conservado asociado a los llamados «primos de Mersenne», es decir, los números primos de la forma 2^p-1), y así perdió el reconocimiento de prioridad que le habría correspondido para la mayor parte de su obra. En este sentido, aunque por muy distintas razones, compartió la suerte de uno de sus más competentes contemporáneos y amigos, el cascarrabias del profesor Roberval, miembro también del «grupo de Mersenne» y el único matemático verdaderamente profesional de entre todos los franceses que estudiamos en este capítulo. El nombramiento para la cátedra de Ramus en el Collège Royal, que ocupó Roberval sin interrupción durante más de cuarenta años, se convocaba cada tres años a base de una oposición o examen competitivo en el que las cuestiones se las planteaban entre sí los opositores. En 1634 Roberval ganó este concurso, debido probablemente a que había desarrollado ya un método propio de indivisibles muy parecido al de Cavalieri, y con el hábil truco de no revelar su método a otros consiguió con

[7] Véase W. Sierpinki, «L'induction incomplète dans la théorie des nombres», *Scripta Mathematica*, vol. 28 (1967), págs. 5-13.

éxito su objetivo de mantenerse ocupando la cátedra hasta su muerte en 1675. Esto tuvo la consecuencia, sin embargo, de que perdió el reconocimiento de prioridad para la mayor parte de sus descubrimientos y, como era de esperar, se vio envuelto en numerosas disputas de prioridad. La más agria de estas controversias tuvo que ver con la cicloide, curva a la que se llegó a aplicar el nombre de «la Elena de los geómetras», debido a la gran frecuencia con que provocó disputas entre ellos a lo largo del siglo XVII. Mersenne había llamado ya la atención de los matemáticos hacia la cicloide en 1615, probablemente después de haber recibido noticias de la curva a través de Galileo. En 1628, cuando Roberval llegó a París, Mersenne le propuso al joven matemático el estudio de esta curva, y hacia 1634 Roberval consiguió demostrar que el área encerrada bajo un arco de dicha curva es exactamente igual a tres veces el área del círculo que la engendra (resultado aproximado obtenido años antes por Galileo empíricamente). Hacia el año 1638 descubrió Roberval un método para trazar la tangente a la cicloide en uno cualquiera de sus puntos, problema que también resolvieron, más o menos a la vez, Fermat y Descartes, y calculó el volumen del sólido engendrado al hacer girar el área bajo un arco alrededor de la recta base de la cicloide. Más tarde aún calculó también los volúmenes engendrados al hacer girar dicho área alrededor de su eje de simetría, y alrededor de la tangente en el vértice de la cicloide[8].

19. Evangelista Torricelli

Roberval no publicó sus descubrimientos acerca de la cicloide (a la que él llamaba «trocoide», de la palabra griega *τροχός* que significa rueda), debido a que quería proponer cuestiones parecidas a los posibles candidatos a su cátedra. Mientras tanto, Torricelli se interesó también por la cicloide, posiblemente a sugerencia de Mersenne o, más probablemente, debido a la influencia de Galileo, a quien Torricelli, como Mersenne, tenía gran admiración. En 1643 Torricelli envió a Mersenne su cuadratura de la cicloide, y en 1644 publicó un libro con el título de *De parabole*, al que añadió como apéndice tanto la cuadratura de la cicloide como la construcción de la tangente. Torricelli no hacía ninguna referencia en su obra al hecho de que Roberval había llegado a estos mismos resultados antes que él, y por lo tanto Roberval escribió en 1646 una carta acusando a Torricelli de plagio de él mismo y de Fermat (sobre los máximos y mínimos). Ahora está ya perfectamente claro que la prioridad en el descubrimiento corresponde a Roberval, pero la prioridad en su publicación a Torricelli, que con toda probabilidad redescubrió de manera independiente los resultados sobre el área y la tangente. Roberval había utilizado, para el problema del área, el método de los indivisibles; Torricelli dio dos cuadraturas diferentes, una haciendo uso del método de los indivisibles de Cavalieri y la otra por el antiguo y venerable método de exhausción. Para hallar la tangente a la cicloide, en cambio, ambos matemáticos utilizaron una composición de

[8] Una excelente exposición de toda esta obra y del lugar de Roberval dentro de la matemática de su tiempo, puede verse en Evelyn Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval* (1932).

movimientos que recordaba inmediatamente la determinación de la tangente a la espiral por Arquímedes. Roberval consideraba un punto P de la cicloide como sometido a dos movimientos simultáneos, uno de traslación con el círculo y el otro de rotación, ambos con velocidades iguales. Según va rodando sobre la recta base AB el círculo generador (fig. 17.6), el punto P es arrastrado horizontalmente, mientras que, al mismo tiempo, gira alrededor de O, el centro del círculo. Podemos pues trazar por P un segmento horizontal PS para representar el movimiento de traslación, y otro segmento igual PR tangente en P al círculo generador, para representar el movimiento de rotación. Al ser iguales los movimientos de traslación y de rotación (es decir, al ser iguales sus velocidades, como diríamos nosotros), la bisectriz PT del ángulo RPS nos dará la dirección del movimiento real del punto P en ese instante, luego PT es la tangente a la cicloide buscada.

La idea básica de la composición de movimientos no era, de ninguna manera, una idea original de Roberval, puesto que ya la habían utilizado Arquímedes, Galileo y Descartes, entre otros. Torricelli pudo haber tomado la idea de cualquiera de estos matemáticos, y por lo tanto su aplicación de este principio a la cicloide no tuvo por qué ser un plagio de Roberval en absoluto. Tanto Torricelli como Roberval aplicaron el mismo método cinemático también a otras curvas. Un punto de una parábola, por ejemplo, lo podemos considerar como alejándose del foco a la misma velocidad a la que se aleja de la directriz, y por lo tanto la tangente a la curva será la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas que pasan por P y son, respectivamente, perpendicular a la directriz y pasa por el foco. (El movimiento real de P es obviamente más complicado, pero curiosamente esta simplificación incorrecta conduce a la dirección correcta de la tangente, si bien no a la velocidad real de P.) Un razonamiento análogo se puede hacer para la elipse, en la que el movimiento de «alejamiento» de uno de los focos es igual al de «acercamiento» al otro foco, determinando la dirección de la tangente la propiedad que ya conocía Apolonio (hay que hacer la misma observación en el caso de la parábola). Torricelli utilizó también el método de Fermat para trazar tangentes a las parábolas de orden superior, método cuyo conocimiento se había alcanzado ya en Italia, por lo que sabemos[9].

20. Nuevas curvas

Las obras tanto de Roberval como de Torricelli contienen muchos y muy buenos resultados, de los que sólo podemos mencionar aquí unos pocos. Entre las contribuciones de Roberval está el primer bosquejo, hecho en 1635, de la mitad de un arco de la curva «seno»; esto es importante porque nos indica que la trigonometría iba apartándose gradualmente del énfasis en los aspectos computacionales que la había dominado durante siglos, para ir acercándose a un enfoque

9 No hay ninguna buena exposición en inglés de la obra de Torricelli, pero algunos aspectos de ella, sobre todo en lo que se refiere a las tangentes, pueden verse bien tratados en la obra ya citada de Evelyn Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of Giles Persone de Roberval.* Para otros aspectos, véanse las *Opere* de Torricelli (1919-1944).

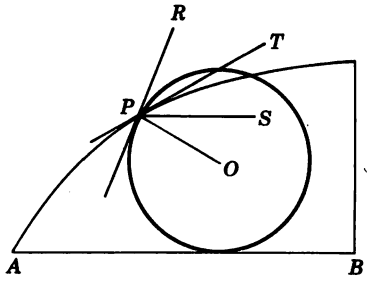


Figura 17.6

funcional (que culminará con Euler). Por medio de su método de indivisibles, Roberval consiguió demostrar un resultado que nosotros escribiríamos, en notación moderna, como $\int_a^b \text{sen } x\, dx = \cos a - \cos b$, lo que nos indica de nuevo que en esta época los problemas relativos a áreas tendían a ser más fáciles de manejar que los relativos a tangentes. Roberval y Torricelli, trabajando de manera independiente uno del otro, pero siguiendo líneas notablemente parecidas, extendieron la comparación que había hecho Cavalieri entre la espiral y la parábola, considerando la longitud del arco a la vez que el área. Durante la década de los 1640 demostraron que la longitud de la primera vuelta de la espiral $r = a\theta$ es igual a la longitud de la parábola $x^2 = 2ay$ desde $x = 0$ a $x = 2\pi a$. El interés que despertó en esta época la espiral pudo haber surgido de la correspondencia entre Galileo y Mersenne acerca del problema de la trayectoria de caída libre de un cuerpo pesado sobre una tierra en rotación, pero lo cierto es que la discusión no tardó en ampliarse considerablemente. Fermat, buscando como siempre generalizaciones, introdujo las espirales de orden superior $r^n = a\theta$ y comparó los arcos de estas curvas con los de sus parábolas de orden superior $x^{n-1} = 2ay$. Torricelli estudió diversos tipos de espirales, descubriendo la rectificación de la espiral logarítmica, como hemos visto. Durante el período que va aproximadamente de 1630 a 1650 hubo una notable unidad de intereses matemáticos en Europa, lo que se puede atribuir en buena parte, sin duda, a la ágil intercomunicación entre los matemáticos a través de Mersenne. Los problemas que se podían atacar utilizando métodos infinitesimales eran en esta época los más populares, con gran diferencia, y Torricelli en particular disfrutaba con ellos evidentemente. En su obra *De dimensione parabolae*, por ejemplo, presenta Torricelli ¡veintiuna demostraciones diferentes! de la cuadratura de la parábola (no una ni dos, señores), a partir de planteamientos que se dividen más o menos equitativamente entre el uso de indivisibles y el método de exhausción. Una de las demostraciones del primer tipo es casi idéntica a la cuadratura «mecánica» dada por Arquímedes en el *Método*, que, casi con toda seguridad, era desconocido entonces; y, como podía suponerse, una del segundo tipo es prácticamente la que da Arquímedes en su tratado *Sobre la cuadratura de la parábola*, que se había conservado y era bien conocido en esta época. Si Torricelli hubiera dado el paso de aritmetizar sus métodos en este contexto, hubiera estado muy cerca del concepto moderno de límite, pero desgraciadamente estaba aún bajo la pesada influencia geométrica de Cavalieri y se

mantuvo dentro de ella. No obstante, Torricelli superó en mucho a su maestro en la flexible utilización de los indivisibles para obtener nuevos descubrimientos.

Un resultado nuevo, de 1641, que agradó extraordinariamente a Torricelli fue su demostración de que al girar en torno al eje Ox un área infinita, tal como la limitada por la hipérbola $xy=a^2$, una ordenada $x=b$ y el eje de abscisas, por ejemplo, el volumen del sólido engendrado puede ser finito. Torricelli creía haber sido el primero en descubrir que una figura de dimensiones infinitas podía tener una extensión finita, pero en este sentido probablemente se le adelantó Fermat en sus trabajos sobre las áreas bajo las hipérbolas de orden superior, y posiblemente también Roberval, y, desde luego, Oresme en el siglo XIV.

Entre los problemas de los que estaba ocupándose Torricelli inmediatamente antes de su prematura muerte en 1647 había uno en el que venía a representar la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como $x=\log y$, en lo que es quizá la primera representación gráfica de una función logarítmica, treinta años después de la muerte del descubridor de los logaritmos, considerados entonces únicamente como recurso de ayuda a la computación. Torricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar este área alrededor del eje Ox.

Torricelli fue uno de los matemáticos más prometedores del siglo XVII, al que se suele considerar como el siglo de los genios. Mersenne había divulgado en Italia la obra de Fermat, de Descartes y de Roberval, tanto a través de su correspondencia con Galileo, que databa de 1635, como en su peregrinación a Roma en 1644; Torricelli dominó rápidamente los nuevos métodos, aunque dio siempre preeminencia al planteamiento geométrico sobre el algebraico. La breve asociación de Torricelli con Galileo, ya viejo y ciego, en 1641-1642, había despertado también en el joven estudiante el interés por las ciencias físicas, y hoy, paradójicamente, se le conoce más como el inventor del barómetro que como matemático. Torricelli estudió las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles disparados desde un punto fijo con velocidad inicial constante, pero con ángulos de elevación sobre la horizontal variables, descubriendo que la envolvente de todas estas parábolas es otra parábola, la llamada «parábola de seguridad». Al pasar de la ecuación para la distancia en función del tiempo a la de la velocidad en función del tiempo y recíprocamente, se dio cuenta Torricelli del carácter inverso que presentan los problemas de cuadraturas y de determinación de tangentes. Si hubiera vivido una cantidad de años normal, es muy posible que hubiera sido él el inventor del cálculo infinitesimal, pero el cruel destino truncó su vida en Florencia sólo unos días después de haber cumplido 39 años.

21. Girard Desargues

Los grandes desarrollos que tuvieron lugar en la matemática durante los días de Descartes y Fermat lo fueron en los dominios de la geometría analítica y del análisis infinitesimal. Es muy probable que estos mismos éxitos en dichas ramas fueran lo que hizo olvidar a los hombres de la época otros aspectos de la matemática. Ya hemos visto que Fermat no encontró a nadie que compartiese su

fascinación por la teoría de números, y la geometría pura, sintética, también sufrió un abandono totalmente inmerecido durante el mismo período. Las *Cónicas* de Apolonio habían estado, en tiempos, entre las obras favoritas de Fermat, pero los métodos analíticos vinieron a cambiar sus puntos de vista. Mientras tanto, las *Cónicas* habían atraído la atención de un hombre práctico, pero con una imaginación muy poco práctica, Girard Desargues, arquitecto e ingeniero militar en Lyons. Desargues había vivido algunos años en París, donde formó parte del grupo de matemáticos que hemos estado estudiando, pero sus opiniones muy poco ortodoxas sobre el papel de la perspectiva en la arquitectura y en la geometría no encontraron apenas ningún eco, por lo que regresó a Lyons para desarrollar su nuevo tipo de matemática por sí mismo, prácticamente aislado. El resultado de este trabajo fue uno de los grandes libros con menos éxito que se hayan producido jamás. Incluso el desdichado título mismo producía ya rechazo: *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (París, 1639). Este título puede traducirse aproximadamente por «Borrador de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano», cuyo rudo carácter contrasta agudamente con la brevedad, simplicidad y elegancia del título de Apolonio, *Cónicas*. Sin embargo, la idea central en la que se basa esta obra de Desargues es la simplicidad misma, una idea derivada a la vez de la perspectiva del arte pictórico renacentista y del principio de continuidad de Kepler. Todo el mundo sabe que una circunferencia mirada oblicuamente aparece como una elipse, y que el borde de la sombra proyectada por la pantalla redonda de una lámpara será una circunferencia o una hipérbola según que se proyecte sobre el techo o sobre una pared. Las formas y tamaños aparentes cambian según cambia el plano de incidencia que corta al cono de los rayos visuales o de los rayos de luz, pero ciertas propiedades permanecen invariables bajo tales cambios, y son precisamente estas propiedades las que estudia Desargues. De entrada, una sección cónica sigue siendo una sección cónica independientemente de cuántas veces se vea sometida a proyección. Las cónicas forman pues una familia «estrechamente unida», tal como había sugerido ya Kepler por razones algo diferentes. Pero al aceptar este punto de vista, Desargues tenía que suponer, como Kepler, que la parábola tiene un foco «en el infinito», y que dos rectas paralelas se cortan «en un punto del infinito». La teoría de la perspectiva hace muy plausibles todas estas ideas, ya que la luz del sol se suele considerar formada por rayos paralelos, es decir, que se transmite en forma de haz o cilindro de rayos paralelos, mientras que los rayos que parten de un foco luminoso terrestre se consideran como un cono o un haz puntual. El cilindro viene a ser así simplemente un cono cuyo vértice está infinitamente lejano, y un haz de rectas paralelas consiste únicamente en una familia de rectas que pasan todas ellas por el mismo punto del infinito. Desargues estudiaba análogamente los haces de planos que pasan por un punto, finito o del infinito.

22. La geometría proyectiva

El tratamiento de las cónicas por Desargues encierra una gran belleza, a pesar de que el lenguaje que utiliza es francamente exótico. A una sección cónica le llama

un *coup de rouleau*, es decir, algo así como «un golpe de rodillo». Casi el único de sus muchos términos nuevos que ha sobrevivido hasta nosotros, es la palabra «involución», es decir, correspondencia entre pares de puntos de una recta cuyos productos de distancias a otro fijo es una constante. Desargues denominaba «cuaterna de puntos en separación armónica» a una involución de cuatro puntos, y demostró que esta configuración es proyectivamente invariante, un resultado conocido ya, desde un punto de vista algo diferente, por Pappus. El cuadrilátero completo juega un papel muy importante en el tratamiento de Desargues, debido a sus propiedades armónicas, ya que sabía que si un cuadrilátero de este tipo (como el *ABCD* en la fig. 17.7) está inscrito en una cónica, entonces la recta que pasa por dos de los puntos diagonales (que son *E*, *F* y *G* en la fig. 17.7) es la polar del tercer punto diagonal con respecto a la cónica. Desargues sabía también, desde luego, que la intersección con la cónica de la polar de un punto con respecto a ella eran los puntos de contacto de las tangentes a la cónica desde dicho punto. En vez de definir un diámetro de una manera métrica, lo introduce Desargues como la polar de un punto de infinito. Hay, en definitiva, una bella unidad en el tratamiento de Desargues de las cónicas por métodos proyectivos, pero se trataba de una ruptura con el pasado demasiado grande como para ser aceptada fácilmente.

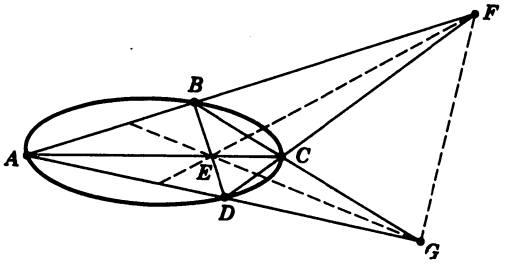


Figura 17.7

La geometría proyectiva de Desargues suponía un avance enorme, en lo que a generalidad se refiere, con respecto a la geometría métrica de Apolonio, Descartes y Fermat, al quedar incluidos muchos casos particulares de un teorema en una formulación general única. Sin embargo, los matemáticos de la época no sólo no aceptaron los métodos de esta «nueva geometría», sino que la inmensa mayoría de ellos se opusieron a ella, considerándola como peligrosa y sin sentido. Las copias del *Brouillon projet* que circularon fueron tan escasas que a finales del siglo XVII todas ellas habían desaparecido, debido a que Desargues publicaba sus obras no para venderlas, sino para distribuirlas entre sus amigos. El *Brouillon projet* estuvo totalmente perdido hasta el año 1847 en que se encontró en una biblioteca de París una copia manuscrita debida a Philippe de Lahire, uno de los pocos admiradores de Desargues. Parte de la responsabilidad en el desprecio por la geometría proyectiva recae sobre Desargues mismo, por su manera de escribir tan extraña y difícil; en realidad, no escribió para matemáticos teóricos profesionales, que podrían haber seguido los vuelos de su imaginación, sino para matemáticos

aplicados y mecánicos, que no llegaron a entender el significado de la obra. Además, Desargues utilizó un nuevo vocabulario lleno de términos, a cual más pintoresco, tomados muchos de ellos de la botánica, terminología que provocaba el rechazo tanto de los matemáticos teóricos como de los aplicados. A todo ello venía a añadirse el hecho de que el enfoque proyectivo de la geometría no sintonizaba con las ideas dominantes de la época, que tan justamente celebraban los triunfos del álgebra y del análisis infinitesimal. Descartes, que había conocido a Desargues en París en 1626, y que se encontró de nuevo con él en 1628 en el asedio de La Rochelle, tuvo también en alta estima a su inconformista amigo, pero incluso el mismo Descartes, cuando oyó decir que el *Brouillon projet* trataría las cónicas sin el uso del álgebra, se sintió decepcionado. No parecía posible decir nada sobre las cónicas que no se pudiera expresar más fácilmente con ayuda del álgebra que sin ella[10]. La adhesión al álgebra era ya tan fuerte, y siguió siéndolo cada vez más, que durante casi dos siglos las bellezas de la geometría proyectiva pasaron prácticamente desapercibidas. Incluso hoy, el nombre de Desargues resulta conocido no como el del autor del *Brouillon projet*, sino debido a una proposición que precisamente no aparece en su libro, el famoso teorema de Desargues:

> Si dos triángulos están situados de manera que las rectas que unen pares de vértices correspondientes son concurrentes en un punto, entonces los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes son colineales, y recíprocamente.

Este teorema[11], que se verifica en dos y tres dimensiones, lo publicó por primera vez en 1648 el gran amigo y seguidor de Desargues Abraham Bosse (1611-1678), que era grabador, en un libro titulado *Manière universelle de S. Desargues pour pratiquer la perspective*. Este teorema, que Bosse atribuye explícitamente a Desargues, se convirtió, en el siglo XIX, en una de las proposiciones fundamentales de la geometría proyectiva. Es interesante hacer notar que, mientras que en tres dimensiones el teorema en cuestión es una consecuencia sencilla de los axiomas de incidencia, la demostración en dos dimensiones requiere una hipótesis adicional.

23. Blaise Pascal

Desargues fue el verdadero profeta de la geometría proyectiva, pero no recibió en su día los honores correspondientes, debido, principalmente, a que su discípulo más prometedor, Blaise Pascal, abandonó la matemática por la teología. Pascal fue un auténtico prodigio para las matemáticas. Su padre había mostrado ya una fuerte vocación matemática y, de hecho, el «caracol de Pascal» es una curva llamada así en honor al padre, Etienne, y no al hijo, Blaise. El «caracol» $r = a + b \cos \theta$ ya

[10] Véase W. M. Ivins, Jr., «A Note on Girard Desargues», *Scripta Mathematica*, 9 (1943), págs. 33-48. A pesar de que las obras de Desargues no han sido traducidas al inglés, pueden encontrarse fácilmente exposiciones de ellas; véase, por ejemplo, J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940).

[11] Véase N. A. Court, «Desargues and his Strange Theorem», *Scripta Mathematica*, 20 (1954), págs. 5-13 y 155-164.

lo había conocido Jordano Nemorario, y posiblemente incluso los antiguos, como la «conchoide del círculo», pero Etienne Pascal estudió esta curva de una manera tan concienzuda que, a sugerencia de Roberval, lleva su nombre desde entonces. Se dice que Etienne trató de mantener a su hijo, al principio, alejado de los libros de matemáticas, con objeto de estimular al joven Blaise a desarrollar otros intereses, pero a la edad de doce años el muchacho demostraba ya tal grado de inteligencia geométrica que, en adelante, se favoreció su inclinación matemática.

A los catorce años Blaise acompañaba ya a su padre a las reuniones informales de la «Academia de Mersenne» en París. Aquí fue donde se familiarizó con las ideas de Desargues, y dos años más tarde, en 1640, el joven Pascal, que contaba entonces dieciséis años, publicó su *Essay pour les coniques*. Este artículo consistía en una única página impresa, pero sin duda una de las páginas más fecundas de la historia. En ella aparece la proposición que el autor describe como el *mysterium hexagrammicum*, y que se conoce desde entonces como teorema de Pascal. Este teorema afirma, esencialmente, que los pares de lados opuestos de un hexágono arbitrario inscrito en una cónica se cortan en tres puntos alineados. En realidad Pascal no formula su teorema de esta manera, puesto que no es cierto salvo que, como en el caso de un hexágono regular inscrito en una circunferencia, se consideren los puntos del infinito y la recta del infinito del plano proyectivo. En lugar de ello, Pascal sigue el lenguaje especial de Desargues, diciendo que si A, B, C, D, E y F son los vértices sucesivos de un hexágono inscrito en una cónica, y si P es el punto de intersección de AB y DE, y Q el punto de intersección de BC y EF (fig. 17.8), entonces PQ, CD y AF son rectas «del mismo orden» (o, como diríamos hoy, son rectas de un mismo haz, ya sea un haz puntual o un haz de rectas paralelas). El joven Pascal continúa diciendo que ha deducido muchos corolarios de este teorema, incluida la construcción de la tangente a una cónica por un punto de ella. (La construcción de la tangente que pasa por un punto P de la cónica se obtiene fácilmente recordando que la tangente es una recta que pasa por «dos puntos consecutivos» de la curva, y aplicando el teorema de Pascal a estos dos y a otros cuatro puntos cualesquiera de la cónica). El origen de la inspiración que llevó a Pascal a escribir este pequeño *Essay* queda reconocido en él con toda franqueza,

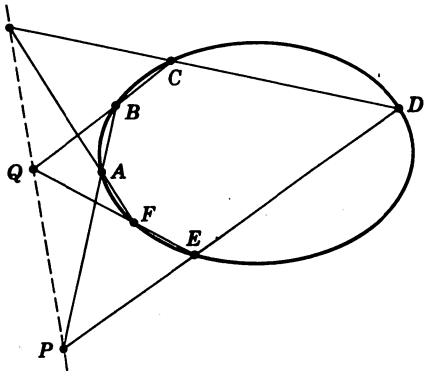
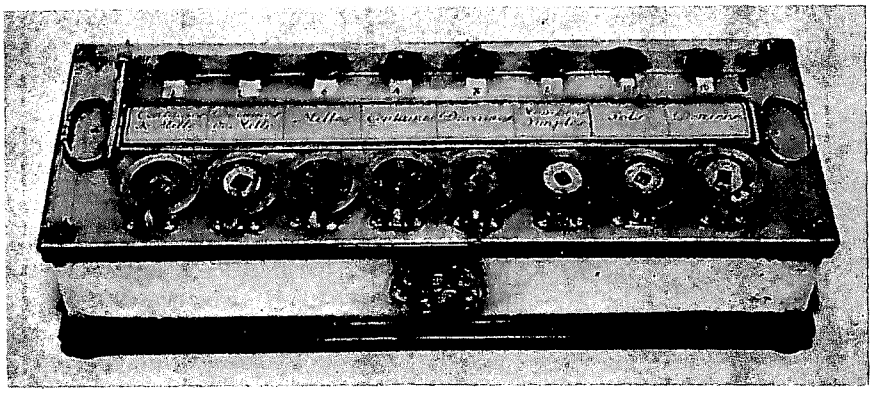


Figura 17.8



Máquina calculadora de Pascal (reproducción de un modelo original en la Colección del Departamento de Artes y Ciencias de IBM).

ya que, después de citar un teorema de Desargues, escribe el joven autor: «Quisiera decir que debo lo poco que he descubierto yo mismo sobre el tema a sus escritos.»

El *Essay* constituía, sin duda, un comienzo muy prometedor de una carrera matemática, pero los intereses matemáticos de Pascal fueron muy cambiantes con el paso del tiempo. A la edad de dieciocho años aproximadamente cambió de tema y se dedicó a diseñar una máquina calculadora; en unos pocos años construyó y vendió unas cincuenta de estas máquinas. A continuación, en 1648, se interesó Pascal en la hidrostática, y los resultados de sus investigaciones fueron el famoso experimento de Puy-de-Dôme que confirmaba el peso del aire, y los experimentos acerca de la presión ejercida por un fluido, que clarificaron la aparente paradoja hidrostática. En 1654 volvió de nuevo a centrar su atención en la matemática y comenzó a trabajar en dos proyectos independientes. Uno de ellos era el de escribir una «Obra completa sobre las cónicas», que vendría a ser, evidentemente, una continuación del breve *Essay* que había publicado a los dieciséis años; desgraciadamente esta obra más larga sobre las cónicas no se publicó nunca impresa y se ha perdido. Leibniz tuvo aún la oportunidad de ver una copia manuscrita, y las notas que tomó son ahora todo lo que nos queda de la obra más larga de Pascal sobre las cónicas[12]. De la obra más breve sólo han sobrevivido dos ejemplares. Según las notas de Leibniz, la «Obra completa sobre las cónicas» contenía una sección sobre el ya familiar lugar geométrico de las tres y cuatro rectas, y otra sección sobre los *magna problema*, en los que se pide situar una cónica dada sobre un cono de revolución dado. El tratado hacía uso únicamente de métodos sintéticos, al parecer, ya que Pascal, por una u otra razón, no llegó a desarrollar nunca una habilidad razonable ni interés en el manejo del álgebra simbólica, y tampoco fue especial-

[12] Para más información, tanto sobre éste como sobre otros aspectos de la obra de Pascal, véase Henri Bosmans, «Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal», *Mathesis*, 38 (1924), suplemento, págs. 1-59. Véase también C. B. Boyer, «Pascal: The Man and the Mathematician», *Scripta Mathematica*, 26 (1963), págs. 283-307, y René Taton, «L'essay pour les coniques de Pascal», *Revue d'Histoire des Sciences*, 8 (1955), págs. 1-18.

mente consciente del papel que juega un buen sistema de notación en el proceso del descubrimiento matemático. En este sentido se encontraba considerablemente retrasado con respecto a su época.

24. El cálculo de probabilidades

Mientras Pascal se encontraba trabajando en sus *Cónicas*, en 1654, su amigo el caballero de Méré le planteó algunas cuestiones como la siguiente: En ocho lanzamientos sucesivos de un dado intenta un jugador obtener un uno, pero el juego se interrumpe después de tres intentos fallidos. ¿En qué proporción ha de ser compensado el jugador? Pascal escribió a Fermat sobre este problema, y la correspondencia intercambiada constituyó el verdadero punto de partida de la moderna teoría de probabilidades, habiéndose ignorado las consideraciones de Cardano de un siglo antes[13]. Aunque ni Pascal ni Fermat expusieron sus resultados por escrito, Huygens publicó en 1657 un breve tratado titulado *De ratiociniis in ludo aleae* («Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados»), inspirado en la correspondencia de estos dos matemáticos franceses. Mientras tanto Pascal había relacionado el estudio de las probabilidades con el triángulo aritmético, superando en sus discusiones la obra de Cardano en tal medida que la conocida distribución triangular de números ha venido recibiendo, desde entonces, el nombre de triángulo de Pascal. El «triángulo» en sí databa de hacía más de 600 años, pero Pascal descubrió algunas propiedades inéditas de él, tales como la siguiente:

> En todo triángulo aritmético, si dos celdas son contiguas en la misma base, entonces el número que figura en la superior es al número que figura en la inferior como el número de celdas desde la superior al extremo más alto de dicha base es al número de las que van de la inferior hasta el extremo más bajo, ambas inclusive.

(Pascal llamaba a las posiciones de la misma columna vertical (fig. 17.9) «celdas del mismo rango perpendicular», y a las de la misma fila horizontal «celdas del mismo rango paralelo»; a las celdas de la misma diagonal que va de abajo a la izquierda arriba a la derecha, «celdas de la misma base».) El método de demostración de esta propiedad es mucho más importante que la propiedad en sí, porque aquí da Pascal, en 1654, una exposición ejemplarmente clara y precisa del método de inducción matemática o inducción completa. Pueden encontrarse ya ciertas indicaciones anteriores de este método en la obra de Maurolico, pero Pascal tenía una habilidad excepcional para clarificar conceptos, y de ahí el que comparta con Fermat y otros el mérito de haber desarrollado el razonamiento por recurrencia. El nombre mismo de «inducción matemática» parece haber tenido su

13. Véase Oystein Ore, «Pascal and the Invention of Probability Theory», *American Mathematical Monthly*, 47 (1960), págs. 409-419.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Figura 17.9

origen mucho más tarde, en el artículo de De Morgan sobre «Inducción (matemática)» en la *Penny Cyclopaedia* de 1838[14].

Fermat esperaba conseguir interesar a Pascal en la teoría de números, y en 1654 le envió el enunciado de uno de sus más bellos teoremas (que no fue demostrado hasta el siglo XIX):

> Todo número entero se compone de uno, dos o tres números triangulares; de uno, dos, tres o cuatro cuadrados; de uno, dos, tres, cuatro o cinco pentagonales; de uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis hexagonales, y así hasta el infinito.

Pascal, sin embargo, que era un diletante a la vez que un virtuoso de la matemática, no parece haberse concentrado en este problema. Sí se dedicó, en cambio, a investigar otro problema de teoría de números que se discutió mucho en esta época: encontrar una fórmula para la suma de las potencias m-ésimas de los n primeros números naturales, problema que Pascal relacionó con el triángulo aritmético, con el método de razonamiento por recurrencia y con el análisis infinitesimal. La fórmula obtenida viene expresada verbalmente, como solía hacerlo Pascal, pero en simbolismo moderno es equivalente a

$$_{m+1}C_1 \sum i^m + {}_{m+1}C_2 \sum i^{m-1} + \cdots + {}_{m+1}C_m \sum i = (n+1)^{m+1} - (n+1)$$

donde todas las sumas están tomadas de $i=1$ a $i=n$. A partir de esta fórmula[15] demuestra Pascal fácilmente lo equivalente a la bien conocida fórmula del cálculo

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

[14] Para una amplia discusión histórica de la inducción matemática véase W. H. Bussey, «Origin of Mathematical Induction», *American Mathematical Monthly*, 24 (1917), págs. 199-207. Cf. Florian Cajori, «Origin of the Name «Mathematical Induction», *American Mathematical Monthly*, 25 (1918), págs. 197-201, y Hans Freudenthal, «Zur Geschichte der wollständigen Induktion», 6 (1953), págs. 17-37.

[15] Para más detalles véase C. B. Boyer, «Pascal's Formula for the Sums of the Powers of the Integers», *Scripta Mathematica*, 9 (1943), págs. 237-244.



El «Triángulo de Pascal» en el Japón. Del *Sampō Dōshi-mon* (1781) de Murai Chūzen, en el que aparecen también las formas «Sangi» de los numerales.

25. La cicloide

Durante la noche del día 23 de noviembre de 1654, aproximadamente desde las 10,30 a las 12,30 horas, experimentó Pascal una especie de éxtasis religioso que lo impulsó a abandonar la ciencia y la matemática para dedicarse a la teología. El resultado de todo ello fueron dos obras, las *Lettres provinciales* y los *Pensées*, y ya sólo volvería a los estudios matemáticos durante un breve período de tiempo en 1658-1659. Una noche de 1658 en que un dolor de muelas u otra dolencia le impedía dormir, decidió, como distracción contra el dolor, dedicarse al estudio de la cicloide. Milagrosamente el dolor cesó, lo que interpretó Pascal como un signo de que el estudio de la matemática no desagradaba a Dios. Después de haber calculado ciertas áreas, volúmenes y centros de gravedad relacionados con la cicloide, se le ocurrió a Pascal convocar un concurso dirigido a los matemáticos de la época, consistente en una media docena de cuestiones de este tipo, ofreciendo un primero y un segundo premios por su solución, y proponiendo a Roberval como uno de los jueces del concurso. La publicidad dada y el plazo de recepción de soluciones fueron tan desafortunados que sólo se recibieron dos respuestas; las

soluciones que contenían estaban afectadas por errores de cálculo, como mínimo, y a la vista de ello Pascal no concedió ninguno de los dos premios, sino que decidió publicar sus propias soluciones, junto con otros resultados, precedidos todos ellos por una *Histoire de la roulette* (nombre utilizado generalmente para esta curva en Francia), en una serie de *Lettres de A. Dettonville* (1658-1659). (El nombre de Amos Dettonville era en realidad un anagrama de Louis de Montalte, seudónimo que había utilizado Pascal en sus *Lettres provinciales*). Las cuestiones propuestas en el concurso y las *Lettres de A. Dettonville* provocaron un gran interés por la cicloide, pero también contribuyeron a agitar un verdadero avispero de controversias. Los dos finalistas y únicos participantes, Antoine de Lalouvère y John Wallis, competentes matemáticos ambos, se mostraron disgustados porque los premios se declararan desiertos, y los matemáticos italianos se indignaron por el hecho de que Pascal, en su «Historia de la cicloide» no reconocera prácticamente ningún mérito a Torricelli al respecto, concediendo exclusivamente la prioridad del descubrimiento a Roberval.

La mayor parte del material incluido en las *Lettres de A. Dettonville*, tal como la igualdad de los arcos de espirales y parábolas, así como las cuestiones mismas sobre la cicloide que constituían el concurso, era bien conocido para Roberval y para Torricelli (muerto doce años antes), pero buena parte de él aparecía allí impreso por primera vez. Entre los resultados nuevos estaba el de la igualdad de la longitud de un arco completo de cicloide generalizada $x = aK\phi - a \operatorname{sen} \phi$, $y = a - a\cos \phi$ y de la semielipse $x = 2a(1 + K) \cos \phi$, $y = 2a(1 - K) \operatorname{sen} \phi$. El teorema venía expresado, como de costumbre, de una manera retórica y no simbólica, y su demostración era esencialmente de tipo arquimediano, tal como eran la mayoría de las demostraciones que hizo Pascal durante los años 1658-1659.

En el contexto de una integración de la función seno en su *Traité des sinus du quart de cercle* («Tratado sobre los senos de un cuadrante de círculo»), de 1658, Pascal se aproximó extraordinariamente a lo que pudo haber sido el descubrimiento del cálculo; tan cerca estuvo de ello que Leibniz escribiría más tarde que fue leyendo esta obra de Pascal cuando se le mostró súbitamente la luz. Si Pascal no hubiera muerto, como Torricelli, poco después de cumplir 39 años, o bien si su mentalidad hubiera sido más exclusivamente matemática, o si se hubiera visto atraído más por los métodos algorítmicos que por la geometría pura y las especulaciones sobre la filosofía de la matemática, no cabe prácticamente la duda de que se hubiera anticipado a Newton y Leibniz en sus más grandes descubrimientos. Pascal es, sin duda, el más grande «podría-haber-sido» de toda la historia de la matemática. No obstante, sí fue, de hecho, uno de los más importantes lazos de unión en el desarrollo matemático de la época. En este sentido no estuvo solo, desde luego. En el próximo capítulo estudiaremos la obra de los más inmediatos precursores de Newton y Leibniz.

Bibliografía

Bosmans, Henri: «Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal», *Mathesis*, 38 (1924), suplemento, págs. 1-59.

Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

——: *The History of the Calculus* (ed. en rústica, New York: Dover, 1959).
——: «Pascal: The Man and the Mathematician», *Scripta Mathematica*, 26 (1963), 283-307.
Brassine, E.: *Précis des oeuvres mathématiques de P. Fermat* (París, 1853).
Castelnuovo, G.: *Le origini del calcolo infitesimale nell'era moderna* (Bologna: Nicola Zanichelli, 1938).
Coolidge, J. L.: *A History of Geometrical Methods* (New York: Oxford University Press, 1940; ed. en rústica, New York: Dover, 1963).
David, F. N.: *Games, Gods and Gambling* (New York: Hafner, 1962).
Descartes, René: *Oeuvres*, ed. Charles Adam and Paul Tannery (París: L. Cerf, 1897-1913, 12 vols. y suplemento).
Duhamel, J. M. C.: «Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes», *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, 32 (1864), 269-330.
Fermat, Pierre de: *Oeuvres*, ed. Paul Tannery y Charles Henry (París: Gauthier Villars, 1891-1922, 4 vols. y suplemento).
Genty, Abbé Louis: *L'Influence de Fermat sur non siècle, relativement au progrès de la haute géométrie et du calcul* (Orleans, 1784).
Henry, Charles: «Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat», *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 12 (1879), 477-568, 619-740; **13** (1880), 437-470.
Loria, Gino: *Storia delle matematiche* (Torino: Sten, 1929-1933, 3 vols.).
Ore, Oystein: «Pascal and the Invention of Probability Theory», *American Mathematical Monthly*, 47 (1960), 409-419.
Pascal, Blaise: *Oeuvres*, ed. León Brunschivicg y Pierre Boutroux (París: Hachette, 1904-1914, 14 vols.).
Scriba, C. J.: «Zur Lösung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), 406-419.
Smith, D. E., y Marcia L. Latham (eds.): *The Geometry of René Descartes* (ed. en rústica, New York: Dover, 1954).
——: *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).
Todhunter, Isaac: *A History of Probability, from the Time of Pascal to that of Laplace* (reed., New York: Chelsea, 1949).
Toeplitz, Otto: *The Calculus, a Genetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963).
Torricelli, Evangelista: *Opere*, ed. Gino Loria (Florence: G. Montanari, 1919-1944, 4 vols.).
Turnbull, H. W.: *The Great Mathematicians* (New York: New York University Press, 1961).
Walker, Evelyn: *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval* (New York: Teachers College, 1932).
Wallner, C. R.: «Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis», *Bibliotheca Mathematica* (3), 4 (1903), 28-47.
Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im* 16. *und* 17. *Jahrhundert*, trad. R. Meyer (Leipzig, 1903).

Ejercicios

1. ¿Qué posibles causas de la supremacía francesa en la matemática durante el segundo tercio del siglo XVII sugeriría usted?
2. La duda sistemática, tal como la practicaba Descartes, ¿es una ayuda o más bien un obstáculo en el desarrollo de la matemática? Explíquese claramente.

3. Compárese la influencia de Descartes con la de Fermat en el desarrollo de la matemática.
4. ¿Cómo explicaría usted el hecho de que la geometría proyectiva de Desargues y de Pascal encontrase tan poco eco en sus contemporáneos?
5. Compruébese la fórmula de Descartes-Euler para los poliedros, para cada uno de los cinco poliedros regulares.
6. Justifíquese detalladamente la construcción utilizada por Descartes para resolver la ecuación $z^2 = az + b^2$.
7. Invéntense construcciones como la de Descartes para resolver las ecuaciones $z^2 = az - b^2$ y $z^2 = b^2 - az$.
8. ¿Es mejor o peor nuestro signo de igualdad que el de Descartes? Explíquese.
9. Dibújese la parábola cartesiana o tridente, para $a = 1$.
10. Compruébese la rectificación de Torricelli de la espiral $r = ae^{b\theta}$.
11. Hállese una relación entre los coeficientes de la ecuación de Descartes $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$ necesaria para que la curva que la representa sea una parábola.
12. Utilizando el método de Descartes, hállese la normal a la curva $y^2 = 4x$ en el punto (1, 2).
13. Utilícese el método de Fermat para hallar la tangente a la curva $x^2 = 4y$ en el punto (2, 1).
14. Hállese la ecuación del óvalo cartesiano tal que el doble de la distancia de un punto cualquiera (x, y) al punto $(-1, 0)$ más la distancia al punto (1, 0) sea igual a 4.
15. Dibújese el «folium de Descartes», para $a = 1$.
16. Demuéstrese que, por medio de una traslación de los ejes, la ecuación de Fermat $xy + a^2 = bx + cy$ puede reducirse a la forma $xy = k^2$.
17. Demuéstrese el teorema de Fermat que dice que si la suma de los cuadrados de las distancias de un punto variable P a un número arbitrario de rectas fijas es constante, entonces el lugar geométrico de P es una sección cónica.
18. Utilícese el método de Fermat para hallar los valores máximos y mínimos de la expresión $(x+1)(2x^2 + 5x - 7)$.
19. Utilícese el método de Fermat (pero *no* su fórmula) para calcular $\int_0^4 x^5\,dx$.
20. Utilícese el método de Fermat (pero *no* su fórmula), para calcular $\int_2^\infty 1/x^3\,dx$.
21. Utilícese el método de Fermat (pero *no* su fórmula), para calcular $\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,dx$.
22. ¿Cuáles de los números primos entre 10 y 30 se pueden expresar como suma de dos cuadrados? Hállense los dos cuadrados en los casos en que tal suma sea posible.
23. Calcúlense los números $2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, 3$, y compruébese que todos ellos son primos.
24. Compruébese el teorema menor de Fermat para cuatro casos, utilizando el número primo 3.
25. Constrúyase, utilizando sólo regla y compás, la tangente a la cicloide en uno de sus puntos, por el método de Roberval.

*26. Compruébese el resultado de Roberval y Torricelli acerca del área bajo un arco de cicloide.

*27. Resolver el siguiente problema de Pascal: Se hace girar en torno al eje Ox el área limitada por la cicloide, la ordenada correspondiente al vértice y una recta paralela a la base. Calcúlese el volumen engendrado.

*28. Compruébese el teorema de Roberval sobre las longitudes del arco de la espiral y de la parábola.

*29. Utilícese el teorema de Pascal para trazar una tangente a una elipse por uno de sus puntos.

*30. Compruébese el descubrimiento de Torricelli de que la revolución de un área infinita en torno a un eje puede engendrar un volumen finito.
*31. Muéstrese cómo trazar las tangentes a una cónica desde un punto exterior, utilizando el cuadrilátero completo de Desargues.
*32. Utilizando métodos de ecuaciones diferenciales, resuélvase la ecuación de Debeaune $y' = x - y$ para la curva que pasa por el origen.
*33. Utilizando la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

y el método del «descenso infinito» de Fermat, demuéstrese que $\sqrt{2}$ es irracional.

Capítulo XVIII
UN PERIODO DE TRANSICION

> La matemática: el inconmovible Fundamento de todas las Ciencias y la generosa Fuente de Beneficios para los asuntos humanos.
>
> *Isaac Barrow*

1. Philippe de Lahire

Con la muerte de Desargues en 1661, de Pascal en 1662 y de Fermat en 1665, se cierra un brillantísimo período de la matemática francesa. Bien es verdad que Roberval vivió aún durante una década, pero sus contribuciones ya no fueron importantes y, en cualquier caso, su influencia se vio muy limitada como siempre por su negativa a publicar sus resultados. Probablemente el único matemático de cierta talla en la Francia de la época era Philippe de Lahire (1640-1718), que había sido discípulo de Desargues y arquitecto como su maestro. La geometría pura le atraía, evidentemente, y su primera obra sobre las cónicas, de 1673, era de tipo sintético, pero, aún así, no rompió con la inevitable onda analítica que anunciaba el futuro. Lahire buscaba un mecenas o protector, y así en sus *Nouveaux éléments des sections coniques*, de 1679, dedicados a Colbert, los métodos de Descartes aparecen en primer plano. El enfoque es métrico y bidimensional, procediendo, en el caso de la elipse y de la hipérbola, a partir de las definiciones en términos de la suma o diferencia de radios focales y, en el caso de la parábola, de la igualdad de distancias al foco y a la directriz. Sin embargo, Lahire adopta en su geometría analítica parte del original lenguaje de Desargues; así, el eje de abscisas es el «tronco», los puntos sobre él los «nudos», y las ordenadas «ramas». De este lenguaje analítico sólo ha sobrevivido el término «origen». Quizá se debiera al uso de esta pintoresca terminología el hecho de que sus contemporáneos no prestaran la atención que merecía a un punto importante de los *Nouveaux éléments:* aquel en que Lahire exhibía uno de los primerísimos ejemplos de una superficie dada analíticamente por una ecuación con tres incógnitas, lo que constituye la primera etapa efectiva hacia una geometría analítica del espacio tridimensional. Lahire, como Fermat o Descartes, utilizaba un único punto de referencia u origen O situado sobre una única recta de referencia o eje OB, al que añade ahora, en el caso del espacio, el plano de referencia o de coordenadas OBA (fig. 18.1). Lahire descubrió entonces que la ecuación del lugar geométrico de un punto P tal que su distancia perpendicular PB al eje exceda a la distancia OB (o abscisa de P) en una cantidad fija a es, con respecto a su sistema de coordenadas, $a^2+2ax+x^2=y^2+v^2$, donde v es la tercera

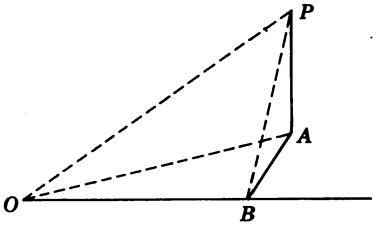


Figura 18.1

coordenada de P, que hoy solemos representar por z. El lugar geométrico obtenido es naturalmente un cono.

En 1685 Lahire volvió a los métodos sintéticos en un libro que llevaba el sencillo título de *Sectiones conicae*[1]. Este libro se podría describir en primera aproximación como la versión hecha por Lahire de las *Cónicas* en griego de Apolonio, traducidas al latín del francés de Desargues. Entre los temas conocidos tratados en esta obra desde un punto de vista proyectivo, están las propiedades armónicas del cuadrilátero completo, los polos y polares, tangentes y normales, y los diámetros conjugados.

Es interesante hacer notar que el nombre de Lahire no se ha conservado hasta hoy asociado a nada que figurase en sus tratados, sintético y analítico, sobre las cónicas, sino a un teorema de un artículo de 1706 sobre *roulettes*, publicado en las *Mémoires de la Académie des Sciences*. En él demostraba Lahire que si un círculo menor rueda sin deslizar por el interior de otro círculo mayor de diámetro doble, entonces 1) el lugar geométrico de un punto de la circunferencia del círculo menor es un segmento rectilíneo, concretamente un diámetro del círculo mayor, y 2) el lugar geométrico de un punto fijo interior al círculo menor, es una elipse. Como hemos visto en capítulos anteriores, la primera parte de este teorema la conocía ya Nassir Eddin, y la segunda Copérnico[2]. Evidentemente el nombre de Lahire merece ser recordado, pero es una pena que lo haya sido asociado a un teorema que él no fue el primero en descubrir. En cierto sentido la historia ha sido bastante injusta con Lahire; él fue el primer especialista moderno en geometría, tanto sintética como analítica, pero lo cierto es que la geometría se encontraba entonces en un estado de decadencia dentro del panorama general de la matemática, estado del que no se recuperaría durante casi un siglo.

2. Georg Mohr

Lahire no fue el único geómetra de la época que se vio incomprendido. En 1672 el matemático danés Georg Mohr (1640-1697) publicó un libro sorprendente titulado *Euclides danicus*, en el que demostraba que cualquier construcción puntual que pueda efectuarse con regla y compás (es decir, la solución de cualquier

[1] Una breve pero buena descripción de esta obra puede verse en J. L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (1945). Para una exposición más completa véase Ernst Lehmann, *La Hire and seine Sectiones conicae* (1888).

[2] Véase C. B. Boyer, «Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire», *Isis*, 38 (1947), págs. 54-56.

«problema plano»), puede hacerse también con el compás únicamente. ¡A pesar de la repetida insistencia de Pappus, Descartes y otros en la necesidad del principio de parsimonia, muchas de las construcciones clásicas habían violado flagrantemente, como venía a demostrar ahora Mohr, este principio, al utilizar dos instrumentos cuando uno solo era suficiente! Obviamente no podemos trazar una línea recta sólo con el compás, pero si consideramos como dada una recta siempre que conozcamos dos puntos distintos sobre ella, entonces decididamente el uso de la regla en la geometría euclídea es superfluo. Los matemáticos de la época prestaron tan poca atención, increíblemente, a este sorprendente descubrimiento, que la geometría del compás sólo, sin la regla, no lleva ni siquiera el nombre de Mohr, sino el de Mascheroni, que redescubrió el mismo resultado 125 años más tarde. El libro de Mohr desapareció de una manera tan completa, que, hasta el año 1928 en que se encontró accidentalmente una copia, gracias a un matemático que curioseaba en una librería de viejo de Copenhague, no se supo que Mascheroni se había visto anticipado en su demostración del carácter superfluo de la regla.

3. Pietro Mengoli

El mismo año en que nacía, muerto ya, el libro de Mohr *Euclides danicus*, 1672, se publicaba en Italia otro libro más sobre la cuadratura del círculo, *Il problema della quadratura del circolo*, por Pietro Mengoli (1625-1686), un tercer matemático poco apreciado de la misma época. Mengoli era un clérigo que se había formado bajo la influencia de Cavalieri (a quien llegó a suceder en Bolonia), de Torricelli y de Gregory de St. Vincent. Continuando en la misma línea su obra sobre los indivisibles y el área bajo las hipérbolas, Mengoli aprendió a atacar estos problemas por medio de un artificio cuya utilidad comenzaba a mostrarse entonces casi por primera vez: el uso de las series infinitas. Mengoli descubrió, por ejemplo, que la suma de la serie armónica alternada $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$ es igual a ln 2, y también redescubrió el resultado de Oresme, obtenido asociando términos, de que la serie armónica usual no es convergente, teorema que se suele atribuir a Jacques Bernouilli en 1689. Mengoli demostró también la convergencia de la serie de los inversos de los números triangulares, resultado que usualmente se atribuye a Huygens, e intentó, sin éxito, hallar la suma de los inversos de los números cuadrados (y de otras potencias), difícil suma que obtendría Euler casi un siglo más tarde. La *Quadratura del circolo* incluía también el producto infinito para π que había dado Wallis unos años antes y que veremos más adelante en este mismo capítulo. El estudio de las series y productos infinitos por Mengoli constituyó una importante etapa hacia el futuro desarrollo de la matemática, pero ninguno de sus compatriotas se mostró dispuesto a seguir este camino abierto por él.

4. Frans van Schooten

Hemos mencionado a tres matemáticos cuya obra no fue apenas reconocida por sus contemporáneos, y que trabajaron durante los años 1670. Una de las

razones por las que no alcanzaron un reconocimiento adecuado fue la de que el centro del desarrollo matemático ya no estaba situado en sus respectivos países. Francia e Italia, líderes en su día, estaban ya en franca decadencia matemática, y Dinamarca quedó al margen de la corriente principal. Durante el período que estamos considerando, es decir, el intervalo entre Descartes y Fermat por un lado y Newton y Leibniz por el otro, hubo dos regiones en las que floreció la matemática de una manera especial: se trata de Inglaterra y de los Países Bajos. Aquí nos encontramos no ya con figuras aisladas, como ocurría en Francia, Italia y Dinamarca, sino con un puñado de eminentes bretones y otro puñado de destacados matemáticos holandeses y flamencos.

Ya dijimos que Descartes pasó una veintena de años en Holanda, y su influencia matemática fue decisiva, sin duda, para que la geometría analítica echara raíces allí antes que en ningún otro lugar de Europa. En Leyden, Frans van Schooten (1615-1660) había sucedido a su padre en 1646 como profesor de matemáticas, y fue principalmente de la mano del joven Van Schooten y de sus discípulos como adquirió la geometría cartesiana un rápido desarrollo. *La géométrie* de Descartes había sido publicada originalmente en francés y no en latín, que era la lengua universal de los intelectuales, y además, como hemos visto, la exposición estaba muy lejos de ser clara, pero ambos obstáculos se vieron allanados al mismo tiempo cuando Van Schooten hizo imprimir una versión latina ampliada con aclaraciones y material suplementario en 1649. La *Geometria a Renato Des Cartes* («Geometría por René Descartes») apareció en una segunda versión muy ampliada, en dos volúmenes, en 1659-1661, y nuevas ediciones se publicaron en 1683 y 1695. Así pues, probablemente no resulte exagerado decir que, aunque la geometría analítica la introdujo Descartes, quien la puso en funcionamiento fue Van Schooten.

La necesidad perentoria de introducciones explicativas a la geometría cartesiana se hizo evidente tan pronto que, antes de que llevara un año publicada se compuso, aunque no llegó a publicarse, una «Introducción» anónima, escrita por un «Caballero Holandés». Y al año siguiente Descartes recibió y aprobó un comentario más extenso sobre *La géométrie*, escrito esta vez por Debeaune bajo el título de *Notae breves*. En este comentario se explicaban las ideas de Descartes, poniendo gran énfasis en los lugares geométricos representados por ecuaciones simples de segundo grado, de manera muy parecida a como había hecho Fermat en su *Isagoge*. Debeaune demuestra, por ejemplo, que las ecuaciones $y^2 = xy + bx$, $y^2 = -2dy + bx$ e $y^2 = bx - x^2$ representan respectivamente hipèrbolas, parábolas y elipses. Esta obra de Debeaune se divulgó ampliamente, al ser incluida en la traducción latina de la *Geometría* de 1649, acompañada de otros comentarios escritos por Van Schooten.

5. Jan de Witt

Una contribución más extensa que las que acabamos de comentar a la geometría analítica, fue la que escribió en 1658 uno de los miembros del grupo de Van Shooten, Jan de Witt (1629-1672), el conocido gran consejero de Holanda.

De Witt había estudiado leyes en Leyden, pero mientras vivió en la casa de Van Schooten se le desarrolló su afición a la matemática. Llevó una vida muy agitada dirigiendo los asuntos de las Provincias Unidas durante los períodos de guerra en los que se opuso a los proyectos de Luis XIV, y cuando los franceses invadieron Holanda en 1672, De Witt se vio destituido de su cargo por el partido de Orange y, para su desgracia, cayó en manos de un populacho enfurecido que lo despedazó vivo. A pesar de que obviamente fue un hombre de acción, encontró tiempo en sus años jóvenes para escribir una obra titulada *Elementa curvarum*; esta obra está dividida en dos partes, en la primera de las cuales se dan varias definiciones cinemáticas y planimétricas de las secciones cónicas. Entre ellas están las definiciones en términos de la razón de distancias foco-directriz y, en particular, a él se debe nuestra palabra «directriz». Otra construcción de la elipse que presenta De Witt es la que hace uso de dos circunferencias concéntricas, con el ángulo excéntrico como parámetro, que nos es hoy bien conocida. Hasta aquí el tratamiento es principalmente sintético, pero en cambio el Libro II hace un uso tan sistemático de las coordenadas que se le ha podido calificar, no sin razón, como el primer texto de geometría analítica. *La géométrie* de Descartes no era, en ningún sentido, un libro de texto, y el tratamiento de Fermat no se publicó hasta 1679, mientras que el *Elementa curvarum* de De Witt apareció formando parte de la edición de la *Geometría a Renato Des Cartes* de Van Schooten de 1659-1661. La finalidad principal de la obra de De Witt es la de reducir todas las ecuaciones de segundo grado en x e y a formas canónicas, por medio de rotaciones y traslaciones de los ejes. De Witt sabía cómo reconocer cuándo tal ecuación representaba una elipse, cuándo una parábola y cuándo una hipérbola, según que el llamado discriminante fuera negativo, nulo o positivo[3].

Un año solamente antes de su trágica muerte, De Witt combinó los objetivos del gobernante con los puntos de vista del matemático en su obra *Tratado sobre las anualidades de vida* (1671), motivado quizá por el breve ensayo sobre la teoría de las probabilidades que había escrito Huygens. De Witt explica en su *Tratado* lo que hoy llamaríamos el concepto de esperanza matemática y, en su correspondencia con Hudde, estudia el problema de una anualidad basada en el último superviviente de entre dos o más personas.

6. Johann Hudde

En 1656-1657 Van Schooten publicó una obra original, las *Exercitationes mathematicae*, en la que exponía nuevos resultados en la aplicación del álgebra a la geometría. Entre otros descubrimientos se incluían algunos debidos a sus discípulos más brillantes, tales como Johann Hudde (1629-1704), un noble que fue alcalde de Amsterdam durante unos treinta años. Hudde sostuvo correspondencia con Huygens y De Witt sobre la conservación de los canales, así como sobre problemas de probabilidades y de esperanza de vida, y en 1672 dirigió la operación

[3] Véase, para más detalles, C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), págs. 114-117, o bien J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949), págs. 119-131.

de inundar Holanda para bloquear el avance del ejército francés[4]. En 1656 Hudde escribió un tratado sobre la cuadratura de la hipérbola por medio de series infinitas, lo mismo que había hecho Mengoli, pero el manuscrito se ha perdido. En las *Exercitationes* de Van Schooten hay una sección escrita por Hudde sobre el estudio de las coordenadas de una superficie de cuarto grado, lo que constituye una anticipación de la geometría analítica tridimensional que precede incluso a la que hemos visto de Lahire, aunque está desarrollada de una manera sensiblemente menos explícita. Además, todo parece indicar que Hudde fue el primer matemático que utilizó coeficientes literales en una ecuación para representar números reales cualesquiera positivos o negativos. Esta última etapa en el largo proceso de generalización de Viète para la teoría de ecuaciones, apareció en una obra de Hudde titulada *De reductione aequationum*, que también fue incluida en la edición de Van Schooten de la *Geometría* de Descartes de 1659-1661.

Los dos temas más populares en la época de Hudde eran la geometría analítica y el análisis matemático, y el futuro alcalde trabajó en ambos. En 1657-1658 descubrió Hudde un par de reglas que apuntaban ya de una manera clara a los futuros algoritmos del cálculo:

1. Si r es una raíz doble de la ecuación algebraica

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

y si b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n, son números que están en progresión aritmética, entonces r también es raíz de la ecuación

$$a_0b_0x^n+a_1b_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}x+a_nb_n=0$$

2. Si para $x=a$ el polinomio

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

toma un valor máximo o mínimo relativo, entonces a es una raíz de la ecuación

$$na_0x^n+(n-1)a_1x^{n-1}+\cdots+2a_{n-2}x^2+a_{n-1}x=0$$

La primera de estas dos «reglas de Hudde» no es más que una forma camuflada del teorema moderno que dice que si r es una raíz doble de la ecuación algebraica $f(x)=0$, entonces r también es raíz de la ecuación $f'(x)=0$. La segunda consiste en una ligera modificación del teorema de Fermat que hoy se formula diciendo que si

[4] Para más detalles véase el artículo «Johannes Hudde, heer van Waveren en Sloterdijk», en *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* (Leiden, 1911), vol. I, cols. 1172-1176. Véase también Joy B. Easton, «Johann de Witt's Kinematical Constructions of the Conics», en *Mathematics Teacher*, **56** (1963), págs. 632-635, y Karlheinz Haas, «Die Mathematischen Arbeiten von Johann Hudde», en *Centaurus*, 4 (1956), págs. 235-284.

$f(a)$ es un valor máximo o mínimo relativo de un polinomio $f(x)$, entonces $f'(a) = 0$. Nótese que no solamente son anteriores al cálculo de Newton y Leibniz los problemas de áreas y tangentes, sino también las relaciones entre coeficientes y exponentes que nos son tan familiares de las reglas elementales del cálculo.

7. René François de Sluse

Las reglas de Hudde se divulgaron ampliamente, debido al hecho de que también aparecieron publicadas en el volumen I de la *Geometria a Renato Des Cartes* de Van Schooten en 1659. Unos años antes, otro matemático de los Países Bajos había utilizado ya una regla muy parecida para la determinación de tangentes; se trataba del canónigo René François de Sluse (1662-1685), ciudadano de Liège que provenía de una distinguida familia valona y que había estudiado en Lyons y en Roma, donde muy bien pudo haberse familiarizado con la obra de los matemáticos italianos. Sluse obtuvo en 1652, ya fuera a partir de Torricelli o de manera independiente, una regla para hallar la tangente a una curva dada por una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio. Esta regla, que no se publicó hasta el año 1673, en que apareció en las *Philosophical Transactions* de la Royal Society, la podemos formular de la manera siguiente[5]: la subtangente en cuestión será el cociente obtenido dividiendo los términos del polinomio $f(x, y)$ que contengan la variable y, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de y que aparece, por los términos en que aparezca la variable x, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de x y divididos todos ellos por x. Esto es equivalente, desde luego, a formar el cociente que hoy escribiríamos de la forma $\frac{yf_y}{f_x}$, resultado que también conocía Hudde hacia el año 1659. Estos ejemplos nos muestran hasta qué punto los descubrimientos en el cálculo se iban amontonando rápidamente en los años inmediatamente anteriores a Newton.

Sluse, tomando parte a su vez en lo que se había convertido ya en una verdadera tradición en los Países Bajos, se mostró muy activo en la difusión de la geometría cartesiana, aunque prefería utilizar las letras A y E de Viète y de Fermat a la x y la y de Descartes. En 1659 publicó un libro destinado a un público amplio, el *Mesolabum* («Sobre medias»), dedicado al conocido tema de la construcción geométrica de las raíces de ecuaciones; en él demostraba que, dada una cónica cualquiera, se pueden construir las raíces de cualquier ecuación cúbica o cuártica por medio de la intersección de la cónica dada con una circunferencia. El nombre de Sluse ha quedado asociado también a una familia de curvas que él mismo introdujo en 1657-1658 en su correspondencia con Huygens y Pascal; estas curvas, a las que llamó Pascal «perlas de Sluse», son las curvas dadas por ecuaciones de la forma $y^m = kx^n(a-x)^b$. Sluse creía equivocadamente que casos tales como la $y = x^2(a-x)$ tenían una gráfica en forma de perla, ya que, al no considerar las

[5] Véase L. Rosenfeld, «René-François de Sluse et le problème des tangents», *Isis*, 10 (1928), págs. 416-434.



Christiaan Huygens.

coordenadas negativas, Sluse suponía implícitamente que tal gráfica era simétrica con respecto al eje (de abscisas, se entiende). Sin embargo, Christiaan Huygens (1629-1695), que se ganó la reputación de haber sido el mejor de los discípulos de Van Schooten, halló los puntos máximos y mínimos y el punto de inflexión, con lo que consiguió dibujar la curva correctamente tanto para coordenadas positivas como negativas. El cálculo de puntos de inflexión no era nuevo con Huygens, ya que muchos otros matemáticos anteriores lo habían resuelto, entre ellos Fermat y Roberval.

8. El reloj de péndulo

Huygens fue un científico de fama internacional al que se recuerda principalmente por el principio que lleva su nombre en la teoría de la luz, por la observación de los anillos de Saturno y por la verdadera invención del reloj de péndulo. Precisamente fue en conexión con sus investigaciones para mejorar los relojes como hizo su descubrimiento matemático más importante. Huygens sabía que las oscilaciones de un péndulo simple no son estrictamente isócronas, sino que dependen de la amplitud de la oscilación. Para decirlo con otras palabras, si se abandona una esfera sobre un punto de la superficie de un recipiente semiesférico perfectamente pulimentado, el tiempo que tarde en alcanzar el punto más bajo del recipiente será casi independiente, pero no estrictamente independiente, de la altura del punto en el que se abandonó. Ahora bien, Huygens inventó el reloj de péndulo aproximadamente en la misma época en que Pascal anunciaba su concurso de la cicloide, en 1658, y se le ocurrió la feliz idea de estudiar qué ocurriría si se sustituyera el recipiente semiesférico por otro engendrado al hacer girar una cicloide invertida en torno a su eje de simetría. Huygens comprobó, extremadamente complacido, que para un recipiente tal la esfera móvil alcanzaría el punto más bajo exactamente en el mismo tiempo, independientemente de la altura del punto del interior del recipiente en que se abandone la esfera. Es decir, la cicloide es una curva realmente tautócrona; sobre un arco de una cicloide invertida, un objeto abandonado a su propio peso y en ausencia de razonamiento se deslizará desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo, independientemente del punto de partida del movimiento. Quedaba por resolver, sin embargo, un problema difícil: ¿Cómo puede uno conseguir un péndulo que oscile siguiendo un arco cicloidal en vez de circular? En la solución de este problema hizo Huygens otro descubrimiento de una gran belleza: Si suspendemos del punto P, que es el punto cuspidal entre dos semiarcos de una cicloide invertida PQ y PK (fig. 18.2), un péndulo cuya longitud sea exactamente igual a la longitud común de dichos semiarcos, entonces la lenteja del péndulo oscilará describiendo un arco que es un arco de cicloide QSR exactamente de la misma forma y tamaño que el de la cicloide de semiarcos PQ y PR. Dicho en otros términos, si el péndulo de un reloj oscilase entre guías cicloidales, entonces sería verdaderamente isócrono.

Huygens construyó varios relojes de péndulo con guías cicloidales, pero descubrió que, debido a los rozamientos, entre otras causas, no funcionaban con más exactitud que los que accionaban las oscilaciones de un péndulo simple

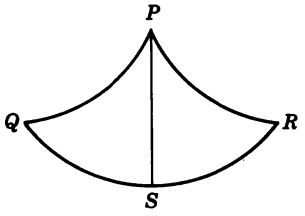


Figura 18.2

ordinario, las cuales con casi isócronas para oscilaciones de amplitud muy pequeña. A pesar de sus escasos resultados prácticos, las investigaciones de Huygens le condujeron a un descubrimiento de gran importancia matemática: la involuta (llamada también evolvente) de una cicloide es otra cicloide igual, o, inversamente, la evoluta de una cicloide es otra cicloide igual a ella. Este teorema, así como otros de sus resultados sobre involutas y evolutas de diversas curvas, los demostró Huygens de una manera que podemos considerar como esencialmente arquimediana y fermatiana, tomando puntos próximos y observando el resultado que se produce cuando el intervalo que los separa se anula. Descartes y Fermat habían utilizado este mismo recurso para determinar las normales y tangentes a una curva, y ahora Huygens lo aplicaba para hallar lo que nosotros llamamos el radio de curvatura de una curva plana. Si se hallan las normales a una curva en dos de sus puntos próximos P y Q (fig. 18.3), así como su punto de intersección I,

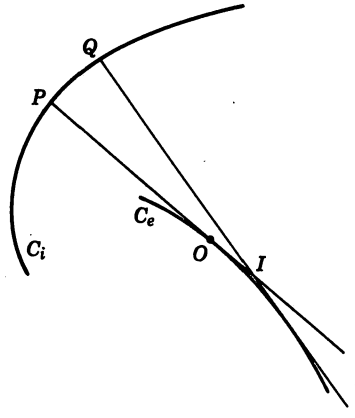
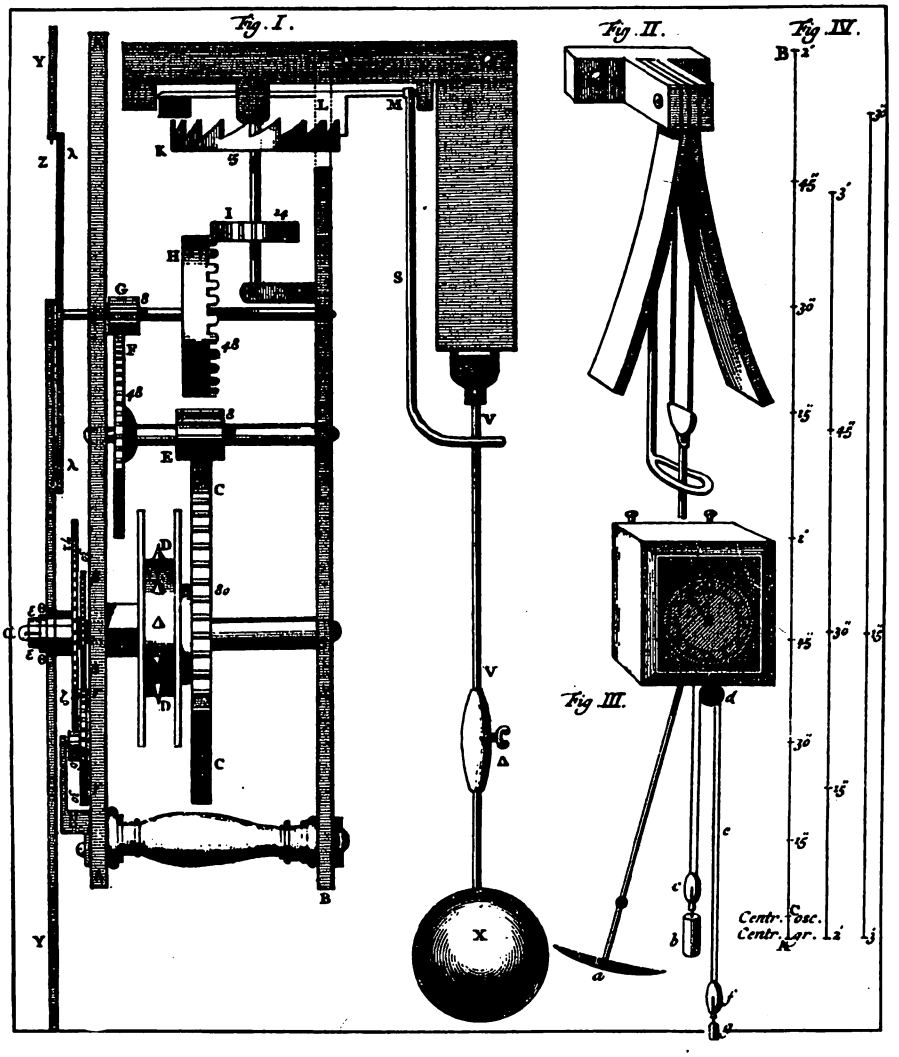


Figura 18.3

entonces, según Q va acercándose a P a lo largo de la curva, el punto variable I va tendiendo a un punto fijo O que se llama el centro de curvatura de la curva en el punto P, y a la distancia OP se la conoce como el radio de curvatura de la curva en P. El lugar geométrico de los centros de curvatura O correspondientes a los puntos P de una curva dada C_i constituyen otra curva C_e que se conoce como la evoluta de la C_i, y a cualquier curva C_i de la que C_e sea su evoluta, recibe el nombre de una involuta (o evolvente) de la curva C_e. Es inmediato comprobar que la envolvente de las normales a C_i es C_e, curva tangente a cada una de dichas normales. En la figura 18.2 la curva QPR es la evoluta de la curva QSR, y la curva QSR es una involuta de la curva QPR. Las sucesivas posiciones de la cuerda, según oscila la lenteja del péndulo, son las normales a QSR y las tangentes a QPR. Según va acercándose el péndulo a una de sus posiciones extremas a uno u otro lado, la cuerda va enrollándose cada vez más en la correspondiente guía cicloidal, mientras que según desciende la lenteja hacia el punto más bajo S de su trayectoria, la cuerda se va



Diagramas tomados del *Horologium oscillatorium* (163) de Huygens. En la figura II se muestran las guías cicloides que obligan al péndulo a oscilar siguiendo un arco de cicloide.

desenrollando. Basándose en este fenómeno, Huygens describía a la cicloide *QSR* como *ex evolutione descripta*, y a la cicloide *QPR* como la *evoluta*. (En francés se adoptaron para ellas los nombres *développante* y *développée*, respectivamente.)

9. Involutas y evolutas

Los conceptos tanto de radio de curvatura como de evoluta de una curva se vislumbraban ya en la obra puramente teórica de las *Cónicas* de Apolonio, pero sólo

gracias al interés de Huygens por los relojes encontraron al fin ambos conceptos un lugar permanente en la matemática. La geometría analítica fue, como hemos visto, el resultado de unas consideraciones esencialmente teóricas, pero en cambio el desarrollo de la idea de curvatura por Huygens vino motivado por intereses prácticos. La interacción de los dos puntos de vista, el teórico y el práctico, a menudo se muestra muy fructífera para la matemática, como demuestra ejemplarmente la obra de Huygens. Su péndulo cicloidal le sugirió una manera obvia de rectificar la cicloide, resultado que Roberval había descubierto antes, pero que no había publicado. El hecho de que el arco QS (fig. 18.2) se describa según la cuerda del péndulo va desenrollándose de la curva QP muestra que la longitud del segmento PS es exactamente igual a la longitud del arco QP, y como PS es dos veces el diámetro del círculo que engendra la cicloide QSR, la longitud de un arco completo de la cicloide es igual a cuatro veces el diámetro del círculo generador. De la misma manera, la teoría general de involutas y evolutas condujo a la rectificación de muchas otras curvas, y el dogma peripatético-cartesiano de la no rectificación de las curvas algebraicas se cuestionó de una manera más seria. En 1658, uno de los amigos de Huygens, Heinrich van Heuraet (1633-¿1660?), que formaba parte también del grupo de Van Schooten, descubrió que la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ se puede rectificar por métodos euclídeos, poniendo fin así a la duda. Este descubrimiento apareció publicado también en 1659 en la *Geometria a Renato Des Cartes* de Van Schooten, como uno de los aspectos más importantes de la obra. Este resultado lo obtuvo también un poco antes y de manera independiente el matemático inglés William Neil (1637-1670), así como, un poco más tarde y también de manera independiente, Fermat en Francia, lo que constituye otro caso sorprendente de descubrimiento prácticamente simultáneo por varios matemáticos independientemente.

De todos los descubrimientos matemáticos de Fermat, el único que apareció publicado (aunque no por él directamente) antes de su muerte fue la rectificación de la parábola semicúbica, que suele conocerse con el nombre de parábola de Neil. La solución apareció en 1660 como suplemento al libro *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* («Geometría al estilo de los antiguos tratada en siete libros sobre la cicloide») de Antoine de Lalouvère (1600-1664), el «cuadrador del círculo» que había competido en el concurso de Pascal. Fermat descubrió esta rectificación comparando un arco pequeño de la curva con la figura circunscrita que forman las tangentes en los dos extremos del arco. El método de Van Heuraet se basaba en la «velocidad de crecimiento» del arco, que expresaríamos en notación moderna por la fórmula $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$.

La rectificación de Neil se basaba en el hecho equivalente, advertido ya por Wallis en su *Arithmetica infinitorum*, de que un arco suficientemente pequeño de una curva dada es prácticamente igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los incrementos correspondientes de la abscisa y de la ordenada, es decir, en notación moderna, lo equivalente a la expresión $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. La rectificación de Neil fue publicada en 1659 por John Wallis en su libro titulado *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide* («Dos tratados, el primero

sobre la cicloide, el segundo sobre la cisoide»). Esta obra apareció pocos meses después que la de Pascal sobre la cicloide, lo que nos revela hasta qué punto había afectado a los matemáticos la «fiebre de la cicloide» poco antes de la invención del cálculo.

Las investigaciones de Huygens sobre las involutas y evolutas no se publicaron hasta 1673, año en que aparecieron en su famoso libro *Horologium oscillatorium.* Este tratado sobre el reloj de péndulo es un auténtico clásico que sirvió como introducción a los *Principia* de Newton, publicados casi quince años más tarde. En la obra de Huygens se incluía la ley de la fuerza centrípeta para el movimiento circular, la ley de Huygens para el movimiento del péndulo, el principio de conservación de la energía cinética y otros importantes resultados de mecánica. El libro se publicó en París, debido a que Huygens, que había estado muy en contacto con la obra de Pascal y de Fermat, se trasladó a París en 1666 como miembro de la recién creada Académie des Sciences. Allí permaneció hasta 1681 en que las amenazas de revocación del Edicto de Nantes (que se llevó a cabo, efectivamente, el año 1685) le impulsaron a abandonar la católica Francia, siendo él como era protestante; la muerte de Colbert en 1683 le confirmó en su decisión de no regresar. Anteriormente había visitado Londres, y mantuvo a lo largo de toda su vida un profundo interés por cualquier tipo de cuestiones matemáticas, pero muy especialmente por el estudio de las curvas planas de orden superior. En esta línea, rectificó la cisoide, estudió las propiedades de la tractriz, y demostró que la catenaria es una curva no algebraica, mientras que Galileo había creído que era simplemente una parábola. En 1656 aplicó Huygens el análisis infinitesimal a las cónicas, reduciendo la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola (es decir, al cálculo de un logaritmo). Al año siguiente Huygens se convirtió en el primero que logró calcular el área de un segmento de paraboloide de revolución (el famoso «conoide» de Arquímedes), demostrando que la determinación de este área puede conseguirse por métodos elementales[6].

10. John Wallis

Van Schooten moría el año 1660, el mismo año en que se fundaba en Inglaterra la Royal Society (aunque la carta fundacional le fuera otorgada en 1662), y a esta fecha la podemos considerar como la que señala un nuevo desplazamiento de lo que hemos venido llamando el centro matemático del mundo. El grupo de Leyden, que se había reunido en torno a Van Schooten, iba perdiendo impulso paulatinamente, y recibió un duro golpe cuando Huygens partió hacia París en 1666. Mientras tanto se estaba produciendo ya en Gran Bretaña un vigoroso desarrollo de la matemática, desarrollo que se vio impulsado por la creación de la Royal Society, una de las más antiguas organizaciones científicas que todavía existen hoy (la «Accademia dei Lincei», fundada en Roma en 1603, parece ser la más antigua). William Oughtred había muerto también el 1660, pero dejaba tras él un estudiante

[6] No hay ninguna buena exposición en inglés de la obra matemática de Huygens, pero puede encontrarse todo lo que hizo en la suntuosa edición de sus *Oeuvres complètes* (1888-1950).

brillante: John Wallis (1616-1703), que fue el más importante de los matemáticos ingleses inmediatamente anteriores a Newton. Oughtred, que llegó a ser ministro episcopal, se dedicaba a dar lecciones gratuitas de matemáticas, y Wallis fue uno de los que mejor aprovecharon tales enseñanzas. Wallis recibió también las sagradas órdenes, pero dedicó la mayor parte de su tiempo a su profesión de matemático. Había estudiado en Cambridge, pero en 1649 fue nombrado *savilian professor* de geometría en Oxford, ocupando la cátedra que había ocupado por primera vez Briggs cuando fue creada en 1619. Wallis era un conocido partidario del rey, a pesar de lo cual el régimen de Cromwell no opuso reparos a utilizar sus servicios en el descifrado de códigos secretos, y cuando Carlos II fue repuesto en el trono, Wallis fue nombrado capellán del rey. Wallis era miembro de número de la Royal Society, que había contribuido a organizar. Anteriormente, en 1655, había publicado dos libros muy importantes, uno sobre geometría analítica y el otro sobre análisis infinitesimal (o, mejor, «análisis de los infinitos»); éstas eran las dos ramas principales de la matemática de la época, y el genio de Wallis se adaptaba perfectamente al cultivo de ambas.

11. *Sobre las secciones cónicas*

El *Tractatus de sectionibus conicis* de Wallis hizo por la geometría analítica en Inglaterra lo que el *Elementa curvarum* de De Witt había hecho en el continente. De hecho, Wallis llegó a quejarse de que la obra de De Witt era una imitación de su propio *Tractatus*, pero lo cierto es que el libro de De Witt, aunque se publicó cuatro años después que el de Wallis, en realidad había sido escrito antes de 1655. Los libros de estos dos matemáticos los podemos considerar como la culminación del proceso de aritmetización de las secciones cónicas que había comenzado Descartes unos veinte años antes. Especialmente Wallis, reemplazó sistemáticamente los conceptos geométricos por conceptos numéricos en todas partes en que ello fuera posible. Incluso la teoría de proporciones, el poderoso bastión de la geometría antigua, la considera Wallis como reducible a conceptos aritméticos. En este aspecto su actitud representa la tendencia general de la matemática durante todo el siglo siguiente al menos, pero hay que subrayar que este movimiento carecía de una fundamentación sólida, ya que los números reales no habían sido definidos aún de una manera rigurosa. La obra de Wallis es un buen ejemplo del hecho, tan frecuente en la historia de la matemática, de que un descuido ocasional por las exigencias del rigor lógico puede tener saludables efectos en el progreso matemático.

Las *Cónicas* de Wallis comienzan con un tibio reconocimiento a la generación de estas curvas como secciones del cono, a pesar de lo cual todas las propiedades conocidas de las cónicas las deduce Wallis utilizando métodos de coordenadas del plano, a partir de las tres formas estándar $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$, $p^2 = ld$ y $h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$, donde e, p y h son respectivamente las ordenadas de la elipse, parábola e hipérbola, correspondientes a la abscisa d medida desde un vértice como origen, y donde l y t son el «latus rectum» y el «diámetro» o eje respectivamente. Más adelante

considera Wallis estas ecuaciones como las definiciones de las secciones cónicas consideradas de una manera «absoluta», es decir, sin hacer referencia al cono inicial. En esta manera de proceder Wallis se muestra más próximo incluso que Fermat a la definición moderna de una cónica como lugar geométrico de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de segundo grado en dos variables, hecho del que había sido consciente Descartes, pero en el que no había puesto suficiente énfasis.

12. La *Arithmetica infinitorum*

Si las *Cónicas* de Wallis no se hubieran publicado, la pérdida no habría sido demasiado importante, dado que el libro de De Witt apareció sólo cuatro años más tarde. Sin embargo, para el que no había posible sustituto era para la *Arithmetica infinitorum* que publicó Wallis el mismo año de 1655. En esta segunda obra aritmetizaba Wallis la *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri, lo mismo que había aritmetizado las *Cónicas* de Apolonio. Mientras que Cavalieri había llegado al resultado

$$\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

por medio de una laboriosa correspondencia biunívoca entre los indivisibles geométricos en un paralelogramo con los de uno de los dos triángulos en que lo divide una diagonal, Wallis abandonó el marco geométrico después de haber asociado valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras. Si se quieren comparar, por ejemplo, los cuadrados de los indivisibles en el triángulo con los cuadrados de los indivisibles en el paralelogramo, podemos tomar la longitud del primer indivisible en el triángulo como cero, la del segundo como uno, la del tercero como dos, y así sucesivamente hasta el último, de longitud $n-1$, si hay en total n indivisibles. La razón de las sumas de los cuadrados de los indivisibles en las dos figuras sería entonces

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

si hubiera sólo dos indivisibles en cada figura, o

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

si hubiera tres, o

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

si hubiera cuatro. En general, para el caso en que hubiera $n+1$ indivisibles, la razón sería

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

y, para n infinito, la razón sería obviamente igual a $\frac{1}{3}$ (pues para n infinito el término complementario $\frac{1}{6n}$ se convierte en $\frac{1}{\infty}$ o cero. Wallis fue el primero en utilizar, en este contexto, nuestro bien conocido símbolo del «lazo del amor» para representar el infinito). Esto resulta equivalente a decir que $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$, desde luego. Wallis extendió este mismo método a potencias enteras y positivas de x más altas, concluyendo por inducción incompleta que

$$\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1}$$

para todo m natural.

Fermat criticó, con toda razón, la inducción que hacía Wallis, puesto que carece absolutamente del rigor del método de inducción completa que utilizaron frecuentemente tanto Fermat como Pascal. Por otra parte, Wallis adoptó como válido un principio de interpolación todavía más cuestionable, en virtud del cual «deducía» que su resultado seguía siendo correcto para valores de m fraccionarios e incluso negativos (excepto para $m=-1$). Wallis tuvo incluso la osadía de admitir que la fórmula anterior era válida también para potencias irracionales, en lo que constituye la primera afirmación de la historia del cálculo relativa a lo que ahora llamaríamos una «función trascendente de orden superior». El uso de la notación exponencial para potencias fraccionarias y negativas venía a ser una generalización importante de sugerencias anteriores, tales como las que formularon Oresme y Stevin, pero Wallis no dio ninguna base lógica en la que fundamentar su extensión de la exponenciación cartesiana. Lo único que hizo fue dar algunos ejemplos particulares de varios casos, como el de que un término o número con índice -2 multiplicado por el mismo término o número con índice -3 da como resultado dicho término con índice -5; o que un término con índice -3 multiplicado por él mismo con índice 2 da el mismo término con índice -1. A continuación, afirma alegremente: «Y lo mismo ocurrirá en cualquier otro caso de este tipo, y por lo tanto la proposición queda demostrada»[7]. Wallis era, parafraseando al clásico, largo en descubrimientos, pero en rigor corto, tal como se apresuraron a advertir los franceses.

Wallis era también un inglés decididamente chauvinista, y cuando publicó más tarde (1685) su *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*, intentó restar mérito a la obra de Descartes, alegando, con manifiesta mala fe, que la mayor parte

[7] Véase D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, págs. 217-218.

de ella estaba tomada del *Artis analyticae praxis* de Harriot. El hecho de que sus soluciones a los problemas del concurso convocado por Pascal fueran rechazadas como no merecedoras del premio, no contribuyó evidentemente a aminorar sus prejuicios antifranceses. Wallis parece haberse mostrado siempre excesivamente proclive a sospechar de mala voluntad por parte de otros; en su *Treatise of Algebra*, por ejemplo, escribía:

> No hay duda de que ésta [el álgebra] era de uso entre los *griegos* desde antiguo, pero la ocultaban astutamente como un gran Secreto. Ejemplos de ello los tenemos en *Euclides*, al menos por lo que nos dice de él *Teón*, quien atribuye su invención (entre ellos) a *Platón*.

Para el lector que haya recorrido con nosotros los capítulos sobre Grecia, resultará evidente que Wallis era mucho mejor como matemático que como historiador, ya que, entre otros pintorescos errores, identifica el álgebra (o la «analítica» de Viète) con el análisis geométrico de los antiguos.

13. Christopher Wren

Por la misma época en que Wallis presentaba su respuesta al concurso de Pascal, Christopher Wren (1632-1723) le enviaba a Pascal su rectificación de la cicloide. Wren había estudiado en Oxford y más tarde ocupó en esta universidad el puesto de *savilian professor* de astronomía. También fue elegido miembro de la Royal Society, de la que fue presidente durante unos cuantos años. De no haber sido por el gran incendio del año 1666, que destruyó gran parte de Londres, a Wren se le conocería hoy como matemático más que como arquitecto de la catedral de San Pablo y de otra cincuentena de iglesias. El círculo de matemáticos al que pertenecían Wren y Wallis hacia 1657-1658 aplicaba, sin duda, lo equivalente a la fórmula para la longitud del arco $ds^2 = dx^2 + dy^2$ al estudio de curvas variadas, cosechando brillantes éxitos. Ya hemos mencionado más arriba que William Neil fue el primero en rectificar la curva que lleva su nombre en 1657, a la temprana edad de veinte años; Wren calculó la longitud de la cicloide tan sólo un año más tarde. Ambos descubrimientos los incorporó Wallis, con el debido reconocimiento a sus autores, en su *Tractatus duo* de 1659, que era un libro sobre problemas infinitesimales relativos a la cicloide y a la cisoide. Neil no parece haber hecho ninguna otra contribución a la matemática hasta su prematura muerte a los 32 años. Wren, por su parte, se fue interesando cada vez más por la física y más tarde por la arquitectura, pero en 1669 publicó en las *Philosophical Transactions* su descubrimiento de que en el hiperboloide de revolución de una hoja hay dos familias de rectas generatrices.

Es una pena que la geometría de superficies y de curvas en tres dimensiones atrajera tan poco la atención de los matemáticos en esta época, que casi un siglo más tarde la geometría analítica tridimensional estaba prácticamente sin desarrollar todavía. Wallis incluyó en su *Algebra* de 1685 el estudio de una superficie que pertenece a la clase de las que se suelen llamar hoy conoides (pero no en el sentido de Arquímedes, por supuesto). Esta superficie de Wallis, que él mismo denomina «cono-coneus» o «cuña cónica», está engendrada de la manera siguiente: Sea C una

circunferencia, sea L una recta paralela al plano de C y sea P un plano perpendicular a L; entonces el cono-cuneus es la superficie formada por todas las rectas paralelas a P y que se apoyan simultáneamente en C y en L. El mismo Wallis sugiere otras superficies conoidales obtenidas sustituyendo simplemente la circunferencia C por una cónica cualquiera, y en su *Mechanica* de 1670 menciona las secciones parabólicas del hiperboloide de Wren (o «cilindroide hiperbólico»). Sin embargo, Wallis no da las ecuaciones de las superfices ni aritmetiza la geometría tridimensional como había hecho con la geometría plana.

14. Las fórmulas de Wallis

Wallis fue, sin duda, el más importante de los matemáticos ingleses anteriores a Newton, y sus contribuciones principales a la matemática lo fueron en el campo del análisis infinitesimal. Entre ellas hay una en la que, al intentar calcular la integral $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$, anticipó parte de la obra posterior de Euler sobre la función gamma o los factoriales generalizados. Wallis sabía, por la obra de Cavalieri y Fermat, entre otros, que esta integral representa el área bajo la semicircunferencia $y=\sqrt{x-x^2}$, y que este área es, por lo tanto, igual a $\frac{\pi}{8}$; pero el problema era el siguiente: ¿cómo se podría obtener la respuesta correcta por medio de una evaluación directa de la integral por métodos infinitesimales? Wallis no consiguió responder a esta cuestión, pero su peculiar método de inducción e interpolación dio lugar a un resultado interesante. Después de calcular los valores de la integral $\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx$ para varios valores de n enteros positivos, Wallis llegó a la conclusión, por el procedimiento habitual de inducción incompleta, de que el valor de esta integral es $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Suponiendo (¡que ya es suponer!) que la misma fórmula es válida también para valores de n fracciones, Wallis llega a la conclusión de que

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{(\frac{1}{2}!)^2}{2!}$$

luego $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$, o bien $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Este es, como se sabe, un caso especial de la función beta euleriana

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

donde $m=\frac{3}{2}$ y $n=\frac{3}{2}$.

Thomas Hobbes (1588-1679) fue probablemente el más importante de los críticos de la aritmetización de la geometría llevada a cabo por Wallis, oponiéndose enérgicamente a «todo el rebaño de los que aplican su álgebra a la geometría», y refiriéndose a la *Arithmetica infinitorum* como «una costra de símbolos». Sin

embargo, Hobbes tenía más vanidad que capacidad matemática, insistiendo en que había logrado la cuadratura del círculo y en que había resuelto los otros problemas geométricos de los antiguos. Así pues Wallis podía permitirse muy bien no hacer el menor caso de Hobbes y continuar con sus descubrimientos. Entre los más conocidos de sus resultados está la fórmula del producto infinito para π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}$$

Esta expresión se puede obtener fácilmente, en términos modernos, del teorema

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n+1} x\, dx} = 1$$

y de las fórmulas

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

para m impar y

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}\,\frac{\pi}{2}$$

para m par. (El símbolo $m!!$ representa el producto $m(m-2)\,(m-4)...$, que termina en 1 ó en 2, según sea m impar o par respectivamente.) Por este motivo, a las expresiones anteriores para la integral $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx$ se las conoce con el nombre de «fórmulas de Wallis». Sin embargo, el método que utilizó realmente Wallis para obtener su fórmula del producto infinito para $\frac{2}{\pi}$ se basaba, de hecho, en sus inevitables principios de inducción e interpolación, aplicados esta vez a la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$, que no fue capaz de calcular directamente por no disponer del teorema binomial[8]. (De este mismo contexto precisamente partiría Newton para obtener el teorema binomial, como veremos en el capítulo siguiente.)

15. James Gregory

El teorema binomial para potencias de exponente un número natural era conocido en Europa por lo menos desde 1527, pero sorprendentemente Wallis, el gran interpolador, no fue capaz de aplicar en este caso su método de interpolación. Sin embargo, todo parece indicar que el joven matemático escocés James Gregory (1638-1675), ligeramente anterior a Newton y que murió con sólo 36 años, pudo conocer ya este importante resultado. Gregory había mantenido contactos, según

[8] Para otros aspectos de su obra véase J. F. Scott, *The Mathematical Works of John Wallis, D. D., F. R. S.* (1616-1703) (1938), reeditada en 1981 por Chelsea (New York), y C. J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis* (1616-1703) (1966).

nos consta, con matemáticos de varios países. Su tío-abuelo Alexander Anderson (1582-¿1620?) había editado las obras de Viète, y James Gregory estudió matemáticas no sólo en la escuela, en Aberdeen, sino también con su hermano mayor David Gregory (1627-1720). Más tarde un rico mecenas lo presentó a John Collins (1625-1683), bibliotecario de la Royal Society; Collins fue para los matemáticos ingleses lo que había sido Mersenne para los franceses de la generación anterior, un verdadero corresponsal extraordinario. En 1663 Gregory viajó a Italia, donde conoció a los sucesores de Torricelli, especialmente a Stefano degli Angeli (1623-1697). Las muchas obras que escribió Angeli, protegido del cardenal Michelangelo Ricci (1619-1682) que había sido un gran amigo de Torricelli, estaban dedicadas casi todas a los métodos infinitesimales, con especial énfasis en la cuadratura de espirales generalizadas, de parábolas y de hipérbolas. Gregory estudió con Angeli durante varios años (1664-1668) antes de regresar a Londres, y es probable que fuera en Italia, bajo la influencia de Mengoli y de Angeli, donde Gregory cayó en la cuenta de la potencia que muestran los desarrollos de funciones en series infinitas y los procesos infinitos en general. Como consecuencia de ello, publicó en 1667, en Padua, una obra titulada *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, que contenía algunos resultados muy importantes en análisis infinitesimal.

Por poner un ejemplo, Gregory extendía el algoritmo arquimediano a la cuadratura de elipses y de hipérbolas: Consideraba un triángulo inscrito de área a_0 y un cuadrilátero circunscrito de área A_0, y duplicando sucesivamente el número de lados de estas figuras iba construyendo la sucesión $a_0, A_0, a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, \ldots$, a la vez que demostraba que a_n es la media geométrica de los dos términos que la preceden inmediatamente, mientras que A_n es la media armónica de los dos términos precedentes. Tenía, pues, así dos sucesiones, la de las áreas inscritas y la de las circunscritas, convergentes ambas al área del sector de cónica en cuestión, y Gregory las utilizó para obtener muy buenas aproximaciones de sectores elípticos e hiperbólicos. Dicho sea de paso, el verbo «converger» lo utilizó aquí Gregory en este sentido por primera vez. Por medio de este proceso infinito intentó demostrar Gregory, sin éxito, la imposibilidad de la cuadratura del círculo por métodos algebraicos. Huygens, a quien se consideraba como el matemático más importante de la época, creía que π se podría expresar algebraicamente, y se produjo una disputa acerca de la validez de los métodos de Gregory. La cuestión de la trascendencia de π era un problema difícil, sin duda, e iban a tener que pasar otros dos siglos antes de que se resolviese definitivamente y a favor de Gregory.

16. La serie de Gregory

En 1668 Gregory publicó otros dos libros, en los que reunía resultados procedentes de Francia, Italia, Holanda e Inglaterra, así como descubrimientos originales suyos. Una de estas dos obras, la *Geometriae pars universalis* («Parte universal de la geometría») se publicó en Padua, y la otra, *Exercitationes geometricae* («Ejercicios geométricos»), en Londres[9]. Tal como viene a indicar el

[9] Una exposición sistemática de la obra de Gregory puede verse en H. W. Turnbull, *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (1939).

título del primer libro, Gregory rompe con la distinción cartesiana entre curvas «geométricas» y «mecánicas», prefiriendo dividir la matemática en grupos de teoremas «generales» y «especiales», en vez de atender al carácter algebraico o trascendente de las funciones que intervienen. Gregory tampoco quería distinguir ni siquiera entre métodos algebraicos y geométricos, y por este motivo su obra aparece formulada en un ropaje esencialmente geométrico que no resulta nada fácil de seguir. Si se hubiera expresado analíticamente podría haberse anticipado a Newton en la invención del cálculo, puesto que disponía ya prácticamente de todos los elementos fundamentales para ello hacia finales de 1668. Gregory estaba muy familiarizado con los problemas de cuadraturas y rectificaciones, y es muy probable que se diera cuenta de que estos problemas son inversos de los problemas de tangentes; conocía incluso lo equivalente en términos geométricos de la integral $\int \sec x\, dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$. Descubrió de una manera independiente el teorema binomial para exponentes racionales, resultado conocido anteriormente por Newton pero aún no publicado, y obtuvo, a través de un ingenioso proceso geométrico recurrente que equivale a efectuar diferenciaciones sucesivas de una función, el desarrollo en serie de Taylor más de cuarenta años antes de que Taylor lo publicara[10]. También conocía Gregory los desarrollos en serie de Maclaurin de tg x, sec x, arc tg x y arc sec x, pero sólo una de estas series lleva su nombre, y es la correspondiente al arc tg x. Gregory pudo haber aprendido en Italia que el área bajo la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, desde $x=0$ hasta $x=x$, es igual al arc tg x; ahora bien, una simple «división larga» transforma $\dfrac{1}{1+x^2}$ en la serie $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$, y por lo tanto, aplicando la fórmula de Cavalieri se obtiene inmediatamente el resultado

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Resultado que aún se conoce hoy con el nombre de «serie de Gregory».

17. Nicolaus Mercator y William Brouncker

Un resultado muy parecido al de la serie de Gregory fue obtenido, al mismo tiempo aproximadamente, por Nicolaus Mercator (1620-1687), que lo publicó en su *Logarithmotechnia* en 1668. Mercator (cuyo verdadero nombre, sin latinizar, era Kaufmann), nació en Holstein, en Dinamarca, pero vivió durante largo tiempo en Londres y fue uno de los primeros miembros de la Royal Society. En 1683 se trasladó a Francia, y allí proyectó las fuentes de Versalles; cuatro años más tarde moría en París. La primera parte de la *Logarithmotechnia* de Mercator trata del

[10] La historia de la serie de Taylor es realmente muy complicada. Algo que puede considerarse como una anticipación de ella aparece en la India antes de 1550. Véase C. T. Rajagopal y T. V. Vedamurthi, «On the Hindu Proof of Gregory's Series», *Scripta Mathematica*, 17 (1951), págs. 65-74; véaxe también 15 (1949), págs. 201-209, y 18 (1952), págs. 25-30.

cálculo de los logaritmos por métodos que se derivan de los que utilizaron Napier y Briggs; la segunda parte contiene varias fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos, una de las cuales es esencialmente la que conocemos hoy como «serie de Mercator». Se sabía ya, gracias a la obra de Gregory de St. Vincent, que el área bajo la hipérbola $y=\frac{1}{1+x}$, desde $x=0$ a $x=x$, es igual a $\ln(1+x)$. Por lo tanto, utilizando el mismo método que Gregory de la división larga, seguida de integración término a término, tenemos

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+\cdots)\,dx = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Mercator tomó de Mengoli el nombre de «logaritmos naturales» para los valores que se obtienen por medio de esta serie. Aunque la serie lleve el nombre de Mercator, parece que la conocían ya antes que él tanto Hudde como Newton, pero no la publicaron.

Durante los años 1650 y 1660 se desarrollaron una gran variedad de métodos infinitos, incluido el método de la fracción continua infinita para π que había dado William Brouncker (1620?-1684), el primer presidente de la Royal Society. Los primeros pasos dados en la teoría de fracciones continuas lo fueron mucho antes, y tuvieron lugar en Italia, donde Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), de Bolonia, había expresado ya raíces cuadradas de esta forma. Tales expresiones se pueden obtener fácilmente de la manera siguiente: Tómese, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y descompóngase en la forma $\sqrt{2}=1+x$. Entonces $2=(1+x)^2$, o bien $x^2+2x=1$, o $x=\frac{1}{2+x}$. Si sustituimos ahora la x en el miembro de la derecha por $\frac{1}{2+x}$, y continuamos repitiendo indefinidamente esta sustitución, tendremos que

$$x=\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

Por medio de ciertas manipulaciones de la fórmula de Wallis del producto infinito para $\frac{2}{\pi}$, Brouncker se vio de alguna manera[11] conducido a la expresión

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}$$

[11] No sabemos cómo obtuvo Brouncker este resultado, pero una demostración basada en la obra de Euler aparece en el capítulo sobre Brouncker del libro de J. L. Coolidge *The Mathematics of Great Amateurs* (1949).

Tanto Brouncker como Gregory descubrieron también series infinitas para los logaritmos, pero éstas se vieron eclipsadas por la meyor simplicidad de la serie de Mercator. Gregory estudió además la curva $y=\ln x$, que obtuvo de la espiral equiangular $r=e^{\theta}$ por una transformación geométrica que consiste en hacer la abscisa x igual al radio vector r de un punto variable, y la ordenada y igual al arco θ. Esta idea le pudo venir sugerida por la comparación de la parábola con la espiral de Arquímedes, que se había hecho tan popular en Italia. Como final de este resumen de la obra de Gregory, tenemos que decir que, desgraciadamente, no tuvo ni la influencia ni el reconocimiento que merecía la enorme magnitud de los descubrimientos que hizo en su corta vida. Gregory regresó a Escocia como profesor de matemáticas, primero en St. Andrews en 1668 y más tarde en Edimburgo en 1674, donde se quedó ciego y murió al año siguiente. Después de la publicación de sus tres tratados de 1667-1668, no volvió a publicar nada, y así muchos de sus resultados tuvieron que ser redescubiertos más tarde por otros matemáticos.

18. El método de las tangentes de Barrow

Newton pudo haber aprendido mucho de Gregory, pero el joven estudiante de Cambridge evidentemente apenas pudo conocer la obra del gran escocés, si es que llegó a conocerla, de hecho. En su lugar hubo dos matemáticos ingleses, uno de Oxford y el otro de Cambridge, que produjeron en él una profunda impresión. Estos fueron John Wallis e Isaac Barrow (1630-1677). Barrow, al igual que Wallis, recibió las órdenes sagradas, pero se dedicó a enseñar matemáticas; en 1662 fue nombrado profesor de geometría en el Gresham College de Londres, y en 1664 *lucasian professor* de geometría en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663), y que ocuparía más tarde Newton, que sucedió a Barrow. Barrow era un conservador, desde el punto de vista matemático, al que desagradaba el formalismo del álgebra, y a este respecto su obra es antitética de la de Wallis, considerando que el álgebra debería formar parte de la lógica más que de la matemática, un punto de vista que difícilmente favorecía los descubrimientos de carácter analítico. Siendo Barrow como era un admirador de los geómetras antiguos, editó las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones opticae* (1669) y *Lectiones geometricae* (1670) en la edición de las cuales participó Newton. La fecha de 1668 es particularmente importante por el hecho de que Barrow se encontraba impartiendo sus lecciones geométricas al mismo tiempo que se publicaba la *Geometriae pars universalis* de Gregory y la *Logarithmotechnia* de Mercator, así como una edición revisada del *Mesolabum* de Sluse. El libro de Sluse incluía una sección nueva sobre problemas infinitesimales en la que aparecía un método para determinar máximos y mínimos. Barrow deseaba que sus *Lectiones geometricae* ofreciesen un panorama del tema puesto al día, y así incluyó un tratamiento especialmente completo de los nuevos descubrimientos. Los problemas de tangentes y de cuadraturas eran los que dominaban en esta época, y por lo tanto ocupan un lugar prominente en el tratado de Barrow de 1670. En este tema

Barrow prefería las concepciones cinemáticas de Torricelli a la aritmética estática de Wallis, y prefería también considerar a las magnitudes geométricas como engendradas por un flujo continuo de puntos. El tiempo, decía Barrow, tiene muchas semejanzas con una línea, y, sin embargo, los consideraba a ambos como formados por indivisibles. A pesar de que su razonamiento recuerda mucho más al de Cavalieri que al de Wallis o Fermat, hay un momento en el que el análisis de tipo algebraico se manifiesto de una maera muy visible. Al final de la lección X escribe Barrow:

> Suplementariamente a esto añadiremos, en forma de apéndice, un método de cálculo para hallar tangentes utilizado frecuentemente por nosotros, aunque no sé muy bien si, después de tantos métodos bien conocidos y muy trillados de los tipos anteriores, hay o no alguna ventaja en hacerlo. No obstante lo hago siguiendo el consejo de un amigo [que más tarde se supo había sido Newton], y de buena gana, puesto que parece ser más útil y general que los que he expuesto.

Y a continuación Barrow pasa a explicar un método para la determinación de tangentes que es prácticamente idéntico al que se usa en el cálculo diferencial[12]. Este método se parece mucho al de Fermat, pero en él aparecen dos cantidades, en vez de la única cantidad representada por Fermat por la letra E, cantidades que equivalen, en términos modernos, a Δx e Δy. Barrow explica su regla para la determinación de tangentes esencialmente como sigue. Si M es un punto de una curva dada (en notación moderna) por una ecuación polinómica $f(x, y)=0$, y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje x, entonces Barrow considera «un arco infinitamente pequeño MN de la curva», las ordenadas correspondientes a los puntos M y N, y el segmento MR paralelo al eje x (fig. 18.4). Llamando entonces m a la ordenada conocida de M, t a la subtangente buscada PT y a, e, a los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo MRN, hace notar Barrow que la razón de a a e es igual a la razón de m a t. Tal como lo expresaríamos nosotros hoy, la razón de a a e para dos puntos infinitamente próximos es la pendiente de la curva. Para hallar esta razón Barrow procede de una manera muy parecida a como había hecho Fermat; sustituye x e y en la ecuación $f(x, y)=0$ por $x+e$ e $y+a$ respectivamente, y en la ecuación resultante suprime todos los términos que no contengan a y e (ya que la suma de todos ellos es cero, por la ecuación de la curva), así como todos los términos de grado mayor que uno en a o en e, y por último reemplaza a por m y e por t. A partir de este resultado puede calcularse la subtangente t en términos de x y de m, y si x y m son conocidos, la subtangente t queda determinada, y con ella la tangente TM.

Según todos los indicios, Barrow no conocía directamente la obra de Fermat, ya que no menciona su nombre en ninguna parte, pero los hombres a los que cita como fuente de sus propias ideas incluyen a Cavalieri, a Huygens, a Gregory de St. Vincent, a James Gregory y a Wallis, y por lo tanto es muy probable que Barrow

[12] Para más detalles sobre la obra de Barrow véanse sus *Geometrical Lectures*, ed. por J. M. Child (1916), y *The Mathematical Works of Isaac Barrow*, ed. por W. Whewell (1860). Véase también el artículo sobre Barrow por D. T. Whiteside en el *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's).

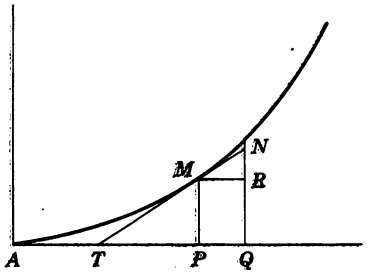


Figura 18.4

llegara a conocer el método de Fermat a través de ellos. Huygens y James Gregory, en particular, hicieron uso frecuentemente de dicho método, y Newton, con quien trabajaba Barrow en estrecho contacto, reconocía que el algoritmo de Barrow no era más que el de Fermat un poco mejorado.

De todos los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral, ninguno se aproximó tanto como Barrow al nuevo análisis que se avecinaba. Barrow parece haber reconocido claramente el carácter inverso de los problemas relativos a tangentes y a cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió, evidentemente, hacer un uso efectivo de esta relación, y sus contemporáneos encontraron sus *Lectiones geometricae* difíciles de entender. Afortunadamente Barrow sabía que Newton mismo estaba trabajando simultáneamente en los mismos problemas, y animó a su joven colega a reunir y publicar sus propios resultados. Barrow fue llamado a Londres en 1669 para ocupar el puesto de capellán del rey Carlos II, y Newton, a propuesta de Barrow mismo, le sucedió en la cátedra lucasiana en Cambridge. Que esta sucesión fue de lo más afortunada se verá en el próximo capítulo.

Bibliografía

Agostini, Amedeo: «L'opera mathematica di Pietro Mengoli», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* (3), 29 (1950), 816-834.

Barrow, Isaac: *Geometrical Lectures*, ed. por J. M. Child (Chicago: Open Court, 1916).

Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

——: *History of the Calculus* (ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: B. G. Teubner, 1892-1908, 4 vols.).

Castelnuovo, G.: *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Bologna: Nicola Zanichelli, 1938).

Chasles, Michel: *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (reed., París, 1875).

Coolidge, J. L.: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945).

——: *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford: Clarendon, 1949).

Haas, Karlheinz: «Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde», *Centaurus*, **4** (1956), 235-284.
Huygens, Christiaan: *Oeuvres complètes* (La Haya: M. Nijhoff, 1888-1950, 22 vols.).
Lehmann, Ernst: *La Hire und seine Sectiones conicae* (Leipzig, 1888).
Loria, Gino: *Storia delle matematiche* (Torino: Sten, 1929-1933, 3 vols.).
Montucla, Etienne: *Histoire des mathématiques* (reed., París, 1799-1802, 4 vols.).
Reiff, R.: *Geschichte der Unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889).
Rigaud, S. P.: *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century* (Oxford, 1841, 2 vols.).
Rosenfeld, L.: «René-Francois de Sluse et le problème des tangents», *Isis*, 10 (1928), 416-434.
Schooten, Frans van: *Geometria a Renato Des Cartes*, 2.ª ed. (Amsterdam, 1659-1661).
Scott, J. F.: *The Mathematical Works of John Wallis, D. D., F. R. S.* (1616-1703) (Londres: Taylor and Francis, 1938).
Scriba, C. J.: *Studien zur Mathematik des John Wallis* (1616-1703) (Wiesbaden: Steiner, 1966).
Smith, D. E. (ed.): *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).
Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (Londres: G. Bell, 1939).
Whewell, William (ed.): *The Mathematical Works of Isaac Barrow* (Cambridge, 1860).
Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im* 16. *und* 17. *Jahrhundert*, trad. R. Meyer (Leipzig: B. G. Teubner, 1903).

Ejercicios

1. ¿Qué razones podrían darse para explicar el hecho de que durante el siglo XVII se prestara tan poca atención a la geometría analítica tridimensional?
2. Explíquese cómo surgió el concepto de curvatura en la obra de Huygens.
3. ¿Por qué razón se descubrieron mucho más tarde las rectificaciones que las cuadraturas de curvas?
4. Explíquense claramente las diferencias entre la inducción matemática o completa y la inducción ordinaria de Wallis.
5. ¿Cuáles fueron las tres maneras más importantes de ganarse la vida los matemáticos durante el siglo XVII? Dense algunos ejemplos de cada una.
6. Menciónense varios matemáticos del siglo XVII que fueran eclesiásticos y compárese el nivel de sus obras con el de otros varios que no fueran eclesiásticos.
7. Demuéstrese por inducción completa que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

   y utilícese este hecho para calcular la suma de los inversos de los números triangulares.
8. Utilícese el método de Gregory y de Mercator para hallar los tres primeros términos de la serie de potencias para arc sen x, de la integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

9. Dadas dos circunferencias concéntricas de radios a y b (con $a>b$), muéstrese cómo se pueden construir los puntos de la elipse $x=a\cos\theta$, $y=b$ sen θ.

10. Justifíquese el método de Hudde sobre las raíces dobles de una ecuación polinómica y sobre los máximos y mínimos relativos.
11. Dibújese la «perla de Sluse» $y^2 = x(8-x)$.
12. Calcúlese la longitud de la curva $y^2 = x^3$ desde $x=0$ a $x=1$.
13. Escríbase $\sqrt{3}$ en forma de fracción continua.
14. Escríbase la raíz positiva de la ecuación $x^2+3x=4$, en forma de fracción continua.
15. Utilícense los cinco primeros términos de la serie de Mercator para calcular aproximadamente ln 1,1.
16. Utilícese el método de Barrow para hallar la subtangente a la curva $y=x^2+2x^3$, en el punto (2,20).
17. Compruébese que es correcta la fórmula de Wallis

$$\frac{0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

para $n=1$, 2, 3 *y* 4.

18. Compruébese la fórmula de Wallis

$$\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

para $n=1$, 2, 3 *y* 4.

*19. Demuéstrese que la evoluta de una cicloide es otra cicloide del mismo tamaño.

*20. Demuéstrese la fórmula de Wallis del producto infinito para $\frac{2}{\pi}$, por el método que se indica en el texto.

*21. Hállese la evoluta de la parábola $y^2=2x$.

*22. Compruébese el teorema de Van Heuraet que afirma que, para puntos próximos sobre una curva dada, la razón de la variación en el arco de la variación en la abscisa es igual a la razón de la normal a la ordenada.

*23. Hállese, utilizando la fórmula de Wallis, la longitud de un arco de la cicloide $x=a(\theta-\text{sen }\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

*24. Hállense las dos rectas contenidas en el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=1$, que pasan por el punto (1, 2, 2).

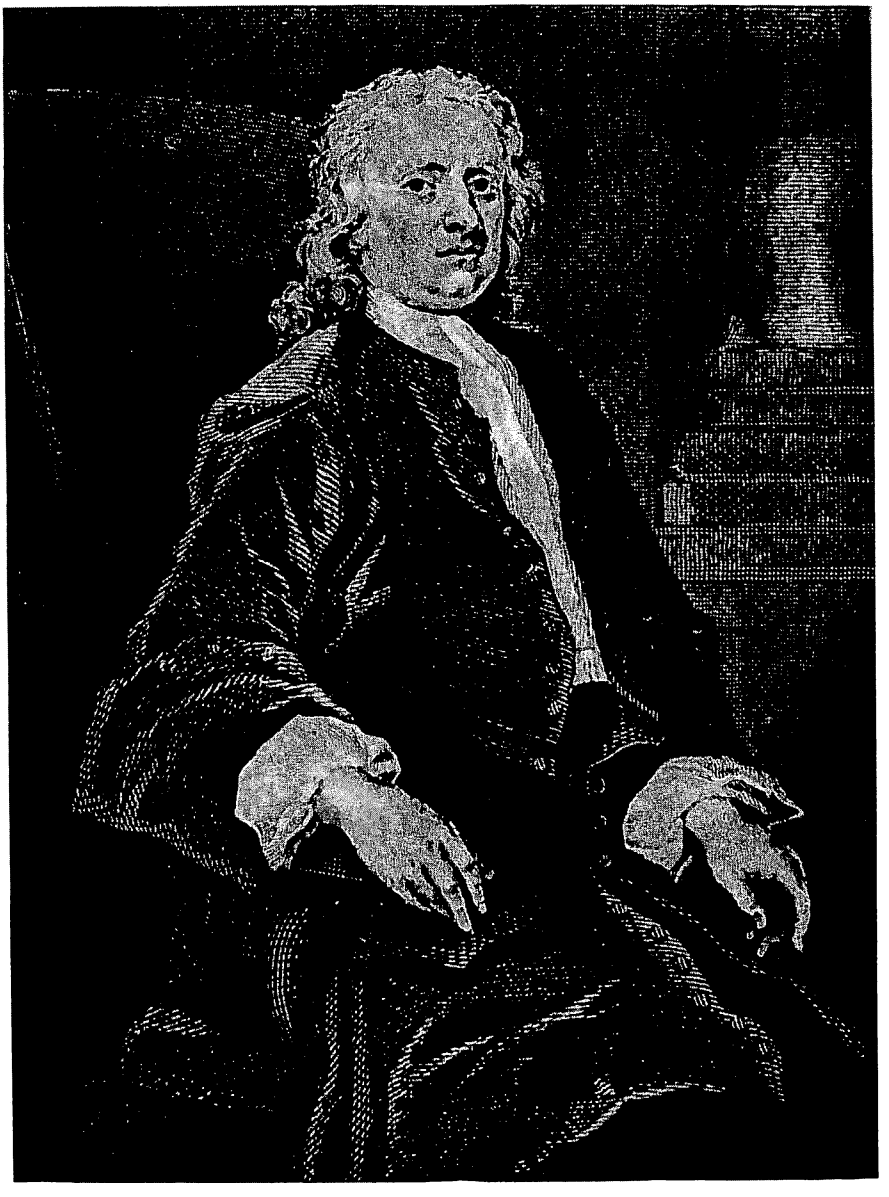
Capítulo XIX
NEWTON Y LEIBNIZ

> Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.
>
> *Leibniz*

1. La obra temprana de Newton

Isaac Newton, el sucesor de Barrow, nació prematuramente el día de Navidad de 1642, el año en que moría Galileo. Su padre había muerto antes del nacimiento del enfermizo Isaac, y su madre se volvió a casar cuando su hijo tenía tres años. El muchacho fue criado por su abuela mientras que asistía a la escuela del lugar, y así fue como un tío suyo por parte de madre, que era graduado por Cambridge, observó en su sobrino una inteligencia inusual y convenció a la madre de Isaac para que matriculase al muchacho en Cambridge. El joven Newton entró así a formar parte del Trinity College en 1661, probablemente sin ninguna intención de hacerse matemático, ya que no había hecho ningún estudio especial de tal materia. Al principio pareció que su mayor interés se inclinaba por la química, y de hecho conservó por ella una gran afición durante toda su vida. Sin embargo, a poco de comenzar su primer curso se compró y se estudió un ejemplar de la obra de Euclides, y poco después leyó la *Clavis* de Oughtred, la *Geometría a Renato Des Cartes* de Schooten, la *Optica* de Kepler, las obras de Viète y, quizá lo más importante de todo, la *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Además, a todo este material formativo hay que añadir las clases que daba Barrow como profesor lucasiano a partir de 1663, y a las que asistió Newton. También se familiarizó con las obras de Galileo, Fermat, Huygens y otros. No es de extrañar, pues, que Newton escribiera más tarde a Hooke: «Si he conseguido ver más lejos que Descartes ha sido porque me he incorporado sobre los hombros de gigantes.»

A finales de 1664 Newton parecía haber alcanzado las fronteras de los conocimientos matemáticos de la época y se encontraba preparado para hacer sus propias contribuciones originales. Sus primeros descubrimientos, que datan de los primeros meses de 1665, se derivan de su habilidad para expresar funciones en términos de series infinitas, la misma cosa que estaba haciendo Gregory en Italia por aquellas fechas, aunque Newton difícilmente podía haberlo sabido. Newton empezó también a pensar durante 1665 en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua o fluentes, tales como longitudes, áreas, volúmenes, distancias, temperaturas, etc. Desde esta época



Sir Isaac Newton.

Newton asoció de manera conjunta estos dos problemas, el de las series infinitas y el de las velocidades de cambio, bajo el nombre común de «mi método».

Durante la mayor parte de los años 1665 y 1666, inmediatamente después de que Newton hubiera conseguido su graduación como *bachelor of arts*, el Trinity College estuvo cerrado por causa de la peste, y Newton regresó a su casa a vivir y a

pensar. El resultado fue el período de descubrimientos matemáticos más fecundo jamás registrado, puesto que fue durante estos meses, tal como declaraba más tarde Newton, cuando hizo cuatro de sus principales descubrimientos: 1) el teorema binomial, 2) el cálculo, 3) la ley de la gravitación y 4) la naturaleza de los colores. El primero de ellos nos parece ahora a nosotros tan natural que resulta difícil ver por qué se retrasó tanto su descubrimiento. Porque hacía ya por lo menos medio milenio que los coeficientes binomiales para potencias enteras eran bien conocidos. Entre otros, Cardano y Pascal se habían dado cuenta perfectamente de la ley de formación sucesiva de dichos coeficientes, pero como no utilizaban la notación exponencial de Descartes no fueron capaces de hacer la relativamente sencilla generalización de un exponente entero a uno fraccionario. Stevin y Girard habían sugerido ya las potencias de exponente fraccionario, pero en realidad no las usaron. Así pues, solamente a partir de Wallis se hicieron de uso común los exponentes fraccionarios, y aun así, ya hemos visto que el mismo Wallis, el interpolador por antonomasia, no consiguió establecer un desarrollo para $(x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ni para $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Quedaba a Newton el dar estos desarrollos como parte de su método de series infinitas.

2. El teorema binomial

El teorema binomial, que fue descubierto en 1664 o 1665, está explicado en dos cartas del año 1676 de Newton a Henry Oldenburg (¿1615?-1677), secretario de la Royal Society, y fue publicado por Wallis (con el debido reconocimiento a Newton) en su *Algebra* de 1685. La forma de expresión que usa Newton (y también Wallis) sorprende al lector moderno por su complicación y oscuridad, pero eso mismo viene a indicar que el descubrimiento no se redujo a una simple sustitución de un exponente entero por otro fraccionario, sino que fue más bien el resultado final de muchos ensayos equivocados por parte de Newton, en conexión con divisiones y raíces de expresiones algebraicas. Por fin Newton descubrió que

> Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema
>
> $$\overline{P+PQ}\,|\,\frac{m}{n}=P\frac{m}{n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\text{etc.}$$
>
> donde $P+PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo P el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de las potencias de $P+PQ$... Por último, en lugar de los términos que van apareciendo en el cociente a lo largo del proceso, utilizaré A, B, C, D, etc. Así, A representa el primer término $P(m/n)$, B el segundo término $(m/n)AQ$, y así sucesivamente[1].

[1] Véase D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), págs. 224-228.

Este teorema fue anunciado por primera vez por Newton, como ya se ha dicho, en una carta del 13 de junio de 1667, dirigida a Oldenburg pero cuyo destinatario final era Leibniz. En una segunda carta del 24 de octubre de ese mismo año, explicaba Newton en detalle exactamente cómo se había visto conducido a su serie binomial: en ella escribe que en la época en que estaba comenzando sus estudios de matemáticas, se encontró en la obra de Wallis con el cálculo de áreas (desde $x=0$ hasta $x=x$) encerradas por curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1-x^2)^n$. Examinando las áreas que se obtenían para exponentes n iguales a 0, 1, 2, 3, etc., descubrió que el primer término siempre era x, el segundo término era $\frac{-0}{3}x^3$ ó $\frac{-1}{3}x^3$ ó $\frac{-2}{3}x^3$ ó $\frac{-3}{3}x^3$, según que el exponente n fuera 0, 1, 2 ó 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, aceptando el principio de «intercálculo» o interpolación de Wallis, supuso Newton que los dos primeros términos que aparezcan en el área para $n=\frac{1}{2}$ deberían ser

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$$

y, de la misma manera, procediendo por analogía, encontró los términos siguientes, siendo los cinco primeros

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$$

Posteriormente comprobó Newton que se podría haber obtenido el mismo resultado deduciendo primero que

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\cdots$$

por medio de una interpolación análoga a la anterior, y después hallando el área por integración de la serie término a término. En otras palabras, Newton no procedió directamente a partir del triángulo de Pascal para obtener el teorema binomial, sino de una manera indirecta a partir de un problema de cuadraturas.

3. Las series infinitas

Es muy probable que este enfoque indirecto de Newton fuese una suerte para el futuro de sus trabajos, ya que a partir de él le pareció claro que se podría operar con series infinitas más o menos de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. La generalidad que encerraba este nuevo análisis infinito la vio Newton completamente confirmada cuando obtuvo la misma serie infinita

extrayendo la raíz cuadrada de $(1-x^2)$ por medio del proceso algebraico usual, para comprobar por último el resultado al multiplicar esta serie por sí misma y obtener el radicando de partida $1-x^2$. De la misma forma descubrió Newton que el resultado obtenido para $(1-x^2)^{-1}$ por interpolación (es decir, el teorema binomial para $n=-1$) coincidía exactamente con el obtenido por medio de la «división larga». Gracias a estos ejemplos había descubierto Newton algo mucho más importante que el teorema binomial: había descubierto que el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas y que estaba regido por las mismas leyes generales. Las series infinitas no debían ser consideradas más como recursos de aproximación únicamente, sino que eran formas alternativas de las funciones que representaban. Tal como expresaba Wallis esta idea en su *Algebra* al describir el teorema binomial de Newton, estas series infinitas o series convergentes «sugieren la designación de alguna cantidad particular mediante una progresión regular o sucesión de cantidades que se aproximen a ella de una manera continua y que, si se prolonga infinitamente, debe terminar por ser igual a ella».

Newton no publicó nunca personalmente el teorema binomial ni tampoco lo demostró, pero sí escribió y terminó publicando varias exposiciones de su análisis infinito. La primera de ellas en el orden cronológico fue el *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrito en 1669 sobre la base de las ideas obtenidas en 1665-1666, pero que no fue publicado hasta 1711. En esta obra escribía:

> Y todo lo que el Análisis ordinario [es decir, el álgebra] lleva a cabo por Medio de Ecuaciones con un número finito de Términos (siempre que ello pueda hacerse), este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por Medio de Ecuaciones infinitas. Así que no he tenido ningún Inconveniente en darle, por analogía, el mismo nombre de *Análisis*. Pues los Razonamientos en éste no son menos seguros que en el otro, ni las Ecuaciones menos exactas, aunque nosotros los Mortales cuya Potencia de razonamiento está confinada dentro de estrechos Límites, no podemos ni expresar ni tampoco concebir todos los Términos de estas Ecuaciones como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que queremos... Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente con justicia al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las Areas, Longitudes, etc., de Curvas[2].

Desde entonces el hombre, animado por el ejemplo de Newton, ya no ha intentado más evitar los procesos infinitos como habían hecho los griegos, al considerarlos desde ahora como legítimos en los razonamientos matemáticos.

El *De analysi* de Newton contenía más cosas, desde luego, que un simple tratamiento de las series infinitas; también es de una gran importancia considerado como la primera exposición sistemática del principal descubrimiento matemático de Newton, el cálculo. El más importante de entre los maestros de Newton, Barrow, era antes que nada un geómetra, y Newton mismo ha sido considerado a menudo como un representante de la geometría pura, pero ya los primeros

[2] El *De analysi* está incluido en las *Opera quae exstant omnia*, ed. por Samuel Horsley (1779-1785).

borradores manuscritos de sus ideas muestran que Newton hizo uso libremente del álgebra y de una gran variedad de notaciones y recursos algorítmicos. Aún no había desarrollado su notación para las fluxiones en 1666, pero ya había formulado un método sistemático de diferenciación[3] que no se distinguía mucho del que publicó Barrow en 1670. Sólo se necesita sustituir la a de Barrow por la qo de Newton y la e de Barrow por la po de Newton para tener la forma inicial que dio Newton al cálculo. Evidentemente, Newton consideraba a o como un intervalo de tiempo muy pequeño, y a po y qo como los incrementos pequeños que experimentan x e y durante dicho intervalo. La razón q/p sería por lo tanto la razón entre las velocidades instantáneas del cambio de y y de x, es decir, la pendiente de la curva $f(x, y)=0$. Por ejemplo, la pendiente de la curva $y^n=x^m$ resultaría de $(y+oq)^n=(x+op)^m$ desarrollando ambos miembros por el teorema binomial, dividiendo por o, y despreciando finalmente los términos que todavía contengan o, con lo que se obtiene el resultado

$$\frac{q}{p}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} \quad \text{o bien} \quad \frac{q}{p}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n-1}}$$

Los exponentes fraccionarios ya no preocupaban a Newton, puesto que su método de series infinitas le ofrecía un algoritmo universal para manejarlos.

Posteriormente, al trabajar con una función explícita solamente de x, Newton abandona sus p y q y usa la o como un incremento pequeño de la variable independiente, notación que también fue utilizada por Gregory. En el *De analysu*, por ejemplo, demuestra Newton que el área bajo la curva $y=ax^{\frac{m}{n}}$ viene dada por

$$\frac{ax^{\frac{m}{n+1}}}{\frac{M}{n+1}}$$

de la manera siguiente: Representemos en primer lugar el área por z y supongamos que

$$z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Sea o el momento o incremento infinitesimal de la abscisa; la nueva abscisa será entonces $x+o$ y el área incrementada será

$$z+oy=\frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

[3] Acerca de algunos de los primeros trabajos de Newton véase *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*, ed. por A. R. Hall y M. R. Hall (1962), y la *Correspondence of Newton*, ed. por H. W. Turnbull (1959-1961). La fuente más importante, con mucho, acerca de los primeros trabajos de Newton es *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (vol. I, 1664-1666, ed. por D. T. Whiteside, Cambridge Univ. Press, 1967). En esta valiosa obra demuestra el editor que Newton fue influenciado en sus comienzos por Descartes, Schooten y Hudde de una manera más intensa que lo que se solía reconocer.

Si aplicamos ahora el teorema binomial y cancelamos los términos iguales

$$z \text{ y } \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$$

dividimos por o y despreciamos los términos que aún contienen o, el resultado será $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Por último, recíprocamente, si la curva es $y = ax^{\frac{m}{n}}$ entonces el área será

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Esta parece ser la primera vez en la historia de la matemática que se calcula un área mediante el proceso inverso de lo que llamamos diferenciación, aunque la posibilidad de tal procedimiento era ya evidentemente conocida por Barrow y Gregory y quizá también por Torricelli y Fermat. Newton puede ser considerado, sin embargo, como el verdadero inventor del cálculo, debido a que fue capaz de explotar la relación inversa existente entre pendiente y área mediante su nuevo análisis infinito. Esta es la razón de que en años posteriores Newton desaprobara enérgicamente cualquier intento de separar su cálculo de su análisis por medio de series infinitas.

4. El *Método de Fluxiones*

Es bien conocido que en la presentación más popular por parte de Newton de sus métodos infinitesimales consideraba a las variables x e y como cantidades que van fluyendo, o «fluentes», de las cuales las cantidades p y q mencionadas anteriormente son las «fluxiones» o velocidades de variación; cuando escribió esta presentación del cálculo, aproximadamente en 1671, reemplazó p y q por las «letras punteadas» x e y. Y las cantidades o fluentes de las cuales x e y son las fluxiones, las representó por x e y; duplicando los puntos o los acentos era posible representar así fluxiones de fluxiones o fluentes de fluentes. Es interesante observar que el título de esta obra cuando fue publicada mucho más tarde, en 1742 (aunque había aparecido una traducción al inglés antes, en 1736), no era simplemente el del método de fluxiones, sino el de *Methodus fluxionum et serierum infinitorum.*

En 1676 escribió Newton aún una tercera exposición de su cálculo bajo el título de *De quadratura curvarum*, y esta vez trató de evitar ambas cosas, tanto las cantidades infinitamente pequeñas como las cantidades fluentes, reemplazándolas por una teoría de las llamadas «razones primeras y últimas». Newton calculaba la «razón primera de incrementos nacientes» o la «razón última de incrementos evanescentes» de la manera siguiente: Supongamos que se quiere hallar la razón entre las variaciones de x y de x^n; llamemos o a un incremento dado a la variable x,

y sea $(x+o)^n - x^n$ el incremento correspondiente a x^n. Entonces la razón de estos incrementos será

$$\frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + \cdots}$$

y para hallar la razón primera y última se debe dejar «desvanecerse» a o, con lo que la razón buscada será $\frac{1}{nx^{n-1}}$. Newton está aquí realmente muy cerca del concepto de límite, aunque la objeción principal que se le podría hacer sería al uso impreciso de la palabra «desvanecerse»: ¿Es que existe realmente una razón entre incrementos que se han «desvanecido»? Newton no clarifica esta cuestión, que iba a continuar preocupando a los matemáticos durante todo el siglo XVIII[4].

5. Los *Principia*

Newton descubrió su método de series infinitas y el cálculo durante los años 1665-1666, y durante la década siguiente escribió, como hemos visto, al menos tres exposiciones sustanciales del nuevo análisis. El *De analysi* circuló entre sus amigos, incluidos John Collins (1625-1683) e Isaac Barrow, y el desarrollo binomial infinito le fue enviado a Oldenburg y a Leibniz, pero Newton no hizo, sin embargo, ningún intento de publicar sus resultados, incluso aunque sabía que Gregory y Mercator había revelado en 1668 sus trabajos sobre series infinitas. La primera exposición del cálculo de Newton que apareció impresa lo fue en 1687 en el *Philosophiae naturalis principia mathematica*, el tratado científico más admirado de todos los tiempos. Se suele decir que este libro presenta los fundamentos de la física y de la astronomía formulados en el lenguaje de la geometría pura; es cierto que una gran parte del libro está escrito en forma sintética, pero también es verdad que hay gran cantidad de pasajes de tipo analítico. Así, la sección I del Libro I se titula, de hecho, «El método de las razones primeras y últimas entre cantidades, con la ayuda del cual demostramos las proposiciones que siguen», la cual incluye el lema I:

> Cantidades, y la razón de cantidades, uue en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales[5].

---

[4] Para más detalles véase C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1939, reimpreso poe Dover en 1959). Los principales tratados de Newton sobre el cálculo han sido reunidos y editados por D. T. Whiteside en *Mathematical Works* (1964), vol. I. Los *Mathematical Papers* de Newton están siendo publicados por D. T. Whiteside en una obra monumental, que se calcula constará de ocho tomos, el primero de los cuales apareció en 1967 editado por la Cambridge University Press.

[5] *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, trad. por Andrew Morte, trad. revisada por Florian Cajory (1934). Los párrafos traducidos de los *Principia* están tomados de esta edición.

Éste es, desde luego, un claro intento de definir el límite de una función. El lema VII de la sección I postula que «la razón última del arco, cuerda y tangente, cualquiera de ellos respecto de cualquier otro, es la razón de la igualdad», y otros lemas tratan de la semejanza de ciertos «triángulos evanescentes». De vez en cuando recurre Newton a lo largo del Libro I a alguna serie infinita, pero no obstante los algoritmos del cálculo no aparecen hasta que el lema II del Libro II nos encontramos con la críptica formulación siguiente:

> El momento de cualquier *genitum* es igual a los momentos de cada uno de sus lados generatrices multiplicados por los índices de las potencias de esos lados y por sus coeficientes de manera continua.

La explicación de Newton muestra que lo que entiende por «genitum» es lo que nosotros llamamos un «término», y que por el «momento» de un genitum entiende un incremento de él infinitamente pequeño. Si representamos por a el momento de A y por b el momento de B, lo que demuestra Newton es que el momento de AB es $AB+bA$, que el momento de A^n es naA^{n-1}, y que el momento de $\frac{1}{A}$ es $\frac{-a}{A^2}$. Estas expresiones sibilinas, que son las equivalentes a las diferenciales de un producto, una potencia y un inverso, respectivamente, constituyen el primer pronunciamiento oficial de Newton sobre el cálculo, y nos permiten entender fácilmente por qué tan pocos matemáticos de la época llegaron a dominar el nuevo análisis en la terminología usada por Newton.

Newton no fue el primero en efectuar diferenciaciones e integraciones, ni tampoco en ver las relaciones que existían entre estas dos operaciones, expresadas en el llamado teorema fundamental del cálculo. Su descubrimiento consistió realmente en la consolidación de estos elementos en un algoritmo general aplicable a todas las funciones, tanto algebraicas como trascendentes. Esto se pone de relieve en un escolio que añade Newton inmediatamente a continuación del lema II citado, en los *Principia:*

> En una carta mía a Mr. J. Collins, con fecha del 10 de diciembre de 1672, después de describir un método de tangentes que yo sospechaba era el mismo que el método de Sluse, que por aquellas fechas no se había publicado aún, añadía yo las palabras siguientes: Este es un caso particular, o mejor un corolario de un método general que se extiende, sin ningún cálculo molesto, no sólo al trazado de tangentes a cualquier línea curva, ya sea geométrica o mecánica o dispuesta de cualquier manera con respecto a líneas rectas u otras curvas, sino también a la resolución de otros tipos más abstrusos de problemas acerca de las curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc.; y tampoco está limitado (como ocurre con el método de Hudde para máximos y mínimos) a ecuaciones que no contengan radicales. Este método lo he entretejido con el otro consistente en trabajar con ecuaciones reduciéndolas a series infinitas.

En la primera edición de los *Principia* reconocía Newton que Leibniz estaba en posesión de un método análogo, pero en la tercera edición de 1726, a continuación



Gottfried Wilhelm Leibniz.

de la agria disputa entre los seguidores de ambos matemáticos acerca de la independencia y la prioridad en el descubrimiento del cálculo, Newton suprimió la referencia al cálculo de Leibniz. Actualmente está ya completamente claro que el descubrimiento de Newton precedió al de Leibniz en unos diez años, así como que Leibniz hizo sus descubrimientos independientemente de los de Newton. Por otra parte, a Leibniz le corresponde la prioridad de su publicación, ya que publicó una exposición de su cálculo en 1684 en las *Acta Eruditorum*, una especie de «revista científica mensual» que se había fundado tan sólo dos años antes.

6. Leibniz y el triángulo armónico

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig, en cuya universidad ingresó a los quince años y obtuvo a los diecisiete su bachillerato en artes. Estudió teología, derecho, filosofía y matemáticas en la Universidad, y se le ha considerado a veces como el último erudito que consiguió unos conocimientos universales para su época. A la edad de veinte años estaba ya preparado para obtener el grado de doctor en derecho, pero le fue denegado por la Universidad debido a su juventud. En vista de ello abandonó Leipzig y consiguió su doctorado en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, en la que se le ofreció un puesto de profesor de derecho que Leibniz rechazó para entrar a continuación en la carrera diplomática, primero al servicio del elector de Mainz, después al de la familia Brunswick, y por último para los de Hannover, a cuyo servicio estuvo durante cuarenta años. Entre los electores de Hannover a los que sirvió Leibniz estaba el que, como biznieto de Jaime I de Inglaterra, sucedió a la reina Ana en 1714 como el rey Jorge I. Leibniz, en su condición de representante gubernamental de importancia, viajó mucho; en 1672 fue a París con la intención de desviar las intenciones conquistadoras de los franceses hacia Alemania por medio de una «guerra santa» dirigida contra Egipto (sugerencia que adoptaría más tarde Napoleón). En París se encontró con Huygens, quien le aconsejó que si deseaba hacerse matemático debería leer los tratados de Pascal de 1658-1659. En 1673 una misión política lo condujo a Londres, donde se compró un ejemplar de las *Lectiones geometricae* de Barrow, se entrevistó con Oldenburg y con Collins y se convirtió en miembro de la Royal Society. En torno a esta visita se iba a centrar más tarde la disputa sobre prioridad, ya que Leibniz pudiera haber visto entonces el *De Analysi* de Newton en forma manuscrita, pero es muy dudoso que en esta época hubiera podido sacar mucho provecho de él, porque Leibniz todavía no tenía en absoluto una buena preparación ni en geometría ni en análisis.

En 1676 Leibniz se encuentra otra vez en Londres, y esta vez lleva consigo su máquina calculadora; fue durante estos años, entre sus dos viajes a Londres, el período durante el que el cálculo diferencial había ido tomando forma. De la misma manera que en el caso de Newton, también en la obra temprana de Leibniz jugaron un papel importante las series infinitas, en este caso las numéricas; Huygens le había planteado el problema de calcular la suma de los inversos de los números triangulares, es decir, de la forma $\dfrac{2}{n(n+1)}$. Leibniz descompuso hábilmente cada término en suma de dos fracciones, haciendo uso de la igualdad

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

de donde se obtiene fácilmente, escribiendo unos cuantos términos, que la suma de los n primeros vale

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

y, por lo tanto, que la suma de la serie infinita es 2. Basándose en este éxito sacó Leibniz ingenuamente la conclusión de que podría sumar prácticamente cualquier serie infinita.

El tema de la suma de series volvió a surgir en conexión con el triángulo armónico, cuyas semejanzas con el triángulo aritmético de Pascal fascinaban a Leibniz.

Triángulo aritmético	*Triángulo armónico*
$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \cdots$	$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \cdots$
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \cdots$	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \cdots$
$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \cdots$	$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \cdots$
$1 \quad 4 \quad 10 \quad 20 \cdots$	$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{60} \cdots$
$1 \quad 5 \quad 15 \cdots$	$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{30} \cdots$
$1 \quad 6 \cdots$	$\frac{1}{6} \cdots$
$1 \cdots$	

En el triángulo aritmético cada elemento, salvo los de la primera columna, es la diferencia entre los dos términos situados debajo de él y debajo de él a su izquierda; en el triángulo armónico cada término que no esté en la primera fila es la diferencia de los dos términos, el que está encima de él y encima de él a su derecha. Además, en el triángulo aritmético cada elemento que no esté ni en la primera fila ni en la primera columna es la suma de todos los términos en la línea superior a la suya y sobre él o a su izquierda, mientras que en el triángulo armónico cada elemento es la suma de todos los términos en la línea inferior a él y a su derecha. Naturalmente el número de términos en este último caso es infinito, por lo que Leibniz tenía mucha práctica en la suma de series infinitas. La serie de la primera fila es la serie armónica, que es divergente; para las restantes filas la serie converge. Los términos de la segunda fila son las mitades de los inversos de los números triangulares, y Leibniz sabía, por lo tanto, muy bien que la suma de esta serie es 1. Los términos de la tercera fila son los tercios de los inversos de los números piramidales

$$\frac{n(n+1)\,(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

y el triángulo armónico indica que la suma de esta serie es $\frac{1}{2}$; los de la cuarta fila son los cuartos de los inversos de los números figurados que corresponden al análogo cuatridimensional del tetraedro, y su suma es $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente para las filas restantes del triángulo armónico. Los números que forman la n-ésima fila diagonal en este triángulo son los inversos de los números que forman la correspondiente diagonal n-ésima del triángulo aritmético, divididos por n.

7. El triángulo diferencial y las series infinitas

Después de sus estudios sobre las series infinitas y el triángulo armónico, Leibniz concentró su atención en la lectura de las obras de Pascal sobre la cicloide y otros aspectos del análisis infinitesimal. En particular, fue al leer la carta de Amos Dettonville sobre el *Traité des sinus du quart de cercle* cuando, según nos refiere Leibniz, se hizo la luz sobre él. Se dio cuenta entonces, aproximadamente en 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las *diferencias* de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias, así como las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen el área. De la misma manera que en los triángulos aritmético y armónico están relacionados los procesos de sumar y restar, así también son problemas inversos en geometría los de cuadraturas y tangentes, que dependen respectivamente de sumas y diferencias. Y el lazo de conexión parecía pasar por el triángulo infinitesimal o «característico», puesto que lo habían usado tanto Pascal en la cuadratura del seno como Barrow en el problema de trazado de tangentes. Comparando el triángulo utilizado en el diagrama de Barrow (fig. 18.4) con el de Pascal (fig. 19.1), se ve con

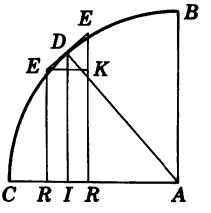


Figura 19.1

facilidad la gran semejanza que llamó tan fuertemente la atención de Leibniz[6]. Si *EDE* es la tangente en *D* a la circunferencia unidad *BDC* (fig. 19.1) entonces, como vio Pascal, *AD* es a *DI* como *EE* es a *RR* o a *EK*. Para un intervalo *RR* muy pequeño el segmento *EE* puede considerarse aproximadamente como el arco de la circunferencia interceptado entre las ordenadas *ER*. Por lo tanto, en la notación que Leibniz iba a desarrollar unos años más tarde, tendríamos $\frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{d\theta}{dx}$, siendo θ el ángulo *DAC*; como sen $\theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$ y cos $\theta = x$, se tiene que $\frac{d\theta = dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Mediante la raíz cuadrada y división larga (o por el teorema binomial, que le había comunicado Newton a Leibniz por medio de Oldenburg, en 1676) es fácil llegar al resultado $d\theta = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots\right)dx$. Y, por último, usando los métodos

[6] Véase *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, trad. por C. I. Gerhardt, ed. por J. M. Child (1920), especialmente págs. 15-16.

de cuadraturas usuales como hacían Gregory y Mercator, se obtiene arc sen $x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$ (o bien, con la pendiente negativa y la constante de integración correspondiente, arc cos $x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \cdots$). Newton también había conseguido el mismo resultado anteriormente y por métodos similares. A partir de aquí era posible encontrar la serie para el sen x mediante el proceso conocido como «inversión», método que fue utilizado al parecer por primera vez por Newton, pero que volvió a descubrir Leibniz: Si ponemos $y = \text{arc sen } x$ o bien $x = \text{sen } y$, y buscamos para x una serie de potencias $x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots + a_n y^n + \cdots$, entonces reemplazando x en la serie de potencias para arc sen x por esta serie en y, tendremos una identidad en y. De esta identidad podemos determinar los coeficientes a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., igualando los coeficientes de los términos del mismo grado. Así pues, la serie resultante sen $y = \frac{y - y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots$ fue conocida tanto para Newton como para Leibniz, y podía obtenerse la serie para cos y a partir de la igualdad $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$. El cociente de las series para el seno y el coseno nos da la serie correspondiente a la tangente, y sus inversas nos dan las otras tres funciones trigonométricas en forma de series infinitas. De una manera análoga, invirtiendo la serie de Mercator, descubrieron Newton y Leibniz la serie para e^x.

8. El cálculo diferencial

Leibniz había llegado hacia 1676 a la misma conclusión a la que había llegado Newton varios años antes, la de que estaba en posesión de un método de gran importancia por su generalidad. Ya fuera una cierta función racional o irracional, algebraica o trascendente (nombre que se debe al mismo Leibniz), siempre se le podían aplicar sus operaciones de formación de sumas y diferencias; se hacía necesario, pues, el desarrollar un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos nuevos problemas. Leibniz tuvo siempre una fina apreciación de la importancia que tiene una buena notación para ayudar a los procesos de pensamiento, y la que eligió en el caso del cálculo era especialmente afortunada. Después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posibles (o diferenciales) de la x y de la y, aunque inicialmente había usado en su lugar $\frac{x}{d}$ e $\frac{y}{d}$ para indicar la disminución del grado. Al principio, por otro lado, escribía simplemente omn. y (es decir, «todas las y») para representar la suma de las ordenadas bajo una curva, pero más tarde utilizó el símbolo $\int y$, y posteriormente aún el $\int y\,dx$, en los que el signo integral es una esbelta *s*, inicial de la palabra suma. La determinación de tangentes exigía el uso del *calculus differentialis*, mientras que el cálculo de cuadraturas requería el *calculus summatorius* o *calculus integralis*, de cuyos nombres latinos provienen nuestras denominaciones en español «cálculo diferencial» y «cálculo integral».

La primera exposición del cálculo diferencial hecha por Leibniz lo fue en 1684, bajo el largo, pero significativo título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur* («Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales»). Aquí da Leibniz las fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(ydx - xdy)}{y^2}$, así como la de $dx^n = nx^{n-1}\,dx$, para productos, cocientes y potencias (o raíces), junto con sus aplicaciones geométricas. Estas fórmulas se obtienen despreciando los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo, si las diferencias mínimas de x e y son respectivamente dx y dy, entonces $d(x \cdot y)$, es decir, la diferencia mínima de $x \cdot y$ es $(x+dx)(y+dy) - x \cdot y$; y como tanto dx como dy son infinitamente pequeños, el término $dx\,dy$ es «infinitamente infinitamente pequeño» y puede despreciarse, con lo que el resultado será $dx \cdot y = xdy + ydx$.

Dos años más tarde publicó Leibniz, de nuevo en las *Acta Eruditorum*, una exposición del cálculo integral en la que se muestra que las cuadraturas son un caso especial del método inverso del de las tangentes. Aquí hacía hincapié Leibniz en la relación inversa que hay entre diferenciación e integración, en el teorema fundamental del cálculo; señalaba también que en la integración de las funciones familiares «está incluida la mayor parte de la geometría trascendente». Donde la geometría de Descartes había excluido en su día todas las curvas no algebraicas, el cálculo de Newton y Leibniz mostraba hasta qué punto es esencial su papel en el nuevo análisis. Si excluyéramos las funciones trascendentes del nuevo análisis, entonces no existirían las integrales de funciones algebraicas como las $\frac{1}{x}$ o $\frac{1}{(1+x^2)}$. Por otra parte, Leibniz pareció darse cuenta, como había hecho Newton, de que las operaciones que se llevan a cabo en el nuevo análisis pueden aplicarse lo mismo a series infinitas que a expresiones algebraicas finitas. En este sentido, Leibniz no fue tan prudente como Newton, puesto que aseguraba que la serie infinita $1-1+1-1+1-\cdots$ es igual a $\frac{1}{2}$. Desde el punto de vista de la reciente teoría de series divergentes no puede decirse que sea necesariamente «erróneo» asignar a la serie como «suma» el valor $\frac{1}{2}$ en este caso; sin embargo, está bien claro que Leibniz se dejó llevar demasiado lejos por el éxito con que funcionaban sus algoritmos y no se detenía ante la inseguridad en que se apoyaban los conceptos. La manera de razonar de Newton estaba mucho más próxima de la fundamentación moderna del cálculo que la de Leibniz, pero la eficacia a la notación diferencial y lo plausible de las ideas de Leibniz provocaban una tendencia a aceptar mejor la idea de diferencial que la de fluxión.

Newton y Leibniz desarrollaron rápidamente los dos su nuevo análisis hasta incluir las diferenciales o fluxiones de orden superior, como en el caso de la fórmula que da la curvatura de una curva en un punto. Probablemente se deba a la falta de claridad por parte de Leibniz acerca de los infinitesimales de orden superior el que

considerase que la circunferencia osculatriz tiene cuatro puntos «consecutivos» o coincidentes de contacto con la curva. La fórmula que nos da la derivada n-ésima de un producto (en lenguaje actual), es decir,

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v^{(0)} + nu^{(n-1)} \cdot v^{(1)} + \cdots + nu^{(1)} \cdot v^{(n-1)} + u^{(0)} \cdot v^{(n)},$$

que tiene un desarrollo análogo al de la potencia de un binomio $(u+v)^n$, donde los exponentes con paréntesis en el desarrollo anterior indican órdenes de diferenciación y no potencias, lleva el nombre de fórmula de Leibniz. También lleva el nombre de Leibniz la regla, dada por él en una memoria de 1692, para hallar la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas planas $f(x, y, c)=0$, eliminando c entre las ecuaciones $f=0$ y $f_c=0$, donde f_c se obtiene diferenciando f parcialmente con respecto a c.

Newton conservó su extraordinaria capacidad matemática hasta el final de su vida; cuando Leibniz en 1716 (el último año de su vida) desafió a Newton a hallar las trayectorias ortogonales de una familia unipamétrica de curvas planas, Newton resolvió el problema en pocas horas y dio un método para hallar trayectorias en general. Unos años antes, en 1696, fue desafiado Newton a encontrar la braquistócrona o curva de descenso más rápido, y al día siguiente de recibir el problema dio la solución, demostrando que la curva es una cicloide. El nombre de Leibniz ha quedado asociado también a la serie infinita $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$, cuya suma constituyó uno de sus primeros descubrimientos matemáticos. Esta serie, que aparece en su cuadratura del círculo, es sólo un caso particular del desarrollo del arco tangente que había sido dado anteriormente por Gregory. El hecho de que Leibniz fuera prácticamente un autodidacta en matemática explica en parte la frecuencia con que aparecen en su obra casos de redescubrimiento de resultados ya conocidos.

9. Simbolismo, determinantes y números imaginarios

La contribución máxima de Leibniz a la matemática fue el cálculo, pero hay otros aspectos de su obra que también tenemos que mencionar. Se le atribuye la generalización del teorema binomial al teorema multinomial, es decir, al desarrollo de expresiones de la forma $(x+y+z)^n$, así como la primera referencia al método de los determinantes en el mundo occidental. En unas cartas de 1693 dirigidas a L'Hospital, explica Leibniz que a veces solía usar números para indicar las filas y las columnas en un sistema de ecuaciones lineales, escribiendo

$$\begin{array}{lll} 10+11x+12y=0 & & 1_0+1_1x+1_2y=0 \\ 20+21x+22y=0 & \text{o bien} & 2_0+2_1x \to 2_2y \sim 0 \\ 30+31x+32y=0 & & 3_0+2_1x+3_2y=0 \end{array}$$

para lo que nosotros escribimos

$$\begin{aligned} a_1+b_1x+c_1y&=0\\ a_2+b_2x+c_2y&=0\\ a_3+b_3x+c_3y&=0 \end{aligned}$$

Si el sistema de ecuaciones es compatible, entonces

$$\begin{aligned} 1_0\cdot 2_1\cdot 3_2+1_0\cdot 2_2\cdot 3_1&\\ 1_1\cdot 2_2\cdot 3_0=1_1\cdot 2_0\cdot 3_2&\\ 1_1\cdot 2_0\cdot 3_1+1_1\cdot 2_1\cdot 3_0&\end{aligned}$$

lo que es equivalente, en términos modernos, a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =0$$

Esta anticipación de los determinantes por parte de Leibniz no fue publicada hasta 1850, y tuvo que ser descubierta de nuevo más de medio siglo más tarde.

Los comentarios que hace Leibniz en la carta que hemos mencionado demuestran que era muy consciente de la importancia que tiene en el análisis la elección de una «característica» o notación que exhiba de una manera adecuada los elementos que aparecen en una situación dada[7]. Leibniz tenía evidentemente en muy alta estima sus contribuciones en materia de notación, debido a su fácil generalización, y se vanagloriaba de haber mostrado que «Viète y Descartes no habían conseguido descubrir todos los misterios» del análisis. Leibniz fue, de hecho, uno de los mayores creadores de notación de la historia, en lo que solamente fue superado por Euler. Así, fue el primer matemático de importancia en usar un punto para representar la multiplicación, y en representar las proporciones de la forma $a:b=c:d$; este uso debido a Leibniz del símbolo : para la división sigue siendo el más extendido actualmente. Además, se debe en gran parte a Leibniz y a Newton el hecho de que el signo $=$ que había introducido Recorde acabase triunfando sobre el $\propto$ de Descartes; también debemos a Leibniz los símbolos $\sim$ para designar «es semejante a» y $\simeq$ para «es congruente con». Y, sin embargo, los mayores triunfos de Leibniz en el campo de la notación fueron sus símbolos para representar las diferenciales y las integrales. Leibniz no fue el introductor de la notación funcional moderna, pero sí se le debe el nombre de «función», con un sentido muy parecido al que usamos hoy.

Entre las contribuciones menores de Leibniz están las que se refieren a los números complejos, en una época en que casi habían sido olvidados, así como sus

[7] Véase Thomas Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (1960), vol. I, págs. 6-10.

consideraciones acerca del sistema de numeración binario. Leibniz factorizó la expresión x^4+a^4 de la forma

$$(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})\,(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$

y demostró que $\sqrt{6}=\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, dando así una descomposición de un número real positivo en términos de números imaginarios que sorprendió a sus contemporáneos. Sin embargo, Leibniz no dio la fórmula para las raíces cuadradas de un número complejo dadas en forma compleja, ni pudo tampoco demostrar su conjetura de que si $f(z)$ es un polinomio real, entonces $f(x+\sqrt{-1}y)+f(x-\sqrt{-1}y)$ también es real. El *status* ambivalente que tenían entonces los números complejos puede ilustrarse muy bien mediante la observación de Leibniz, que fue también un teólogo eminente, de que los números imaginarios son una especie de seres anfibios, a medio camino entre la existencia y la no existencia, que recuerdan a este respecto al Espíritu Santo de la teología cristiana. Sus ideas teológicas volvieron a entremezclarse otra vez en sus concepciones acerca del sistema de numeración binario en aritmética, en el que todo número puede expresarse mediante dos símbolos únicamente, el cero y el uno, al considerar esta situación como un símbolo de la creación, en la que Dios, representado por la unidad, produce todas las cosas de la nada. Tan complacido estaba con esta idea que se la comunicó por escrito a los jesuitas, quienes tenían misioneros en China, con la esperanza de que pudieran usar dicha analogía para convertir al cristianismo al emperador chino, que mostraba ciertas inclinaciones científicas.

10. El álgebra de la lógica

Leibniz tenía tanto de filósofo como de matemático, y así fue que su contribución más importante a la matemática, aparte del cálculo, lo fue en el campo de la lógica. Lo que más le impresionaba del cálculo era el carácter de universalidad que presentaba, y esta misma idea fundamental la aplicó a sus restantes trabajos. Leibniz pretendía reducir todas las cosas a un orden, y así, para reducir todas las discusiones lógicas a una forma sistemática, quería desarrollar una «característica universal» que sirviera como una especie de álgebra de la lógica. Su primer trabajo matemático había consistido en una tesis sobre análisis combinatorio escrita en 1666, y ya en esta temprana fecha tuvo sus primeras ideas de lo que podría ser una lógica formal simbólica. Habría que introducir unos símbolos o ideogramas universales para un pequeño número de conceptos fundamentales necesarios al pensamiento, y a partir de este «alfabeto» de los pensamientos humanos construir las ideas compuestas de la misma manera que se contruyen las fórmulas en matemáticas. Los mismos silogismos debían ser reducidos a un tipo de «cálculo» expresado en un simbolismo universal inteligible en todos los lenguajes. La verdad y el error se convertirían así simplemente en un asunto de cálculo correcto o incorrecto dentro del sistema, y esto permitiría zanjar las interminables controversias filosóficas. Además, se podrían hacer descubrimien-

tos nuevos mediante operaciones correctas, pero más o menos rutinarias con los símbolos, de acuerdo con las leyes del cálculo lógico. Leibniz estaba muy orgulloso de esta idea, y con razón, pero su entusiasmo por ella no encontró el eco deseado. Probablemente sus contemporáneos la consideraran demasiado metafísica, lo mismo que las armonías de sus mónadas en el mejor de todos los mundos posibles, que satirizó Voltaire en su *Candide* de una manera tan ruda como eficaz. Leibniz se destacó en su época por un optimismo sin límites que anunciaba no sólo un lenguaje universal, sino también una iglesia universal mediante la unión de nuevo de católicos y protestantes; a este respecto el optimismo de Leibniz hoy día nos parece injustificado, pero en cambio su sugerencia de un álgebra de la lógica revivió en el siglo XIX, y jugó realmente un papel muy importante en la matemática del siglo pasado.

11. La ley de los inversos de los cuadrados

Como hemos dicho antes, Leibniz fue tanto un científico como un filósofo, y entre él y Huygens desarrollaron el concepto de energía cinética, que acabó formando parte, durante el siglo XIX, del concepto más amplio de energía en general, el cual, por cierto, seguramente hubiera complacido mucho a Leibniz por su universalidad. No obstante, las contribuciones de Leibniz a la ciencia se vieron oscurecidas por las de Newton, que incluían la más grande de las formulaciones matemáticas jamás hechas hasta esta época: la ley de la gravitación universal. En las secciones del comienzo de los *Principia* Newton generalizaba y clarificaba de tal manera las ideas de Galileo sobre el movimiento, que desde entonces nos referimos siempre a estas leyes como «las leyes de Newton del movimiento». A continuación combinaba Newton estas leyes con las leyes astronómicas de Kepler y con la ley de la fuerza centrípeta en el movimiento circular de Huygens, para conseguir establecer el gran principio unificador que dice que dos partículas cualesquiera en el universo, ya sean dos planetas o dos granos de mostaza, o el sol y un grano de mostaza, se atraen mutuamente con una fuerza que varía de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Otros se habían anticipado ya a Newton en la formulación de esta ley, entre los cuales hay que incluir a Robert Hooke (1638-1703), profesor de geometría en el Gresham College y sucesor de Oldenburg como secretario de la Royal Society, pero Newton fue el primero que consiguió convencer al mundo de la veracidad de esta ley, ya que era capaz de manejar las matemáticas que requería la demostración.

Para un movimiento circular uniforme la ley de los inversos de los cuadrados se puede obtener fácilmente a partir de la ley de Newton $f = ma$, de la de Huygens $a = \frac{v^2}{r}$ y de la de Kepler $T^2 = Kr^3$, haciendo observar simplemente que $T \propto \frac{r}{v}$, y eliminando a continuación T y v de estas ecuaciones, para llegar finalmente a $f \propto \frac{1}{r^2}$. Demostrar lo mismo para el caso del movimiento elíptico requiere, sin embargo, considerablemente más habilidad matemática. Además, el demostrar que

la distancia debe medirse entre los centros de los cuerpos resultó ser una tarea tan difícil que según toda evidencia fue este problema de integración el que decidió a Newton a dejar de lado sus trabajos sobre la gravitación durante casi veinte años desde su descubrimiento de la ley en cuestión el año de la peste de 1665-1666. Cuando, por fin, el año 1684 su amigo Edmund Halley (1656-1742), astrónomo y matemático él mismo de no escaso talento y que también conjeturó la ley de los inversos de los cuadrados, urgió a Newton a que diese una demostración, el resultado fue la grandiosa exposición de los *Principia*. Halley quedó tan impresionado con la importancia del libro, que lo hizo publicar a sus expensas.

Los *Principia* contienen muchas otras cosas, desde luego, aparte del cálculo, las leyes del movimiento y la ley de la gravitación. Incluyen, entre otros temas físicos, cosas tales como el estudio de los movimientos de los cuerpos en medios resistentes[8] y la demostración de que, para el caso de vibraciones isotermas, la velocidad del sonido sería la velocidad con que llegaría al suelo un cuerpo que cayese sin resistencia desde una altura igual a la mitad de la que tendría una atmósfera uniforme en la que la densidad del aire fuera la misma que la que hay en la superficie de la tierra y que ejerciera la misma presión[9]. Newton obtenía de sus cálculos que esta velocidad del sonido debería ser de unos 979 pies por segundo, mientras que era bien conocido que los experimentos daban un valor aproximadamente igual a 1.142 pies por segundo; este rompecabezas de los *Principia* quedó sin resolver durante casi un siglo, hasta que Laplace explicó la discrepancia entre los dos valores atribuyéndola al hecho de que las vibraciones sonoras hay que considerarlas en realidad como adiabáticas. Otra de las conclusiones físicas de los *Principia* es la demostración matemática de la incorrección del esquema cosmológico en boga hasta entonces, basado en la teoría cartesiana de los vórtices, ya que Newton consiguió demostrar, al final de su Libro II, que, según las leyes de la mecánica, si los planetas se movieran impulsados por los vórtices, entonces deberían moverse más velozmente en el afelio que en el perihelio, lo que contradice flagrantemente la astronomía de Kepler. Fueron necesarios, sin embargo, más de cuarenta años para que la concepción gravitatoria del universo de Newton, popularizada por Maupertuis y Voltaire, desplazarse en Francia a la cosmología de los vórtices cartesiana.

12. Teoremas sobre cónicas

Quien lea solamente los encabezamientos de los tres libros de los *Principia* puede sacar la impresión errónea de que no contienen nada más que física y astronomía, ya que los tres libros se titulan, respectivamente, I: El movimiento de los cuerpos; II: El movimiento de los cuerpos en medios resistentes, y III: El sistema del mundo. Sin embargo, el tratado contiene también una gran cantidad de matemática pura, sobre todo en lo que se refiere a las secciones cónicas; por ejemplo, en el lema XIX del Libro I, Newton resuelve el antiguo problema del

[8] Véanse, por ejemplo, las proposiciones IX-XVIII del Libro II.
[9] Véanse las proposiciones XLV a L del Libro II.

lugar de las cuatro rectas de Pappus, añadiendo que su solución «no consiste en un cálculo analítico, sino en una composición geométrica tal como exigían los antiguos», referencia indirecta y peyorativa, según podemos sospechar, al tratamiento dado al mismo problema por Descartes.

Newton da preferencia, decididamente, a los planteamientos geométricos a lo largo de los *Principia*, probablemente porque en sus manos estos planteamientos conducían fácilmente a demostraciones elegantes y convincentes en un lenguaje ya universalmente conocido desde antiguo, pero hemos visto también que, cuando le parecía conveniente hacerlo, no dudaba tampoco en recurrir a sus métodos de series infinitas y al cálculo. La mayor parte de la sección II del Libro II, por ejemplo, es analítica. Por otra parte, Newton maneja las propiedades de las cónicas de una manera casi exclusivamente sintética, en vista de que aquí no necesitaba recurrir al análisis. A continuación del problema de Pappus presenta Newton dos maneras de generar orgánicamente las cónicas por medio de intersecciones de rectas móviles, y las utiliza después en la media docena de proposiciones siguientes para mostrar cómo construir una cónica que cumpla cinco condiciones, por ejemplo que pase por cinco puntos, que sea tangente a cinco rectas o que pase por dos puntos dados y sea tangente a tres rectas dadas. Las proposiciones XIX a XXIX del Libro I constituyen realmente un pequeño tratado sobre la descripción orgánica de las cónicas, e incluyen algunos teoremas de una gran belleza; así, en la proposición XXVII, por ejemplo, relaciona Newton las propiedades del cuadrilátero completo con las cónicas, y utilizando el hecho de que los centros de las cónicas tangentes a cuatro rectas están situados en otra recta (que se conoce desde entonces como la recta de Newton) que pasa por los puntos medios de las tres diagonales del cuadrilátero, halla la cónica tangente a cinco rectas.

13. La optica y la teoría de curvas

Los *Principia* pueden considerarse como el mayor monumento a la gloria de Newton, pero no es el único ni mucho menos. Newton era tan sensible a las críticas que, a consecuencia de los ataques de Hooke y otros a su artículo sobre la naturaleza de los colores publicado en las *Philosophical Transactions*[10] de 1672, decidió no publicar más. Este artículo fue de una gran importancia para la física, porque en él anunciaba Newton lo que consideraba como una de las operaciones más singulares de la naturaleza, es decir, el hecho de que la luz blanca no era más que una combinación de rayos de diversos colores, teniendo cada color su propio índice de refracción característico. Es decir, que cuando se forma un espectro al hacer pasar luz blanca a través de un prisma de cristal, el papel del prisma es simplemente el de separar los distintos rayos de acuerdo con sus diversos grados de refrangibilidad. Una concepción tan revolucionaria no era fácil de aceptar para sus contemporáneos, y la controversia que se organizó contrarió profundamente a

[10] Puede verse una reproducción facsímil de este artículo y de otros trabajos de Newton en el libro *Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy*, editado por I. Bernard Cohen (Cambridge, Mass.: Harvard University Press), 1958.

Newton, hasta el punto de que en los quince años siguientes no publicó nada, y sólo la insistencia de Halley lo impulsó a escribir y publicar los *Principia*. Entre tanto, las tres versiones de su cálculo que había escrito Newton entre 1669 y 1676, así como un tratado de óptica que había compuesto, permanecieron en forma manuscrita.

Unos quince años después de publicados los *Principia* murió Hooke, y entonces, por fin, pareció que la aversión de Newton a publicar disminuyó un poco. La *Opticks* apareció en 1704, y en ella figuraban como apéndices dos obras matemáticas, la *De quadratura curvarum*, en la que por fin aparecía impresa una exposición inteligible de los métodos newtonianos del cálculo, y un breve tratado titulado *Enumeratio linearum tertii ordinis* (o «Enumeración de las curvas de tercer grado»)[11]. La *Enumeratio* también estaba escrita ya para el año 1676, y constituye el primer ejemplo de una obra dedicada exclusivamente al estudio de las representaciones gráficas de curvas planas de grado superior en álgebra, Newton cataloga setenta y dos tipos de cúbicas (se omite una media docena de ellos) y dibuja cuidadosamente una curva de cada tipo. Aquí se usan por primera vez y de una manera sistemática los dos ejes de coordenadas, y ya no se discriminan en absoluto las coordenadas negativas. Entre las propiedades interesantes de las cúbicas que figuran en este tratado está el hecho de que una curva de tercer grado no puede tener más de tres asíntotas (lo mismo que una cónica no puede tener más de dos), y que, de la misma manera que todas las cónicas pueden obtenerse como proyección de la circunferencia, así también todas las cúbicas son proyecciones de una «parábola divergente» $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

14. Las coordenadas polares y otros tipos de coordenadas

La *Enumeratio* no fue la única contribución de Newton a la geometría analítica, sino que en su *Method of Fluxions*, cuya versión latina fue escrita hacia el año 1671, había sugerido ya nada menos que ocho nuevos tipos de sistemas de coordenadas. Uno de ellos, la llamada por Newton «Tercera manera» de determinar una curva, consistía en lo que ahora se suelen llamar sus coordenadas bipolares: Si x e y son las distancias de un punto variable a dos puntos fijos o polos, entonces las ecuaciones $x+y=a$ y $x-y=a$ representan respectivamente elipses e hipérbolas, y la $ax+by=c$ representa óvalos de Descartes. Este tipo de coordenadas ya se usa poco en la actualidad, pero el que llama Newton su «Séptima manera; para espirales» es el que conocemos familiarmente hoy con el nombre de coordenadas polares. Llamando x a lo que ahora llamamos θ o ϕ e y a lo que nosotros llamamos ρ o r, halla Newton la subtangente de la espiral de Arquímedes $by=ax$, así como de otras varias espirales. Dada la fórmula para el radio de curvatura en coordenadas rectangulares

$$R = \frac{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{z}$$

[11] Véase W. W. Rouse Ball, «On Newton's Classification of Cubic Curves», en *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22 (1890-1891), págs. 104-143, para una buena exposición del contenido de esta obra.

donde $z=y$, escribe Newton la fórmula correspondiente en coordenadas polares en la forma

$$R \text{ sen } \psi = \frac{y+yzz}{1+zz-z}$$

donde $z=\frac{y}{y}$, y ψ es el ángulo entre la tangente y el radio vector[12]. Newton da también las ecuaciones de la transformación de coordenadas rectangulares a polares, expresándolas en la forma $xx+yy=tt$ y $tv=y$, donde t es el radio vector y v un segmento que representa el seno del ángulo vectorial asociado con el punto (x, y) en coordenadas cartesianas.

15. El método de Newton y el paralelogramo de Newton

En el *Method of Fluxions*, y también en el *De Analysi*, nos encontramos con el «método de Newton» para la resolución aproximada de ecuaciones. Si la ecuación a resolver es $f(x)=0$, hay que localizar en primer lugar la raíz buscada entre dos valores $x=a_1$ y $x=b_1$ tales que en el intervalo (a_1, b_1) estén definidas y no se anulen ni la primera ni la segunda derivada; entonces en uno de los extremos, digamos $x=a_1$, $f(x)$ y $f''(x)$ tendrán el mismo signo; en este caso obtendremos una mejor aproximación $x=a_2$ a la raíz tomando

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

y el procedimiento se puede aplicar de manera iterada tantas veces como sea necesario para obtener una aproximación a_n tan precisa como se desee. Si se tiene $f(x)$ de la forma x^2-a, entonces las sucesivas aproximaciones por el método de Newton son las mismas que las que se obtienen por el antiguo algoritmo para las raíces cuadradas de la antigua Babilonia, y de ahí que este antiguo procedimiento reciba a veces indebidamente el nombre de «algoritmo de Newton». En el caso de que $f(x)$ sea un polinomio, el método de Newton coincide esencialmente con el método chino-árabe llamado «método de Horner», pero la gran ventaja del método newtoniano está en que se puede aplicar igualmente a ecuaciones en las que aparezcan funciones trascendentes.

El *Method of Fluxions* contiene también un diagrama que más tarde se conocería como «el paralelogramo de Newton» y que es útil para los desarrollos en series infinitas y para el trazado de curvas. Dada una ecuación polinómica $f(x, y)=0$, se le asocia una cuadrícula rectangular cuyos nudos van a corresponder a los términos de todos los grados que aparezcan en la ecuación $f(x, y)=0$; en este «paralelogramo» se conectan por medio de segmentos aquellas intersecciones o

[12] Véase, para más detalles, C. B. Boyer, «Newton as an Originator of Polar Coordinates», en *American Mathematical Monthly*, 16 (1949), págs. 73-78.

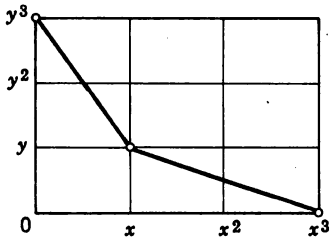


Figura 19.2

nudos que correspondan a términos que aparezcan de hecho en la ecuación y se forma una región poligonal convexa hacia el punto que representa el término de grado cero. En la figura 19.2 hemos dibujado el diagrama correspondiente al «folium de Descartes» $x^3+y^3-3axy=0$. Entonces, las ecuaciones que se obtienen igualando a cero la totalidad de los términos de la ecuación dada cuyos nudos correspondientes estén situados sobre cada uno de los segmentos anteriores, nos darán ecuaciones aproximadas para las ramas de la curva que pasan por el origen. En el caso del folium de Descartes, las curvas aproximadas son $x^3-3axy=0$ (es decir, la parábola $x^2=3ay$) e $y^3-3axy=0$ (o bien la parábola $y^2=3ax$); la representación gráfica de arcos de estas parábolas en las proximidades del origen será de gran ayuda para un bosquejo rápido de la curva que representa la ecuación dada $f(x, y)=0$.

16. La *Arithmetica Universalis*

Los tres libros de Newton más conocidos hoy son los *Principia*, el *Method of Fluxions* y la *Opticks*, hay sin embargo una cuarta obra que a lo largo del siglo XVIII apareció en más ediciones que ninguna de las otras tres[13], y que también contiene contribuciones valiosas. Se trata de la *Arithmetica Universalis*, una obra escrita entre 1673 y 1683 y destinada quizá a los cursos de Newton en Cambridge, que se publicó por primera vez en 1707. Este famoso tratado contiene las fórmulas para las sumas de las potencias de las raíces de una ecuación algebraica, fórmulas conocidas usualmente con el nombre de «identidades de Newton». Cardano sabía ya que la suma de las raíces de la ecuación $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ es $-a_1$, y Viète generalizó un poco este tipo de relaciones. Girard mostró en 1629 la manera de calcular las sumas de los cuadrados de las raíces, así como la suma de los cubos y de las cuartas potencias, pero fue Newton finalmente quien extendió estos resultados para cubrir todas las potencias. Si es $K\leqslant n$, entonces se verifican las dos relaciones

$$S_K+a_1S_{K-1}+\cdots+a_KK=0$$

$$S_K+a_1S_{K-1}+\cdots+a_KS_0+a_{K+1}S_{-1}+\cdots+a_nS_{K-n}=0$$

[13] Se publicaron al menos cinco ediciones en latín (1707, 1722, 1732, 1752, 1761) y tres en inglés (1720, 1728, 1769), y en 1802 apareció una traducción francesa.

Si $K > n$ se tiene la relación

$$S_K + a_1 S_{K-1} + \cdots + a_{n-1} S_{K-n+1} + a_n S_{K-n} = 0$$

donde S_i es la suma de las potencias i-ésimas de las raíces; utilizando estas relaciones de una manera recursiva pueden calcularse fácilmente las sumas de las potencias de las raíces de la ecuación para cualquier exponente natural. En la *Arithmetica Universalis* aparece también un teorema que generaliza la regla de los signos de Descartes para determinar el número de raíces reales de un polinomio, así como una regla para hallar una cota superior para las raíces positivas. Otro teorema afirma que si se corta una curva cúbica por una recta variable que se mueve paralelamente a sí misma, entonces el lugar geométrico de los baricentros de los tres puntos de corte está sobre una recta.

A pesar de sus propias contribuciones al álgebra, Newton parece haber preferido decididamente el análisis geométrico de los antiguos, y en consecuencia la sección más larga de la *Arithmetica Universalis* es la que está dedicada a la resolución de cuestiones geométricas. Aquí se presenta la resolución de la ecuación cúbica con ayuda de una cónica dada, ya que Newton consideraba a las construcciones geométricas mediante curvas distintas de la recta y la circunferencia, como una parte del álgebra más que de la geometría:

> Las Ecuaciones son Expresiones del Cálculo Aritmético y no tiene propiamente su lugar en la Geometría... Oor lo tanto, las secciones cónicas y todas las otras Figuras deben ser excluidas de la Geometría plana, excepto la línea Recta y la Circunferencia. Así pues, todas estas descripciones de las Cónicas *in plano*, a las que tan aficionados son los Modernos, son extrañas a la Geometría.

La mentalidad conservadora que revela aquí Newton está en agudo contraste con sus concepciones radicales en el campo del análisis, y desde luego con las tendencias pedagógicas de mediados del siglo XX.

17. Los últimos años

Los *Principia* fueron el primero de los tratados matemáticos de Newton que se publicó, pero en realidad fue el último en el orden en que fueron escritos. Newton se hizo famoso relativamente pronto, como lo demuestra el hecho de que fuera elegido miembro de la Royal Society en 1672, cuatro años después de que hubiera construido su telescopio reflector (basándose en una idea que también se le había ocurrido a Gregory incluso algo antes). Los *Principia* lograron una aprobación entusiasta y en 1689 Newton fue elegido para representar a Cambridge en el Parlamento Británico, pero, a pesar del generoso reconocimiento que se le tributaba, sufrió Newton en 1692 una depresión y una seria crisis nerviosa. Sintiendo quizá que el continuo esfuerzo de la investigación científica suponía una excesiva tensión nerviosa, aceptó en 1696 el nombramiento de *warden of the mint*, convirtiéndose tres años más tarde en *master of the mint*. Evidentemente Newton

se encontraba a gusto en este cargo y lo consideraba un éxito, en parte, quizá, porque a lo largo de su vida había dedicado buena parte de su tiempo a la investigación química, con un interés especial por la alquimia. También llamaron su atención temas tales como la teología y la cronología histórica; en cuanto a sus creencias religiosas, Newton parece haber sido un cripto-unitario, aunque mostrándose exteriormente de acuerdo con las tendencia trinitarias de su época. Sus obras *Chronology of Ancient Kingdoms Amended* y *Observations upon the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John*, se publicaron después de su muerte.

Los honores se prodigaron sobre Newton durante los últimos años de su vida; en 1699 fue elegido miembro asociado extranjero de la Académie des Sciences de París, en 1703 fue elegido presidente de la Royal Society, cargo que ocupó hasta su muerte, y en 1705 fue elevado a la nobleza por la reina Ana. A pesar de todo, un incidente iba a proyectar una sombra sobre la vida de Newton a partir de 1695; ese año Wallis le comunicó que en Holanda el cálculo se consideraba como un descubrimiento de Leibniz, y en 1699 Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), un oscuro matemático suizo que se había trasladado a Inglaterra, insinuaba en un artículo enviado a la Royal Society que Leibniz pudo haber tomado de Newton sus ideas sobre el cálculo. Ante semejante afrenta Leibniz insistió, en el *Acta Eruditorum* de 1704, en que le correspondía la prioridad en la publicación, y protestó ante la Royal Society contra la acusación de plagio. En 1705 el *De quadratura curvarum* de Newton fue recensionado desfavorablemente (¿por Leibniz quizá?) en el *Acta Eruditorum*, y en 1708 John Keill (1671-1721), profesor en Oxford, defendía vigorosamente las pretensiones de Newton contra las de Leibniz en un artículo en las *Philosophical Transactions*. Los repetidos llamamientos de Leibniz a la Royal Society para que se le hiciera justicia tuvieron finalmente como resultado el que la Royal Society nombrase un comité para estudiar a fondo el asunto y emitir un informe. Este informe del comité, que fue publicado en 1712 con el título de *Commercium epistolicum*, dejaba el tema igual que estaba. Se llegaba a la consecuencia trivial de que Newton era el primer inventor del cálculo, punto que no se había cuestionado seriamente en primer lugar, y por otra parte, el comité daba a entender que reconocía las implicaciones de plagio en términos de documentos que ellos suponían que Leibniz había visto, pero que ahora sabemos que no recibió nunca. El encarnizamiento producido por el sentimiento nacionalista alcanzó un punto tal que en 1726, una década después de la muerte de Leibniz, Newton hizo suprimir de la tercera edición de los *Principia* todas las referencias al hecho de que Leibniz disponía también de un método para el cálculo análogo al suyo.

Como consecuencia de esta desdichada disputa por la prioridad, los matemáticos ingleses se mantuvieron en buena medida aislados de los matemáticos del continente durante la mayor parte del siglo XVIII. Así pues, las siguientes generaciones de matemáticos ingleses sufrieron una especie de castigo a la mala fe de los seguidores de Newton hacia Leibniz, con el resultado de que terminaron por quedarse ampliamente rezagados con respecto a los de la Europa continental. A su muerte, Newton fue enterrado en Westminster Abbey con tal pompa que Voltaire, que asistió al funeral, dijo más tarde: «He visto a un profesor de matemáticas, sólo

porque era grande en su profesión, enterrado como un rey que ha hecho el bien de sus súbditos.» Sin embargo, a pesar del gran reconocimiento que se concedía en Inglaterra al progreso matemático, fue allí precisamente donde el desarrollo de la matemática no consiguió igualar la rápida marcha que adquirió en otros lugares de Europa durante el siglo XVIII.

Bibliografía

Ball, W. W. Rouse: «On Newton's Classification of Cubic Curves», *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22 (1890-1891), 104-143.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

——: *History of the Calculus* (New York: Columbia University Press, 1939); ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Cajori, Florian: «The History of Notations of the Calculus», *Annals of Mathematics* (2), 25 (1929), 1-46.

——: *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 vols.).

Child, J. M. (ed.): *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, trad. de C. I. Gerhardt (Chicago: Open Court, 1920).

De Morgan, Augustus: *Essays on the Life and Work of Newton* (Chicago y Londres: Open Court, 1914).

Gerhardt, C. I.: *Die Entdeckung der differentialrechnung durch Leibniz* (Halle, 1848).

——: *Die Geschichte der höheren Analysis.* Parte I, *Die Entdeckung der höheren Analysis* (Halle, 1855).

Hall, A. R., y M. B. Hall (eds.): *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1962).

Hofmann, J. E.: *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizsche Mathematik während des Aufenthaltes in Paris* (1672-1676) (Munich: Leibniz Verlag, 1949).

——: «Zur Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis im 17. Jahrhundert», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, 1 (1950).

Leibniz, G. W.: *Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, en *Gesammelte Werke*, ed. G. H. Pertz, 3.ª serie, *Mathematik* (Halle, 1849-1863, 7 vols.).

Mahnke, Dietrich: «Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis», *Abbhandlungen der Preussische Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-Mathematische Klasse, 1 (1925), 1-64.

——: «Zur Keimesgeschichte der Leibnizsche Differentialrechnung», *Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der Gesamten Naturwissenschaften zu Marburg*, 47 (1932), 31-69.

More, L. T.: *Isaac Newton, a Biography* (New York: Dover reprint, 1962).

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (New York: Dover reprint, 1960, 4 vols.).

Newton, Sir Isaac: *Opera quae exstant omnia*, ed. Samuel Harsley (Londres, 1779-1785, 5 vols.).

——: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, trad. de Andrew Motte, ed. Florian Cajori (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1934).

——: *Mathematical Works*, ed. D. T. Whiteside (New York: Johnson Reprint, 1964-1967, 2 vols.).

——: *Mathematical Papers*, ed. D. T. Whiteside (Cambridge: Cambridge University Press, 1967).

Rosenthal, A.: «The History of Calculus», *American Mathematical Monthly*, 58 (1951), 75-86.
Sergescu, P.: *Les recherces sur l'infini mathématique jusqu'à l'etablissement de l'analyse infinitésimale* (París, 1949).
Smith, D. E. (ed.): *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).
Toeplitz, Otto: *The Calculus, anGenetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963).
Turnbull, H. W.: *Mathematical Discoveries of Newton* (Glasgow: Blackie, 1945).
—— (ed.): *Correspondence of Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959-1961, 3 vols.).
Wieleitner, H.: *Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Walter de Gruyter, 1911, 2.ª parte, 1.ª mitad).
Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im* 16. *und* 17. *Jahrhundert*, ed. alemana por Raphael Meyer (Leipzig: B. G. Teubner, 1903).

Ejercicios

1. Compárense las vidas de Newton y de Leibniz con respecto a sus recursos y oportunidades de viajar.
2. Compárense las contribuciones de Newton y de Leibniz a la notación matemática.
3. ¿Debía Newton más a Wallis que a Barrow? Explíquese claramente.
4. ¿Debía Leibniz más a Pascal que a Barrow? Explíquese claramente.
5. ¿Están los números imaginarios a medio camino entre la existencia y la no existencia, como creía Leibniz? Explíquese.
6. ¿Cuáles eran las ventajas relativas, en lo que se refiere a la investigación matemática, que tenía Newton sobre Leibniz?
7. Compárese la forma del teorema binomial dada por Newton con la que usamos hoy, y muéstrese que las dos formas son equivalentes.
8. Discútase hasta qué punto los conceptos de razón primera y última de Newton coinciden con la idea moderna de límite.
9. Utilícese el método de las series de Newton para calcular aproximadamente $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^3}\,dx$.
10. Calcúlese, por el primer método de Newton, utilizando o, p y q, la pendiente de la curva $y^2=x^3+6x-6$ en el punto (1, 1)
11. Demuéstrese que si A cambia de $A-\frac{a}{2}$ a $A+\frac{a}{2}$, y si B cambia de $B-\frac{b}{2}$ a $B+\frac{b}{2}$, entonces AB cambiará en $aB+bA$.
12. Muéstrese cómo obtener el momento $3aA^2$ de A^3 utilizando el resultado del ejercico 11.
13. Muéstrese cómo obtener el momento de $\frac{1}{A}$ utilizando el resultado del ejercicio 11.
14. Escríbanse los números que figuran en la siguiente diagonal de los triángulos aritmético y armónico dados en el texto.
15. Compruébese que la suma de los números de la tercera fila del triángulo armónico es $\frac{1}{2}$.
16. Demuéstrese, utilizando el método de Leibniz, que

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

17. Calcúlese la derivada sexta de x^2e^{2x}, utilizando la fórmula de Leibniz.
18. Utilícese la regla de Leibniz para hallar la envolvente de la familia uniparamétrica de rectas $y=cx+c^2$.
19. Explíquese qué es lo erróneo en el argumento de Leibniz acerca de que la suma de la serie infinita alternada $1-1+1-1+1-1+\cdots$ es $\frac{1}{2}$.
20. Utilícese un procedimiento equivalente al método de Leibniz de los determinantes para averiguar si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x-\ 3y&=6\\ 3x+\ 4y&=y\\ x-27y&=9 \end{aligned}$$

es compatible.
21. Calcúlese por el método de Newton la raíz de la ecuación $x^3-2x=5$ que está situada en el intervalo (2, 3), aproximando hasta las centésimas.
22. Calcúlese por el método de Newton la raíz de la ecuación 2 sen $x=x$, que está situada en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, aproximando hasta las décimas.
23. Muéstrese gráficamente por qué puede fallar el método de Newton si $f(a_1)$ y $f''(a_1)$ no tiene el mismo signo.
24. Descríbase la curva cuya ecuación en coordenadas bipolares es $y=mx$, con m constante.

*25. Compruébese la afirmación de Leibniz de que $\sqrt{6}=\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$.
*26. ¿Cuál sería la altura de la atmósfera uniforme que suponía Newton para llegar a una velocidad del sonido de 979 pies por segundo.
*27. Utilícese el paralelogramo de Newton para hallar curvas que aproximen en el origen la curva $y^3-2xy+x^4=0$, y represéntense esas curvas.
*28. Compruébese que las fórmulas de Newton para los radios de curvatura son equivalentes a las que usamos hoy.
*29. Utilícese el método de Newton de inversión de series para obtener los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de e^x a partir de

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

*30. Calcúlese la suma de las quintas potencias de las raíces de la ecuación $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$, utilizando las identidades de Newton.

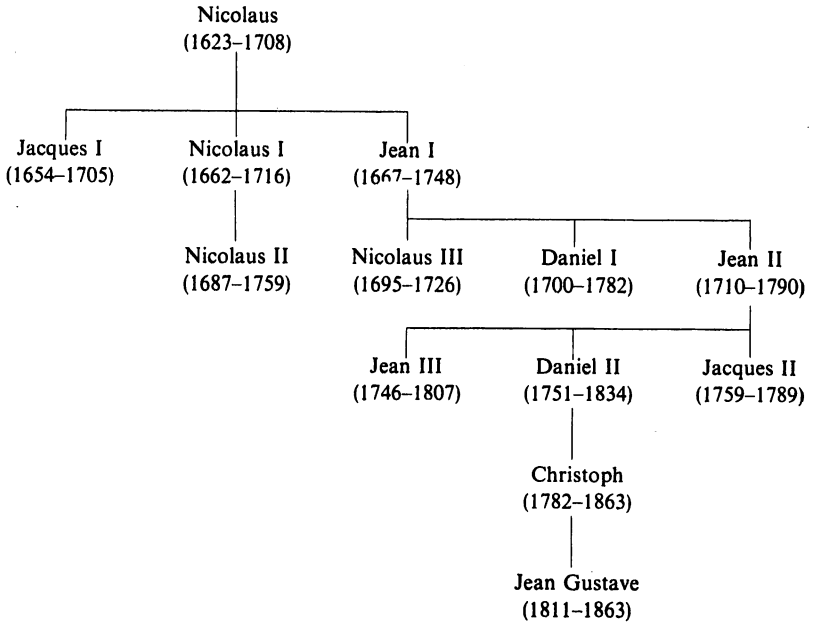
Capítulo XX
LA ERA DE LOS BERNOULLI

> Aquel que sea capaz de digerir una segunda o tercera fluxión, una segunda o tercera diferencia, no necesita ser, creo yo, demasiado remilgado acerca de ninguna cuestión relativa a la Divinidad.
>
> *George Berkeley*

1. La familia Bernoulli

Los descubrimientos de un gran matemático como era Newton no pasan casi nunca automáticamente a formar parte de la tradición matemática general. Pueden muy bien permanecer perdidos largo tiempo para el mundo, a no ser que otros sabios los entiendan y se tomen además el suficiente interés como para estudiarlos desde diversos puntos de vista, clarificarlos y generalizarlos, así como mostrar sus consecuencias. Desgraciadamente Newton era un hipersensible y no se comunicaba libremente con facilidad, y en consecuencia el método de fluxiones no llegó a ser bien conocido fuera de Inglaterra. Leibniz, en cambio, encontró discípulos entusiastas que se mostraron impacientes por aprender todo lo relativo al cálculo diferencial e integral y transmitir a otros estos conocimientos. Entre estos discípulos entusiastas se destacaron dos hermanos suizos, Jacques Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748), conocidos también a menudo por sus nombres traducidos al inglés, James y John (o por sus equivalentes alemanes, Jakob y Johann), cada uno de ellos tan dispuesto a ofender como a sentirse ofendido.

Nunca, a lo largo de la historia de la matemática, ha producido una familia tantos matemáticos famosos como la familia Bernoulli, que había huido en 1583 de los católicos Países Bajos españoles para instalarse en Basilea, atemorizados por la furia española de 1576. Más o menos una docena de miembros de esta familia consiguieron destacar en matemáticas y física (véase el árbol genealógico que incluimos), y cuatro de ellos fueron elegidos corresponsales extranjeros de la Académie des Sciences. El primero que alcanzó una posición destacada en matemáticas fue Jacques Bernoulli, que nació y murió en Basilea, pero que viajó mucho para mantener contactos con sabios de otros países. Su interés por el cálculo infinitesimal se lo despertaron las obras de Wallis y de Barrow, y posteriormente los artículos de Leibniz de 1684-1686 le permitieron dominar los nuevos métodos. Hacia 1690, cuando le sugirió a Leibniz el nombre de «integral», Jacques Bernoulli estaba ya publicando sus propios artículos sobre el tema en el *Acta Eruditorum.* Entre otras cosas, hizo notar en ellos que la derivada de una



Los Bernoulli matemáticos: un árbol genealógico.

función en un máximo o mínimo no necesita anularse, sino que puede tomar un «valor infinito» o estar indeterminada. Jacques Bernoulli se interesó pronto por las series, y en su primer artículo sobre el tema en 1689 dio la bien conocida «desigualdad de Bernoulli», $(1+x)^n > 1+nx$, donde x es real y $x > -1$, $x \neq 0$, y n es un entero positivo mayor que 1, pero lo cierto es que esta desigualdad se puede encontrar ya anteriormente en la séptima lección de las *Lectiones geometricae* de Barrow, de 1670. También se le atribuye frecuentemente la demostración de que la serie armónica es divergente, debido a que las anticipaciones de Oresme y de Mengoli pasaron inadvertidas para la mayor parte de la gente. Jean Bernoulli creía, de hecho, que su hermano había sido el primero en observar la divergencia de la serie armónica.

A Jacques Bernoulli le fascinaban de una manera especial las series de los inversos de los números figurados, y aunque sabía que la serie de los inversos de los cuadrados perfectos es convergente, no fue capaz de hallar la suma de esta serie. Dado que los términos de la serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

son menores o iguales, término a término, que los de la

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots$$

y esta última serie se sabía que era convergente a 2, estaba claro para Bernoulli que la primera también debía ser convergente.

A través de su correspondencia con otros matemáticos de la época, Jacques Bernoulli se encontraba *au courant* de los problemas que se habían hecho famosos, muchos de los cuales resolvió de una manera independiente. Entre estos problemas estaban los de encontrar las ecuaciones de la catenaria, la tractriz y la isócrona, todos los cuales habían sido tratados ya por Huygens y Leibniz. El problema de la isócrona lo que pedía era encontrar la ecuación de una curva plana tal que un objeto que cayese a lo largo de ella lo hiciese con una velocidad vertical uniforme, y Bernoulli demostró que la curva buscada es una parábola semicúbica. Fue en el estudio de problemas tales como éstos como descubrieron los hermanos Bernoulli la potencia del cálculo, y se mantuvieron en estrecho contacto con Leibniz en todo lo relativo a este nuevo campo. Jacques Bernoulli utilizó la palabra «integral» en su trabajo sobre la isócrona en el *Acta Eruditorum* de 1690, y unos años más tarde Leibniz se manifestó de acuerdo en que *calculus integralis* sería un nombre mejor para el inverso del *calculus differentialis* que el de *calculus summatorius*. A las ecuaciones diferenciales contribuyó Jacques Bernoulli con el estudio de la «ecuación de Bernoulli» $y'+P(x)y=Q(x)y^n$, que tanto él como Leibniz y Jean Bernoulli consiguieron resolver, Jean reduciéndola a una ecuación lineal por medio de la sustitución $z=y^{1-n}$. Los hermanos Bernoulli entraron en agudo conflicto uno con otro, precisamente en conexión con un problema de cálculo de variaciones. (Jacques era el quinto de los hermanos, mientras que Jean era el décimo, y el más joven estaba quizá resentido por lo que consideraba como inaceptable condescendencia por parte de su hermano mayor.) Tanto Leibniz como los dos Bernoulli se encontraban buscando una solución al problema de la braquistócrona, es decir, el de encontrar una curva tal que una partícula caiga deslizándose a lo largo de ella de un punto a otro situado más bajo que el primero, pero no en la misma vertical, en el mínimo tiempo posible. Jean encontró una demostración incorrecta de que la curva tenía que ser una cicloide, y retó a su hermano a descubrir la curva buscada; después que Jacques hubo demostrado correctamente que la curva en cuestión era una cicloide, Jean intentó sustituir su propia demostración por la de su hermano.

2. La espiral logarítmica

Jacques Bernoulli estaba extraordinariamente interesado tanto en el cálculo como en el estudio de curvas, y una de estas curvas lleva su nombre; se trata de la «lemniscata de Bernoulli», que viene dada en coordenadas polares por la ecuación $r^2=a\cdot\cos 2\theta$. Esta curva se describe en el *Acta Eruditorum* de 1694 como recordando la figura de un ocho o bien una cinta anudada (*lemniscus*). Sin embargo, la curva que atrajo más fuertemente su imaginación fue la espiral logarítmica. Esta curva había sido mencionada ya por Descartes y había sido rectificada por Torricelli, pero Bernoulli mostró que tenía varias propiedades sorprendentes que no habían sido observadas con anterioridad: 1) la evoluta de una espiral logarítmica es otra espiral logarítmica igual; 2) la curva pedal de una espiral logarítmica con respecto a su polo (es decir, el lugar geométrico de las proyecciones del polo sobre las tangentes a la curva dada) es otra espiral logarítmica igual; 3) la cáustica de reflexión para los rayos que parten del polo (es

decir, la envolvente de los rayos reflejados en puntos de la curva dada) es otra espiral logarítmica igual, y 4) la cáustica de refracción para los rayos que surgen del polo (es decir, la envolvente de los rayos refractados en puntos de la curva) es otra espiral logarítmica igual. Resulta fácil comprender los sentimientos que llevaron a Bernoulli a pedir que grabaran sobre su tumba la *spira mirabilis* junto con la inscripción *Eadem mutata resurgo* («Aún siendo modificada, surjo de nuevo la misma»).

Jacques Bernoulli se vio conducido a un tipo de espiral diferente al repetir el procedimiento de Cavalieri de «doblar» la mitad de la parábola $x^2 = ay$ alrededor del origen para obtener una espiral de Arquímedes, pero con la diferencia de que mientras que Cavalieri había estudiado esta transformación por métodos esencialmente sintéticos, Bernoulli utilizó en cambio coordenadas rectangulares y polares. Newton había usado ya anteriormente las coordenadas polares (quizá tan tempranamente como en 1671), pero la prioridad en la publicación parece corresponder a Bernoulli, que propuso medir las abscisas a lo largo de la circunferencia de un círculo fijo, y las ordenadas radialmente a lo largo de las normales, en el *Acta Eruditorum* de 1691. Tres años más tarde propuso en la misma revista una modificación que estaba más de acuerdo con el sistema de Newton; la coordenada y era ahora la longitud del radio vector del punto, y x era el arco determinado por los lados del ángulo vectorial en una circunferencia de radio a trazada con centro en el polo. Estas coordenadas eran esencialmente lo que hoy escribiríamos como $(r, a\theta)$. Bernoulli, lo mismo que Newton, estaba interesado principalmente en las aplicaciones de este nuevo sistema al cálculo, y dedujo por lo tanto fórmulas para la longitud del arco y para el radio de curvatura de una curva en coordenadas polares. Para el caso de su «espiral parabólica» $r^2 = a\theta$, observó que el cálculo de la longitud del arco mediante la fórmula $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, conduce a una integral en la que figura la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado, primer ejemplo concreto de lo que llamamos ahora una integral elíptica.

3. Probabilidades y series

Los descubrimientos matemáticos de los Bernoulli, igual que pasa con los de Leibniz, se encuentran publicados principalmente en artículos de revistas, especialmente en el *Acta Eruditorum*, pero Jacques Bernoulli escribió también un tratado, ya clásico, titulado *Ars conjectandi* (o «Arte de la conjetura»), publicado en 1713, ocho años después de la muerte del autor. Se trata del primer volumen importante publicado sobre la teoría de probabilidades, ya que el *De ludo aleae* de Huygens sólo era una breve introducción. El tratado de Huygens está reproducido, de hecho, en la primera de las cuatro partes del *Ars conjectandi*, junto con el comentario correspondiente de Bernoulli. La segunda parte del *Ars conjectandi* incluye una teoría general de permutaciones y combinaciones que viene facilitada por el teorema binomial y multinomial. Aquí precisamente nos encontramos con la primera demostración correcta del teorema binomial para exponentes enteros positivos; la demostración está hecha por inducción matemática, método de razonamiento que había redescubierto Bernoulli leyendo la *Arithmetica infinitorum*

de Wallis, y que había publicado en el *Acta Eruditorum* de 1686. Bernoulli atribuye a Pascal el teorema binomial para exponentes arbitrarios, pero tal atribución parece injustificada, ya que todos los indicios apuntan a Newton como el primero que enunció el teorema en su forma general para exponentes racionales cualesquiera, aunque sin demostrarlo, demostración que daría Euler más tarde. En conexión con el desarrollo de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, Jacques Bernoulli propuso el problema del interés compuesto continuo, es decir, el de hallar el límite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dado que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

estaba claro para él que el límite tenía que existir.

La segunda parte del *Ars conjectandi* contiene también el tratamiento de los llamados «números de Bernoulli», que aparecen como coeficientes en una fórmula de recursión para las sumas de potencias de enteros, y que posteriormente han encontrado muchas aplicaciones en otros campos. La fórmula en cuestión la escribe Bernoulli de la forma siguiente[1]:

$$\int n^c=\frac{1}{c+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}An^{c-1}+\frac{c(c-1)\,(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}+$$
$$+\frac{c(c-1)\,(c-2)\,(c-3)\,(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}\ldots$$

donde $\int n^c$ significa la suma de las potencias c-ésimas de los n primeros enteros positivos, y las letras A, B, C, ... (o números de Bernouilli) son los coeficientes de los términos en n (último término) en las expresiones correspondientes a $\int n^2$, $\int n^4$, $\int n^6$, ... (Estos números también pueden ser definidos como $n!$ veces los coeficientes de los términos de exponente par en el desarrollo de Maclaurin de la función $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$. Los números de Bernoulli son útiles para escribir los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Los tres primeros de estos números son, como se puede comprobar fácilmente, $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{30}$ y $C=\frac{1}{42}$.

Las partes tercera y cuarta del *Ars conjectandi* están dedicadas principalmente a problemas que ilustran la teoría de probabilidades. En particular, la cuarta y última parte contiene el famoso teorema que lleva ahora el nombre del autor, sobre el cual habían mantenido correspondencia Bernouilli y Leibniz, es decir, la llamada

1 Véase D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), págs. 85-90, para una traducción de las páginas del *Ars conjectandi* que hacen referencia a los números de Bernoulli. Para las referencias bibliográficas y otros detalles sobre la obra de Jacques Bernoulli, véase el artículo sobre Bernoulli por J. E. Hifmann en el vol. I del *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Scribner's, 1980).

«ley de los grandes números». Este teorema afirma que si p es la probabilidad de *un cierto suceso, si* m es el número de veces que se ha presentado dicho suceso al hacer n experimentos, si $\varepsilon > 0$ es un número positivo arbitrariamente pequeño, y si P es la probabilidad de que se verifique la desigualdad $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$, entonces $\lim_{n \to \infty} P = 1$.

Como apéndice al *Ars conjectandi* nos encontramos con una larga memoria sobre series, en la que, además de la serie armónica y la suma de los inversos de los cuadrados perfectos, estudia Bernoulli la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Bernoulli sabía ya (por comparación de sus términos con los de la armónica) que esta serie diverge, y llama la atención sobre la paradoja de que la «suma» de todos los términos impares es a la «suma» de todos los términos pares como $\sqrt{2} - 1$ es a 1, de lo cual parece deducirse que la suma de los términos impares es menor que la suma de los términos pares; pero esto es imposible porque, término a término, los primeros son mayores respectivamente que los segundos.

4. La regla de L'Hospital

El padre de los famosos hermanos Bernoulli, Nicolaus (1623-1708), había hecho unos planes muy concretos para el futuro de sus hijos, y había tratado de poner obstáculos a que se hicieran matemáticos. El mayor, Jacques, había sido destinado a la carrera eclesiástica, y Jean tenía que haberse hecho comerciante o médico. El hermano más joven, efectivamente, escribió su tesis doctoral en 1690 sobre la efervescencia y la fermentación, pero al año siguiente se interesó tan a fondo en el cálculo, que durante los años 1691 y 1692 escribió dos pequeños libros de texto sobre el cálculo diferencial y el cálculo integral, aunque ninguno de los dos se publicó hasta mucho más tarde. Durante su estancia en París en 1692, instruyó en la nueva disciplina leibniziana a un joven marqués francés, G. F. A. de L'Hospital (1661-1704), y Jean Bernoulli firmó con él un pacto según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviarle a L'Hospital sus descubrimientos en matemáticas para que el marqués los utilizase a su voluntad. Uno de los resultados de este acuerdo fue el de que se haya conocido siempre como «regla de L'Hospital» para límites indeterminados una de las contribuciones principales de Bernoulli, que data del 1694. Jean Bernoulli había descubierto que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$, y existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla ahora tan conocida la incorporó L'Hospital en el primer texto sobre cálculo diferencial que apareció impreso, su *Analyse des infiniment petits*, publicado en París en 1696. Este libro, cuya influencia se extiende a lo largo de la mayor parte del siglo XVIII, se basa en dos postulados: 1) que se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña, y 2) que una curva puede ser considerada como formada por segmentos de línea recta infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva. Estos dos principios difícilmente se podrían considerar aceptables hoy, pero L'Hospital los veía «tan evidentes intrínsecamente que no dejan el menor escrúpulo acerca de su verdad en la mente de un lector atento». Las fórmulas diferenciales básicas para las funciones algebraicas se obtienen a la manera de Leibniz, y se aplican al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, curvaturas, cáusticas y límites en forma indeterminada. El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas trascendentes[2]. L'Hospital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, y su *Traité analytique des sections coniques*, publicado póstumamente en 1707, hizo por la geometría analítica del siglo XVIII lo que el *Analyse* hizo por el cálculo. El *Traité* no era especialmente original, pero tenía una calidad pedagógica que lo convirtió en el tratado estándar sobre cónicas durante la mayor parte del siglo[3].

5. El cálculo exponencial

El *Analyse* de L'Hospital tuvo un gran éxito y se publicó en numerosas ediciones a lo largo del siglo siguiente. En el prólogo admite el autor que debe mucho a Leibniz y a los Bernoulli, especialmente «al joven profesor en Groningen» (donde Jean se había instalado en 1695). Jean Bernoulli le escribió a L'Hospital para agradecerle que lo mencionase en su obra, pero después de la muerte del marqués en 1704, Bernoulli, en cartas a otros colegas se dedicó a acusar al autor prácticamente de plagio. Los contemporáneos consideraron que las reclamaciones de Bernoulli no tenían fundamento, pero la publicación reciente de la correspon-

[2] Para una descripción más detallada del *Analyse*, véase C. B. Boyer, «The First Calculus Textbook», *The Mathematics Teacher*, 39 (1946), págs. 159-167. Parte del material del *Analyse* era indudablemente el resultado de los trabajos propios de L'Hospital, ya que era una matemático competente. La rectificación de la curva logarítmica, por ejemplo, aparece por primera vez, según todos los indicios, en 1692, en una carta de L'Hospital a Leibniz. Se puede encontrar una exposición excepcionalmente detallada de la obra de L'Hospital en J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949), capítulo 12, págs. 147-170.

[3] Para una descripción del contenido de este *Traité*, véase C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), págs. 150-154.

dencia entre Bernoulli y L'Hospital[4], indica que gran parte de la obra era debida evidentemente a Bernoulli, el cual no publicó su propio texto de cálculo diferencial (que fue publicado por fin en 1924), y el texto sobre cálculo integral apareció cincuenta años después de haber sido escrito, en sus *Opera omnia* de 1742. Durante este intervalo de tiempo Jean Bernoulli escribió de manera prolífica sobre muchos aspectos avanzados del análisis —la isócrona, los sólidos de resistencia mínima, la catenaria, la tractriz, trayectorias, curvas cáusticas, problemas isoperimétricos, etc.— consiguiendo así una reputación que hizo que lo llamaran en 1705 a Basilea para cubrir la cátedra que había quedado vacante a la muerte de su hermano. Su correspondencia con Leibniz fue muy intensa, y Bernoulli se adhirió a la causa de Leibniz contra Newton con una agresividad injustificable. Se le podría llamar muy bien el «bulldog de Leibniz», ya que hizo por el cálculo leibniziano lo que haría más tarde Huxley por la teoría de la evolución de Darwin. Su particular falta de tacto lo condujo a una agria controversia con su hermano, y su carácter celoso lo llevó a expulsar de su casa a su hijo Daniel por haber ganado un premio de la Académie des Sciences al que también optaba Jean; a pesar de todo Jean Bernoulli fue un excelente maestro y un investigador infatigable. Se le considera frecuentemente como el inventor del cálculo de variaciones, debido a su planteamiento del problema de las braquistócrona en 1696-1697, y contribuyó también a la geometría diferencial por medio de sus trabajos sobre curvas geodésicas en una superficie. También se le suele atribuir el cálculo exponencial, porque se dedicó a estudiar no sólo las curvas exponenciales simples $y=a^x$, sino también las exponenciales generales tales como $y=x^x$. Para el área bajo la curva $y=x^x$, desde $x=0$ a $x=1$, encontró la sorprendente representación en forma de serie

$$\frac{1}{1^1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots$$

resultado que obtuvo escribiendo $x^x=e^{x\ln x}$, desarrollando esto por medio de la serie de la función exponencial e integrando término a término, utilizando para ello la integración por partes.

6. Los logaritmos de los números negativos

Jean y Jacques Bernoulli redescubrieron los desarrollos de sen $n\theta$ y de cos $n\theta$ en términos de sen θ y cos θ, que ya conocía Viète, y los generalizaron alegremente para valores racionales de n. Jean era consciente también de las relaciones que había entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números

[4] Véase *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, editado por Otto Spiess (1955), vol. I, así como Otto Spiess, «Une édition de l'oeuvre des mathematiciens Bernoulli», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 1 (1947), págs. 356-362.

imaginarios, descubriendo en 1702 la relación siguiente, al estudiar ciertas ecuaciones diferenciales

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

También sostuvo correspondencia con otros matemáticos sobre los logaritmos de los números negativos, acerca de los cuales creía equivocadamente que $\log(-n) = \log n$. Intentó desarrollar la trigonometría y la teoría de logaritmos desde un punto de vista analítico y experimentó con varios tipos de notaciones para representar una función de x, de las que la más parecida a la moderna era ϕx. Su idea, más bien vaga, de lo que era una función venía expresada como «una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias». Entre las numerosas controversias en las que se vio mezclado hubo una con los matemáticos ingleses acerca de si la conocida serie de Brook Taylor (1685-1731), publicada en su *Methodus incrementorum* de 1715, era o no un plagio de la serie de Bernoulli

$$\int y\,dx = yx - \frac{x^2}{2!}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \cdots$$

pero ni Bernoulli ni Taylor sabían que a los dos se les había anticipado Gregory en el descubrimiento de la «serie de Taylor».

7. La paradoja de San Petersburgo

Jean Bernoulli mantuvo siempre un entusiasmo por la matemática tan vivo como su empeño en meterse en controversias. Por otra parte, fue padre de tres hijos, Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) y Jean II (1710-1790), todos los cuales llegaron a ocupar, en su momento, un puesto de profesor de matemáticas: Nicolaus y Daniel en San Petersburgo, y Daniel y Jean II en Basilea. (Otro Nicolaus [1687-1759], primo de los anteriores, ocupó durante algún tiempo la cátedra de matemáticas en la Universidad de Padua, la misma que ocupara tiempo atrás Galileo.) Hubo aún otros Bernoulli que alcanzaron cierta fama en matemáticas[5], pero ninguno de ellos consiguió un prestigio comparable al de los dos hermanos que iniciaron la tradición, Jacques y Jean. El más famoso de la generación joven fue Daniel, cuyos trabajos en hidrodinámica se recuerdan en el «principio de Bernoulli»; en matemáticas se le conoce mejor por su distinción entre

[5] Una relación de ellos puede verse en Smith, *History of Mathematics* (1958), vol. I, págs. 431-433. Entre los Bernoulli «menores» que no hayan sido mencionados todavía están tres hijos de Jean II: Jean III (1744-1807), Daniel II (1751-1834) y Jacques II (1759-1789). El primero de ellos llegó a ser profesor de matemáticas en la Academia de Berlín a la temprana edad de diecinueve años. Otros dos miembros significativos de la familia fueron Christoph Bernoulli (1782-1863), hijo de Daniel II, y Johann Gustav Bernoulli (1811-1863), hijo de Christoph. Véase también J. O. Fleckenstein, *L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIII^e siècle* (*ca.* 1958).

«esperanza matemática» y «esperanza moral», o entre «fortuna física» y «fortuna moral». Daniel supone que un pequeño incremento en los medios materiales de una persona produce un incremento de satisfacción que es inversamente proporcional a dichos medios; en forma de ecuación, $dm = K\frac{dp}{p}$, donde m es la fortuna moral, p es la fortuna física y K es un constante de proporcionalidad. Esto conduce a la conclusión de que, según la fortuna física crece geométricamente, la fortuna moral crece sólo aritméticamente. Esta hipótesis formulada por Bernoulli aparece en los *Commentarii* de la Academia de Ciencias de San Petersburgo de 1730-1731 (publicados en 1738), ya que Daniel Bernoulli pasó los años 1725-1733 en San Petersburgo, antes de regresar de nuevo a Basilea. Sus trabajos sobre probabilidades cubren aspectos variados, incluyendo aplicaciones a los negocios, a la medicina y a la astronomía. Así, por ejemplo, en 1734 compartió con su padre un premio convocado por la Académie des Sciences para un ensayo sobre la aplicación de las probabilidades al estudio de las inclinaciones de las órbitas planetarias; y en 1760 leyó ante la *Académie* de París un trabajo sobre la aplicación de la teoría de probabilidades a la cuestión de las ventajas que presenta la vacunación contra la viruela.

Cuando Daniel Bernoulli se trasladó a San Petersburgo en 1725, también fue llamado su hermano mayor Nicolaus como profesor de matemáticas, y de las discusiones entre ambos surgió un problema que no tardó en ser conocido con el nombre de «paradoja de San Petersburgo», probablemente porque apareció por primera vez en los *Commentarii* de la Academia de esta ciudad[6]. El problema es el siguiente: Supongamos que Pedro y Pablo se ponen de acuerdo para jugar a un juego que se basa en el lanzamiento de una moneda; si en la primera tirada aparece cara, Pablo pagará a Pedro una corona; si en la primera tirada sale cruz y en la segunda sale cara, Pablo pagará a Pedro dos coronas; si aparece cara por primera vez en la tercera tirada, Pablo pagará a Pedro cuatro coronas, y así sucesivamente, de manera que la cantidad a pagar por Pablo a Pedro si aparece una cara pro primera vez en la n-ésima tirada será de 2^{n-1} coronas. Ahora bien, ¿cuánto debería pagar Pedro a Pablo por el privilegio de jugar contra él? La esperanza matemática de Pedro, dada por

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1} + \cdots$$

es evidentemente infinita, a pesar de que el sentido común sugiere una suma finita, y bastante modesta por cierto. Cuando Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), hizo un estudio empírico de la cuestión, halló que en 2.084 partidas del juego mencionado, Pablo tendría que pagar a Pedro 10.057 coronas, lo cual indica que, para una única partida, la esperanza de Pablo, en vez de ser infinita es en

[6] El nombre completo de esta revista era el de *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, la cual contiene muchos artículos de los Bernoulli jóvenes, así como de su colega suizo Euler.

realidad ¡algo menor que 5 coronas! La paradoja que encierra el problema de San Petersburgo fue muy discutida a lo largo del siglo XVIII, dándosele diferentes explicaciones. Daniel Bernoulli intentó resolverla por medio de su principio de esperanza moral, según el cual había que reemplazar las cantidades $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$, por $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 4^{\frac{1}{8}}, 8^{\frac{1}{16}}, \ldots$ Otros prefirieron sugerir, como solución de la paradoja, que el problema es intrínsecamente imposible, en vista del hecho de que la fortuna de Pablo es necesariamente finita, y por lo tanto no podría pagar las sumas ilimitadas que se requerirían en el caso de que se retrasase mucho la aparición de una cara por primera vez[7].

8. Abraham De Moivre

La teoría de probabilidades contó con una gran cantidad de aficionados que se dedicaron a su estudio durante los comienzos del siglo XVIII, entre los cuales uno de los más importantes fue Abraham De Moivre (1667-1754). De Moivre era francés de nacimiento y hugonote, así que poco después de la revocación del Edicto de Nantes se trasladó a Inglaterra, donde hizo amistad con Newton y con Halley, y se dedicó a dar clases particulares de matemáticas. En 1697 fue elegido miembro de la Royal Society, y poco después de las Academias de París y Berlín[8]. Esperaba conseguir también al fin un puesto en la universidad para enseñar matemáticas, pero esto no lo logró nunca, debido, en parte al menos, a no ser de origen inglés, y Leibniz también intentó en vano conseguirle un puesto profesional en Alemania. Sin embargo, y a pesar de las largas horas de clases necesarias para ganarse la vida, De Moivre llevó a cabo una cantidad de investigación considerable. En 1711 publicó en las *Philosophical Transactions* una larga memoria sobre las leyes del azar, que posteriormente amplió a un famoso libro, la *Doctrine of Chances*, que se publicó en 1718 y más tarde en otras ediciones. Tanto la memoria en cuestión como el libro contenían numerosas cuestiones sobre dados, el problema de los puntos (con probabilidades de ganar desiguales), extracción de bolas de diversos colores de una bolsa, y varios otros juegos. Algunos de estos problemas habían aparecido mientras tanto en el *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, que se publicó antes que la *Doctrine of Chances*, pero después que la memoria de De Moivre. En el prólogo a la *Doctrine of Chances* el autor menciona los trabajos sobre teoría de probabilidades de Jacques, Jean y Nicolaus Bernoulli. Las varias ediciones del libro contienen más de cincuenta problemas sobre probabilidades, así como cuestiones relativas a anualidades de vida. Como regla general, De Moivre deriva la teoría de permutaciones y combinaciones de los principios de la teoría de probabilidades, mientras que ahora se acostumbra hacer al revés; por ejemplo, para hallar el número de permutaciones de dos letras tomadas de entre las seis a, b, c, d, e, f, De

[7] Véase I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Cambridge, 1861) para una amplia discusión del problema.

[8] Para una historia de su vida véase Helen M. Walker, «Abraham de Moivre», *Scripta Mathematica*, 2 (1934), págs. 316-333. Véase también artículo «Moivre, Abraham de (1667-1754)», por Agnes M. Clerke, en el *Dictionary of National Biography*, 38 (1894), págs. 116-117.

Moivre razona diciendo que la probabilidad de que una letra concreta sea la primera es $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de que otra letra concreta sea la segunda es $\frac{1}{5}$, y por lo tanto la probabilidad de que estas dos letras aparezcan en ese orden es $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30}$, de lo cual concluye que el número de todas las permutaciones posibles, tomadas de dos en dos, es 30. A De Moivre se le suele atribuir el principio, publicado en la *Doctrine of Chances*, de que la probabilidad de un suceso compuesto es el producto de las probabilidades de los sucesos componentes, pero lo cierto es que esto aparece ya implícitamente en obras anteriores.

De Moivre estaba especialmente interesado en desarrollar para la teoría de probabilidades métodos y notaciones generales, en la forma de lo que él imaginaba como un «álgebra» nueva[9]. Hay una generalización de un problema que había formulado anteriormente Huygens, y que se suele conocer, con toda justicia, como problema de De Moivre: Se trata de hallar la probabilidad de obtener un número de puntos dado al lanzar n dados que tienen cada uno m caras. Algunos de sus resultados en probabilidades se publicaron en un volumen posterior, la *Miscellanea analytica*, en 1730. En un suplemento a esta obra incluyó también De Moivre algunos resultados que aparecen a la vez en el *Methodus differentialis* de James Stirling (1692-1770), obra que se publicó el mismo año que la *Miscellanea analytica* de De Moivre; entre ellos figura la fórmula que nos da la aproximación $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$, que se suele conocer como fórmula de Stirling, aunque la conocía con anterioridad De Moivre, y además una serie, llamada también de Stirling; que relaciona el ln $n!$ con los números de Bernoulli.

Todo parece indicar que De Moivre fue el primero que utilizó la fórmula de las probabilidades $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, resultado que aparece discretamente en un folleto publicado de manera privada en 1733 con el título de *Approximatio ad summan terminorum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expansi.* Esta obra breve, que representa la primera vez que aparece la ley o curva de distribución de los errores, fue traducida por De Moivre mismo e incluida en la segunda edición de su *Doctrine of Chances* en 1738[10]. Hubo otros muchos aspectos de la teoría de probabilidades que atrajeron la atención de De Moivre, incluyendo diversos problemas actuariales; en su obra *Annuities upon Lives*, que inicialmente formaba parte de la *Doctrine of Chances* y después se reimprimió separadamente en más de media docena de ediciones, De Moivre adopta una regla de andar por casa, conocida como «la hipótesis de De Moivre de los decrementos iguales», que afirma que las anualidades se pueden calcular suponiendo que el número de personas de un grupo dado que mueren es el mismo cada año.

---

[9] La obra de De Moivre sobre teoría de probabilidades se expone de una manera muy completa en Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability*, capítulo 9, págs. 135-193.

[10] Está publicada en D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, págs. 566-575.

9. El teorema de De Moivre

La *Miscellanea analytica* es importante no sólo desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, sino también del desarrollo del aspecto analítico de la trigonometría. El bien conocido teorema de De Moivre de que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ no viene dado explícitamente, pero está perfectamente claro a partir de su obra sobre ciclometría y de otros contextos que el autor estaba muy familiarizado con esta relación, probablemente tan pronto como desde 1707. En un artículo publicado en este año de 1707 en las *Philosophical Transactions*, escribe De Moivre que

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta + \sqrt{-1}\cos n\theta)^{1/n} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta - \sqrt{-1}\cos n\theta)^{1/n} = \operatorname{sen}\theta$$

y en su *Miscellanea analytica* de 1730 utiliza una fórmula equivalente a

$$(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^{1/n} = \cos\frac{2K\pi \pm \theta}{n} \pm i \operatorname{sen}\frac{2K\pi \pm \theta}{n}$$

para descomponer $x^{2n} + 2x\cos n\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2x\cos\theta + 1$. Y de nuevo en otro artículo de las *Philosophical Transactions* de 1739 halla[11] las raíces n-ésimas del «binomio imposible» $a + \sqrt{-b}$ por el procedimiento que usamos ahora de tomar la raíz n-ésima del módulo, dividir por n el argumento y sumar múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$.

Al manipular los números imaginarios y las funciones circulares en su *Miscellanea analytica*, De Moivre estuvo muy cerca de identificar las funciones hiperbólicas al extender, en particular, teoremas sobre sectores de círculos a resultados análogos sobre sectores de hipérbolas rectangulares. A la vista de la amplitud y profundidad de sus resultados, no resulta nada extraño que Newton les contestase a los que venían a preguntarle cuestiones de matemáticas durante los últimos años de su vida: «Vayan, vayan a ver a Mr. De Moivre; él sabe esas cosas mejor que yo.» No es sorprendente que De Moivre fuera uno de los comisionados nombrados por la Royal Society en 1712 para informar en torno a las pretensiones de Newton y Leibniz acerca de la invención del cálculo.

De Moivre había escrito ya en las *Philosophical Transactions* de 1697-1698 sobre el «infinitonomio» (es decir, un polinomio infinito o serie de potencias), incluyendo el proceso de cálculo de las raíces de una expresión tal, y en gran medida su elección como miembro de la Royal Society lo fue en reconocimiento por este artículo. El interés de De Moivre por las series y por las probabilidades nos recuerda a los Bernoulli. De Moivre mantuvo una nutrida y cordial

[11] Véase D. E. Smith: *Source Book in Mathematics*, págs. 440-450, para una exposición completa de esta obra.

correspondencia con Jean Bernoulli durante la década 1704-1714, y, de hecho, el mismo De Moivre fue quien propuso a Jean Bernoulli como candidato a la elección para la Royal Society en 1712.

10. Roger Cotes

Uno de los motivos que llevó a De Moivre a interesarse en la factorización de $x^{2n}+ax^n+1$ en factores cuadráticos fue el deseo de completar algunos de los trabajos de Roger Cotes (1682-1716) sobre integración de fracciones racionales por descomposición en fracciones parciales. La vida de Cotes es otro ejemplo trágico de una carrera científica muy prometedora interrumpida repentinamente por una muerte prematura; como Newton comentó en cierta ocasión: «Si viviera Cotes podríamos haber sabido algo.» De joven, primero como estudiante y luego como profesor en Cambridge, empleó gran parte de su tiempo entre 1709 y 1713 en preparar la segunda edición de los *Principia* de Newton, y tres años más tarde moría, dejando tras él algunos trabajos importantes pero incompletos. La mayor parte de estas obras se reunieron y se publicaron póstumamente en 1722 con el título de *Harmonia mensurarum*, título que se deriva del siguiente teorema:

> Si por un punto fijo O se traza una recta variable que corta a una curva algebraica en los puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, y si se toma sobre dicha recta un punto P tal que el inverso de OP sea la media aritmética de los inversos de $OQ_1, OQ_2, \ldots, OQ_n$, entonces el lugar geométrico de P es una línea recta.

La mayor parte del libro está dedicada, sin embargo, a la integración de fracciones racionales, incluyendo la descomposición en factores cuadráticos de x^n-1, trabajo que completaría más tarde De Moivre. La *Harmonia mensurarum* figura entre las primeras obras en las que se reconoce el carácter periódico de las funciones trigonométricas, apareciendo quizá por primera vez en forma impresa los ciclos de las funciones tangente y secante; se trata, pues, de uno de los primeros libros que incluyen un tratamiento sistemático del cálculo aplicado a las funciones circulares y logarítmicas, junto con una tabla de integrales de estas funciones. En este contexto Cotes formula lo que se conoce en los textos de trigonometría como «propiedad de Cotes del círculo», resultado relacionado estrechamente con el teorema de De Moivre, y que nos permite escribir descomposiciones del tipo:

$$x^{2n}+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2n}+1\right)\cdots \cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+1\right)$$

Este resultado se comprueba fácilmente considerando sobre la circunferencia unidad las raíces de índice $2n$ de -1, y multiplicando después las parejas de raíces complejas conjugadas. Aparentemente Cotes fue de los primeros matemáticos que

anticiparon la relación $\ln(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = i\theta$, que ya había dado bajo una forma equivalente en un artículo en las *Philosophical Transations* en 1714, artículo que se reimprimió en la *Harmonia mensurarum*; este teorema se suele ver atribuido a Euler, que fue el primero en darlo en forma exponencial moderna.

11. James Stirling

La matemática inglesa puede vanagloriarse con razón del impresionante número de matemáticos competentes que aparecieron a principios del siglo XVIII, de los cuales De Moivre, Cotes y Stirling en particular fueron amigos de Newton. Stirling publicó en 1717 una obra titulada *Lineae tertii ordinis Neutonianae*, en la que completaba la clasificación de las curvas cúbicas dada por Newton en 1704, añadiendo algunas cúbicas que se le pasaron a Newton, así como algunas demostraciones que faltaban en la *Enumeratio*. Stirling demostraba aquí, entre otras cosas, que si el eje y es una asíntota de una curva de orden n, entonces la ecuación de la curva no puede contener términos en y^n, y una asíntota no puede cortar a la curva en más de $n-2$ puntos. Para las curvas cuya ecuación es una función racional $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, Stirling hallaba las asíntotas verticales igualando $g(x)$ a cero[12]. Y para las secciones cónicas da Stirling un tratamiento completo en el que se determinan analíticamente los ejes, vértices y asíntotas a partir de la ecuación general de segundo grado con respecto a unos ejes de coordenadas oblicuos.

12. Colin Maclaurin

La obra de Newton y de Stirling sobre curvas planas fue continuada por Colin Maclaurin (1698-1746), probablemente el matemático inglés más brillante de la generación siguiente a Newton. Maclaurin había nacido en Escocia y se había educado en Glasgow a partir de los once años, y a los diecinueve era ya profesor de matemáticas en Aberdeen, para pasar a enseñar en la Universidad de Edimburgo media docena de años más tarde. Es interesante hacer notar que durante los siglo XVII y XVIII los matemáticos más importantes en Inglaterra, Suiza y los Países Bajos trabajaban en las universidades, mientras que en Francia, Alemania y Rusia estaban integrados más frecuentemente en las academias que habían fundado poco antes los gobernantes absolutos.

Maclaurin comenzó a publicar artículos en las *Philosophical Transactions* antes de cumplir los veintiún años, y en 1720 publicó dos tratados sobre curvas, la *Geometrica organica* y el *De linearum geometricarum proprietatibus*. El primero de ellos concretamente se hizo muy famoso, y se trata de una obra en la que se extienden los resultados de Newton y de Stirling sobre cónicas, cúbicas y curvas algebraicas de orden superior. Entre los teoremas que contiene hay uno que se

[12] Para una exposición más detallada véase C. Tweedie: *James Stirling, Sketch of His Life and Works* (1922).

conoce usualmente como teorema de Bezout (en honor al matemático que dio posteriormente una demostración, aunque incorrecta): «una curva de orden m intersecta a una curva de orden n en general en mn puntos». En conexión con este teorema Maclaurin llamó la atención sobre una dificultad que se suele conocer como «paradoja de Cramer», en honor a su redescubridor posterior: Una curva de orden n queda determinada en general por $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos, como había señalado Stirling; así pues, una cónica queda determinada unívocamente por cinco puntos y una cúbica por nueve puntos. Sin embargo, por el teorema de Maclaurin-Bezout dos curvas de grado n se cortan en n^2 puntos, luego dos cúbicas distintas se cortan en nueve puntos, y por lo tanto es obvio que $\frac{n(n+3)}{2}$ no siempre determinan una y sólo una curva de orden n. La respuesta a esta paradoja no se consiguió hasta un siglo más tarde, con la obra de Plücker (véase más adelante) que la explicaba.

La *Geometrica organica* contenía una gran variedad de proposiciones interesantes sobre cónicas, incluyendo varias construcciones orgánicas parecidas a algunas dadas por Newton en los *Principia*. También nos encontramos aquí el teorema de Pascal sobre el hexágono inscrito en una cónica, deducido a partir de las propiedades de un cuadrilátero inscrito en la cónica. Maclaurin extiende estas propiedades a curvas de tercer grado, demostrando que si un cuadrilátero está inscrito en una cúbica y si los puntos de intersección de los lados opuestos también están sobre la curva, entonces las tangentes a la cúbica en dos vértices opuestos cualesquiera del cuadrilátero se cortarán en un punto de la curva.

13. La serie de Taylor

A la vista de los sorprendentes resultados obtenidos por Maclaurin en geometría, resulta bastante irónico el que su nombre se recuerde hoy casi exclusivamente en relación con una parte del análisis en la que se le anticiparon una buena media docena de matemáticos. La llamada serie de Maclaurin, que aparece en su *Treatise of Fluxions* de 1742, es sólo un caso especial de la serie más general de Taylor, que fue publicada por Brook Taylor (1685-1731) en 1715 en su tratado *Methodus incrementorum directa et inversa*. Taylor era graduado por la Universidad de Cambridge, entusiasta admirador de Newton y también secretario de la Royal Society. Se interesó mucho por la perspectiva, tema sobre el que publicó dos libros en 1715 y 1719, en el segundo de los cuales dio la primera formulación general del principio de los puntos de fuga[13]. Sin embargo, su nombre se recuerda hoy casi exclusivamente en relación con la serie

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)x+f''(a)\frac{x^2}{2!}+f'''(a)\frac{x^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

[13] El título del libro publicado en 1715 era el de *Linear Perspective*, y el del tratado de 1719 el de *Principles of Linear Perspective*, y los dos fueron publicados en Londres.

que aparece incluida en el *Methodus incrementorum*. Esta serie se convierte en la serie de Maclaurin con la que estamos familiarizados, sustituyendo *a* por cero. La serie de Taylor general había sido conocida mucho antes por James Gregory, y esencialmente también por Jean Bernoulli, pero Taylor no lo sabía. Por otra parte, la serie de Maclaurin había aparecido en el *Methodus differentialis* de Stirling más de una docena de años antes de que fuera publicada por Maclaurin. ¡Verdaderamente Clio, la musa de la historia, a menudo se muestra voluble y caprichosa al atribuir nombres a los teoremas!

14. La controversia en torno al *The Analyst*

El *Methodus incrementorum* contiene también otros temas relativos a partes familiares del cálculo, tales como fórmulas que relacionan las derivadas de una función con las derivadas de la función inversa, por ejemplo $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$, soluciones singulares de ecuaciones diferenciales, así como un intento de hallar la ecuación de la cuerda vibrante. A partir de 1719 Taylor abandonó la investigación matemática, pero para entonces el joven Maclaurin estaba ya justamente comenzando su fructífera carrera. Su *Treatise of Fluxions* no era precisamente otro libro más sobre las técnicas del cálculo, sino un esfuerzo por establecer la materia sobre unas bases sólidas análogas a las de la geometría de Arquímedes. El motivo para ello era el de defender el cálculo de los ataques que se le habían lanzado, especialmente por el obispo George Berkeley (1685-1753) en un opúsculo publicado en 1734 bajo el título de *The Analyst*. En él Berkeley no negaba la utilidad de las técnicas de las fluxiones ni la validez de los resultados obtenidos utilizándolas, pero se había irritado al encontrarse con que un amigo enfermo rechazaba el consuelo espiritual porque Halley lo había convencido de que la doctrina cristiana era insostenible. De ahí que se lea en el subtítulo del *The Analyst:*

> O Discurso Dirigido a un Matemático Infiel [probablemente Halley]. Donde se Examina si el Objeto, Principios e Inferencias del Análisis Moderno se puede Entender de Manera más Clara, o Deducir de Manera más Evidente que los Misterios de la Religión y las Cuestiones de la Fe. «Saca en Primer Lugar la Viga de tu Propio Ojo, y Entonces Podrás Ver Claramente para Sacar la Mota del Ojo de tu Hermano».

La descripción que hace Berkeley del método de las fluxiones es totalmente correcta y sus críticas están bien fundamentadas. En ellas hacía notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables, para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero. Explicado el cálculo de esta manera le parecía a Berkeley simplemente un juego de compensación de

errores, y así «en virtud de un doble error se llega, aunque no a la ciencia, sí a la verdad». Berkeley condena incluso la explicación de Newton de las fluxiones en términos de razones primeras y últimas, negando la posibilidad de una velocidad literalmente «instantánea» en la que los incrementos de la distancia y del tiempo se han desvanecido para dejar en su lugar el cociente sin sentido 0/0. En palabras del mismo Berkeley:

> ¿Y qué son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades desaparecidas?[14].

Para contestar a tales críticas fue para lo que Maclaurin escribió su *Treatise of Fluxions* en el estilo riguroso de los antiguos, pero al hacerlo así utilizó un enfoque geométrico que es menos revelador de los nuevos desarrollos que iban a caracterizar el análisis que ya se estaba haciendo en la Europa continental. Quizá esto no deje de tener que ver con el hecho de que Maclaurin fue prácticamente el último matemático importante en Inglaterra durante el siglo XVIII, época en la que el análisis, más que la geometría, estaba en la cresta de la ola. Sin embargo, el *Treatise of Fluxions* contenía un cierto número de resultados relativamente nuevos, incluido el criterio de la integral para la convergencia de series, que había sido formulado anteriormente por Euler en 1732, pero había pasado desapercibido en general.

15. La regla de Cramer

Si hoy se recuerda el nombre de Maclaurin asociado a una serie que él no fue el primero en descubrir, la cosa se compensa con el hecho de que uno de los descubrimientos que hizo realmente lleve el nombre de otro matemático que lo descubrió también y lo publicó posteriormente. La conocida «regla de Cramer», publicada por Gabriel Cramer (1704-1752) en 1750, fue descubierta por Maclaurin probablemente en fecha tan temprana como 1729, año en que se encontraba escribiendo un libro de álgebra que sirviese como comentario a la *Arithmetica universalis* de Newton. El *Treatise of Algebra* en cuestión, de Maclaurin, se publicó en 1748, dos años después de la muerte del autor, y en él aparece la regla para resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas por medio de determinantes, dos años antes que en la *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* de Cramer. La solución en y del sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

[14] Para una discución más amplia de la controversia del *Analyst*, véase Florian Cajon: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (1919). Cf. *The Works of George Berkeley*, ed. por A. C. Fraser (Oxford, 1901, 4 vols.), especialmente el tomo III.

viene dada como

$$y=\frac{af-dc}{ae-db}$$

y la solución para z en el sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases}$$

viene expresada por

$$z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$$

y Maclaurin explica que el denominador consiste, en el primer caso, en «la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos, tomados de los órdenes que afectan a las dos cantidades incógnitas», y en el segundo caso, «de todos los productos que se pueden formar a partir de los tres coeficientes opuestos tomados de los órdenes que afectan a las tres cantidades incógnitas». (Maclaurin había explicado previamente que llamaría cantidades «del mismo orden a aquellas que están multiplicadas por la misma cantidad incógnita en las diferentes ecuaciones... así como aquellas... que no afectan a ninguna cantidad incógnita. Y se llaman coeficientes opuestos los que se toman cada uno de una ecuación distinta y de un orden de coeficientes diferente».) Los numeradores en las fórmulas de Maclaurin difieren de los denominadores solamente por la sustitución en los segundos de los términos constantes por los coeficientes de los términos en que figura la incógnita que se está calculando. Maclaurin explica también cómo se puede escribir análogamente la solución para un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, «anteponiendo signos opuestos a aquellos términos en los que entran los productos de dos coeficientes opuestos». Esta explicación muestra que Maclaurin tenía en la mente algo semejante a la regla de alternancia de los signos que ahora se formula usualmente en términos del principio de las inversiones y las permanencias en una permutación[15].

El *Treatise of Algebra* de Maclaurin gozó de una popularidad todavía mayor que la de sus otras obras, publicándose una sexta edición en Londres en 1796. Sin embargo, todo parece indicar que se aprendió más sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de Cramer que de Maclaurin, principalmente, sospechamos, debido a la superioridad de la notación de Cramer, en la que los coeficientes

[15] Para más referencias véase C. B. Boyer, «Colin Maclaurin and Cramer's Rule», *Scripta Mathematica*, 27 (1966), págs. 377-379. Sobre otros aspectos de la obra de Maclaurin véase C. Tweedie, «A study of the Life and Writings of Colin Maclaurin», *Mathematical Gazette*, 8 (1915-1916), págs. 132-151; 9 (1919), págs. 303-305, y H. W. Turnbull, *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin* (1951).

literales venían afectados de superíndices, lo cual facilitaba mucho la determinación de los signos de los productos. Por otra parte, por los años en que apareció el *Algebra* de Maclaurin la matemática en Inglaterra había iniciado ya su cuesta abajo, y los matemáticos continentales no prestaban apenas atención a los autores ingleses. Y recíprocamente, los matemáticos ingleses manifestaban una decidida indiferencia por los trabajos de los analistas continentales, acentuando de esta manera la disparidad creciente en los resultados obtenidos a partir de la época de Maclaurin.

Maclaurin tomó parte muy activa en la oposición al «Bonnie Prince Charlie», cuando el joven Pretendiente marchó sobre Edimburgo en 1745 al frente de un ejército de Highlanders. El entonces profesor de matemáticas de cuarenta y siete años pudo escapar cuando por fin fue tomada la ciudad, pero el régimen de la guerra de trincheras y después la huida a York fueron demasiado para él, y murió en 1746. De Moivre moría ocho años más tarde a la venerable edad de 88 años, y a partir de entonces la matemática inglesa sufrió un largo eclipse.

16. Las transformaciones de Tschirnhaus

La Europa continental no había escapado a las controversias sobre los fundamentos del cálculo, pero el efecto se hizo sentir aquí menos intensamente que en Inglaterra. Ya en vida de Leibniz se habían formulado objeciones al nuevo cálculo, debidas a un noble sajón, el conde Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708). Su nombre ha quedado perpetuado, no obstante, en las «transformaciones de Tschrinhaus» del álgebra, por medio de las cuales pretendía encontrar un método general para resolver ecuaciones algebraicas de grado superior. Una transformación de Tschirnhaus de una ecuación polinómica $f(x)=0$ es una de la forma $y=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde g y h son polinomios y h no se anula para ninguna raíz de $f(x)=0$; las transformaciones mediante las cuales resolvían la ecuación cúbica Cardano y Viète eran casos particulares de estas transformaciones. En el *Acta Eruditorum* de 1683 demostraba Tschirnhaus (o Tschirnhausen) que un polinomio de grado $n>2$ puede reducirse por medio de sus transformaciones a una forma en la que los coeficientes de los términos de grado $n-1$ y $n-2$ son los dos cero. Para la cúbica encontró una transformación de la forma $y=x^2+ax+b$ que reducía la cúbica general a la forma $y^3=K$, y otra transformación análoga reducía la cuártica a la forma $y^4+py^2+q=0$, descubriendo así maneras nuevas de resolver tanto la ecuación cúbica como la cuártica.

Tschirnhaus tenía la esperanza, basada en estos éxitos, de poder desarrollar algoritmos análogos que redujeran la ecuación general de grado n a una ecuación «pura» de grado n, que contuviera sólo el término de grado n y el de grado cero o término independiente. Las transformaciones de Tschrinhaus constituyeron la contribución más prometedora a la resolución de ecuaciones algebraicas durante el siglo XVII, pero, no obstante, la eliminación del segundo y tercer término mediante tales transformaciones resultó ser totalmente inadecuada para la

resolución de la quíntica general. Incluso cuando el matemático sueco E. S. Bring (1736-1798) demostró en 1786 que se podía encontrar una transformación de Tschirnhaus que reduce la quíntica general a la forma $y^5+py+q=0$, la solución siguió mostrándose igual de esquiva. En 1834 G. B. Jerrard (†1863), un matemático inglés, demostró que se puede hallar una transformación de Tschirnhaus que elimina los términos de grados $n-1$, $n-2$ y $n-3$ de cualquier ecuación polinómica de grado $n>3$, pero la potencia del método queda fuertemente limitada[16] por el hecho de que las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco no son, en general, resolubles algebraicamente. Así pues, la creencia de Jerrard de que podría resolver todas las ecuaciones algebraicas era completamente ilusoria.

Tschirnhaus era un hombre con amplios conocimientos e intereses. Había estudiado en Leyden y sirvió en el ejército holandés durante un cierto tiempo; más tarde pasó una temporada en Inglaterra; fue huésped ocasionalmente de Georg Mohr, el «Euclides danés»; visitó París varias veces, y allí fue elegido en 1682 miembro de la Académie des Sciences, y también instaló en Italia un taller de vidrio para continuar sus experimentos sobre la luz. Se le conoce como descubridor de las cáusticas de reflexión (o catacáusticas) que llevan su nombre. Precisamente fue su informe sobre estas curvas, las envolventes de una familia de rayos que partiendo de un foco puntual se reflejan en una curva, lo que dio como resultado su elección para la Académie de París; a partir de aquí, el interés en las cáusticas y otras familias de curvas análogas fue recogido por Leibniz, L'Hospital, Jacques y Jean Bernoulli y otros. El nombre de Tschirnhaus está ligado también a la «cúbica de Tschirnhaus» $a=r\cos^3\frac{\theta}{3}$, ecuación generalizada posteriormente por Maclaurin a la $r^n=a\cos n\theta$, para n racional. A veces se encuentra citado a Tschirnhaus como el «descubridor de la porcelana», debido a que fue uno de los que ayudaron a instalar los talleres de cerámica en Dresden para el Elector de Sajonia, a comienzos del siglo XVIII, pero lo cierto es que la porcelana venía produciéndose en China desde mucho antes de que se comenzara a fabricar en Europa.

Tschirnhaus se mantuvo en contacto con Oldenburg y con Leibniz durante los años de formación del cálculo, y contribuyó con muchos artículos al *Acta Eruditorum* desde que se fundó en 1682. Sin embargo, algunos de los trabajos de Tschirnhaus fueron escritos demasiado deprisa y publicados prematuramente, y los hermanos Bernoulli, entre otros, señalaron algunos de los errores. En un cierto momento Tschirnhaus rechazó los conceptos básicos del cálculo y el uso de las series, insistiendo en que los métodos puramente algebraicos serían suficientes. En Holanda se suscitaron algunas objeciones al cálculo de Leibniz, en 1694-1696, por parte del médico y geómetra Bernard Nieuwentijt (1654-1718), que publicó tres tratados durante estos dos años en Amsterdam en los que reconocía la corrección de los resultados, pero criticaba, sin embargo, la vaguedad de las cantidades evanescentes de Newton y la falta de una definición clara y precisa de las diferenciales de orden superior en Leibniz.

[16] Véase L. E. Dickson, *Modern Algebraic Theories* (New York: B. H. Sanborn, 1930), págs. 186-197, para las aplicaciones de la transformación de Tschirnhaus.

17. La geometría analítica tridimensional

Leibniz se había defendido en 1695 en el *Acta Eruditorum* de su «superminucioso» crítico[17], y una refutación más detallada de Nieuwentijt apareció en 1701, procedente de Suiza y debida a la pluma de Jacob Hermann (1678-1733), discípulo entusiasta de Jacques Bernoulli. Un buen ejemplo de la movilidad de los matemáticos a principios del siglo XVIII, Hermann enseñó matemáticas en las universidades de Padua, Frankfort del Oder y San Petersburgo, para finalizar su carrera docente en la Universidad de Basel, su ciudad natal. En los *Commentarii Academiae Petropolitanae* correspondientes a los años 1729 a 1733 se publicaron artículos de Hermann sobre geometría analítica tridimensional y sobre las coordenadas polares, como continuación de los resultados debidos a los dos más viejos de los hermanos Bernoulli. Mientras que Jacques Bernoulli había aplicado de una manera bastante indecisa las coordenadas polares al estudio de las espirales, Hermann llegó a dar también las ecuaciones en polares de curvas algebraicas, así como las ecuaciones del cambio de coordenadas rectangulares a polares. Hermann utilizó además las coordenadas tridimensionales de una manera más decidida a como lo había hecho Jean Bernoulli, quien ya en 1692 se había referido por primera vez a la utilización de las coordenadas en geometría con el nombre de «geometría cartesiana». Bernoulli había sugerido, en efecto, si bien de una manera bastante tímida, el interés de extender la geometría cartesiana a tres dimensiones, y Hermann aplicó de manera efectiva las coordenadas espaciales a problemas sobre planos y a varios tipos de superficies cuadráticas. En estos estudios se advierte el comienzo de la utilización de los ángulos direccionales al demostrarse, por ejemplo, que el seno del ángulo que forma el plano $az+by+cx=c^2$ con el plano Oxy viene dado por

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

18. Michel Rolle y Pierre Varignon

En Francia, lo mismo que pasaba en Inglaterra, Alemania y Holanda, había un grupo de matemáticos en la Académie des Sciences, especialmente poco después del 1700, que cuestionaba la validez de los nuevos métodos infinitesimales que había expuesto L'Hospital pocos años antes. Entre ellos estaba Michel Rolle (1652-1719), cuyo nombre se recuerda hoy unido al llamado «teorema de Rolle» que publicó en 1691 incluido en un oscuro libro sobre geometría y álgebra titulado *Méthode pour résoudre les égalitéz*, teorema que afirma: Si una función f es diferenciable en el intervalo (a, b) y si $f(a)=f(b)=0$, entonces $f'(x)=0$ tiene al menos una raíz real entre a y b. Este teorema, que tantas aplicaciones tiene en el cálculo, fue dado por Rolle sólo de un modo incidental al tratar de un método para resolver ecuaciones de una manera aproximada[18].

---

[17] Véase, para más detalles, C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1959), págs. 213-215.

[18] Una traducción del francés del párrafo en que aparece el teorema de Rolle puede verse en D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, págs. 251-260.

Al ataque de Rolle al cálculo, en el que lo describía como una colección de ingeniosas falacias, contestó enérgicamente Pierre Varignon (1654-1722), «el mejor amigo de Jean Bernoulli en Francia», y que también mantuvo correspondencia directamente con Leibniz. Bernoulli se limitó a responder a Rolle diciéndole que no había entendido la materia, pero Varignon intentó clarificar la situación demostrando indirectamente que los métodos infinitesimales podían reconcilarse con la geometría de Euclides. La mayor parte de los miembros del grupo que se oponía al cálculo eran grandes admiradores de la antigua geometría sintética, así que la controversia que tuvo lugar en la Académie des Sciences recuerda una de las disputas literarias de la misma época en torno al tema de siempre, «antiguos *versus* modernos».

Varignon no esperaba llegar a hacerse matemático, lo mismo que les pasó a varios de los Bernoulli, sino que estaba destinado a seguir una carrera eclesiástica, pero cuando cayó en sus manos de manera accidental una copia de los *Elementos* de Euclides, cambió de idea y llegó a ocupar una cátedra de matemáticas en París y a ser elegido miembro de la Académie des Sciences. En las *Memorias* de la Académie del año 1704 desarrolló y extendió el uso de las coordenadas polares que había hecho Jacques Bernoulli, incluyendo una clasificación detallada de las espirales obtenidas a partir de curvas algebraicas tales como las parábolas e hipérbolas de Fermat, al interpretar la ordenada como el radio vector y la abscisa como el arco orientado correspondiente al ángulo polar. Varignon, que fue uno de los primeros matemáticos franceses que se dieron cuenta de la importancia del cálculo, preparó un comentario sobre el *Analyse* de L'Hospital, pero esta obra sólo apareció en 1725, cuando ambos contendientes ya habían muerto, bajo el título *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniments petits.* Varignon era un escritor más cuidadoso que L'Hospital, y llamaba la atención sobre el hecho de que no debían utilizarse las series sin investigar previamente el comportamiento del término del resto. Como consecuencia de ello le preocuparon mucho los ataques al cálculo, y así escribía a Leibniz en 1701 acerca de sus diferencias con Rolle:

> El abate galés, que está realmente detrás de todo el asunto, está extendiendo la especie aquí [en París] de que vos habéis explicado que lo que entendéis por «la diferencial» o «lo infinitamente pequeño», es una cantidad muy pequeña, pero no obstante definida y constante... Yo, por otra parte, he llamado a una cosa infinitamente pequeña o la diferencial de una cantidad, si tal cantidad es inagotable en comparación con la cosa misma[19].

El punto de vista que expresaba aquí Varignon no está nada claro, pero al menos reconoce que una diferencial debe ser una variable y no una constante. La respuesta de Leibniz desde Hannover en 1702 trata de evitar disputas de tipo metafísico, pero su uso de la frase «cantidades incomparablemente pequeñas» para caracterizar a las diferenciales difícilmente se puede considerar como más satisfactoria que la explicación dada por Varignon. No obstante, parece ser que la defensa del cálculo de Varignon mereció la aprobación de Rolle.

[19] Véase Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco, 1964), págs. 57-58.

Rolle también planteó algunas cuestiones desconcertantes acerca de la geometría analítica, especialmente en lo que se refiere a la resolución gráfica cartesiana de ecuaciones, que era tan popular en esta época. Para resolver la ecuación $f(x)=0$, por ejemplo, uno elige arbitrariamente una curva $g(x, y)=0$, que, combinándola con $f(x)=0$, da lugar a una nueva curva $h(x, y)=0$ cuyas intersecciones con la $g(x, y)=0$ nos dan las soluciones de la ecuación $f(x)=0$. Rolle se dio cuenta claramente de que por este procedimiento se podían introducir soluciones extrañas a la ecuación dada. En su obra más conocida, el *Traité d'algèbre* de 1690, Rolle parece haber sido el primero en afirmar que la raíz n-ésima de un número cualquiera tiene n valores distintos, pero sólo consiguió demostrar esta afirmación para $n=3$ y murió antes de que aparecieran los trabajos relevantes de Cotes y de De Moivre. Rolle era el más importante de los matemáticos del grupo de la Académie des Sciences que criticaron el cálculo, y así, cuando Varignon consiguió convencerlo de la corrección esencial del nuevo análisis, la oposición existente desapareció y la materia entró en un período de desarrollo rápido y sin trabas de un siglo a lo largo y ancho de la Europa continental.

19. La matemática en Italia

Mientras que los Bernoulli y los demás matemáticos que se movían en los mismos círculos desarrollaban y defendían los desarrollos hechos en el campo de la geometría analítica, del cálculo y de la teoría de probabilidades, en Italia la matemática discurría más o menos discretamente y sin demasiado ruido, con una cierta preferencia por la geometría. Durante esta época no apareció en Italia ninguna figura excepcional, pero sí hay en cambio algunos matemáticos que produjeron resultados lo suficientemente importantes como para ser mencionados. A Giovanni Ceva (1648-1734) se le recuerda hoy por el teorema que lleva su nombre, es decir: Una condición necesaria y suficiente para que sean concurrentes tres rectas trazadas desde los vértices A, B, C, de un triángulo a puntos X, Y, Z, situados en los respectivos lados opuestos, es la de que

$$\frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{ZB \cdot XC \cdot YA} = 1$$

Esta condición está estrechamente relacionada con el teorema de Menelao, que había sido olvidado pero fue redescubierto y publicado de nuevo por Ceva en 1678.

Más relacionados con los intereses del grupo de los Bernoulli estaban los resultados de las investigaciones de Jacopo Riccati (1676-1754) que, entre otras cosas, divulgó la obra de Newton en Italia. A Riccati lo recordamos especialmente por su estudio sistemático de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ que ahora lleva su nombre, a pesar de que Jacques Bernoulli ya había estudiado previamente el caso particular $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$. Pudo ocurrir que Riccati supiera algo

sobre este estudio, ya que Nicolas Bernoulli enseñó en Padua, donde Riccati había sido discípulo de Angeli y también donde Riccati mantuvo contactos con Nicolás Bernoulli y Hermann. La obra de los Bernoulli era bien conocida en Italia; el conde G. C. Fagnano (1682-1766) continuó los trabajos de Bernoulli sobre la lemniscata, para llegar a demostrar, en torno a 1717-1718, que la rectificación de esta curva conduce a una integral elíptica, lo mismo que en el caso de la longitud de un arco de elipse, aunque hay ciertos arcos que son rectificables por medios elementales. El nombre de Fagnano ha quedado ligado hasta hoy a la elipse $x^2+2y^2=1$, que presenta ciertas analogías con la hipérbola equilátera o rectangular; por ejemplo, la excentricidad de esta elipse es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mientras que la excentricidad de la hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$.

20. El postulado de las paralelas

Los matemáticos italianos hicieron durante el siglo XVIII, como ya hemos dicho, pocos descubrimientos fundamentales, si es que podemos señalar alguno. Lo más aproximado a un descubrimiento de este tipo fue sin duda el llevado a cabo por Girolamo Saccheri (1667-1733), un jesuita que enseñaba en los colegios de la Orden en Italia. El mismo año de su muerte publicó un libro con el título de *Euclides ab omni naevo vindicatus* («Euclides limpio de toda mancha»), en el que hacía un esfuerzo laborioso con objeto de demostrar el postulado de las paralelas. Saccheri conocía los intentos llevados a cabo por Nasir Eddin casi medio milenio antes para demostrar dicho potulado, y determinó aplicar al problema el método de *reductio ad absurdum.* Comenzó su investigación con un cuadrilátero birrectangular e isósceles, que hoy se conoce como «cuadrilátero de Saccheri», es decir, tal que sus lados *AD* y *BC* son iguales entre sí y perpendiculares ambos a la base *AB.* Consiguió demostrar con facilidad, y sin usar el postulado de las paralelas, que los ángulos superiores *C* y *D* son iguales, y en consecuencia hay exactamente tres posibilidades para estos ángulos, a las que denominó Saccheri como: 1) la hipótesis del ángulo agudo, 2) la hipótesis del ángulo recto, y 3) la hipótesis del ángulo obtuso. Saccheri intentó demostrar entonces que las hipótesis 1) y 3) conducían a absurdos, para demostrar así por un razonamiento indirecto que quedaba establecida la hipótesis 2) como consecuencia necesaria de los postulados de Euclides excluido el de las paralelas. Saccheri no tuvo gran problema para eliminar la hipótesis 3), ya que supuso implícitamente que las líneas rectas debían ser de longitud infinita. Para la hipótesis 1) consiguió demostrar teorema tras teorema sin encontrar ninguna dificultad. Ahora sabemos que lo que estaba haciendo entonces Saccheri era construyendo una geometría no-euclídea perfectamente consistente, pero él estaba imbuido tan a fondo por la convicción de que la única geometría válida era la euclídea, que llegó a permitir que sus ideas preconcebidas interfirieran con su lógica. Donde no aparecía ninguna contradicción, Saccheri dio un giro a su razonamiento hasta que pensó que la hipótesis 1) conducía también a un absurdo. Y, por lo tanto, perdió al mismo tiempo la oportunidad de que se le

reconociese lo que habría sido sin duda el descubrimiento más importante del siglo XVIII, el de la geometría no-euclídea. Tal como ocurrieron las cosas, su nombre permaneció olvidado durante más de un siglo, ya que la importancia indudable de su obra no fue apreciada por los que le siguieron[20].

21. Las series divergentes

Entre los alumnos de Saccheri figura otro matemático italiano que quizá merezca ser mencionado brevemente; se trata de Guido Grandi (1671-1742), cuyo nombre se suele asociar a las curvas en forma de pétalos de rosa, que son tan conocidas por sus ecuaciones en coordenadas polares, $r=a\cos n\theta$ y $r=a\,\text{sen}\,n\theta$; estas curvas se conocen como las «rosas de Grandi» en reconocimiento a los estudios que hizo sobre ellas. A Grandi se le recuerda también como uno de los que mantuvieron correspondencia con Leibniz sobre la cuestión de si se podría tomar o no $\frac{1}{2}$ como suma de la serie alternada $1-1+1-1+1-1+\cdots$ Esta suma viene sugerida no sólo por la media aritmética de los dos posibles valores de las sumas parciales de los n primeros términos, sino también como el valor para $x=1$ de la función $\frac{1}{(1+x)}$, de la cual se obtiene la serie $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ por «división larga». En esta correspondencia a la que nos referimos sugiere Grandi que aquí nos encontramos con una paradoja comparable a los misterios del Cristianismo, porque si se asocian los términos por parejas se obtiene como resultado

$$1-1+1-1+1-\cdots=0+0+0+0\cdots=\frac{1}{2}$$

análogamente a la creación del mundo de la nada. En el mismo orden de ideas infundadas, aplicadas ahora a la integral de la misma función $\frac{1}{(1+x)}$, sostuvieron una nutrida correspondencia Leibniz y Jean Bernoulli acerca de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. En este caso la serie $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ nos sirve de poca ayuda, ya que diverge para $x<-1$. Leibniz afirmaba que los números negativos no tienen logaritmos reales, mientras que Bernoulli, creyendo que la curva logarítmica debía ser simétrica con respecto al eje de ordenadas, sostenía que $\ln(-x)=\ln x$, punto de vista que parece venir confirmado por el hecho de que $\frac{d}{dx}\ln(-x)=\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$.

[20] Se pueden encontrar buenas exposiciones de la obra de Saccheri en muchos libros. Una descripción excelente es la que da Roberto Bonola en su libro *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of Its Developments* (1955), págs. 22-44. Véase también D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), págs. 351-359.

El problema de los logaritmos de los números negativos no fue resuelto definitivamente por ninguno de estos dos matemáticos, sino por el discípulo más brillante de Bernoulli. Jean Bernoulli continuó inspirando un entusiasmo muy alentador a través de su correspondencia, durante la primera mitad del siglo XVIII, ya que sobrevivió en cuarenta y tres años a su hermano mayor; sin embargo, ya mucho antes de su muerte en 1748 convertido en un octogenario, su influencia se dejaba sentir mucho menos que la de su famoso discípulo Euler, cuyas contribuciones al análisis, entre las que se encuentran los logaritmos de los números negativos, constituyeron el núcleo esencial del desarrollo de la matemática durante los años de mediados del siglo XVIII, como veremos.

Bibliografía

Berkeley, George: *Works*, ed. A. C. Fraser (Oxford: Clarendon, 1901, 4 vols.).

Bernoulli, Jacques: *Opera* (Geneva, 1744, 2 vols.).

Bernoulli, Jean: *Opera omnia* (Lausanne y Geneva, 1742, 4 vols.).

——: *Die Differentialrechnung aus dem Jahre* 1691/92 (Ostwald's Klassiker, núm. 211, Leipzig: W. Engelmann, 1924).

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of Its Developments* (ed. en rústica, New York: 1955).

Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

——: *History of the Calculus* (ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Cajori, Florian: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse* (Chicago: Open Court, 1919).

Coolidge, J. L.: *The Mathematics of Great Amateurs* (New York: Oxford University Press, 1949; ed. en rústica, New York: Dover, 1963).

Edleston, J.: *Correspondence of... Newton and... Cotes* (Cambridge, 1850).

Engel, Fr., y P. Stäckel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895, 2 vols.).

Fedel, J.: *Der Briefwechsel Johann (I) Bernoulli-Pierre Varigton aus den Jahren* 1692 *bis* 1702 (Heidelberg, 1932).

Fleckenstein, J. O.: *L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIII^e siècle* (París: Palais de la Découverte, ca. 1958).

Hoffmann, J. E.: *Classical Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1959).

Jurin, James: *Geometry No Friend to Infidelity: or, a Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians* (Londres, 1934).

Leibniz, G. W., y Jean Bernoulli: *Commercium philosophicum et mathematicum* (Lausanne et Geneva, 1745, 2 vols.).

Maclaurin, Colin: *A Treatise of Fluxions* (Edinburgh, 1742, 2 vols.).

Meschkowski, Herbert: *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco: Holden-Day, 1964).

Montucla, Etienne: *Histoire des mathématiques*, reed. (París, 1799-1802, 4 vols.).

Reiff, R.: *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889).

Smith, D. E.: *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; ed. en rústica, New York: Dover, 1959, 2 vols.).

——: *History of Mathematics* (ed. en rústica, New York: Dover, 1958, 2 vols.).

Spiess, Otto (ed.): *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* (Basel: Birkhäuser, 1955), vol. I.

Struik, D. J.: *A Concise History of Mathematics* (3.ª ed., New York: Dover, 1967).

Todhunter, Isaac: *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (reed, New York: Chelsea, 1949).
Turnbull, H. W.: *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin* (Aberdeen: Aberdeen University Press, 1951).
Tweedie, Ch.: *James Stirling. Sketch of His Life and Works* (Oxford: Clarendon, 1922).
Walter, Helen M.: «Abraham de Moivre», *Scripta Mathematica*, **2** (1934), 316-333.
Weissenborn, Hermann: *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange* (Halle, 1856).
Wieleitner, Heinrich: *Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Walter de Gruyter, 1911-1921, 2.ª parte, 2 vols.).

Ejercicios

1. Menciónense algunos matemáticos ingleses y suizos que desarrollaran su labor en puestos universitarios. Sugiérase alguna posible razón debido a la cual tan pocos matemáticos franceses ocuparon cátedras universitarias.
2. ¿Por qué no tuvo Rusia matemáticos nativos importantes durante los siglos XVII y XVIII?
3. Menciónense al menos cuatro revistas de principios del siglo XVIII que publicaran artículos de matemáticas. ¿Cuáles eran las ramas de la matemática más populares en esta época?
4. ¿Cuáles fueron los centros matemáticos más importantes durante la época de los Bernoulli? En cada caso cítense uno o más matemáticos que trabajaran en ellos durante esta época.
5. ¿De qué manera podrían haber contestado los matemáticos ingleses a las objeciones de Berkeley al método de las fluxiones?
6. Escríbase $\cos 11\theta$ en términos de potencias de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.
7. Dedúzcase la serie de Taylor (por diferenciaciones sucesivas o por otro método).
8. Demuéstrese el teorema de De Moivre (por inducción completa u otro método).
9. Factorícese x^6+a^6 y x^6-a^6 en factores cuadráticos reales.
10. Exprésese $\dfrac{d^3y}{dy^3}$ en términos de las derivadas de y con respecto a x.
11. Expresar las soluciones para y en los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas utilizados por Maclaurin.
12. Demostrar que cualquiera de las dos transformaciones de Tschirnhausen $y=x^2+4x+11$, o bien $y=x^2+7$, permitirá reducir la ecuación $x^3+3x^2+15x+13=0$ a una forma con sólo dos términos. (Elimínese x entre las dos ecuaciones.)
13. Demuéstrese que la sustitución $y=x^2+3x$ reduce la ecuación $x^4+12x-5=0$ a $y^4+98y^2-200=0$, y utilícese este hecho para resolver la cuártica en x.
14. Dar un ejemplo de una curva continua para la cual $f(a)=f(b)=0$, y tal que $f'(x)$ no se anule en ningún punto entre $x=a$ y $x=b$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle? Explíquese.
15. Compruébese la afirmación de De Moivre en el sentido de que la probabilidad de sacar al menos dos ases en ocho tiradas de un único dado es «aproximadamente de 3 a 2».
16. Demuéstrese que los ángulos superiores de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.
17. Dibújese la «rosa de Grandi» dada por la ecuación $r=\cos\dfrac{3}{2}\theta$.

*18. Demuéstrese que la sustitución $y=z^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ a una ecuación diferencial lineal.

*19. Demuéstrese que si se conoce una solución particular $f(x)$ de la ecuación de Riccati $y'=A(x)+B(x)y+C(x)y^2$, entonces se puede reducir esta ecuación a una de Bernoulli mediante la sustitución $y=z+f$.

*20. Demuéstrese que la excentricidad de la elipse de Fagnano $x^2+2y^2=1$ es la inversa de la excentricidad de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=1$.

*21. Demuéstrese alguna de las propiedades de la espiral logarítmica $r=al^{b\theta}$ mencionadas al hablar de la obra de Jacques Bernoulli.

*22. Muéstrese que la longitud de la espiral $r^2=a\theta$ de $\theta=0$ a $\theta=a$ viene dada por una integral elíptica.

*23. Compruébese, por uno de los métodos descritos en el texto, que los dos primeros números de Bernoulli son $\frac{1}{6}$ y $\frac{-1}{30}$.

*24. Justifíquese la regla de L'Hospital.

*25. Utilícese la regla de L'Hospital para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$$

siendo $c\neq d$.

*26. Háganse los cálculos necesarios para demostrar que el área bajo la curva $y=x^x$, desde $x=0$ a $x=1$, viene dada por la serie

$$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

*27. Demuéstrese que una curva de orden n queda determinada, en general, por $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos.

Capítulo XXI
LA EPOCA DE EULER

El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide.

D'Alembert

1. La vida de Euler

La historia de la matemática durante la época moderna se diferencia de la de la antigüedad y de la del mundo medieval en un aspecto básico, por lo menos: ningún grupo nacional de matemáticos mantuvo el liderazgo durante un período de tiempo prolongado. En la antigüedad fue Grecia la que destacó de una manera espectacular sobre todos los otros pueblos, en cuanto al progreso matemático; durante la mayor parte de la Edad Media el nivel de la matemática en el mundo árabe fue más alto que en ningún otro lugar. Desde el Renacimiento hasta el siglo XVIII, en cambio, el centro de la actividad matemática se desplazo repetidas veces: de Alemania a Italia, después a Francia, a Holanda, a Inglaterra y si las persecuciones religiosas no hubieran forzado a la familia Bernoulli a huir de Antwerp, Bélgica podría haber ocupado este puesto a su vez, pero lo cierto es que dicha familia emigró a Basilea, y como consecuencia de ello fue Suiza el lugar de nacimiento de muchas de las figuras más importantes de la matemática de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. Ya hemos hablado de la obra de cuatro de los matemáticos del clan Bernoulli, así como de la de Hermann, uno de sus protegidos suizos, pero el matemático más importante que produjo Suiza durante esta época (o en cualquiera de su historia) fue Leonhard Euler (1707-1783), que nació en Basilea.

El padre de Euler era un pastor calvinista que, lo mismo que el padre de Jacques Bernoulli, esperaba que su hijo siguiera también el camino del sagrado ministerio. El muchacho, sin embargo, estudió con Jean Bernoulli junto a sus hijos Nicolaus y Daniel, y en este ambiente favorable descubrió su vocación. El viejo Euler también tenía una buena preparación matemática, habiendo sido discípulo de Jacques Bernoulli en su juventud, y colaboró en la instrucción de su hijo en los elementos básicos de la matemática, a pesar de mantener la esperanza de que Leonhard siguiese una carrera teológica. En cualquier caso, el joven Euler recibió una educación muy completa, ya que al estudio de la matemática se unió el de la teología, la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Esta amplitud de conocimientos le resultó muy útil cuando en 1727 recibió noticias procedentes de Rusia en el sentido de que se convocaba un puesto en la sección de medicina de

la Academia de San Petersburgo, adonde se habían trasladado dos años antes los jóvenes hermanos Bernoulli como profesores de matemáticas. Esta importante institución había sido fundada pocos años antes por Catalina I, siguiendo las líneas trazadas por su difunto esposo Pedro el Grande, aconsejado por Leibniz. Por recomendación de los Bernoulli, que eran dos de las más brillantes lumbreras durante los primeros tiempos de la Academia, se llamó a su amigo Euler como miembro de la sección de fisiología y medicina. Desgraciadamente, el mismo día en que Euler llegaba a Rusia moría la emperatriz Catalina, y la casi recién nacida Academia estuvo a punto de sucumbir con ella, debido a que los nuevos gobernantes mostraron menos simpatía por los sabios extranjeros que la que habían manifestado Pedro y Catalina.

De una u otra manera la Academia consiguió sobrevivir, sin embargo, y Euler se encontró, en 1730, ocupando la cátedra de filosofía natural, en vez de en la sección de medicina. Su amigo Nicolaus Bernoulli había muerto de fiebres en San Petersburgo un año antes de la llegada de Euler, y en 1733 Daniel Bernoulli abandonó Rusia para ocupar la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea. Así pues, Euler se convirtió en el matemático más importante de la Academia a la edad de veintiséis años. Se casó y organizó su vida para dedicarse diligentemente a la investigación matemática y a crear una familia que terminó por incluir a trece hijos. La Academia de San Petersburgo había comenzado a publicar una revista de investigación, los *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, y casi desde sus comienzos recibió un verdadero torrente de artículos matemáticos procedentes de Euler. Los editores no tenían por qué preocuparse de una eventual escasez de material que publicar en tanto la pluma de Euler permaneciese activa. En cierta ocasión dijo el académico francés François Arago que Euler podía calcular sin ningún esfuerzo aparente, «exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire». Como resultado de esta increíble capacidad, Euler escribía memorias matemáticas mientras jugaba con sus hijos, por ejemplo. En 1735 perdió la vista de su ojo derecho, según se dijo por exceso de trabajo, pero este accidente desgraciado no frenó en absoluto la marcha de su producción investigadora. Se cuenta que él mismo decía que su lápiz parecía sobrepasarlo en inteligencia, por la gran facilidad con que fluían de él las memorias, una tras otra, y a lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Durante casi medio siglo después de su muerte continuaron apareciendo obras inéditas de Euler en las publicaciones de la Academia de San Petersburgo. Una lista bibliográfica de las obras conocidas de Euler, incluidas las póstumas, contiene 886 trabajos, y se calcula que sus obras completas, que se están publicando bajo los auspicios de la Academia de Ciencias Suiza, superarán probablemente los noventa grandes volúmenes[1]. A lo largo de su vida su investigación matemática vino a suponer una producción de unas 800 páginas anuales en promedio; ningún matemático ha superado jamás (ni tampoco

[1] Véase Gustav Eneströn, «Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV*, Leipzig, 1910-1913. Véase también N. Fuss, *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler* (1786), y el *Eloge de Mr. Euler* de Condorcet para la Academia de Ciencias (1785). Cf. J. O Fleckenstein, «L'état actuel de l'edition des oeuvres d'Euler», *XI Congrès International d'Histoire des Sciences*, Varsovia, 1965.

se ha aproximado) la producción de este hombre, al que Arago llamó «el Análisis Encarnado».

Euler adquirió muy pronto fama internacional, e incluso antes de abandonar Basilea había recibido ya una mención honorífica de la Academia de Ciencias de París por un trabajo sobre la mejor disposición de los mástiles en un buque. En años sucesivos Euler presentó a menudo memorias a los concursos convocados por la Academia, y obtuvo doce veces el codiciado premio que se otorgaba bianualmente. Los temas de estos concursos eran muy variados, y en una ocasión, en 1724, Euler compartió con Maclaurin y con Daniel Bernoulli un premio por un trabajo sobre las mareas[2]. (El primer premio de la Academia de París lo ganaron dos veces Jean Bernoulli y diez veces su hijo Daniel Bernoulli.) Euler no se mostró nunca vanidoso, y escribió con la misma naturalidad obras de todos los niveles, incluidos textos para ser usados en las escuelas rusas. Normalmente escribía en latín y también en francés, a pesar de que su lengua materna era el alemán. Euler tenía una extraordinaria facilidad para los idiomas, como podía esperarse, en parte, a causa de su origen suizo, lo que constituyó una gran ventaja para él, debido al hecho de que una de las características de la matemática del siglo XVIII fue la gran facilidad con que se desplazaban los matemáticos de un país a otro, y en este sentido Euler no tuvo ningún problema con los distintos idiomas. En 1741, Euler recibió una invitación de Federico el Grande de Prusia para incorporarse a la Academia de Berlín, invitación que fue aceptada (Jean y Daniel Bernoulli, que se encontraban en Suiza, también fueron invitados, pero rechazaron la invitación). Euler pasó veinticinco años en la corte de Federico el Grande, pero a lo largo de este período continuó recibiendo una pensión de Rusia, y envió numerosos artículos a la Academia de San Petersburgo, al mismo tiempo que a la Academia Prusiana.

La estancia de Euler en Berlín no fue todo lo feliz que él hubiera deseado, pues Federico prefería a los intelectuales brillantes, como era el caso de Voltaire. El monarca, que apreciaba más a los filósofos que a los geómetras, se refería al sencillo Euler como «el cíclope matemático» (broma de dudoso gusto, dado que Euler era tuerto), y las relaciones en la corte terminaron por hacérsele intolerables. Catalina la Grande estaba precisamente deseosa de que el prolífico matemático volviese a ocupar su lugar en la Academia de San Petersburgo, y como resultado de todo ello Euler regresó a Rusia en 1766. Este mismo año supo Euler que estaba perdiendo la vista del único ojo que le quedaba, por una afección de cataratas, y se preparó para la ceguera casi total que le esperaba practicando en escribir con tiza en grandes caracteres en una pizarra preparada a propósito, y dictando a sus hijos. En 1771 sufrió una operación y volvió a ver durante unos días, pero el éxito de la operación y la consiguiente alegría duraron poco, y Euler vivió casi durante los diecisiete últimos años de su vida en una ceguera total. Ni siquiera esta tragedia consiguió interrumpir sus investigaciones y publicaciones, que continuó al mismo e incluso a mayor ritmo hasta 1783, en que, a la edad de 76 años, murió de una manera casi repentina mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos.

[2] Estos tres ensayos premiados aparecen incluidos en el vol. III de la «edición de los jesuitas» de los *Principia* de Newton, publicada en Ginebra en 1760.

2. Los logaritmos de los números negativos de nuevo

Desde 1727 hasta 1783 la pluma de Euler no había cesado de extender las fronteras de prácticamente todas las ramas tanto de la matemática pura como aplicada, desde los niveles más elementales a los más avanzados. Además, Euler escribía casi siempre utilizando el lenguaje y las notaciones que aún usamos hoy, pues ningún otro matemático contribuyó en tal medida como él a dar su forma actual a la matemática que hoy llamamos clásica, siendo el más feliz inventor de notaciones de toda la historia de la matemática. A su llegada a San Petersburgo en 1727 se vio encargado de ciertos experimentos relativos al disparo de cañones, y en la exposición manuscrita de los resultados obtenidos, escrita probablemente en 1727 ó 1728, Euler utilizaba ya la letra *e* más de una docena de veces para representar la base del sistema de logaritmos naturales. La idea que representa este número había sido bien conocida prácticamente desde que se inventaron los logaritmos más de un siglo antes, y, sin embargo, no se había introducido ninguna notación estándar para representarlo. En una carta a Goldbach de 1731, Euler vuelve a utilizar su letra *e* para «el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1»; esta notación apareció impresa por primera vez en la *Mechanica* de Euler, publicada en 1736, obra en la que se presenta por primera vez la mecánica newtoniana en forma analítica. Este símbolo, que quizá le vino sugerido a Euler por la primera letra de la palabra «exponencial», no tardó en ser admitido universalmente[3]. La consagración definitiva del uso de la letra griega π para representar la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro, se debe también en buena medida a Euler, aunque ya se había utilizado en 1706, un año antes del nacimiento de Euler, en la *Synopsis Palmariorum Matheseos*, o «Nueva introducción a la matemática», por William Jones (1675-1749). Fue, sin embargo, la adopción del símbolo π por Euler, en 1737 en primer lugar, y después en sus popularísimos textos, lo que extendió su uso universalmente. El símbolo i para $\sqrt{-1}$ es otra de las notaciones introducidas por Euler por primera vez, aunque en este caso lo adoptó hacia finales de su vida, en 1777. Probablemente este retraso se deba a que en sus obras anteriores había utilizado la letra i de una manera bastante sistemática para representar un «número infinito», en un sentido análogo (pero no idéntico) al del ∞ de Wallis; así, Euler escribía $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, lo que nosotros preferiríamos escribir como

$$e^x = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right)^h$$

De hecho, aunque Euler utilizó i para $\sqrt{-1}$ en un manuscrito fechado en 1777, tal manuscrito no se publicó hasta 1794, de manera que fue la adopción de dicho símbolo por Gauss en su obra clásica *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801, la que le

[3] Véase D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (New York, McGraw Hill, 1929), págs. 95-98, acerca de las primeras veces que se utilizó la notación *e* de Euler.

aseguró un puesto definitivo en la historia de las notaciones matemáticas. Los tres símbolos, e, π e i, de los que Euler fue en gran medida responsable, como hemos visto, se relacionan con los dos enteros más importantes, 0 y 1, por medio de la famosa igualdad

$$e^{\pi i}+1=0$$

en la que figuran los cinco números más importantes y las más importantes operaciones y relación de toda la matemática. Lo equivalente a esta igualdad, en forma generalizada, aparece en el más famoso de todos los textos de Euler, la *Introductio in analysin infinitorum*, publicado en 1748, pero el nombre de Euler no aparece hoy asociado a ninguno de los símbolos que intervienen en esta relación, sino que la llamada «constante de Euler», que se suele representar por la letra griega γ y que es una sexta constante matemática importante[4], es el número definido por

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

número bien conocido y que se ha calculado con cientos de decimales, de los que los diez primeros son 0,5772156649.

No sólo se utilizan hoy las notaciones introducidas por Euler para designar números importantes. También en geometría, en álgebra, en trigonometría y en análisis nos encontramos a cada momento con el uso de los símbolos, terminología e ideas debidas a Euler. El uso de las letras minúsculas a, b, c, para los lados de un triángulo y de las correspondientes letras mayúsculas A, B, C, para los ángulos respectivamente opuestos a ellos, proviene de Euler, así como la adopción de las letras r, R y s para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente. La bella fórmula $4rRs=abc$ que relaciona esas seis longitudes es también uno de los muchos resultados elementales que se le atribuyen, aunque pueden encontrarse equivalentes de este resultado en la geometría antigua. La notación lx para el logaritmo de x, el uso tan familiar hoy de la Σ para representar una suma y, quizá la más importante de todas, la notación $f(x)$ para una función de x, utilizada en los *Commentarii* de San Petersburgo de 1734-1735, son otras de las notaciones de Euler que seguimos utilizando en la actualidad. Se puede afirmar, pues, sin ninguna duda, que nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de la historia.

3. La fundamentación del análisis

Al estudiar el desarrollo de la matemática no debemos olvidar en ningún caso que las ideas que se esconden tras las notaciones son, con mucho, la mitad más

[4] Véase J. W. L. Glaisher, «On the History of Euler's Constant», *Messenger of Mathematics*, 1 (1871), págs. 25-30.

importante, y a este respecto la obra de Euler fue también de las que marcan toda una época. Puede decirse con justicia que Euler hizo por el análisis infinitesimal de Newton y Leibniz lo que Euclides había hecho por la geometría de Eudoxo y de Teeteto, o lo que Viète había hecho por el álgebra de Al-Khowarizmi y de Cardano. Euler cogió el cálculo diferencial y el método de fluxiones y los integró en una rama más general de la matemática que ha recibido desde entonces el nombre de «análisis», es decir, el estudio de los procesos infinitos. Si podemos considerar los *Elementos* como la piedra angular de la geometría, y a la *Al-jabr wa'l muqābalah* como la piedra fundamental del álgebra, entonces a la *Introductio in analysin infinitorum* de Euler la podemos considerar, con igual razón, como la piedra angular del nuevo análisis. Este importante tratado en dos volúmenes, de 1748, fue la fuente de la que se nutrieron los retoños en el desarrollo de la matemática a lo largo de la segunda mitad del siglo XVIII. Desde este momento, la idea de «función» pasó a ser la idea fundamental del análisis. Se había anunciado ya de una manera vaga en la latitud de las formas medieval, y estaba implícita en la geometría analítica de Descartes y sobre todo de Fermat, así como en el cálculo de Newton y Leibniz. El párrafo cuarto de la *Introductio* define una función de una cantidad variable como «cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes» (Euler consideró a veces una función, de una manera menos formal y más general, como la relación entre las dos coordenadas de los puntos de una curva trazada «a mano alzada» en el plano). Hoy día tal definición es inaceptable, ya que no explica qué es eso de una «expresión analítica». Es de suponer que lo que Euler tenía en la mente al dar tal definición eran básicamente las funciones algebraicas y las funciones trascendentes elementales, aunque, de hecho, el tratamiento estrictamente analítico (y no geométrico) de las funciones trigonométricas se fundamentaba, en gran parte, en la *Introductio* misma. El seno de un ángulo, por ejemplo, ya no era un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o bien el número definido por la serie

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

para algún valor de z. A partir de las series infinitas para e^x, sen x y cos x sólo había un paso para obtener las «identidades de Euler»:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

y

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\ \operatorname{sen} x$$

relaciones que habían conocido ya esencialmente Cotes y De Moivre, pero que en las manos de Euler se convirtieron en las conocidas herramientas del análisis.

Euler había utilizado ya exponentes imaginarios en 1740, en una carta a Jean Bernoulli en la que escribía la fórmula $e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\cos x$, pero las conocidas identidades de Euler se publicaron por primera vez en la *Introductio* en 1748. Las funciones trascendentes elementales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales, aparecen escritas y consideradas de forma prácticamente idéntica a como las tratamos hoy. Las notaciones abreviadas sin., cos., tang., cot., sec. y cosec. que usa Euler en su *Introductio* publicada en latín se parecen más a las formas actuales en inglés que a las abreviaturas correspondientes en los idiomas latinos. Por otra parte, Euler fue de los primeros en tratar los logaritmos como exponentes, de la manera que nos es hoy tan familiar.

4. Las series infinitas

El primer volumen de la *Introductio* trata, desde el comienzo al final, de procesos infinitos: productos infinitos, fracciones continuas infinitas e innumerables series infinitas. En este sentido la obra es la generalización natural de los puntos de vista de Newton, de Leibniz y de los Bernoulli, todos los cuales mostraron un gran interés por las séries infinitas. Sin embargo, Euler manejaba tales series a veces con la mayor imprudencia; a pesar de que en alguna ocasión advertía del peligro de trabajar con series divergentes, él mismo utiliza la serie binomial $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$ para valores de $x\geqslant 1$. De hecho, combinando las dos series

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$$

concluye Euler que

$$\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots=0$$

Pese a tales osadías, Euler obtuvo, manipulando series infinitas, resultados que sus predecesores habían perseguido sin éxito. Entre estos resultados ocupa un lugar destacado la suma de los inversos de los cuadrados perfectos

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Oldenburg había planteado este problema a Leibniz en una carta de 1673, pero Leibniz no consiguió resolverlo; en 1689 Jacques Bernoulli reconocía a su vez su propia incapacidad para calcular dicha suma. Euler parte de la conocida serie

$$\operatorname{sen} z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

y considera la ecuación sen $z=0$ como una ecuación polinómica infinita

$$0=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots$$

obtenida dividiendo por z, eliminando así la raíz $z=0$, o bien, reemplazando z^2 por w, la ecuación

$$0=1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\frac{w^3}{7!}+\cdots$$

De la teoría de ecuaciones algebraicas ordinarias se sabe que, si el término constante es igual a 1, entonces la suma de los inversos de las raíces es igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo, en este caso $\frac{1}{3!}$. Por otra parte, como las raíces de la ecuación en z son π, 2π, 3π, ..., las raíces de la ecuación en w serán π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ... Por lo tanto,

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\cdots \quad \text{o} \quad \frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

Así pues, por medio de esta aplicación injustificada a polinomios de grado infinito de reglas válidas para el caso finito, consigue Euler un resultado correcto que había burlado los esfuerzos de los viejos hermanos Bernoulli; en años posteriores hizo Euler repetidamente descubrimientos análogos. Cuando Jean Bernoulli tuvo noticia del triunfo de Euler escribió:

> Y así ha quedado satisfecho el ardiente deseo de mi hermano, que, al darse cuenta de que la investigación de esta suma resultaba ser más difícil de lo que nadie hubiera sospechado, confesó francamente que todo su entusiasmo puesto en ello había sido burlado. ¡Si al menos viviera aún mi hermano para verlo!

La suma de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos efectuada por Euler parece datar de 1736, y lo más probable es que fuera Daniel Bernoulli uno de los primeros a los que le comunicó puntualmente el bello resultado[5]. El interés de Euler por este tipo de series siempre fue grande, y en años sucesivos publicó las sumas de los inversos de otras potencias de números naturales. Por ejemplo, utilizando la serie de potencias para el coseno en vez de la del seno, calculó Euler de una manera completamente análoga el resultado

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

[5] Véase Paul Stäckel, «Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen», *Biblioteca Mathematica* (3), 8 (1907-1908), págs. 37-60.

y, por lo tanto, como corolario, la suma

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Muchos de estos resultados aparecieron también publicados en la *Introductio* de 1748, incluidas las sumas de los inversos de las potencias n-ésimas pares de los números naturales, desde $n=2$ hasta $n=26$. Las series de los inversos de las potencias impares son tan intratables que no se sabe aún si la suma de los inversos de los cubos de los enteros positivos es o no un múltiplo racional de π^3 mientras que Euler sabía ya que, por ejemplo, para las potencias de exponente 26, la suma de los inversos es

$$\frac{2^{24} \cdot 76977927\pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 27}$$

5. Series convergentes y divergentes

La gran imaginación que puso Euler en el tratamiento de las series le llevó a descubrir algunas relaciones sorprendentes entre el análisis y la teoría de números. Así demostró, y la demostración es francamente sencilla, que la divergencia de la serie armónica implica el teorema euclídeo de la existencia de infinitos números primos. Efectivamente, si hubiera solamente K primos, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_K$, entonces todo número n sería de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_K^{\alpha_K}$. Sea α el mayor de los exponentes α_i correspondientes a n, y formemos el producto

$$P = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots \frac{1}{p_2^{\alpha}}\right) \cdots \cdots \left(1 + \frac{1}{p_K} + \frac{1}{p^2{}_K} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha}{}_K}\right)$$

En este producto deben aparecer, entre otros, los términos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$, luego el producto P no puede ser menor que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. A partir de la fórmula

[6] [En 1978, R. Apéry descubrió un desarrollo en fracción continua de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

que le permitió demostrar que $\zeta(3)$ es irracional. Véase M. Mendes France, «Roger Apéry et L'irrationel», *La Recherche*, febrero 1979.] (*N. del T.*)

que nos da la suma de una progresión geométrica podemos ver que los factores del producto P van siendo respectivamente menores que

$$\frac{1}{1-1/p_1}, \quad \frac{1}{1-1/p_2}, \quad \frac{1}{1-1/p_3}, \cdots$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\frac{p_3}{p_3-1}\cdots\frac{p_K}{p_K-1}$$

para todo valor posible de n. Por lo tanto, si el número K de primos fuera finito, entonces la serie armónica sería necesariamente convergente[7]. De una manera bastante más complicada demuestra Euler que la serie de los inversos de los números primos es divergente, mostrando que la suma parcial S_n es asintótica a ln ln n para valores crecientes de n.

A Euler le encantaban las relaciones entre la teoría de números y las propiedades de las series que obtenía manipulándolas atrevidamente. Así, sin prestar aparentemente la menor atención a los peligros que acechan escondidos en las series alternadas, descubrió resultados tales como

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$

donde el signo de un término, a partir de los dos primeros, viene determinado de la forma siguiente: si el denominador es un número primo de la forma $4m+1$, entonces el signo correspondiente es menos; si el denominador es un primo de la forma $4m-1$ el signo será más, y si el denominador es un número compuesto entonces el signo correspondiente será el que resulte como «producto» de los signos correspondientes a sus factores primos. El descuido en el manejo de las series y sus operaciones entre ellas es considerable en Euler: del desarrollo

$$\ln\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

obtiene que

$$\ln\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

y, por lo tanto, que

$$\frac{1}{\ln\infty}=0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\cdots$$

[7] Esta demostración, así como otros resultados debidos a Euler y a los Bernoulli, aparecen en el libro de Gerhard Kowalewski *Die klassischen probleme der Analysis des Unendlichen* (1910).

donde en la serie aparecen los inversos de los primos, con signos menos, y los inversos de los productos de dos primos distintos, con signo más. En la *Introductio* aparecen gran cantidad de series como éstas, así como productos infinitos análogos, tales como el

$$0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

y el

$$\infty=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdots$$

consecuencia del anterior. El símbolo ∞ lo utiliza Euler libremente para representar el inverso del cero[8].

6. La vida de D'Alembert

Sobre el tema de los logaritmos la contribución de Euler no se limitó a su definición en términos de exponentes, que es la que utilizamos hoy, sino que estableció al fin el punto de vista correcto con respecto a los logaritmos de los números negativos. La idea de que $\log(-x)=\log(+x)$ la defendía el matemático francés más importantes a mediados del siglo XVIII, que murió precisamente el mismo año que Euler: Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). El apodo de D'Alembert proviene del nombre de la iglesia de St. Jean Baptiste le Rond, próxima a Notre-Dame de París, en cuya escalinata fue abandonado poco después de su nacimiento. Más tarde se supo que su madre era la aristocrática y un tanto vivaracha Madame de Tencin, elocuente escritora y hermana de un cardenal, y su padre fue el caballero Destouches, general de artillería. El pequeño expósito fue criado por la esposa de un vidriero, y años más tarde, cuando llegó a ser un famoso matemático, D'Alembert rechazó enérgicamente los intentos de aproximación de su madre, prefiriendo ser reconocido como el hijo de sus empobrecidos padres adoptivos. El sobrenombre D'Alembert lo adoptó de joven por razones que no conocemos.

Al igual que Euler y que los Bernoulli, D'Alembert recibió también una sólida educación, en derecho, medicina, ciencias naturales y matemáticas, amplio bagaje que le fue muy útil cuando colaboró con Denis Diderot (1713-1784) desde 1751 a 1772 en los 28 volúmenes de la famosa *Encyclopédie o Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. D'Alembert escribió para la *Encyclopédie* el muy admirado «Discours préliminaire», así como la mayor parte de los artículos matemáticos y científicos en general. La *Encyclopédie*, a pesar de la educación jansenista de D'Alembert, mostraba fuertes tendencias a la secularización del saber tan característica del Siglo de las Luces, y se vio víctima de violentos ataques procedentes de los jesuitas. Por su enérgica defensa del proyecto, vino a ser

[8] Véase especialmente *Introductio* (nueva ed., Lyons, 1797), vol. I, págs. 229 y sigs.

conocido D'Alembert como «el zorro de la Enciclopedia», y casualmente jugó un importante papel en la expulsión de los jesuitas de Francia. Como resultado de sus actividades y de su amistad con Voltaire y otros filósofos de la época, fue uno de los que preparó el camino por el que llegaría la Revolución Francesa[9]. A la temprana edad de 24 años fue elegido miembro de la Académie des Sciences, y en 1754 llegó a ser su *secrétaire perpetuel* y, como tal, el científico quizá más influyente de Francia. Cuando ya se acercaba el final de la estancia de Euler en Berlín, Federico el Grande de Prusia invitó a D'Alembert a presidir la Academia Prusiana, invitación que D'Alembert declinó argumentando que resultaría completamente inadecuado situar a cualquier contemporáneo en una posición de superioridad académica por encima del gran Euler. D'Alembert recibió también una invitación de Catalina la Grande de Rusia para que fuese el tutor de su hijo, pero también rechazó esta oferta, a pesar del sueldo principesco que se le ofrecía.

Mientras Euler se encontraba atareado en Berlín con sus investigaciones matemáticas, D'Alembert trabajaba activamente en París, y hasta 1757 en que la controversia sobre el problema de la cuerda vibrante los enfrentó en cierto modo, la correspondencia entre los dos fue frecuente y cordial[10], ya que sus intereses coincidían en gran parte. Afirmaciones tales como la de que $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$, de la que se deducía que $2\log(-1) = 2\log(+1)$, luego $\log(-1) = \log(+1)$, habían confundido a los mejores matemáticos de la primera mitad del siglo XVIII, pero en 1747 Euler pudo al fin escribir a D'Alembert explicando correctamente el *status* de los logaritmos de los números negativos. En realidad el resultado debería haber sido evidente para Jean Bernoulli y otros que estaban ya más o menos familiarizados con la fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ antes incluso de que la formulase Euler de una manera clara y definitiva. Esta identidad se verifica para todos los ángulos θ medidos en radianes, y en particular resulta, para $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = -1$, es decir, que $\ln(-1) = i\pi$. Así pues, los logaritmos de los números negativos no eran reales, como habían creído Jean Bernoulli y D'Alembert, sino imaginarios.

Euler llamaba la atención también sobre otra propiedad de los logaritmos que esta identidad revelaba de una manera evidente. Cualquier número, positivo o negativo, tiene no sólo un logaritmo, sino infinitos, puesto que la igualdad

$$e^{i(\theta \pm 2k\pi)} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

implica que si $c = \ln a$ entonces $c \pm 2k\pi i$, con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ son también logaritmos naturales y distintos de a. Además, la identidad de Euler muestra que los logaritmos de los números complejos, sean reales o imaginarios, son a su vez números complejos. Si queremos calcular, por ejemplo, los logaritmos naturales de $a+bi$, escribiremos $a+bi = e^{x+iy}$, de donde resulta que $e^x \cdot e^{iy} = a+bi = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Las soluciones del sistema de ecuaciones simultáneas

$$e^x \cos y = a$$
$$e^x \operatorname{sen} y = b$$

[9] Para una excelente exposición no matemática de su vida y su obra, véase Ronald Grimslery, *Jean D'Alembert* (1717-1783) (1963).

[10] Véase R. E. Langer, «The Life of Leonhard Euler», *Scripta Mathematica*, 3 (1935), págs. 61-66 y 131-138.

obtenidas igualando las partes reales y las imaginarias en la ecuación compleja, da los valores

$$y = \text{arc tg}\,\frac{b}{a} + 2k\pi$$

$$x = \ln\left(b \text{ cosec arc tg}\,\frac{b}{a}\right) = \ln\left(a \text{ sec arc tg}\,\frac{b}{a}\right)$$

7. Las identidades de Euler

D'Alembert gastó mucho de su tiempo y esfuerzo intentando demostrar el teorema que había conjeturado Girard y que conocemos hoy como el teorema fundamental del álgebra, es decir, que toda ecuación polinómica $f(x)=0$ con coeficientes complejos y de grado $n \geqslant 1$ tiene al menos una raíz compleja. Sus esfuerzos por demostrar este teorema fueron tan persistentes (en especial en un trabajo premiado sobre «La causa general de los vientos», que publicaron las *Memoirs* de la Academia de Berlín correspondientes al año 1746) que aún hoy en Francia el teorema se conoce a menudo como «teorema de D'Alembert». Si consideramos la solución de una tal ecuación polinómica como una generalización de las operaciones algebraicas explícitas, podemos decir que lo que D'Alembert deseaba demostrar esencialmente era que el resultado de cualquier operación algebraica efectuada sobre un número complejo es a su vez otro número complejo. En un cierto sentido, entonces, Euler hizo para las operaciones trascendentes elementales lo que D'Alembert había intentado hacer para las operaciones algebraicas. Por medio de las identidades de Euler resulta fácil calcular, por ejemplo, cantidades tales como sen $(1+i)$ o arc cos i, expresadas en forma compleja estandarizada. En el primer caso basta poner

$$\text{sen}\,(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i}$$

de donde resulta que si sen $(1+i) = a+bi$ entonces

$$a = \frac{(e^2+1)\,\text{sen}\,1}{2e}$$

$$b = \frac{(e^2-1)\cos 1}{2e}$$

En el segundo caso escribiremos arc cos $i = x+i$ y, o bien $i = \cos(x+iy)$ o

$$i = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{1+e^{2y}}{2e^y}\cos x + i\frac{(1-e^{2y})}{2e^y}\,\text{sen}\,x$$

de donde, igualando partes reales e imaginarias, se obtiene que cos $x=0$, es decir, $x=\pm\pi/2$, luego

$$\frac{1-e^{2y}}{2e^{y}}=\pm 1 \quad \text{o} \quad e^{y}=\mp 1\pm\sqrt{2}$$

y como tanto x como y deben ser reales, resulta que $x=\pm\frac{\pi}{2}$ e $y=\ln(\mp 1+\sqrt{2})$.

De una manera análoga se pueden efectuar otras operaciones trascendentes elementales sobre números complejos, los resultados de las cuales son de nuevo números complejos. Es decir, que la obra de Euler venía a demostrar que el sistema de los números complejos es cerrado bajo las operaciones trascendentes elementales, mientras que D'Alembert había conjeturado que el sistema de los números complejos es cerrado para las operaciones algebraicas generales.

Euler demostró de una manera análoga que, sorprendentemente, una potencia de exponente imaginario de un número imaginario puede dar como resultado un número real. En una carta a Christian Goldbach (1690-1764) de 1746, presentaba Euler el notable resultado $i^{i}=e^{-\pi/2}$. A partir de $e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$ resulta, para $\theta=\frac{\pi}{2}$, $e^{\pi i/2}=i$, luego

$$(e^{\pi i/2})^{i}=e^{\pi i^{2}/2}=e^{-\pi/2}$$

De hecho, i^{i} tiene infinitos valores reales, tal como demostraría más tarde el mismo Euler, dados por

$$e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

En las *Memoirs* de la Academia de Berlín de 1749 demostraba Euler que cualquier potencia compleja de un número complejo $(a+bi)^{c+di}$ se puede escribir[11] como un número complejo $p+qi$. Este aspecto de la obra de Euler pasó desapercibido, y los valores reales de i^{i} hubieron de ser redescubiertos en el siglo XIX.

D'Alembert consideró también la expresión $(a+bi)^{c+di}$ y, en un cierto momento, toma la base $a+bi$ de esta potencia como una variable y diferencia la función resultante, en lo que es ya una verdadera anticipación de la teoría de funciones de variable compleja que se desarrolló durante el siglo XIX. D'Alembert suponía que un cálculo de variables complejas seguiría un esquema análogo al de las combinaciones algebraicas de variables reales, de manera que la expresión $f(x+iy)d(x+iy)$ se podría expresar siempre de la forma $dp+idq$, donde las partes real e imaginaria pura están separadas, resultado que no pudo demostrar. En un artículo de 1752 sobre la resistencia ofrecida por los fluidos, llegó D'Alembert a las

[11] Véanse los artículos sobre i^{i} por H. S. Uhler y R. C. Archibald en el *American Mathematical Monthly*, 28 (1921), págs. 114-121.

llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann que aparecen tan a menudo en análisis complejo: si se tiene la función analítica $f(x+iy)=u+iv$, entonces

$$f(x-iy)=u-iv$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

8. D'Alembert y la idea de límite

D'Alembert presenta una rara combinación de precaución y de atrevimiento en su concepción del desarrollo matemático, y consideró siempre el uso de las series divergentes por Euler como sospechoso (1768), a pesar de los éxitos conseguidos. Además, D'Alembert ponía objeciones a la suposición de Euler de que las diferenciales son símbolos para cantidades que son cero, y sin embargo son cualitativamente diferentes. Dado que Euler se restringía a funciones «de buen comportamiento», no se había visto involucrado en las sutiles dificultades que iban a hacer más tarde insostenible su posición *naïf*. Mientras tanto, D'Alembert creía que la «verdadera metafísica» del cálculo habría que encontrarla basada en una idea de límite. En el artículo sobre «diferencial» que escribió para la *Encyclopédie*, afirmaba D'Alembert que «la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación». Y oponiéndose a los puntos de vista de Leibniz y de Euler, insistía D'Alembert en que «una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera»[12]. Este punto de vista terminaría por excluir la vaga noción de las diferenciales como magnitudes infinitamente pequeñas, y D'Alembert sostenía que la notación de las diferenciales no es más que una manera conveniente de hablar, que depende, para su justificación, del lenguaje de los límites. Su artículo en la *Encyclopédie* sobre la diferencial, que ya hemos mencionado, se refiere a la obra *De quadratura curvarum* de Newton, pero D'Alembert interpreta las expresiones de Newton «razones primeras y últimas» como límites y no como una primera o última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo al ser o desvaneciéndose, respectivamente. En el artículo sobre «Límite» que también escribió para la *Encyclopédie*, llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)[13]. La imprecisión formal de esta sugestiva definición se eliminó finalmente por obra de los matemáticos del siglo XIX.

---

[12] Véanse sus *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (1767), págs. 249-250.

[13] Véase A. Robinson, *Non-standard Analysis* (Amsterdam; North Holland, 1966), págs. 267-268.

Euler había considerado las cantidades infinitamente grandes como las inversas de las magnitudes infinitamente pequeñas, pero D'Alembert, al poner fuera de la ley los infinitésimos, definía lo infinitamente grande en términos de límites. Un segmento, por ejemplo, se dice que es infinito con respecto a otro si su razón puede hacerse mayor que cualquier número dado. Y a continuación pasa a definir cantidades infinitamente grandes de orden superior de una manera análoga a como hacen hoy los matemáticos al hablar de órdenes de infinitud con respecto a funciones. D'Alembert negaba la existencia del infinito actual, ya que pensaba en magnitudes geométricas y no en términos de la teoría de conjuntos que se iba a desarrollar un siglo más tarde. La formulación del concepto de límite por D'Alembert carecía de la precisión lingüística y de la exactitud necesarias para hacerla operativa y, por lo tanto, aceptable para sus contemporáneos. Así pues, los escritores de libros de texto continentales de finales del siglo XVIII continuaron utilizando en la inmensa mayoría de los casos el lenguaje y las concepciones de Leibniz y de Euler, y no las que proponía D'Alembert, para el tratamiento del análisis infinitesimal.

9. La teoría de ecuaciones diferenciales

D'Alembert fue sin duda un hombre de intereses muy variados, y quizá hoy se le conoce mejor por su principio mecánico llamado «principio de D'Alembert», que afirma que las acciones y reacciones internas de un sistema de cuerpos rígidos en movimiento están en equilibrio. Este principio apareció publicado en 1743 en su famoso tratado *Traité de dynamique*. Otros tratados de D'Alembert están dedicados a la música, al problema de los tres cuerpos, a la precesión de los equinoccios, al movimiento en medios resistentes y las perturbaciones del movimiento lunar. El estudio del problema de la cuerda vibrante le condujo a la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para la que dio en 1747 (en las *Memoirs* de la Academia de Berlín) la solución $u = f(x+t) + g(x-t)$, donde f y g son funciones arbitrarias, según D'Alembert. La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se había desarrollado ya considerablemente antes de esta época, pero el problema más difícil de la resolución de ecuaciones en derivadas parciales era entonces un campo abierto para los pioneros. Euler hizo también progresos en esta rama del análisis, dando para la ecuación más general

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

la solución $u = f(x+at) + g(x-at)$.

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó, en cierto sentido, tan pronto como se reconoció la relación inversa existente entre los procesos de diferenciación y de integración. Pero la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se mostraron fácilmente reducibles a cuadraturas sencillas, sino que requerían en

cambio ingeniosas sustituciones o algoritmos especiales para su solución. Uno de los logros del siglo XVIII en este sentido fue el descubrimiento de ciertas familias de ecuaciones que son resolubles por medio de artificios relativamente sencillos. Las ecuaciones de Bernoulli, que vimos ya en el capítulo anterior, forman uno de estos grupos. Otro tipo lo identificó el precoz matemático Alexis Claude Clairaut (1713-1765) y lleva su nombre; se trata de la familia de ecuaciones de la forma $y=xy'+f(y')$. En este caso, la sustitución $p=y'$, seguida de la diferenciación de todos los términos de la ecuación con respecto a x, conducirá a una ecuación en x, p y $\frac{dp}{dx}$, que es de primer orden y resoluble, siendo la solución general $y=cx+f(c)$. La ecuación diferencial de Clairaut tiene también una solución singular, tratándose de una de las primeras de este tipo que se encontraron, aunque Taylor había dado ya anteriormente una solución singular tal. D'Alembert encontró la solución singular de un tipo de ecuación diferencial un poco más general, la $y=xf(y')+g(y')$, y por ello a esta ecuación se la conoce con el nombre de «ecuación de D'Alembert».

10. Los Clairaut

Alexis Claude Clairaut fue uno de los matemáticos más precoces de la historia, aventajando incluso a Blaise Pascal en este sentido. A la edad de diez años estudiaba ya los dos textos de L'Hospital sobre el cálculo y sobre las cónicas; a los trece leía un artículo sobre geometría en la Académie des Sciences, y a los dieciocho fue elegido miembro de la Académie, mediante una dispensa especial de las condiciones de edad exigidas. (D'Alembert fue elegido académico a los 24 años.) En el mismo año de su elección publicó Clairaut un tratado que se hizo muy famoso, *Recherches sur les courbes à double courbure*, cuyo resumen había presentado dos años antes a la Academia. Al igual que en el caso de la *Géométrie* de Descartes, las *Recherches* de Clairaut aparecieron sin el nombre del autor en la portada, aunque también en este caso se sabía bien quién era el autor. Clairaut lleva a cabo en su tratado, para las curvas en el espacio, el programa que había propuesto Descartes casi un siglo antes, es decir, su estudio a través de sus proyecciones sobre dos planos de coordenadas. De hecho, fue este método el que le sugirió a Clairaut el nombre con que bautizó en el título de su libro a las curvas alabeadas, dado que su curvatura viene determinada por las curvaturas de las dos proyecciones. En las *Recherches* aparecen numerosas curvas espaciales determinadas por intersecciones de diversas superficies, se dan explícitamente fórmulas para las distancias en dos y en tres dimensiones, la forma de la ecuación del plano por sus intersecciones con los ejes aparece incluida también, y se hallan tangentes a algunas curvas en el espacio. Este libro, pues, del joven Clairaut constituye el primer tratado de geometríaanalítica tridimensional[14]. Clairaut, miembro de una familia de veinte

[14] Una excelente fuente de información sobre Clairaut puede encontrarse en Pierre Brunet, «La vie et l'oeuvre de Clairaut», *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, 4 (1951), págs. 13-40, 109-153; 5 (1952), págs. 334-349; 6 (1953), págs. 1-17. Véase también C. B. Boyer, «Clairaut and the Origin of the Distance Formula», *American Mathematical Monthly*, 55 (1948), págs. 556-557.

hijos, sólo uno de los cuales sobrevivió a su padre, tuvo importancia también por otras contribuciones al análisis. Clairaut observó que las derivadas parciales de segundo orden cruzadas f_{xy} y f_{yx} de una función $f(x, y)$ son iguales, en general (nosotros sabemos hoy que esto ocurre si estas derivadas son continuas en el punto en cuestión), y utilizó este hecho en el familiar criterio $M_y \equiv N_x$ en la teoría de ecuaciones diferenciales, para el carácter de diferencial exacta de la expresión diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$. En algunas obras de matemática aplicada que se hicieron famosas, tales como la *Théorie de la figure de la terre* (1743) y la *Théorie de la lune* (1752), Clairaut hizo uso de la teoría del potencial. Sus textos, *Eléments de géométrie* (1741) y *Eléments d'algèbre* (1746), el primero de los cuales escrito para la marquesa de Châtelet, formaban parte de un plan, que nos recuerda los de nuestros días, para mejorar la enseñanza de la matemática.

A propósito, Clairaut tenía un hermano menor que rivalizó con él en precocidad, puesto que a la edad de 15 años este hermano menor, conocido históricamente sólo como «Clairaut le Cadet», publicó en 1731 (el mismo año en que habían aparecido las *Recherches* del hermano mayor) un libro sobre el cálculo titulado *Traité de quadratures circulaires et hyperboliques*. Este genio prácticamente desconocido murió trágicamente de viruela al año siguiente[15]. El padre de los dos hermanos Clairaut fue también un matemático estimable, pero hoy se le recuerda principalmente por la obra de sus hijos, dos de los más precoces matemáticos de todos los tiempos.

11. Los Riccati

Una de las más interesantes entre las ecuaciones diferenciales que se estudiaron durante el siglo XVIII es la que D'Alembert llamó ecuación de Riccati, la de la forma $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos, entre los que se encontraban varios de los Bernoulli, así como por Jacopo Riccati (1676-1754) y su hijo Vincenzo (1707-1775). Fue Euler, sin embargo, el primero en llamar la atención sobre el hecho de que si se conoce una solución particular $v = f(x)$, entonces la sustitución $y = v + \frac{1}{z}$ convierte la ecuación de Riccati en una ecuación diferencial lineal en z, de manera que se puede hallar una solución general. Euler hacía notar también, en los *Commentarii* de San Petersburgo correspondientes a los años 1760-1763, que si se conocen dos soluciones particulares, entonces se puede obtener una solución general expresable por medio de una simple cuadratura.

Euler fue, sin duda, el matemático individual al que se deben más métodos de los que se utilizan hoy en los cursos de introducción a la resolución concreta de ecuaciones diferenciales, e incluso muchos de los problemas que aparecen en los

[15] Véase C. B. Boyer, «Clairaut le Cadet and a Toerem of Thabit ibn-Qurra», *Isis*, 55 (1964), págs. 68-70. Cf. *Isis*, 57 (1966), págs. 56-66.

textos usuales se remontan a los grandes tratados de cálculo diferencial e integral que escribió Euler: *Institutiones calculi differentialis* (San Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (San Peteresburgo, 1768-1770, 3 vols.). El uso de factores integrantes, los métodos sistemáticos para resolver ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes, y la distinción entre ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas, así como entre soluciones particulares y generales, están entre sus innumerables contribuciones al tema de las ecuaciones diferenciales, aunque en algunos de sus descubrimientos el mérito tiene que compartirlo con otros matemáticos contemporáneos. Daniel Bernoulli, por ejemplo, consiguió resolver la ecuación $y''+ky=f(x)$ independientemente de Euler y más o menos a la vez, hacia los años 1739-1740, y D'Alembert disponía ya, hacia 1747, de métodos generales para resolver ecuaciones lineales completas, lo mismo que Euler. En cierto modo, nuestra deuda para con Euler, presente en cualquier parte de la teoría de ecuaciones diferenciales, queda reconocida en el hecho de que un cierto tipo de ecuación lineal con coeficientes variables lleva su nombre. La ecuación de Euler $x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\cdots+a_n y^{(0)}=f(x)$, en la que los exponentes entre paréntesis indican órdenes de derivación, se puede reducir fácilmente a una ecuación lineal con coeficientes constantes por medio de la sustitución $x=e^t$.

Los cuatro volúmenes de las *Institutiones* de Euler contienen el tratamiento más exhaustivo del cálculo (con gran diferencia) hasta el momento de su publicación. Además de los elementos básicos de la materia y de la resolución de ecuaciones diferenciales, nos encontramos en estas obras con cosas tales como el «teorema de Euler para las funciones homogéneas»: Si $f(x, y)$ es homogénea de orden n, entonces $xf_x+yf_y=nf$; un desarrollo del cálculo de diferencias finitas, formas estandarizadas para las integrales elípticas (campo en el que también se mostró activo D'Alembert), así como la teoría de las funciones beta y gamma (o factoriales generalizados), definidas por las «integrales eulerianas»

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

$$B(m,\ n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

que están relacionadas entre sí por fórmulas tales como la

$$B(m,\ n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma\ (m+n)}$$

Wallis había anticipado ya algunas de las propiedades de estas integrales, pero fue el tratamiento organizado y sistemático de estas funciones trascendentes de orden superior por Euler lo que las convirtió en una parte esencial del cálculo avanzado y de la matemática aplicada. Aproximadamente un siglo más tarde Pafnuti L.

Tchebycheff (1821-1894) generalizó la integral que aparece en la definición de la función beta, al demostrar que la «integral de Tchebycheff»

$$\int x^p(1-x)^q dx$$

es una función trascendente de orden superior, salvo que p o q o $p+q$ sean enteros.

12. La teoría de probabilidades

Una de las características del siglo de la Ilustración fue la tendencia a aplicar a todos los aspectos de la sociedad los métodos cuantitativos que habían tenido tanto éxito en las ciencias físicas. A este respecto, no es sorprendente encontrarse a Euler y a D'Alembert escribiendo sobre problemas de esperanza de vida, anualidades, loterías y otros aspectos de las ciencias sociales. Después de todo, la teoría de probabilidades había sido uno de los temas que más interesaba a los amigos de Euler, Daniel y Nicolaus Bernoulli. Según los cálculos de Euler, publicados en las *Memoirs* de la Academia de Berlín del año 1751, una imposición de 350 coronas a favor de un niño recién nacido, le produciría una anualidad vitalicia de 100 coronas a partir de los veinte años de edad. Entre los problemas de loterías que publicó en las *Memoirs* de la Academia de Berlín para el año 1765, el siguiente es uno de los más sencillos. Considérense n billetes numerados consecutivamente de 1 a n, de los que se extraen tres al azar. Entonces, la probabilidad de que resulten extraídos tres números consecutivos es igual a

$$\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}$$

la probabilidad de que salgan dos números consecutivos (pero no tres) es

$$\frac{2 \cdot 3(n-3)}{n(n-1)}$$

y la probabilidad de que no salgan dos números consecutivos es

$$\frac{(n-3)\,(n-4)}{n(n-1)}$$

Para esta solución no eran necesarios, evidentemente, conceptos nuevos, pero, como podría haberse sospechado, Euler contribuyó a crear nuevas notaciones

también aquí, como había hecho en otras ramas de la matemática. Así, escribía, por ejemplo, que había encontrado útil representar la expresión

$$\frac{p(p-1)\,(p-2)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q}$$

por

$$\left[\frac{p}{q}\right]$$

que es una forma esencialmente idéntica a la notación moderna

$$\binom{p}{q}$$

D'Alembert resulta, sin embargo, un personaje notable en la historia de la teoría de probabilidades, porque, al contrario que Euler, se manifestó opuesto a las opiniones generalmente admitidas. Por ejemplo, en su artículo sobre «Croix ou Pile» publicado en 1754 en la *Encyclopédie*, afirmaba D'Alembert que la probabilidad de obtener una «cara» al efectuar dos lanzamientos de una moneda sería $\frac{2}{3}$ y no los $\frac{3}{4}$ generalmente aceptados, dado que el juego se termina si aparece «cara» en el primer lanzamiento. Un matemático de Ginebra hizo observar a D'Alembert que sus tres casos (X, XY, YY) no son equiprobables, pero D'Alembert no se dejó convencer por el razonamiento usual. En el mismo artículo que hemos mencionado se refería D'Alembert al caso de la paradoja de San Petersburgo como un verdadero escándalo; evidentemente este caso le reafirmó en su posición de considerar los primeros principios de la teoría de probabilidades que se venían admitiendo como erróneos. En vista de esta situación propuso D'Alembert que, siempre que fuera posible, se determinaran las probabilidades por medio de experimentos. En esta propuesta se vio apoyado por el conde de Buffon (1701-1788), autor de un famoso tratado de *Histoire naturelle* en varios volúmenes. Entre los científicos en general, a Buffon se le conoce como un iconoclasta que, entre otras cosas, proponía unos 75.000 años como estimación de la edad de la Tierra, en lugar de la cifra generalmente aceptada de unos 6.000 años aproximadamente. Entre los matemáticos a Buffon se le conoce por dos contribuciones a esta ciencia de distinto tipo, una traducción al francés del *Method of Fluxions* de Newton, y el «problema de la aguja de Buffon» en teoría de probabilidades. Buffon también se había visto impresionado por la «paradoja de San Petersburgo», y en su «Essai d'arithmétique morale», publicado en 1777 en el volumen cuarto de un suplemento a la *Histoire naturelle*, daba varias razones para considerar el juego en cuestión como intrínsecamente imposible. Buffon introducía también en el mismo «Essai», lo que constituía esencialmente una nueva rama de la teoría de probabilidades, la que estudia los problemas probabilísticos basados en consideraciones geométricas. Buffón propo-

nía el problema siguiente: considérese un plano horizontal dividido en regiones por un haz de rectas paralelas equidistantes, sobre el que se lanza al azar una aguja de grosor despreciable[16]. La probabilidad de que la aguja corte a una de las rectas paralelas aparece calculada correctamente por Buffon como $\frac{2l}{\pi d}$, donde d es la distancia común entre las paralelas y l la longitud de la aguja, con $l<d$. El «Essai» contiene también una interesante colección de tablas de nacimientos, matrimonios y muertes correspondientes a París y que cubren los años 1709 a 1766, así como resultados obtenidos a partir de ellas relativos a esperanza de vida, que fueron criticados duramente por D'Alembert.

Durante el siglo XVIII fue cuando se introdujo en Europa, procedente del este, la práctica de la vacunación contra la viruela, es decir, de la inoculación con una forma debilitada de viruela, con objeto de desarrollar inmunidad contra dicha enfermedad. Esta costumbre provocó una controversia entre los matemáticos que trataban de aplicar la teoría de probabilidades a los asuntos de la vida social. El año 1760 Daniel Bernoulli leyó ante la Académie des Sciences de París un trabajo relativo a las ventajas de la inoculación, pero antes de que dicho trabajo fuese publicado en las *Memoirs* de la Académie ya le había puesto objeciones D'Alembert, quien no negaba las ventajas de la vacuna, pero sí sostenía que Bernoulli había exagerado tales ventajas. Parte de la controversia se centró en la distinción que, según insistía D'Alembert, había que hacer entre la «vida media» y la «vida probable» de un individuo. La «vida probable» de un niño venía a ser entonces de unos ocho años (es decir, la mitad de los niños morían en esta época antes de cumplir los ocho años), mientras que su «vida media» o duración de la vida humana en promedio era de unos 26 años. (Si comparamos estas cifras con las que corresponden a la época actual, se pone de manifiesto el horriblemente bajo nivel de los cuidados médicos de siglos pasados.) Las controversias en torno a la probabilidad de que la inoculación fuese ventajosa finalizaron definitivamente a finales de siglo, cuando fue descubierta al fin la verdadera vacuna científica contra la viruela por el doctor Edward Jenner.

13. La teoría de números

D'Alembert compartía con Euler intereses comunes en muchos aspectos de la matemática, especialmente en análisis y en matemática aplicada, pero hubo una dirección al menos en la que Euler hizo grandes progresos sin contrapartida comparable por parte de D'Alembert. Se trata de la teoría de números, tema que ejerció una fuerte atracción sobre muchos de los matemáticos más grandes de la historia, tales como Fermat y Euler, pero que no atrajo en cambio en absoluto a otros, incluidos Newton y D'Alembert. Euler no llegó a publicar ningún tratado

[16] Puede verse una exposición de este problema en el libro de Isaac Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (1865). Véase también N. T. Gridgeman, «Geometric Probability and the Number π», *Scripta Mathematica*, 25 (1960), págs. 183-195.

sobre el tema, pero sí escribió numerosas cartas y artículos sobre diversos aspectos de la teoría de números. Recordemos que Fermat había afirmado, entre otras cosas, en sus trabajos sobre teoría de números, 1) que los números de la forma $2^{2^n}+1$ parecen ser siempre primos, y 2) que si p es primo y a es un entero no divisible por p, entonces $a^{p-1}-1$ es divisible por p. Euler refutó la primera de estas dos conjeturas en 1732, poniendo en juego su sorprendente habilidad de cálculo, al demostrar que $2^{2^5}+1=4.294_1967.297$ se puede factorizar como producto de $6_1700.417$ por 641. Hoy esta conjetura de Fermat está tan sistemáticamente «devaluada» que los matemáticos se inclinan más bien por la opinión contraria, es decir, la de que no hay ningún primo de Fermat a partir del número 65.537 correspondiente a $n=4$.

De la misma manera que Euler derribó, como hemos visto, una de las conjeturas de Fermat por medio de un contraejemplo, el siglo XX ha venido a refutar una conjetura formulada por Euler: Euler creía que si n es mayor que 2, entonces son necesarias al menos n potencias n-ésimas para producir, sumándolas, otra potencia n-ésima [17]; pero en 1966 se demostró que la suma de sólo cuatro quintas potencias puede dar como resultado otra quinta potencia [18], como, por ejemplo, $27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$. Hay que hacer notar, sin embargo, que en este último caso fue necesario el paso de dos siglos y la ayuda final de las computadoras para detectar el error.

Para el caso de la segunda conjetura, que se suele conocer con el nombre de «teorema menor de Fermat», Euler fue el primero que publicó una demostración (aunque Leibniz había dejado ya otra entre sus manuscritos). La demostración de Euler, que apareció en los *Commentarii* de San Petersburgo del año 1736, es tan sorprendentemente elemental que la podemos exponer aquí. Esta demostración procede por inducción sobre a: Si $a=1$ el teorema se verifica trivialmente. Vamos a demostrar, pues, que si el teorema se verifica para un valor entero positivo cualquiera de a, $a=k$, entonces también se verifica necesariamente para $a=k+1$; para ello utilizamos el teorema binomial escrito en la forma $(k+1)^p=k^p+mp+1$, siendo m un número entero. Restando $k+1$ a los dos miembros, obtenemos que $(k+1)^p-(k+1)=mp+(k^p-k)$, y como el último término del segundo miembro es divisible por p, por hipótesis, lo es todo el segundo miembro, luego el primer miembro también es divisible por p obviamente. Queda demostrado, pues, el teorema por inducción completa para todos los valores de a, siempre que a sea primo con p.

Después de demostrar el teorema menor de Fermat, demostró Euler una proposición un poco más general, en la que utilizó una función que más tarde recibió el nombre de «función ϕ de Euler» [19]. Si m es un número natural mayor que 1, la función $\phi(m)$ se define como el número de enteros menores que m que son primos con m, incluyendo siempre el 1 entre ellos. Se acostumbra definir $\phi(1)=1$, y

---

[17] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (1952), vol. II, pág. 648.

[18] L. J. Lander y T. R. Parkin, «Counterexample to Euler's Conjecture on Sums of Like Powers», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72 (1966), pág. 1079.

[19] Puede verse una buena exposición en el libro de Oystein Ore, *Number Theory and its History* (1948).

para $m=2$, 3 y 4, por ejemplo, los respectivos valores de $\phi(m)$ son 1, 2 y 2. Si p es primo evidentemente se tiene que $\phi(p)=p-1$, y puede demostrarse que

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

donde p_1, p_2, ..., p_r, son los factores primos distintos que figuran en m. Utilizando este resultado demostró Euler que $a^{\phi(m)}-1$ es divisible por m si a y m son primos entre sí.

Euler resolvió dos de las conjeturas de Fermat, como hemos visto, pero no consiguió ni demostrar ni refutar el «último teorema de Fermat», aunque sí demostró la imposibilidad de existencia de soluciones enteras no triviales de la ecuación $x^n+y^n=z^n$ para el caso $n=3$. En 1747 Euler prolongó la lista de los tres pares de números amigos que conocía Fermat hasta treinta pares; más tarde la extendió de nuevo hasta más de sesenta pares. También dio Euler una demostración de que todos los números perfectos pares son de la forma dada por Euclides, es decir, $2^{n-1}(2^n-1)$, siendo 2^n-1 primo. Hasta hoy permanece abierto el problema de si existe o no algún número perfecto impar. Y también está aún sin resolver un problema que surgió en la correspondencia entre Euler y Christian Goldbach (1690-1764): En una carta a Euler de 1742 Goldbach afirmaba que todo número natural par mayor que 3 es suma de dos primos. Esta afirmación, llamada «teorema de Goldbach» (o mejor «conjetura de Goldbach») apareció publicada sin demostración en 1770 en Inglaterra, en las *Meditationes algebraicae* de Edward Waring (1734-1793). Waring fue *senior wrangler* (es decir, número uno en los célebres exámenes *tripos*) en Cambridge en 1757 y *lucasian professor* de matemáticas en dicha universidad a partir de 1760. Sus obras contenían muchos resultados importantes, pero estaban tan mal escritas que tuvieron poca difusión. Así ocurrió, por ejemplo, que el conocido criterio del cociente para la convergencia de series se suele conocer como el criterio de Cauchy, a pesar de que había sido dado por Waring tan pronto como en el año 1776. Las *Meditationes algebraicae* contienen no sólo la conjetura de Goldbach, sino también otra conjetura complementaria que asegura que todo entero impar o es primo o suma de tres primos. Entre otras afirmaciones sin demostrar hay una que se conoce como el teorema o problema de Waring: Euler había demostrado que todo entero positivo es suma de no más de cuatro cuadrados; Waring conjeturó entonces que todo entero positivo se podría expresar como suma de no más de 9 cubos, o como suma de no más de 19 cuartas potencias. La primera mitad de esta osada conjetura se demostró a comienzos del siglo XX; la segunda parte aún no ha sido demostrada, salvo en el aspecto parcial que representa el hecho demostrado por Hilbert en 1909 de que todo entero positivo se puede expresar como suma de no más de N potencias n-ésimas positivas, donde N es una cierta función de n. Waring publicó también en sus *Meditationes algebraicae* un teorema que lleva el nombre de su discípulo y amigo John Wilson (1741-1793), que dice que si p es primo entonces $(p-1)!+1$ es un múltiplo de p. Wilson también fue *senior wrangler* en Cambridge, pero abandonó las matemáticas por el derecho, llegando a ser juez y siendo elevado más tarde a la nobleza.

14. Los libros de texto

Los matemáticos más importantes de la Europa continental a mediados del siglo XVIII eran antes que nada analistas, pero ya hemos podido ver que sus contribuciones a la matemática no se limitaron al análisis. D'Alembert dio una demostración, bien que defectuosa, del teorema fundamental del álgebra, y Clairaut había publicado ya en 1740 un texto, los *Eléments d'algèbre*, que llegó a alcanzar tal popularidad que aún se publicó una sexta edición de él en 1801. Euler no sólo contribuyó a la teoría de números, sino que escribió también un texto de álgebra muy popular que se publicó en ediciones en alemán y en ruso en San Petersburgo en 1770-1772, en francés (bajo los auspicios de D'Alembert) en 1774, y en otras muchas versiones, incluidas algunas ediciones americanas en inglés. La excepcional calidad didáctica del *Algebra* de Euler se suele atribuir al hecho de que la dictó el autor ya ciego a un criado de escasos conocimientos. Los libros de texto de Clairaut y de Euler se utilizaron relativamente poco en Inglaterra, en parte debido al aislamiento matemático de Inglaterra a finales del siglo XVIII, y en parte también debido a que Maclaurin y otros habían escrito buenos libros de texto de nivel elemental. El *Treatise of Algebra* de Maclaurin llegó a alcanzar media docena de ediciones desde 1748 a 1796. Uno de los textos rivales de éste, el *Treatise of Algebra* de Thomas Simpson (1710-1761) pudo jactarse de llegar a ocho ediciones por lo menos en Londres de 1745 a 1809; otro, los *Elements of Algebra* por Nicholas Saunderson (1682-1739) se editó cinco veces entre 1740 y 1792. Simpson fue un genio autodidacta que consiguió ser elegido miembro de la Royal Society en 1745, pero cuya turbulenta vida le condujo a un fracaso total media docena de años más tarde. Su nombre ha quedado para la posteridad, sin embargo, en la llamada regla de Simpson, que publicó en sus *Mathematical Dissertations en Physical and Analytical Subjects* en 1743, para calcular cuadraturas aproximadas utilizando arcos parabólicos, pero en realidad este resultado había aparecido ya en una forma algo diferente en 1668 en las *Exercitationes geometricae* de James Gregory. La vida de Saunderson fue, en cambio, un ejemplo de triunfo de la voluntad personal sobre un enorme obstáculo, una ceguera total desde la edad de un año, como resultado de haber padecido la viruela.

Los textos de álgebra del siglo XVIII ilustran de manera clara la tendencia hacia un énfasis creciente en los aspectos algorítmicos de la materia, mientras que sus fundamentos lógicos permanecían aún sumergidos en una incertidumbre considerable. La mayor parte de los autores consideraba necesario insistir largamente sobre las reglas que regían la multiplicación de números negativos, ¡y algunos rechazaban categóricamente la posibilidad de multiplicar dos números negativos! Este siglo fue probablemente la época por excelencia de los libros de texto en la matemática, y nunca antes se habían publicado tantos libros en tal cantidad de ediciones. El *Algebra* de Simpson se encontró pronto con su compañero natural en los *Elements of Plane Geometry*, que llegó a su quinta edición entre 1747 y 1800. Sin embargo, entre la multitud de libros de texto de la época pocos consiguieron igualar el récord de la edición de los *Elements of Euclid* por Robert Simson (1687-1768). Esta obra, publicada por un hombre que se había especializado en medicina pero que llegó a ser profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow, se

publicó por primera vez en 1756, y en 1834 podía vanagloriarse ya de su 24.ª edición inglesa, por no mencionar las traducciones a otros idiomas ni los libros de geometría que se derivaron de él en mayor o menor grado, puesto que la mayor parte de las versiones inglesas modernas de Euclides tienen una gran deuda con ella.

15. La geometría sintética

Simson intentaba hacer revivir la antigua geometría griega, y en este empeño publicó algunas «reconstrucciones» de obras perdidas, tales como los *Porismas* de Euclides y las *Secciones determinadas* de Apolonio. En parte como resultado del entusiasmo que demostró Simson por la antigüedad, Inglaterra fue durante el siglo XVIII un feudo de la geometría sintética, y en consecuencia los métodos analíticos aplicados a la geometría hicieron pocos progresos. Esta pudo ser una de las razones de que los progresos en el análisis que se produjeron en Inglaterra en esta época quedaran muy rezagados con respecto a los del resto de Europa. Se le suele echar la mayor parte de la culpa de este retraso al aparentemente engorroso método de las fluxiones, comparado con el del cálculo diferencial, pero esta opinión no puede justificarse fácilmente. El simbolismo fluxional sigue siendo utilizado incluso hoy mismo por los físicos sin ningún inconveniente, simbolismo que se adapta fácilmente a la geometría analítica, pero ningún tipo de cálculo, ni diferencial ni fluxional se ajusta adecuadamente a los métodos de la geometría sintética. Por lo tanto, parece haber sido la predilección de los matemáticos ingleses por la geometría pura, lo que supuso un freno mucho más eficaz a las investigaciones que podrían haber desarrollado el análisis que las notaciones de la teoría de fluxiones. Tampoco es justo el cargar las culpas del conservadurismo geométrico británico mayormente sobre las espaldas de Newton. Después de todo, el *Method of Fluxions* de Newton está lleno de geometría analítica, e incluso los *Principia* contienen más análisis de lo que se suele reconocer. Posiblemente fuera una excesiva insistencia en la precisión lógica, lo que llevó a los matemáticos británicos a un restringido punto de vista geométrico. Ya vimos los certeros argumentos de Berkeley contra los matemáticos, y Maclaurin, entre otros, consideró que la manera más segura de hacerles frente sobre una base racional era la de volver al rigor de la geometría clásica. Casi 2.000 años antes, en Grecia, una insistencia en el rigor estricto vino a obstaculizar el desarrollo natural del álgebra numérica; en la Inglaterra del siglo XVIII la situación fue algo parecida. En el resto de Europa, en cambio, la opinión generalizada, formulada más o menos explícitamente, iba en la línea del consejo que, según se dice, dio D'Alembert a un titubeante amigo matemático: «Siga adelante y la fe pronto volverá.» Resulta fácil y trivial criticar la lógica utilizada por Euler y D'Alembert, pero sería inconcebible que nadie cuestionase el puesto inmensamente importante que ocupan en el desarrollo histórico de la matemática.

La geometría sintética no se olvidó tampoco de una manera completa en la Europa continental, ya que en 1741 Clairaut publicó unos *Eléments de géométrie* que alcanzaron también una media docena de ediciones, pero este libro resultó un

texto insulso, con escasa solidez y menos rigor. Euler y D'Alembert hicieron pocas contribuciones a este campo, a pesar de lo cual la recta que pasa por el circuncentro, el baricentro y el ortocentro de un triángulo se conoce hoy como la recta de Euler del triángulo. El hecho de que estos tres puntos centrales de un triángulo cualquiera estén alineados parece haber sido conocido anteriormente por Simson, cuyo nombre ha quedado asociado a otra recta relacionada con el triángulo[20]. Sin embargo, estas contribuciones menores, aunque bellas, a la geometría pura palidecen casi hasta lo insignificante cuando se las compara con las contribuciones a la geometría analítica que se hicieron en la Europa continental durante el siglo XVIII.

Ya hemos hablado de la geometría analítica de Clairaut, especialmente en conexión con el desarrollo de la geometría analítica tridimensional, pero el material incluido en el segundo volumen de la *Introductio* de Euler era mucho más extenso, más sistemático y más eficaz. En una fecha tan temprana como 1728 publicó Euler en los *Commentarii* de San Petersburgo algunos artículos sobre el uso de coordenadas en la geometría del espacio tridimensional, dando las ecuaciones generales de tres importantes clases de superficies: cilindros, conos y superficies de revolución en general. Euler se dio cuenta de que la ecuación de un cono con vértice en el origen de coordenadas tiene que ser homogénea necesariamente. También demostró que la curva de longitud mínima (o geodésica) entre dos puntos de una superficie cónica se convertiría en la recta que une estos dos puntos, si la superficie se abriese y se extendiese sobre un plano, lo que constituye uno de los primeros teoremas sobre superficies desarrollables de la historia de la matemática. La importancia que atribuía Euler a hacer su obra tan general como fuera posible puede verse especialmente en el segundo tomo de su *Introductio*. Este libro hizo más que ningún otro por conseguir que el uso de las coordenadas, tanto en dimensión dos como en dimensión tres, se convirtiera en el instrumento básico para el estudio sistemático de curvas y superficies. En vez de limitarse a las secciones cónicas, Euler da una teoría general de curvas basada en el concepto de función que había sido central a lo largo del primer volumen. A las curvas trascendentes no se las desterraba ya al desván, como había sido la costumbre hasta entonces, sino que en este libro, y prácticamente por primera vez, el estudio de las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas forma parte de la geometría analítica con pleno derecho. También se incluyen las demás curvas trascendentes usuales, así como algunas no tan usuales, como son las $y=x^x$, $y^x=x^y$, $y=(-1)^x$, etc.

16. La geometría analítica tridimensional

La *Introductio* incluye también en su segundo volumen dos exposiciones distintas de las coordenadas polares, que son tan completas y sistemáticas que tal método se ve frecuentemente atribuido a Euler de una manera errónea. Se estudian

[20] Véase, por ejemplo, R. A. Johnson, *Modern Geometry* (Boston, Houghton Mifflin, 1929), reeditado con el título de *Advanced Euclidean Geometry* (New York: Dover, 1960), págs. 137 y sigs. y 206 y sigs.

allí clases completas de curvas, tanto algebraicas como trascendentes, y aparecen por primera vez las ecuaciones de la transformación de coordenadas cartesianas rectangulares a polares, exactamente en su forma trigonométrica moderna. Euler utilizaba además el ángulo vectorial general, así como valores negativos del radio vector, de manera que la espiral de Arquímedes, por ejemplo, aparecía en su forma dual, simétrica con respecto a la recta perpendicular al eje polar por el polo. D'Alembert mismo se vio muy influenciado por esta obra, evidentemente, cuando escribió el artículo sobre «Geometría» para la *Encyclopédie*. La *Introductio* de Euler también fue la principal responsable de que se extendiese el uso sistemático de lo que llamamos la representación paramétrica de curvas, es decir, mediante la expresión de cada una de las coordenadas cartesianas en función de una variable independiente auxiliar. Para la cicloide, por ejemplo, Euler utiliza las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = b - b \cos \dfrac{z}{a} \\ y = z + b \operatorname{sen} \dfrac{z}{a} \end{cases}$$

La *Introductio* va seguida de un largo y sistemático apéndice que constituye quizá la contribución más importante de Euler a la geometría, ya que representa prácticamente la primera exposición en forma de libro de texto de la geometría analítica tridimensional. Se estudian en este apéndice superficies en general, tanto algebraicas como trascendentes, para dividirlas después en categorías. Aquí nos encontramos, y de nuevo por primera vez, evidentemente, con la idea de que las superficies algebraicas de segundo grado constituyen una familia de «cuádricas» en el espacio, análoga a la de las secciones cónicas en la geometría plana. Partiendo de la ecuación cuadrática general $f(x, y, z)=0$ con sus diez términos, Euler se da cuenta de que si se iguala a cero la suma homogénea de los términos de segundo grado, se obtiene la ecuación del cono asintótico a la cuádrica, sea real o imaginario. Y más importante aún es el hecho de que utilice las ecuaciones de una traslación y rotación del sistema de ejes (en una forma que, dicho sea de paso, aún lleva el nombre de Euler) para reducir la ecuación de la superficie de una cuádrica regular a una de las formas canónicas correspondientes a los cinco tipos fundamentales: el elipsoide real, los hiperboloides de una y de dos hojas, y los paraboloides elíptico e hiperbólico. Uno de los aspectos que no suele faltar en los cursos modernos de geometría analítica, pero que no se encuentra en la *Introductio* (ni en ningún otro libro de la época) es un estudio sistemático de los lugares geométricos de la geometría elemental, la recta y la circunferencia, el plano y la esfera. Sin embargo, esta obra de Euler se aproxima más a la forma de los textos modernos de geometría analítica que ningún otro libro publicado antes de la Revolución Francesa.

17. Lambert y el postulado de las paralelas

Muchos matemáticos de todas las épocas han mostrado también ciertas veleidades filosóficas. Euler y D'Alembert se cuentan entre ellos, desde luego, pero

ambos pasaron por alto un tema que intentó explotar otro matemático contemporáneo y también con inclinaciones filosóficas. Se trata de Johann Heinrich Lambert (1728-1777), un suizo-alemán que escribió sobre una gran variedad de temas, matemáticos y no matemáticos, y que estuvo estrechamente relacionado con Euler durante un par de años en la Academia de Berlín. Se dice que cuando Federico el Grande le preguntó en cuál de las ciencias era más versado, Lambert contestó breve y modestamente: «En todas.» Lambert podría haber llegado a ser más conocido hoy si no hubiese intentado dominar, un tanto ambiciosamente, todos los campos de la ciencia, ya que fue sin duda un hombre de una capacidad excepcional.

Ya hemos visto que Saccheri creía haber demolido las posibilidades hipotéticas de que la suma de los ángulos de un triángulo plano fuera mayor o menor que dos ángulos rectos. Lambert llamó la atención sobre el hecho, bien conocido, de que sobre la superficie de una esfera la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos ángulos rectos, y sugirió que quizá se pudiera encontrar una superficie sobre la que la suma de los ángulos de un triángulo siempre fuese menor que dos rectos. Tratando de completar lo que había intentado ya Saccheri, es decir, conseguir una demostración de que la negación del postulado de las paralelas de Euclides conduce a una contradicción, escribió Lambert en 1766 su obra *Die Theorie der Parallellinien*, que apareció publicada póstumamente en 1786. En vez de comenzar por un cuadrilátero de Saccheri, Lambert adoptó como punto de partida de sus investigaciones un cuadrilátero con tres ángulos rectos, cuadrilátero que se conoce hoy con el nombre de cuadrilátero de Lambert, y estudió las tres posibilidades que podría verificar el cuarto ángulo, es decir, que fuera agudo, recto u obtuso. Correspondientemente a estos tres casos demostró, a la manera de Saccheri, que la suma de los ángulos de un triángulo sería respectivamente menor, igual o mayor que dos ángulos rectos. Y, avanzando más lejos que Saccheri en esta dirección, demostró que la cantidad en que dicha suma se quede corta o exceda a dos ángulos rectos, según los casos, es proporcional al área del triángulo. En el caso del ángulo obtuso la situación es análoga a la que nos encontramos en un teorema clásico de geometría esférica, el que dice que el área de un triángulo es proporcional a su exceso esférico, y Lambert formuló la atrevida opinión de que la hipótesis del ángulo agudo podría corresponder a una geometría sobre una nueva superficie, tal como la de una esfera de radio imaginario. Cien años más tarde, en 1868, demostró Eugenio Beltrami (1835-1900) que era ciertamente correcta la conjetura de Lambert sobre la existencia de tal tipo de superficie. Esta superficie no resultó ser, sin embargo, una esfera de radio imaginario, sino una superficie real conocida como la «pseudoesfera», que es una superficie de curvatura constante negativa engendrada al hacer girar una tractriz en torno a su eje[21].

A pesar de que lo que intentaba Lambert, lo mismo que Saccheri, era

[21] La obra de Lambert sobre la geometría no-euclídea puede verse expuesta de una manera muy completa en el libro de F. Engel y P. Stäckel *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (1895). Una exposición más breve puede verse, por ejemplo, en Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (1912).

demostrar el postulado de las paralelas, parece haberse dado cuenta claramente de su fracaso en el intento, ya que dejó escrito:

> Las demostraciones del postulado euclídeo de las paralelas pueden desarrollarse hasta el punto en que aparentemente sólo queda por concluir un detalle sin importancia. Pero un análisis cuidadoso viene a demostrar que en este detalle sin importancia es donde radica el punto crucial del asunto, porque normalmente o bien contiene la proposición que se trataba de demostrar o un postulado alternativo equivalente a ella.

Nadie hasta entonces se había acercado tanto a la verdad sin llegar realmente a descubrir la geometría no euclídea.

A Lambert también se le conoce hoy por otras contribuciones a la matemática. Una de ellas es la primera demostración de que π es un número irracional, presentada en 1761 a la Academia de Berlín. (Euler había demostrado ya en 1737 que e es irracional.) Lambert demostró que si x es un número racional distinto de cero, entonces tg x es irracional, luego en vista de que $\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$, que es racional, $\frac{\pi}{4}$ no puede ser racional, y por lo tanto tampoco puede serlo π. Este resultado no zanjaba el problema de la cuadratura del círculo, evidentemente, puesto que las irracionalidades cuadráticas son constructibles con regla y compás. Por esta época los «cuadradores del círculo» constituían ya un ejército tan numeroso y obstinado que la Academia de Ciencias de París aprobó en 1775 una resolución por la que se decidía que ya no se examinaría oficialmente en el futuro ninguna presunta solución del problema de la cuadratura. Otra importante contribución de Lambert a la matemática fue la de que hizo por las funciones hiperbólicas lo que Euler había hecho anteriormente por las funciones circulares, dando tanto las notaciones como el tratamiento moderno. La comparación de las ordenadas de la circunferencia $x^2+y^2=1$ con las de la hipérbola $x^2-y^2=1$ había fascinado a los matemáticos durante un siglo, y en 1757 Vincenzo Riccati, italiano, había sugerido ya el desarrollo de un cierto tipo de funciones hiperbólicas. A Lambert le correspondió, sin embargo, la tarea de introducir formalmente las notaciones senh x, cosh x y tgh x para los equivalentes hiperbólicos de las funciones circulares de la trigonometría ordinaria, así como la de popularizar la nueva trigonometría hiperbólica que la ciencia moderna iba a encontrar tan útil. En correspondencia con las tres identidades de Euler que relacionan sen x, cos x y e^{ix}, hay otras tres relaciones análogas para las funciones hiperbólicas, que vienen expresadas por las ecuaciones:

$$\text{senh}\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

y

$$e^x=\text{senh}\ x+\cosh\ x$$

Lambert escribió también sobre cosmografía, geometría descriptiva, cartografía, lógica y filosofía de la matemática, pero su influencia no alcanzó las altas cotas conseguidas por Euler y D'Alembert.

18. Bézout y la teoría de la eliminación

Euler y D'Alembert murieron el mismo año, en 1783. Este fue también el año de la muerte de Etienne Bézout (1730-1783), un matemático que representa un aspecto característico de la ciencia de la época. Ya hemos mencionado que a lo largo del siglo XVIII se publicaron muchos libros de texto que alcanzaron un enorme éxito; podríamos añadir además que fue la segunda mitad de este siglo la que produjo también el género que más tarde se conoció como el del *Cours d'analyse*, es decir, el de las obras de varios volúmenes (a menudo tres) que cubrían la matemática o una de sus ramas desde el nivel más elemental al más avanzado. Una de las obras de este tipo que alcanzó mayor éxito fue el *Cours de mathématique* de Bézout, un tratado en seis volúmenes que apareció por primera vez en 1764-1769, del que se publicó inmediatamente una segunda edición en 1770-1772, y que pudo vanagloriarse de la gran cantidad de versiones conseguidas, tanto en francés como traducidas a otras lenguas. (Por ejemplo, el primer texto americano de geometría analítica, de 1826, procedía del *Cours* de Bézout.) Así fue, a través de tales recopilaciones, más bien que en las obras originales de los autores mismos, como se divulgaron los descubrimientos matemáticos de Euler y de D'Alembert, entre otros grandes matemáticos. El mismo Bézout no careció de originalidad, además de transmitir la obra ajena, y hoy se recuerda su nombre en conexión con el uso de determinantes en la teoría de eliminación algebraica. En una memoria presentada a la Academia de París en 1764, y de una manera más detallada en su tratado titulado *Théorie générale des équations algébriques*, de 1779, daba Bézout un sistema de reglas para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, parecido al de Cramer. A Bézout se le conoce mejor por una generalización de este caso al de un sistema de ecuaciones con una o más incógnitas, en el que se busca una condición sobre los coeficientes necesaria para que el sistema tenga al menos una solución. Por poner un ejemplo muy sencillo, podríamos preguntarnos por una condición necesaria para que el sistema

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0\\ a_3x+b_3y+c_3&=0 \end{aligned}$$

tenga una solución. Una condición necesaria es la de que el eliminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

que es aquí un caso especial del «bezoutiano», sea igual a cero. Eliminantes algo más complicados aparecen cuando lo que se busca es una condición necesaria para que dos ecuaciones polinómicas de distinto grado, en general, tengan una solución común. Bézout fue también el primero que dio una demostración satisfactoria del

teorema, conocido ya por Maclaurin y por Cramer, de que dos curvas algebraicas de grados m y n respectivamente, se cortan en general en $m \cdot n$ puntos, y así este teorema se suele conocer como «teorema de Bézout». Euler trabajó también en la teoría de la eliminación, pero menos sistemáticamente que Bézout.

Durante el siglo XVIII las universidades francesas no destacaron en el cultivo de la matemática, siendo las academias y escuelas militares las que produjeron un importante número de matemáticos, y un *Cours de mathématique* como el de Bézout resultaba muy adecuado para ser utilizado en instituciones de este tipo. Bézout mismo enseñó en una escuela militar y fue examinador de la marina, por lo tanto estuvo en estrecho contacto con los programas que se enseñaban en su época. Sin embargo, en el plazo de unos pocos años a partir de la muerte de los principales matemáticos que hemos estudiado en este capítulo (y Buffon murió sólo un año antes de la caída de la Bastilla en 1789) el sistema completo de enseñanza superior en Francia iba a experimentar una revisión y una drástica reforma, como resultado de los cambios producidos por la Revolución Francesa. Durante este breve pero importante período Francia volvió a ser una vez más el centro matemático del mundo, tal como lo había sido ya durante mediados del siglo XVII. El capítulo siguiente estará dedicado a un grupo de matemáticos que vivieron y trabajaron en París durante algunos de sus días más dramáticos.

Bibliografía

Bell, E. T.: *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1937).

——: *Development of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: McGraw-Hill, 1945).

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry* (New York, 1912; reed., New York: Dover, 1955).

Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

——: *History of the Calculus* (ed. en rústica, New York: Dover, 1959).

Brunet, Pierre: «La vie et l'oeuvre de Clairaut», *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, 4 (1951), 13-40, 109-153; 5 (1952), 334-349; 6 (1953), 1-17.

Cajori, Florian: *History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 vols.).

Coolidge, J. L.: *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945).

D'Alembert, J.: *Encyclopédie* (París, 1751-1765).

——: *Mélanges de littérature, d'historie, et de philosophie*, 4.ª ed. (Amsterdam, 1767, 5 vols.).

Dickson, L. E.: *History of the Theory of Numbers* (New York: Chelsea reprint, 1952, 3 vols.).

Dugas, René: *A History of Mechanics* (New York: Central Book Co., ca. 1955).

Engel, F., y P. Stäckel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895, 2 vols.).

Eneström, Gustav: «Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV*, Leipzig, 1910-1913.

Euler, Leonhard: *Opera omnia*, ed. F. Rudio y otros (Leipzig y Lausanne: B. G. Teubner, 1911).

Fuss, N.: *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler* (Basel, 1786).

Grimsley, Ronald: *Jean d'Alembert* (1717-1783) (*Oxford:* (Oxford: Clarendon, 1963).

Hofmann, J. E.: *Classical Mathematics. A Concise History of the Classical Era in Mathematics*, trad. Henrietta O. Midonick (New York: Philosophical Library, 1959).

Kowalewski, Gerhard: *Die klassischen Probleme der Analysis der Unendlichen* (Leipzig: W. Engelmann, 1910).
Ore, Oystein: *Number Theory and its History* (New York: McGraw-Hill, 1948).
Reiff, R.: *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889).
Stäckel, Paul: «Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen», *Bibliotheca Mathematica* (3), 8 (1907-1908), 37-60.
Struik, D. J.: *Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover, 1967).
Todhunter, Issac: *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge, 1865).
Toeplitz, Otto: *The Calculus, a Genetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963).
Truesdell, C.: *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*, introducción a *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (Zurich: Orell Füssli, 1960, 2.ª serie, vols. X-XI).
Wieleitner, Heinrich: *Geschichte der Mathematik* (Berlín y Leipzig: Walter de Gruyter, 1921, vol. II, 2.ª mitad).

Ejercicios

1. Descríbanse las principales formas de ganarse la vida los matemáticos del siglo XVIII, dando ejemplos concretos.
2. ¿Qué ramas de la matemática se desarrollaron más activamente a mediados del siglo XVIII? Dense ejemplos que apoyen su respuesta.
3. Dense los nombres de cuatro revistas que publicaran artículos matemáticos durante el siglo XVIII, citando en cada caso al menos uno de los matemáticos que colaboraron en dicha revista.
4. ¿Qué tratado de matemáticas de mediados del siglo XVIII considera usted como el que ejerció una mayor influencia? Razónese claramente la respuesta.
5. ¿Cómo explicaría usted el hecho de que Rusia fuera, por primera vez en su historia, un centro matemático importante durante el siglo XVIII?
6. Durante el siglo XVIII un buen número de matemáticos importantes se trasladaron de un país a otro. Cítense varios de ellos, indicando en cada caso las circunstancias que rodearon tales desplazamientos.
7. Enumérense algunas de las más importantes contribuciones de Euler al dominio de las notaciones matemáticas.
8. Demuéstrense las tres identidades de Euler:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

y

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

9. Utilícense las identidades de Euler para hallar, en forma binómica $a+bi$, uno de los logaritmos naturales de $1+i$.
10. Escríbase sen $(1+i)$ como un número complejo en la forma $a+bi$.
11. Escríbase e^{p+qi} como un número complejo en la forma $a+bi$.

12. Escríbase uno de los valores de $i^{(i^i)}$ como un número complejo en la forma $a+bi$, tanto de una manera exacta como en términos de aproximaciones decimales.
13. Compruébese que al sumar las tres probabilidades dadas por Euler en el problema de la lotería mencionado en el texto, el resultado es 1, y razónese por qué esto tenía que ser así.
14. Dibújese la curva de Euler $y=(-1)^x$.
15. Hállese para la curva $y=x^x$ el punto de ordenada mínima y dibújese la curva.
16. Dibújese la espiral de Arquímedes $r=a\theta$ tal como lo hizo Euler, es decir, tanto para valores positivos como negativos de θ.
17. Clasifíquense, de acuerdo con los cinco tipos fundamentales de Euler para las cuádricas, las siguientes:

$$a^2x^2+b^2y^2=2z;\ a^2x^2-b^2y^2=2z;\ a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=d^2;$$
$$a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2=d^2;\ a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2=d^2.$$

18. Calcúlese, a la manera de Euler, la suma de los términos de la serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

19. Compruébese la identidad entre funciones hiperbólicas $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$.
20. Compruébese que $\operatorname{senh} ix=i\cdot\operatorname{sen} x$ y $\cosh ix=\cos x$.
21. Si se definen la tangente y la cotangente hiperbólica de la forma

$$tgh\ x=\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \quad \text{y} \quad \operatorname{ctgh} x=\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

dibújense las curvas $y=\operatorname{tgh} x$ e $y=\operatorname{ctgh} x$.

22. Demuéstrese que la función $y=\operatorname{senh} x$ es monótona creciente.
23. Utilícese el criterio de Clairaut para comprobar si las expresiones siguientes son o no diferenciales exactas: $(\operatorname{sen} y-y\operatorname{sen} x)dx+(x\cos y+\cos x)dy$; $2xy^3dx-3x^2y^2dy$.

*24. Hállese la solución singular de la ecuación diferencial de Clairaut $y=xy'+(y')^2$, y dibújese dicha solución junto con varias soluciones particulares, en el mismo sistema de ejes de coordenadas.

*25. Demuéstrese que si $v=f(x)$ es una solución particular de la ecuación de Ricatti $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$, entonces la sustitución $y=v+z$ transforma dicha ecuación en una ecuación de Bernoulli, y la sustitución $y=v+\frac{1}{z}$ la transforma en una ecuación lineal.

*26. Resolver la ecuación de Euler $x^2y''+4xy'+2y=0$.

*27. Demuéstrese que la integral

$$\int x^p(1-x)^q dx$$

es una función elemental si p o q o $p+q$ son enteros.

*28. En una carta a Goldbach fechada en 1741, afirma Euler que

$$2^{-1+i}+2^{-1-i}$$

es aproximadamente igual a $\frac{10}{13}$. Compruébese esta aproximación.

*29. Demuéstrese que si m es una potencia α de un número primo p (es decir, si $m=p^{\alpha}$), entonces

$$\phi(m)=p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

donde ϕ es la «función de Euler».

Capítulo XXII
LOS MATEMATICOS DE LA REVOLUCION FRANCESA

El progreso y el perfeccionamiento de la matemática están íntimamente ligados a la prosperidad del Estado.

Napoleón I

1. La época de las revoluciones

Se podría decir que el siglo XVIII tuvo la desgracia de venir después del siglo XVII y antes inmediatamente del siglo XIX. ¿Cómo podría considerarse a cualquier período que siguiera al llamado «Siglo de los Genios» y que precediera a la «Edad de Oro» de la matemática, de otra manera que como un prosaico interludio? La geometría analítica y el cálculo infinitesimal se inventaron en el siglo XVII; los orígenes del rigor matemático y el brillante florecimiento de la geometría vienen asociados al siglo XIX. Hay una erudita historia de la matemática durante los siglos XVI y XVII, y otra (incompleta) correspondiente al siglo XIX[1], pero no hay ninguna historia comparable de la matemática del siglo XVIII, y en realidad nadie piensa fácilmente en el siglo XVIII cuando se consideran las grandes corrientes de la matemática. Esta situación está en agudo contraste con lo que ocurre en otros campos de la cultura. Para los americanos del Norte la fecha de 1776 es decisiva, y en Francia el año 1789 marca un hito crucial. Y la época de las revoluciones no se limitó tampoco exclusivamente a la esfera de la política. La Revolución Industrial cambió profundamente la estructura social del mundo occidental, y lo que podemos llamar la revolución termológica, durante los mismos años, permitió establecer las bases de la química moderna. ¿Acaso la matemática dormitaba plácidamente en estos tiempos turbulentos? Este capítulo nos mostrará que los matemáticos franceses de la época de la Revolución no sólo contribuyeron generosamente al patrimonio común del conocimiento sino que fueron también en gran medida responsables de las principales líneas de desarrollo que iba a tomar la matemática en su explosiva proliferación durante el siglo siguiente. Nos sentimos incluso tentados a añadir a la ya impresionante lista de las revoluciones de la época dos más: una «revolución geométrica» y otra «revolución analítica»[2].

[1] Véase H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert* (ed. alemana, Leipzig, 1903), y Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert* (Berlín, 1926-1927, hay trad. inglesa), 2 vols. El último volumen y la mitad del penúltimo de las *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (4 vols., Leipzig, 1880-1908) constituyen por sí mismos una amplia historia de la matemática del siglo XVIII.

[2] En el desarrollo de esta idea hemos hecho considerable uso del libro de Niels Nielsen, *Géomètres français sous la révolution* (Copenhagen, 1929), pero mientras que Nielsen ha catalogado alfabéticamente

Toda época histórica suele verse inclinada a pensar que ella sí que es una verdadera época revolucionaria, un período de grandes cambios. Pero lo cierto es que casi todas las épocas de cambios rápidos y profundos han venido precedidas por un largo período en el que se van haciendo los preparativos de la revolución, a veces de una manera consciente pero mucho más a menudo inconscientemente. Entre los heraldos de la Revolución Francesa podemos contar con Voltaire, a Rousseau, a D'Alembert y a Diderot, ninguno de los cuales vivió lo suficiente como para ver la caída de la Bastilla (Voltaire y Rousseau murieron en 1778, D'Alembert en 1783 y Diderot un año más tarde, en 1784), así como a su colega Condorcet, que cayó víctima del holocausto que había ayudado a gestar. En lo que a la matemática se refiere, seis hombres que iban a mostrar el camino a seguir, Monge, Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot y Condorcet, se vieron sumergidos en pleno centro de los desórdenes, y es precisamente a la obra de estos hombres a la que estará dedicado principalmente este capítulo.

Esta media docena de matemáticos eran casi de la misma edad: el más viejo, Lagrange, nació en 1736, Condorcet en 1743, Monge en 1746, Laplace en 1749, Legendre en 1752 y Carnot, el más joven, nació en 1753. Y, con excepción de Condorcet, que se suicidó en prisión el año 1794, todos estos matemáticos vivieron hasta llegar a septuagenarios, y uno de ellos, Legendre, a octogenario.

2. Los matemáticos más importantes

Como ya dijimos, en la Francia del siglo XVIII las universidades no fueron ni mucho menos los focos matemáticos que son hoy día, e incluso resulta difícil dar el nombre de un solo matemático de, digamos, la Universidad de París, durante el siglo XVIII. Durante el siglo XIV París había sido, por su Universidad, uno de los centros científicos más importantes del mundo, estando el otro representado por Oxford, pero había perdido esta posición hacía ya largo tiempo, quedándose irremisiblemente retrasada con respecto a la época. Cuando toda Europa aceptaba la filosofía cartesiana, París se aferraba aún al escolasticismo aristotélico, y cuando la mayor parte del mundo científico tenía los ojos puestos en la física newtoniana, París combatía en retaguardia una batalla perdida a favor del cartesianismo. La mayor parte de los matemáticos franceses del siglo XVIII no estaban integrados en las universidades, sino relacionados con la iglesia o con el ejército, mientras que otros disfrutaron del mecenazgo real o bien dieron lecciones particulares. Lagrange (1736-1813), fue el único matemático de nuestro grupo que no era francés en sentido estricto, ya que había nacido en Turín, de padres muy bien situados económicamente y de orígenes francés e italiano respectivamente. Joseph-Louis, el más pequeño de once hermanos y el único que sobrevivió más allá de su infancia, hizo sus estudios en su ciudad natal, y muy joven llegó a ser profesor de matemáticas en

---

las contribuciones de unas cuatro veintenas de matemáticos franceses, el objeto de este capítulo es el de proporcionar una síntesis del ambiente matemático de la época, poniendo el énfasis solamente en un puñado de matemáticos de los más importantes. Este capítulo es una revisión ampliada de mi artículo «Mathematicians of the French Revolution», publicado en *Dripta Mathematica*, 25 (1960), págs. 11-31.

la Academia Militar de Turín, pero más tarde disfrutó del patrocinio real con Federico el Grande de Prusia y con Luis XVI de Francia. La familia de Condorcet (1743-1794), por su parte, contaba con miembros influyentes en la milicia y en la iglesia, así que su educación no presentó ningún problema. En las escuelas de los jesuitas y más tarde en el Collège de Navarre se labró muy pronto una reputación envidiable en matemáticas, pero en vez de hacerse capitán de caballería como deseaba su familia, vivió una vida típica de un intelectual, en un sentido muy parecido a Voltaire, Diderot y D'Alembert. El tercero de nuestro sexteto, Gaspard Monge (1746-1818), fue en cambio hijo de un tendero pobre; sin embargo, por medio de las influencias de un lugarteniente coronel que había quedado impresionado por la inteligencia del muchacho, Monge pudo seguir algunos cursos en la École Militaire de Mézières, donde sorprendió de tal manera a las autoridades que pronto pasó a formar parte del equipo de profesores, siendo así el único de nuestro grupo de seis matemáticos que fue antes que nada profesor, quizá el más prestigioso profesor de matemáticas desde los tiempos de Euclides. Laplace (1749-1827) nació también en una familia modesta, pero encontró amigos influyentes, lo mismo que Monge, que se preocuparon de que obtuviese una educación esmerada, y de nuevo en una academia militar. Legendre (1752-1833) no tuvo dificultades en lo que se refiere a su educación, pero ni siquiera él llegó a ser un profesor universitario en el estricto sentido de la palabra, a pesar de que enseñó durante cinco años en la École Militaire de París. El más joven de nuestro grupo, Lazare Carnot (1753-1823), pertenecía a una capa social suficientemente por encima de la burguesía ordinaria como para permitirle asistir a la École Militaire de Mézières, en la que uno de sus profesores fue Monge. Después de graduarse Carnot entró en el ejército, aunque, a falta de un título de nobleza, no podía aspirar a un rango superior al de capitán, según las normas seguidas en el *Ancien Régime*[3]. Este hecho debió de irritarlo considerablemente para sus adentros, como ocurrió en el caso de tantos otros, que circulaba un dicho en época de exámenes que afirmaba que «los competentes no eran nobles y los nobles no eran competentes». El despilfarro económico del gobierno puede haber sido la causa inmediata de la Revolución Francesa, pero no fue la única ni mucho menos. El enorme derroche de recursos humanos fue también un factor importante, y resulta altamente sintomático de esta situación el hecho de que, en un principio, los hombres del grupo que estamos estudiando no consiguieran alcanzar posiciones acordes con sus capacidades y talento; no es de extrañar, pues, que ninguno de los seis se lamentase más tarde, cuando el viejo orden fue destruido.

De entre las enciclopedias matemáticas de finales del siglo XVIII, la que alcanzó mayor éxito, a juzgar por sus repetidas ediciones, fue la de Bézout, que era instructor en la escuela de Mézières a la que asistieron Monge y Carnot. El *Cours de mathématique* de Bézout continuó siendo una obra muy prestigiosa aún durante el primer tercio del siglo XIX, especialmente en norteamérica, donde partes de ella se utilizaron traducidas al inglés en West Point y en otras academias. La cuarta parte del *Cours* de Bézout, que trata de los principios de la mecánica, es la

[3] Para más detalles sobre su vida véase C. B. Boyer, «The Great Carnot», *The Mathematics Teacher*, 49 (1956), págs. 7-14.

verdadera *raison d'être* del programa. El énfasis puesto en la mecánica y en la última sección sobre navegación concuerda perfectamente con el uso del *Cours de mathématiques* como libro de texto en una academia militar. La superioridad matemática de Francia (y, en realidad, de la Europa continental como un todo) durante el siglo XVIII estaba basada en gran parte en la aplicación del análisis a la mecánica, tal como se enseñaba en las escuelas técnicas, y los matemáticos de la Revolución Francesa se formaron bajo esta influencia, en marcado contraste con la situación en Inglaterra. Y, como cabía esperar, este contraste en el espíritu de la matemática se hizo más agudo durante la Revolución, puesto que Francia tenía más necesidad de una enseñanza técnica, y como resultado Inglaterra fue quedando cada vez más completamente aislada de la Europa continental.

3. Publicaciones anteriores a 1789

Todos y cada uno de los seis hombres que hemos considerado como los líderes del desarrollo matemático durante la Revolución, habían producido ya en abundancia antes del año 1789. Lagrange había publicado su *Mécanique analytique* en 1788, así como muchos artículos sobre álgebra, análisis y geometría. Condorcet, que en cierto sentido resulta el más interesante de los seis debido a la gran amplitud de sus intereses, había publicado su *De calcul intégral* tan pronto como en 1765, y el *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* en 1785. Firmemente convencido de la perfectibilidad del hombre, que constituía uno de los principios básicos de la mayoría de los filósofos, Condorcet fue el único de nuestro grupo de seis matemáticos del que puede decirse que jugó un papel anticipador en los sucesos que condujeron al 1789. (Resulta tristemente irónico hacer observar que de nuestro sexteto matemático, el que más hizo por conseguir la Revolución fue el único en perder su vida en ella, aunque otros dos, Carnot y Monge, no siempre estuvieron seguros de encontrarse a salvo de la guillotina.) Monge había contribuido con numerosos artículos matemáticos a las *Mémoires de la Académies des Sciences* y, al suceder a Bézout como examinador de la Escuela de la Marina, las autoridades de la Escuela insistieron en que debía hacer a su vez lo que ya había hecho Bézout, es decir, escribir un *Cours de matématiques* para uso de los candidatos a ingresar en dicha escuela. Sin embargo, Monge estaba más interesado en la enseñanza y la investigación que en escribir libros de texto y sólo llegó a completar un volumen del proyecto, su *Traité élémentaire de statique* (París, 1788). A Monge no sólo le atraían las matemáticas, tanto puras como aplicadas, sino también la física y la química, y así participó, en particular, en experimentos junto con Lavoisier, incluidos los relativos a la composición del agua, que condujeron a lo que hemos llamado la revolución química de 1789. En la época de la Revolución Monge era ya uno de los científicos franceses más conocidos, debido a sus numerosas actividades. De hecho, su fama como físico y como químico era probablemente mayor que como matemático, ya que su geometría no había sido apreciada debidamente. Su obra más importante, la *Géométrie descriptive*, no se había publicado porque sus superiores consideraron que era necesario mantenerla reservada confidencialmente en interés de la defensa

nacional (¡la costumbre de clasificar información como reservada por razones militares no es ni mucho menos un invento de mediados del siglo XX!). Tanto Laplace como Legendre publicaron con regularidad trabajos en revistas eruditas, y Carnot publicaba en 1786 una segunda edición de su obra *Essai sur les machines en général*, así como algunas poesías y otra obra sobre fortificaciones militares.

4. Lagrange y la teoría de determinantes

Si nos paramos a considerar los resultados obtenidos por nuestros seis matemáticos, nos sorprende ver en la mayor parte de los casos una falta de motivos utilitarios en sus obras. El *Essai* de Carnot parecería ser, por su título, un libro de carácter técnico, pero basta echarle una ojeada para darse cuenta de que de lo que trata es de principios generales y no de tecnología. Y lo mismo pasa con la *Mécanique* de Lagrange, que presenta un tratamiento axiomático del tema, muy alejado de los criterios usuales de utilidad práctica inmediata. La belleza de la obra de Lagrange se pone de manifiesto no al ingeniero, sino al matemático puro; incluso en las partes más elementales del libro se percibe su alta calidad estética. Es a Lagrange a quien debemos principalmente la utilización de formas tan compactas, aunque expresadas de una manera algo diferente, como las:

$$\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

para el área de un triángulo y para el volumen de un tetraedro, respectivamente, resultados que aparecen en su artículo «Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires», entregado en 1773 y publicado en 1775[4]. Este trabajo es muy bonito, pero prácticamente sin consecuencias; sin embargo, contiene una idea que iba a tener gran importancia, habida cuenta de las reformas educativas de la Revolución. Tal como la expresaba Lagrange mismo: «Me siento halagado por el hecho de que las soluciones que voy a dar serán ciertamente de interés para los geómetras tanto por los métodos como por los resultados. Estas soluciones son puramente analíticas y pueden entenderse incluso sin figuras.» Y en cumplimiento de su promesa no hay una sola figura a lo largo de toda la obra. También Monge, pese a que utilizaba figuras y modelos en su geometría diferencial y descriptiva, parece haber llegado de alguna manera a la conclusión de que se debería evitar la utilización de figuras en la geometría analítica elemental. Y Carnot quizá pensaba de modo parecido, puesto que su *Essai*, que es anterior a la *Mécanique* de Lagrange, no contiene tampoco ni una sola figura.

[4] Véanse sus *Oeuvres*, vol. III, págs. 658-692.

Laplace fue, de entre todos los miembros de nuestro sexteto, el que más próximo estuvo a lo que podríamos llamar un matemático aplicado, pero incluso en este caso tenemos que interpretar tal calificativo en un sentido muy amplio. Después de todo ¿cuáles podían ser en aquella época las «aplicaciones prácticas» de la teoría de probabilidades o de la mecánica celeste? Podemos concluir con toda seguridad que, a pesar de su educación en escuelas predominantemente técnicas, las grandes figuras de la matemática inmediatamente anteriores a la Revolución mostraron una notable «pureza» en sus intereses.

5. El Comité de Pesos y Medidas

La caída de la Bastilla en 1789 encontró a nuestros seis hombres divididos en dos grupos: los tres L (Lagrange, Laplace y Legendre) no tomaron parte importante en el desarrollo de los sucesos políticos que iban a seguir; los otros tres (Carnot, Condorcet y Monge) recibieron con entusiasmo las perspectivas de cambio y jugaron papeles concretos en las actividades revolucionarias. Sin embargo, representantes de los dos grupos participaron de manera común en un proyecto matemático, por lo menos, durante la Revolución.

La reforma del sistema de pesos y medidas constituye un ejemplo especialmente ilustrativo de la manera en que los matemáticos persistieron pacientemente en sus esfuerzos a pesar de la confusión reinante y de las dificultades políticas. En fecha tan temprana del período revolucionario como el año 1790 propuso Talleyrand la reforma del sistema de pesos y medidas. El problema fue enviado a la Académie des Sciences, en la que se formó un Comité para elaborar un proyecto, Comité del que formaban parte, entre otros, Lagrange y Condorcet. Legendre también tendría que haber participado, puesto que había alcanzado un notable prestigio por sus trabajos de triangulación en Francia, pero la política revolucionaria parece haber sido la responsable de su exclusión. El Comité se puso de acuerdo en un sistema básicamente decimal, aunque al parecer hubo algunos partidarios decididos de un esquema duodecimal. Lagrange apoyó firmemente a los decimalistas frente a los duodecimalistas, ya que el argumento de la divisibilidad no le convenció demasiado. (Se dice que casi lamentó no haber adoptado como base para el sistema algún *número primo*, tal como el 11 por ejemplo, pero se supone que pudo hacer esto simplemente para molestar a los duodecimalistas.)

Como es bien sabido, el Comité tomó en consideración dos posibles alternativas para la unidad de longitud básica en el nuevo sistema. Una era la longitud del péndulo que bate segundos. Como la ecuación del péndulo es $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, esto habría conducido a la unidad estándar de longitud $\frac{g}{\pi^2}$. Pero el Comité estaba tan impresionado por la exactitud con que Legendre y otros habían medido la longitud del meridiano terrestre, que al final se definió el metro como la diezmillonésima parte de la distancia del Ecuador al polo (es decir, de un cuadrante de meridiano). El sistema métrico resultante estaba ya casi completamente listo en 1791, pero

hubo confusión y retrasos en su puesta en vigor. La Convención Nacional suprimió en 1793 la Académie des Sciences, mientras que el «Jardin des Plantes» se ampliaba considerablemente. Esta peregrina inconsistencia parece haber sido el resultado de fuerzas políticas enfrentadas; la Académie estaba dirigida por hombres más viejos y, lógicamente, más conservadores, mientras que el Jardin des Plantes lo estaba por científicos más jóvenes que apoyaban con más entusiasmo al nuevo gobierno. Había, además, un cierto culto a Robespierre que representaba una actitud de «vuelta a la naturaleza» inspirada en parte por Rousseau. Evidentemente se dio entonces en Francia una actitud hacia las ciencias físicas parecida a la beligerancia de Goethe contra la física newtoniana. El Jardin des Plantes representaba una ciencia «segura», mientras que la de la Académie era sospechosa.

El cierre de la Académie supuso un duro golpe para la matemática, pero la Convención conservó en sus funciones al Comité de Pesos y Medidas, aunque hizo una purga de algunos miembros de dicho Comité, tales como Lavoisier, y lo amplió por otro lado incluyendo a otros nuevos tales como Monge. En un cierto momento el Comité estuvo a punto de perder a Lagrange de entre sus miembros, pues la mentalidad provinciana de la Convención la llevó a prohibir las actividades de los extranjeros en Francia, pero al fin Lagrange quedó excluido expresamente de este decreto y permaneció en su puesto de presidente del Comité. Más tarde aún se puso bajo la responsabilidad de este Comité al Instituto Nacional que venía a reemplazar a la Academia de Ciencias; en esta época tanto Lagrange como Laplace, Legendre y Monge formaban parte del Comité. Para 1799 los trabajos del Comité estaban terminados al fin, y el sistema métrico decimal tal como lo conocemos hoy se hizo una realidad. Hay que subrayar que cinco de nuestros seis matemáticos de la época revolucionaria tomaron parte activa en este proyecto, y sólo Carnot estuvo desconectado de él; sin embargo, más adelante veremos que Carnot se ocupó de muchas otras actividades esenciales, tanto políticas como matemáticas. El sistema métrico es, evidentemente, uno de los resultados más tangibles de la Revolución, pero hablando en términos del desarrollo de la matemática no se puede comparar en importancia con otras contribuciones que vamos a esbozar en el resto de este capítulo.

6. Condorcet y la educación

Condorcet, que era un fisiócrata, un filósofo y un enciclopedista, perteneció al círculo de Voltaire y de D'Alembert. Fue un matemático competente que publicó libros sobre teoría de probabilidades y sobre cálculo integral, pero también fue un inquieto idealista y visionario que se interesaba por todo lo que tuviera que ver con el bienestar de la humanidad. Condorcet sentía, como Voltaire, una profunda aversión por la injusticia y, a pesar de conservar su título de marqués, había visto tantas desigualdades injustas en el *Ancien Régime*, que se dedicó a escribir y a trabajar en favor de la reforma. Con una fe implícita en la posibilidad de perfeccionamiento de la humanidad, y creyendo que la educación conseguiría eliminar el vicio, defendió la educación pública y libre, una actitud admirablemente

esperanzada con el futuro, especialmente para los tiempos que corrían[5]. Desde el punto de vista de la matemática se recuerda a Condorcet como un pionero de la matemática social, particularmente por las aplicaciones de las probabilidades y la estadística a los problemas sociales. Por poner un ejemplo, cuando los elementos conservadores (que incluían a la Facultad de Medicina y a la Facultad de Teología) atacaron a los que propugnaban la inoculación contra la viruela, Condorcet (junto con Voltaire y Daniel Bernoulli) salió en defensa de la vacunación.

A comienzos de la Revolución la actividad de Condorcet pasó de la matemática a los problemas políticos y administrativos. El sistema educativo anterior se había derrumbado bajo la efervescencia de la Revolución, y Condorcet vio que éste era el momento de intentar introducir las reformas que tenía en la mente. Así pues, presentó sus planes a la Asamblea Legislativa, de la que llegó a ser presidente, pero el agitado ambiente en torno a otros temas hizo imposible una consideración seria y detallada de ellos. Condorcet publicó su esquema en 1792, pero sus planes para una educación libre fueron el blanco de fuertes ataques. No logró alcanzar Francia los ideales de Condorcet de una instrucción pública y libre hasta muchos años después de su muerte.

Condorcet había puesto sus más altas esperanzas en la Revolución, hasta que los extremistas se hicieron con el control del poder. Entonces denunció resueltamente a los septembristas y se ordenó su arresto. Condorcet se ocultó y, durante los largos meses de escondite escribió el famoso *Bosquejo de un cuadro histórico del progreso de la mente humana*[6], señalando en él nueve etapas desde la etapa tribal de la humanidad a la fundación de la República Francesa, junto con la previsión de una brillante décima etapa que, según él creía, la Revolución estaba a punto de inaugurar. Poco después de completar esta obra en 1794, y pensando que su presencia ponía en peligro las vidas de sus amigos que lo escondían, abandonó su refugio. Inmediatamente fue reconocido como un aristócrata y fue arrestado. A la mañana siguiente se le encontró muerto en el suelo de su celda en la prisión, presumiblemente por suicidio.

7. Monge como administrador y como maestro

Condorcet había mostrado sus simpatías por el ala girondina moderada de la Revolución. Monge era plebeyo y miembro importante del Club Jacobino, más radical, pero también él iba a tener problemas, pese a ser un entusiasta partidario de la Revolución y de adherirse a las organizaciones patrióticas. Se le asignó un papel en la reforma de los pesos y medidas ordenada por la Asamblea Constituyente en 1790, pero su puesto como examinador de la marina lo mantuvo alejado de París durante un par de años. A su vuelta a la capital en 1792 fue nombrado minis-

[5] La extensión que alcanzó la influencia de Condorcet puede estimarse por el hecho de que Frank Alengry publicó en 1904 un impresionante libro de 891 páginas con el título *Condorcet: Guide de la révolution française*. Este libro está dedicado, sin embargo, a su filosofía social y legal más que a su matemática. Véase también G. G. Granger, *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet* (1956).

[6] Hay una buena traducción al inglés por June Barraclough, publicada en 1955 (ew York, Noonday Press).

tro de Marina, al parecer a sugerencia de Condorcet, y fue precisamente por su condición de ministro de Marina por lo que recayó sobre Monge la tarea de firmar el documento oficial relativo al juicio y ejecución del rey. La flota francesa, sin embargo, estaba tan mal organizada y era tan ineficaz que Monge no pudo conseguir nada importante, y al cabo de un año pidió ser sustituido. No obstante, permaneció activo en la política y en las tareas gubernamentales, dedicando una cantidad enorme de energía para lograr cubrir las necesidades de pólvora del arsenal revolucionario. A instancias del Comité de Salud Pública publicó también una *Description de l'art de fabriquer les canons.* A lo largo de toda la Revolución Monge se encontró casi siempre en una situación insegura, dado que era demasiado liberal para los conservadores y demasiado conservador para los extremistas.

Más importantes para el futuro de la matemática fueron los esfuerzos de Monge, una vez que se calmó la crisis de la posible invasión extranjera, para crear una escuela destinada a la preparación de los ingenieros. De la misma manera que Condorcet había sido el espíritu inspirador del Comité de Instrucción, Monge fue el principal abogado de las instituciones de enseñanza superior. El resultado fue la constitución en 1794 de una Comisión de Obras Públicas, de la que Monge fue uno de los miembros más activos, encargada de crear la institución adecuada para ello. La escuela en cuestión fue nada menos que la famosa École Polytechnique, que se organizó con tal rapidez que comenzó a admitir estudiantes al año siguiente. En todas las etapas de su creación el papel desempeñado por Monge fue esencial, tanto como administrador como profesor. Es muy gratificante el observar que esas dos funciones tan distintas no son incompatibles, puesto que Monge alcanzó un gran éxito en las dos. Incluso consiguió vencer su escasa predisposición para escribir libros de texto, debido a que, con la reforma de los programas matemáticos, la necesidad de textos adecuados se hizo crítica.

Monge se encontró dando clases de dos materias que eran esencialmente nuevas las dos en unos programas de nivel universitario. La primera de ellas se conocía entonces con el nombre de «estereotomía», y más tarde se la denominó con el nombre general de geometría descriptiva. Monge impartía un denso curso sobre el tema a 400 alumnos, del que nos ha llegado en forma manuscrita un resumen del programa. Este resumen muestra que el curso era más ambicioso, tanto en el aspecto puro como en el aplicado, de lo que es usual hoy. Además del estudio de sombras, perspectiva y topografía, se prestaba atención también a las propiedades de las superficies, incluidas las normales y los planos tangentes, y a la teoría de máquinas. Entre los problemas propuestos por Monge estaba, por ejemplo, el de determinar la curva de intersección de dos superficies cada una de las cuales está engendrada por una recta que se mueve apoyándose en tres rectas que se cruzan en el espacio. Otro consistía en determinar un punto en el espacio equidistante de cuatro rectas. Tales problemas apuntan claramente a un cambio en la enseñanza de la matemática, apadrinada en primer lugar por la Revolución Francesa. Platón había señalado ya, hacía tanto tiempo como en la Edad de Oro de la matemática griega, que la situación de la geometría de los sólidos era lamentable, y la decadencia medieval de la matemática afectó más duramente a la geometría de los sólidos que a la geometría plana. Alguien que tuviera dificultades para cruzar el

pons asinorum, mal podía esperar alcanzar el estudio de la geometría tridimensional. Los inventores de la geometría analítica, Descartes y Fermat, se habían dado cuenta claramente del principio fundamental de la geometría analítica del espacio, el de que toda ecuación con tres incógnitas representa una superficie, y recíprocamente, pero no dieron los pasos necesarios para desarrollarlo. Puede decirse que mientras el siglo XVII fue el siglo de las curvas, la cicloide, el caracol, la catenaria, la lemniscata, la espiral equiangular, las hipérbolas, parábolas y espirales de Fermat, las perlas de Sluse y muchas otras, el siglo XVIII fue el siglo en el que comenzó realmente el estudio sistemático de las superficies[7]. Euler fue, como hemos visto, el primero en tratar a las cuádricas como una familia unitaria análoga a la de las cónicas, y su *Introductio* vino a establecer, en cierto sentido, las bases de la geometría analítica del espacio (aunque no podemos olvidar mencionar a Clairaut como un precursor). Ahora bien, Euler no se dedicaba a hacer proselitismo, y debido a ello el tema no llegó a ocupar un lugar en los programas educativos de la época. Una de las razones que explican este hecho es la de que Euler, lo mismo que Descartes, no comenzaba tratando los casos rectilíneos más sencillos. Lagrange, influenciado quizá por su cálculo de variaciones, mostró interés en problemas tridimensionales, poniendo especial énfasis en su solución analítica. El fue el primero, por ejemplo, en dar la fórmula

$$D=\frac{ap+bq+cr-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

para la distancia D de un punto (p, q, r) al plano $ax+by+cz=d$. Pero lo cierto es que Lagrange no tenía una mentalidad de geómetra ni tampoco un equipo de discípulos entusiastas. En cambio Monge era un verdadero especialista en geometría (casi podríamos decir que el primero desde Apolonio), así como un excelente profesor y creador de programas. Tenemos que mencionar, de pasada, que nuestro Monge tuvo dos hermanos que también fueron profesores de matemáticas, lo que sitúa al nombre de los Monge en la misma clase que la de los Bernoulli, los Cassini, los Clairaut y los Pascal, como designación de toda una familia de matemáticos. Así pues, el desarrollo de la geometría del espacio se debió en buena parte a la actividad matemática y revolucionaria de Gaspard Monge. De no ser por su actividad política podría no haberse creado nunca la *École* Polytechnique, y de no haber sido un maestro con tan gran capacidad para transmitir su entusiasmo, el renacimiento de la geometría tridimensional pudiera no haberse producido.

La École Polytechnique no fue la única escuela que se creó en esta época. La École Normale había abierto sus puertas precipitadamente para recibir a unos 1.400 ó 1.500 estudiantes, seleccionados de una manera no tan rigurosa como los de la École Polytechnique, y se jactaba de tener una Facultad de Matemáticas de un gran nivel, entre cuyos profesores figuraban Monge, Lagrange, Legendre y

[7] J. L. Coolidge, en su artículo «The Beginnings of Analytic Geometry in Three Dimensions», *American Mathematical Monthly*, 55 (1948), págs. 76-86, llama la atención sobre el lento progreso de la geometría analítica tridimensional antes de la época de Euler.

Laplace. Las lecciones impartidas por Monge en la École Normale en 1794-1795 se publicaron al fin reunidas en su libro *Géométrie descriptive*[8], pero las dificultades administrativas acabaron con la corta vida de esta escuela. La idea básica que hay tras la nueva geometría descriptiva, o método de la doble proyección ortográfica, es esencialmente muy fácil de entender. Se toman simplemente dos planos perpendiculares, el primero horizontal y el segundo vertical, y a continuación se proyecta la figura que se desea representar ortogonalmente sobre ambos planos, señalando claramente las proyecciones de todos los vértices y aristas. La proyección sobre el plano vertical se conoce con el nombre de «alzado», y la correspondiente al plano horizontal recibe el nombre de «planta». Por último, se hace girar 90° el plano vertical alrededor de la recta de intersección de ambos, hasta situarlo también horizontal. De esta manera, la planta y el alzado nos dan una representación bidimensional del objeto tridimensional. Este método tan sencillo, y que hoy se utiliza universalmente en el dibujo técnico, produjo casi una revolución en la teoría de proyectos de la ingeniería militar de la época de Monge.

8. La geometría descriptiva y analítica

La geometría descriptiva no fue la única contribución de Monge a la matemática del espacio tridimensional, ya que también dio en la École Polytechnique un curso sobre «Aplicaciones del análisis a la geometría». En esta época el nombre de «geometría analítica» no había alcanzado aún un reconocimiento general, de la misma manera que no había nada que se denominase «geometría diferencial», pero el curso de Monge que hemos mencionado era esencialmente una introducción a este campo, en el que no se disponía de ningún libro de texto, de manera que Monge se vio obligado a escribir y publicar sus *Feuilles d'analyse* (1795) para uso de los estudiantes. En este libro la geometría analítica tridimensional adoptó al fin lo que se podría llamar su forma definitiva; este curso, que debían seguir todos los alumnos de la École Polytechnique, fue el que constituyó el prototipo de los programas actuales de geometría analítica del espacio. Sin embargo, los estudiantes encontraban el curso difícil, evidentemente, debido a que las lecciones pasaban muy rápidamente por el estudio de las formas elementales de la recta y el plano, para llegar lo antes posible a lo que constituía el verdadero núcleo del curso, sobre las aplicaciones del cálculo al estudio de curvas y superficies en tres dimensiones. Monge siempre se mostró reacio a escribir libros de texto de nivel elemental, así como a organizar material que no fuera básicamente original suyo. No obstante, encontró colaboradores que le ayudaron a editar otros materiales que incluía también en su curso, y así apareció en 1802 en el *Journal de l'École Polytechnique* una extensa memoria por Monge y Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769-1834) sobre *Application de l'algèbre à la géométrie.* El primer teorema de esta memoria es típico de un tratamiento ya más elemental del tema: Se trata de la

[8] Una descripción de los métodos utilizados por Monge en esta obra puede verse en W. H. Roever, *The Mongean Method of Descriptive Geometry* (1933); en cuanto a una historia de estos métodos, se puede consultar el libro de Gino Loria *Storia della geometria descrittiva* (1921).

generalización, bien conocida durante el siglo XVIII, del teorema de Pitágoras, que afirma que la suma de los cuadrados de las proyecciones de una figura plana sobre tres planos perpendiculares entre sí es igual al cuadrado del área de la figura. Monge y Hachette demostraban el teorema exactamente igual que se haría en un curso moderno. De hecho, el libro entero podría utilizarse sin dificultad como texto en el siglo XX. Nos encontramos con las ecuaciones para el cambio de ejes de coordenadas, con el tratamiento usual de rectas y planos, con la determinación de los planos principales de una cuádrica, etc., todo ello tratado de una manera muy completa. Es en esta geometría analítica de Monge, más bien que en las de Clairaut y Euler, en la que nos encontramos por primera vez con un estudio sistemático de la recta en el espacio tridimensional. Monge demostraba, por ejemplo, que si una recta viene dada como intersección de dos planos $ax+by+cz+d=0$ y $a'x+b'y+c'z+d'=0$, entonces la ecuación del plano perpendicular a dicha recta y que pasa por el punto (x', y', z') tiene la forma $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$, donde A, B y C son, respectivamente, las expresiones $bc'-b'c$, $ca'-c'a$ y $ab'-a'b$, que hoy se suelen llamar parámetros de dirección de la recta. Otras fórmulas dan la distancia de un punto a una recta y la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan. Para esta última escribe Monge las ecuaciones de las rectas dadas utilizando sus proyecciones sobre los planos de coordenadas

$$\begin{cases} y=Ax+B \\ z=Cx+D \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y=A'x+B' \\ z=C'x+D' \end{cases}$$

y las ecuaciones de la normal común buscada, de la misma forma, como

$$\begin{cases} y=\alpha x+\beta \\ z=\gamma x+\delta \end{cases}$$

Dado que esta normal común debe cortar a las dos rectas, se tiene que

$$(\gamma-C)(\beta-B)=(\alpha-A)(\delta-D) \quad \text{y} \quad (\gamma-C')(\beta-B')=(\alpha-A')(\delta-D')$$

Del hecho que la normal común tiene que ser, efectivamente, perpendicular a cada una de las dos rectas dadas, se obtiene que

$$1+A\alpha+C\gamma=0$$
$$1+A'\alpha+C'\gamma=0$$

Resolviendo el sistema formado por las cuatro ecuaciones anteriores en α, β, γ y δ, podemos determinar las ecuaciones de la normal buscada y, por lo tanto, la distancia que se pedía calcular.

La mayor parte de los resultados de Monge sobre la geometría analítica de rectas y planos aparecían ya en memorias del año 1771. En su ordenación sistemática del material en las *Feuilles d'analyse* de 1795, y especialmente en la memoria de 1802 con Hachette, nos encontramos con la mayor parte de la geome-

tría analítica del espacio y de la geometría diferencial elemental que se suelen incluir en los textos para subgraduados. Una cosa que puede echarse de menos es el uso explícito de los determinantes, pero esta tarea le correspondería ya al siglo XIX. No obstante, podríamos considerar la utilización de notaciones simétricas por parte de Monge, lo mismo que en el caso de Lagrange, como una verdadera anticipación de los determinantes, pero sin la distribución en filas y columnas que es hoy la usual y que se debe a Cayley.

Entre los resultados nuevos debidos a Monge mismo hay que destacar dos teoremas que llevan su nombre: 1) Los planos trazados por los puntos medios de las aristas de un tetraedro y respectivamente perpendiculares a la arista opuesta, se cortan en un punto M que recibe el nombre de «punto de Monge» del tetraedro. Este punto M es además el punto medio del segmento que une al baricentro y el circuncentro del tetraedro. 2) El lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas caras son tangentes a una superficie cuadrática dada, es una esfera, conocida como la «esfera de Monge» o esfera directriz de la cuádrica. El lugar geométrico correspondiente a éste en dos dimensiones es el llamado «círculo de Monge» de una cónica, a pesar de que este lugar geométrico lo había dado ya Lahire en forma sintética un siglo antes. En 1809 Monge dio varias demostraciones distintas de que el baricentro de un tetraedro es el punto de intersección de las rectas que unen los puntos medios de aristas opuestas. También dio Monge lo análogo para el espacio de la recta de Euler en el plano, demostrando que para el tetraedro ortocéntrico el baricentro está dos veces más lejos del ortocentro que del circuncentro. Lagrange quedó tan impresionado por la obra de Monge que, según se dice, exclamó en cierta ocasión: «Con sus aplicaciones del análisis a la geometría este demonio de hombre conseguirá hacerse inmortal»[9].

9. Los libros de texto

Ya hemos dicho que Monge reunía una combinación de talentos nada frecuente, ya que era al mismo tiempo un competente administrador, un matemático investigador de gran imaginación y un maestro capaz de transmitir a sus discípulos inspiración y entusiasmo. La única cualidad de un pedagogo que podría haber tenido también, pero de la que carecía, era la de ser un buen escritor de libros de texto. Pero si Monge mostraba en este aspecto una cierta deficiencia, tal deficiencia la vinieron a compensar con creces sus jóvenes e inquietos alumnos. Podemos decir, sin miedo a que se nos intente refutar, que los discípulos de Monge pusieron en circulación un verdadero torrente de libros de texto elementales de geometría analítica tal como no se iba a repetir nunca, ni siquiera en nuestros días, inundados como estamos con nuevos libros. A juzgar por la aparición casi repentina de tantas geometrías analíticas a partir de 1798, se había producido una auténtica revolución en la enseñanza. La geometría analítica, que había permanecido eclipsada por el cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le

[9] Para una exposición excelente y sistemática de la obra de Monge véase René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge* (1951).

reconociera un lugar por derecho propio en las escuelas; la paternidad de esta «revolución analítica» hay que atribuirla principalmente a Monge. Entre los años 1798 y 1802 aparecieron cuatro geometrías analíticas elementales, de las plumas de Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Louis Puissant (1769-1843) y F. L. Lefrançais, todas ellas inspiradas directamente por las lecciones dadas en la École Polytechnique. Los «politécnicos» fueron responsables de otros tantos textos de nuevo en la década siguiente. La mayor parte de ellos alcanzaron un gran éxito, publicándose en numerosas ediciones. El libro de Biot llegó a cinco ediciones en menos de una docena de años; el de Lacroix, alumno y más tarde colega de Monge, apareció en ¡veintinco ediciones en 99 años! Probablemente deberíamos hablar más bien de la «revolución de los textos», ya que los demás libros de texto que publicó Lacroix tuvieron también un éxito casi tan espectacular como su geometría: su *Arithmetique* y su *Géométrie* alcanzaron en 1848 sus ediciones 20.ª y 16.ª respectivamente. En 1859 se publicaba la 20.ª edición de su *Algèbre*, y en 1881 la 9.ª edición de su *Calculus*. En estas cifras no están incluidas las abundantes traducciones a otros idiomas.

10. Lacroix y la geometría analítica

La mayoría de los lectores conocerían ya más o menos a Monge como uno de los fundadores de la geometría *pura* moderna. Con Poncelet y otros *anciens élèves* de la École Polytechnique se produjo ciertamente un glorioso renacer de la geometría pura o *sintética*, y todo ello fue inspirado en gran medida por Monge; pero hay un aspecto de la obra de Monge que es menos conocido. Prácticamente sin excepción, los autores de textos de geometría *analítica* atribuyen la inspiración de su obra a Monge, aunque a veces también se ve mencionado Lagrange. Lacroix formula con la mayor claridad el punto de vista de la manera siguiente:

> Evitando cuidadosamente todas las construcciones geométricas, haremos ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar *geometría analítica*, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento[10].

Lacroix sostenía que el álgebra y la geometría «deberían ser tratadas separadamente, tan separadas una de la otra como sea posible, y el hecho de que los resultados en cada una de ellas puedan servir para una clarificación mutua correspondería, como si dijéramos, a la relación que hay entre el texto de un libro y su traducción a otro idioma.» Lacroix ponía como ejemplo de este punto de vista los trabajos de Lagrange sobre el tetraedro, pero creía que Monge había sido «el primero que pensó en presentar de esta forma las aplicaciones del álgebra a la geometría». (El historiador de la astronomía J. B. J. Delambre coincide con

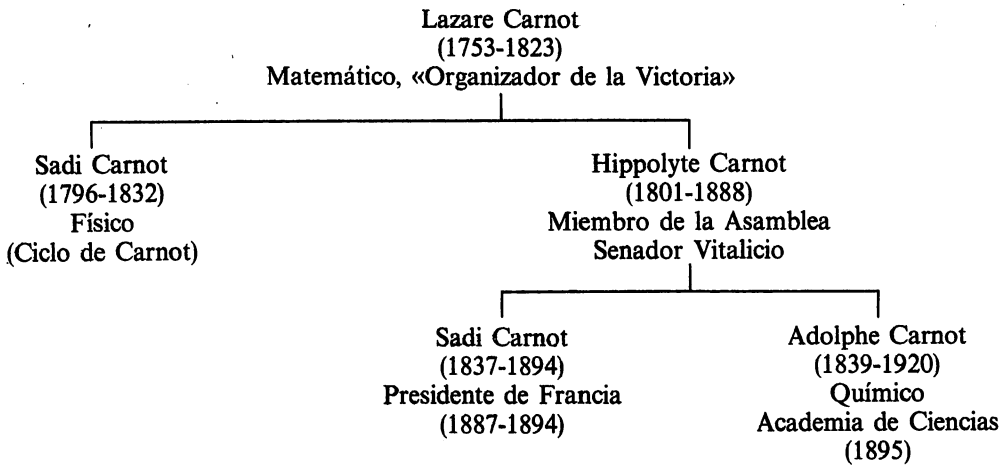
[10] Véase el prólogo a su *Traité de calcul* (París, 1797).

Lacroix en atribuir a Monge «la resurrección de la alianza del álgebra y la geometría».) Lacroix reconocía que la sección de su libro sobre geometría analítica del espacio era casi completamente obra de Monge. Quizá puedan sentirse satisfechos los profesores de hoy al pensar que la geometría analítica tal como la presentaron Fermat y Descartes, un abogado y un filósofo respectivamente, resultó poco eficaz, y que sólo cuando verdaderos pedagogos le dieron una nueva forma, tal como hicieron Monge y aquellos de sus discípulos que llegaron a ser a su vez profesores de la École Polytechnique, fue cuando mostró su vitalidad y eficacia.

Es interesante hacer notar que Lacroix se negó a utilizar el nombre de «geometría analítica» como posible título de su libro de texto, que arrastró, edición tras edición, el pesado y escasamente atractivo título de *Traite élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie.* Aunque el nombre de «geometría analítica» había aparecido ya de vez en cuando a lo largo del siglo XVIII, parece ser que el primero que lo utilizó como título de un libro de texto fue Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804, así como Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique.* Este último texto se tradujo a varios idiomas, entre ellos al inglés, y fue utilizado curante muchos años en la academia militar de West Point. No es necesario entrar en la consideración detallada de los contenidos de los textos de Lacroix, Lefrançais, Biot y otros, ya que se parecen mucho a los libros del mismo tema de comienzos del siglo XX.

11. El Organizador de la Victoria

Monge fue, desde luego, una de las figuras más relevantes de la Revolución; sin embargo, el matemático cuyo nombre estaba en la boca de todos los franceses durante la Revolución no fue Monge, sino Carnot. Lázaro Carnot fue quien, cuando vio amenazado el éxito de la Revolución, tanto por la confusión interior como por las amenazas de invasión desde el exterior, organizó los ejércitos y los condujo a la victoria, Carnot era un republicano tan ardiente como Monge, que evitó, sin embargo, pertenecer a ninguna de las muchas camarillas políticas de la época; con un alto sentido de la honradez intelectual, trató de ser imparcial en la toma de decisiones. Después de una investigación meticulosa absolvió a los monárquicos de la vil acusación de que habían mezclado vidrio en polvo con la harina destinada a los ejércitos revolucionarios, pero se sintió obligado en conciencia a votar a favor de la ejecución del rey. (Por cierto que el norteamericano Tom Paine, considerado a veces en su país como un peligroso radical, votó contra la ejecución del rey.) Sin embargo, es difícil mantener una imparcialidad racional en tiempos de crisis, y Robespierre, a quien se había opuesto Carnot, había formulado la amenaza de que Carnot perdería su cabeza al primer desastre militar. Si Carnot hubiera sido simplemente un matemático y un político, como Monge y como Condorcet, muy bien podría haber terminado en la guillotina, pero Carnot se ganó la admiración de sus compatriotas por sus grandes éxitos militares, y cuando una voz propuso en la Convención su arresto, los diputados se alzaron espontáneamente en su defensa, aclamándolo como «El Organizador de la Victoria». Por lo tanto, fue la



Mapa genealógico de los miembros de la familia Carnot que se hicieron famosos.

cabeza de Robespierre la que cayó en lugar de la suya, y Carnot sobrevivió para tomar parte activa en la consolidación de la École Polytechnique. Carnot estaba muy interesado en la educación a todos los niveles, a pesar de que no parece haber dado nunca una sola clase. Su hijo Hippolyte llegó a ser ministro de Instrucción Pública en 1848. Otro de sus hijos, Sadi, fue un físico famoso, y un nieto, llamado también Sadi, fue el cuarto presidente de la Tercera República Francesa. Véase el mapa genealógico adjunto.

Carnot llevó una fascinante vida política hasta 1797: Había pasado sucesivamente de la Asamblea Nacional a la Asamblea Legislativa, a la Convención Nacional, al poderoso Comité de Salud Pública, al Consejo de los Quinientos y al Directorio. Sin embargo, en 1797 rehusó apoyar un golpe de estado civil, y se ordenó inmediatamente su deportación.

Su nombre fue suprimido de los cargos del Instituto y su silla de la sección de geometría se adjudicó en una votación por unanimidad al general Bonaparte. Incluso Monge, compañero de Carnot en tanto que republicano y que matemático, aprobó el ultraje intelectual. La única cosa que puede decirse como atenuante, en parte, de esta acción, es la de que Monge parece haber quedado verdaderamente hipnotizado por Napoleón. Monge siguió a su ídolo en lo bueno y en lo malo, siendo tal su devoción que caía literalmente enfermo cada vez que Napoleón perdía una batalla. Esta actitud contrasta fuertemente con la de Carnot, que en principio fue responsable en parte de la ascensión de Bonaparte al poder, por su nombramiento para llevar a cabo la campaña italiana, pero que más tarde no dudó en oponerse al Frankenstein que había creado, a pesar de que ello estuviera a punto de costarle la vida.

Desde el punto de vista de la matemática el destierro de Carnot resultó ser bueno, porque le dio la oportunidad, en el exilio, de completar una obra que tenía en la mente desde hacía algún tiempo. Uno podría esperar lógicamente que un hombre dedicado a asuntos de enorme importancia práctica, como lo era Carnot,

nubiera tendido a pensar siempre en términos de utilidad práctica inmediata; en este sentido, por ejemplo, la consideración de las trayectorias de proyectiles parecería un tema de estudio mucho más plausible que las reflexiones metafísicas abstractas. Pero la obra que había estado planeando Carnot durante los trepidantes días de vida política era, *mirable dictu*, sus *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*[11], que aparecieron en 1797. Esta obra, como su propio título indica, no era de matemática aplicada en ningún sentido; caía más cerca de la filosofía que de la física, y en este sentido anunciaba ya el período del rigor y del interés por los fundamentos que constituyó uno de los temas centrales del siglo siguiente. Las *Réflexions* de Carnot se hicieron muy populares y alcanzaron buen número de ediciones en varios idiomas, lo que viene a demostrar que incluso en tiempos difíciles que ponen a prueba el temple de los hombres, la matemática pura suele encontrar gran cantidad de admiradores.

12. La metafísica del cálculo y de la geometría

A lo largo de la segunda mitad del siglo XVIII se generalizó el entusiasmo debido a los resultados obtenidos por el cálculo infinitesimal, pero la confusión en torno a sus principios básicos seguía siendo la misma. Ninguno de los planteamientos usuales, fuera el de las fluxiones de Newton, el de las diferenciales de Leibniz, o el de los límites de d'Alembert, parecía satisfactorio. Por consiguiente, Carnot, considerando las diversas interpretaciones en conflicto que se daban, trató de mostrar «en qué consiste el verdadero espíritu» del nuevo análisis. Sin embargo, en su búsqueda de un principio unificador hizo una elección lamentable, al menos desde el punto de vista que considera correctas y definitivas nuestras soluciones actuales al mismo problema. Carnot llegó a la conclusión de que «los verdaderos principios metafísicos» son «los principios de compensación de errores». Los infinitésimos, dice, son «quantités inappréciables» que, al igual que los números imaginarios, se introducen sólo para facilitar los cálculos y se eliminan al alcanzar el resultado final. Las «ecuaciones imperfectas» se hacen en el cálculo «perfectamente exactas» eliminando las cantidades cuya presencia ocasionaba los errores, tales como los infinitésimos de orden superior. A la objeción de que las cantidades que se desvanecen o bien son o no son cero, responde Carnot que «las llamadas cantidades infinitamente pequeñas no son en absoluto simplemente cantidades nulas, sino más bien cantidades que llegan a anularse, asignadas por una ley de continuidad que determina el carácter de la relación», argumento que nos recuerda fuertemente a Leibniz. Los diversos planteamientos del cálculo, afirma Carnot, no fueron otra cosa más que simplificaciones del antiguo método de exhausción que lo reducían así de diversas maneras a cómodos algoritmos.

Las *Reflexions* de Carnot gozaron de una gran popularidad, publicándose de

[11] Se publicaron dos traducciones al inglés: una apareció con el título «Reflections on the Theory of the Infinitesimal Calculus», traducida por W. Dickson, *Philosophical Magazine*, 8 (1800), págs. 222-240, 355-352; 9 (1801), págs. 39-56. La obra, traducida por W. R. Browell, se publicó en forma de libro con el título de *Reflections on the Metaphysical Principles of the Infinitesimal Analysis* (Oxford, 1832).

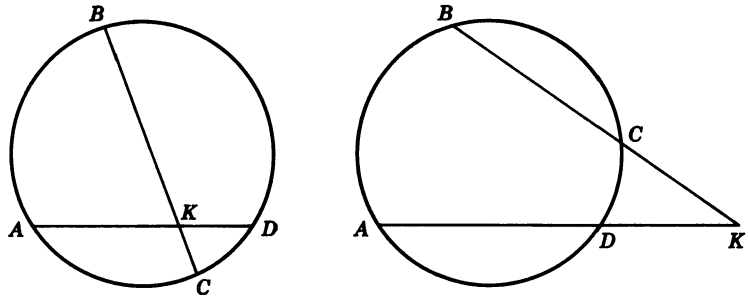


Figura 22.1

ellas incluso ediciones en varios idiomas. A pesar de que su intento de síntesis de puntos de vista resultase fallido, ayudó indudablemente a los matemáticos a sentirse insatisfechos con los «abominables pequeños ceros» del siglo XVIII, así como a abrir el camino que conduciría a la «edad del rigor» a lo largo del siglo XIX. A pesar de todo, la fama de Carnot hoy se basa principalmente en otras de sus obras. En 1801 publicó su *De la corrélation des figures de la géométrie*, obra que se caracterizaba también por su alto grado de generalidad. En ella intentaba establecer Carnot para la geometría pura un nivel de generalidad comparable al que gozaba entonces la geometría analítica. Carnot demostraba que varios de los teoremas de Euclides se pueden considerar como casos particulares de teoremas más generales, y que bastaba por lo tanto con una única demostración para todos ellos. Por ejemplo, en los *Elementos* nos encontramos con el teorema que dice que si dos cuerdas AD y BC en una circunferencia se cortan en un punto K, entonces el producto de AK por KD es igual al producto de BK por KC (fig. 22.1). Más tarde nos encontramos con el teorema que afirma que si KDA y KCB son secantes a la circunferencia por el punto exterior K, entonces el producto de AK por KD es igual al producto de BK por KC. Carnot considera estos dos teoremas como simples casos particulares, relacionados por el uso de cantidades negativas, de una propiedad general de rectas y circunferencias. Si tenemos en cuenta que para el caso de las cuerdas se tiene que $CK = CB - BK$, mientras que para las secantes $CK = BK - CB$, entonces la relación $AK \cdot KD = CK \cdot KB$ puede ser transferida de un caso al otro simplemente por un cambio de signo. Y el caso de tangencia es solamente otro caso particular en el que B y C, por ejemplo, coinciden, de manera que $BC = 0$. A pesar de que la representación gráfica de los números complejos aún no era de uso general, Carnot no dudó en sugerir también una correlación entre figuras definida por medio de números imaginarios, y citaba como ejemplo la correlación entre la circunferencia $y^2 = a^2 - x^2$ y la hipérbola $y^2 = x^2 - a^2$ a través de la identidad $x^2 - a^2 = (\sqrt{-1})^2 (a^2 - x^2)$.

13. La *Géométrie de position*

Carnot consiguió extender considerablemente su correlación entre figuras en su obra *Géométrie de position*, de 1803, obra que lo sitúa, junto a Monge, como uno

de los fundadores de la geometría pura moderna. El desarrollo histórico de la matemática se ha caracterizado casi siempre por un esfuerzo por conseguir grados de generalidad cada vez más altos, y es precisamente esta cualidad la que da su importancia a la obra de Carnot. Su tendencia a las generalizaciones le condujo a bellos resultados tridimensionales análogos a otros teoremas bien conocidos de la geometría plana. Lo equivalente a nuestro familiar «teorema del coseno» en trigonometría, es decir, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, se conocía ya por lo menos desde la época de Euclides. Pues bien, Carnot extiende este famoso y antiguo teorema a una forma análoga para el tetraedro, $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd \cos B - 2bd \cos C - 2bc \cos D$, donde a, b, c y d son las áreas de las cuatro caras, y B, C, D, son los ángulos diedros que forman los pares de caras de áreas c y d, b y d y b y c, respectivamente. La auténtica pasión por la generalidad que encontramos en esta obra ha sido una de las fuerzas directrices de la matemática moderna, especialmente en el siglo XX. La topología, en particular, estudiando como lo hace las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo una deformación continua, habría hecho las delicias de Carnot, si pudiera visitarnos hoy, ya que la reconocería, sin duda, en su papel de llevar mucho más lejos su idea de correlación entre figuras.

La *Géométrie de position* es una obra clásica de la geometría pura, pero contiene también algunas importantes contribuciones al análisis. Aunque la geometría analítica había eclipsado completamente a la geometría sintética durante más de un siglo, su supremacía se había basado en la utilización casi exclusiva de dos sistemas distintos de coordenadas, las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares. En el sistema rectangular las coordenadas de un punto P del plano son las distancias de P a dos rectas perpendiculares o ejes; en el sistema polar una de las coordenadas de P es la distancia de P a un punto fijo o polo O, y la otra es el ángulo que forma la semirrecta OP con una semirrecta fija de origen O llamada eje polar. Carnot se dio cuenta de que estos sistemas de coordenadas podían ser modificados de muchas maneras. Por ejemplo, las coordenadas de P podrían ser las distancias de P a dos puntos fijos O y Q, o una coordenada podría ser la distancia OP y la otra el área del triángulo OPQ. En tales generalizaciones simplemente redescubría y generalizaba Carnot una sugerencia que había formulado ya Newton, pero que había pasado desapercibida, en general. Pero la mente de Carnot impulsó de nuevo estas ideas más lejos de lo que lo habían sido hasta entonces. En todos los casos considerados, la ecuación de una curva dependía del sistema de coordenadas particular utilizado para representarla; y, sin embargo, las propiedades de una curva no dependen en absoluto, obviamente, del sistema de ejes elegido. Debería poderse encontrar, razonaba Carnot, un sistema de coordenadas que «no dependiera de ninguna hipótesis particular ni de ninguna base de comparación tomada en el espacio absoluto». Con esta idea en la mente iniciaba Carnot la búsqueda de lo que ahora llamamos coordenadas intrínsecas. Una de estas coordenadas la encontró en el conocido concepto de radio de curvatura de una curva en un punto. Para la otra, introdujo una cantidad a la que no dio ningún nombre especial, pero que más tarde se llamó «aberración» o «ángulo de desviación». Estas ideas suponen una extensión de las de tangencia y curvatura. La tangente a una curva en un punto P es la posición límite de una secante PQ cuando Q se aproxima indefinidamente a P a lo largo de la curva; el círculo de curvatura es

la posición límite del círculo cuya circunferencia pasa por los puntos P, Q y R, cuando Q y R se aproximan indefinidamente a P a lo largo de la curva. Si consideramos ahora una parábola que pase por cuatro puntos P, Q, R y S, y hallamos la posición límite de esta parábola cuando los puntos Q, R y S se aproximan indefinidamente a P a lo largo de la curva, entonces la aberración de la curva en P viene definida como el ángulo entre el eje de esta parábola y la normal en P a la curva. La aberración está relacionada con la tercera derivada de la función, en el mismo sentido en que la pendiente y la curvatura están relacionadas con la primera y la segunda derivada respectivamente, y ocurre que, de la misma manera que la pendiente de una recta y la curvatura de una circunferencia son constantes, también es constante la aberración de una cónica en todos sus puntos[12].

14. Las transversales

Para los matemáticos el nombre de Carnot está asociado a un teorema de geometría que apareció en 1806 en su obra *Essai sur le théorie des transversales*. Esta obra consiste de nuevo en una generalización de resultados antiguos. Menelao de Alejandría había demostrado que si una recta corta a los lados AB, BC y CA de un triángulo ABC (o a sus prolongaciones) en los puntos P, Q y R, respectivamente, y si llamamos $a' = AP$, $b' = BQ$, $c' = CR$ y $a'' = AR$, $b'' = BP$, $c'' = CQ$, entonces se verifica que $a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c''$ (fig. 22.2). Carnot generaliza este teorema clásico de

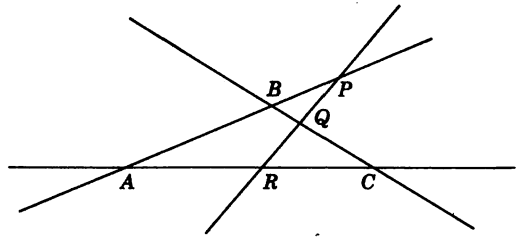


Figura 22.2

Menelao, demostrando que si sustituimos la recta por una curva de orden n que corta a la recta AB en los puntos (reales o imaginarios) $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$; a la BC en los puntos $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, y a la AC en los puntos $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, entonces se sigue verificando el teorema de Menelao si tomamos como a' el producto de las n distancias $AP_1, AP_2, AP_3, \ldots, AP_n$, y definimos análogamente b', c' y a'', b'', c'' (fig. 22.3). La teoría de transversales es sólo una pequeña parte de una obra que contiene otras generalizaciones interesantes. A partir de la conocida fórmula de Heron de Alejandría para el área de un triángulo en función de sus tres lados,

[12] Véase; para más detalles, C. B. Boyer, «Carnot and the Concept of Deviation», *American Mathematical Monthly*, 61 (1954), págs. 459-463.

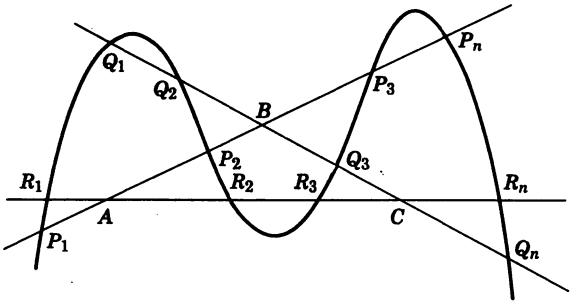


Figura 22.3

Carnot obtiene un resultado análogo para el volumen del tetraedro en términos de sus seis aristas. Por último, deduce Carnot una fórmula, que contiene ¡130 términos!, para calcular el décimo de los diez segmentos que unen entre sí cinco puntos dados al azar en el espacio, si se conocen los otros nueve..

Carnot fue, como hemos visto, un gran militar, un político, un poeta y un geómetra, pero también se dedicó a la especulación económica. El fracaso de la aventura colonial, en la que había invertido importantes sumas de dinero, le llevó a la ruina en 1809, momento en que el emperador generosamente le concedió un cargo oficial[13].

15. La *Géométrie* de Legendre

Carnot no fue el único de nuestro grupo de matemáticos de la Revolución que sintió la necesidad de un nivel de rigor más alto en la matemática. Ya hemos mencionado el lamentable estado en que se encontraba la geometría, tal como quedaba reflejado en el *Cours de mathématiques* de Bézout. Esto impulsó a Legendre, que era, después de todo, en principio un analista, a resucitar algunas de las cualidades intelectuales de Euclides. El resultado fue el libro *Éléments de Géométrie*, que se publicó en 1794, el año del Terror. Aquí podemos ver de nuevo la verdadera antítesis de lo que se suele considerar como práctico. Como dice Legendre en el prólogo, su objetivo es el de presentar una geometría que *satisfaga al espíritu.* El resultado de los esfuerzos de Legendre fue un libro de texto que alcanzó un gran éxito; uno de los productos matemáticos de la Revolución que tuvo una influencia más profunda, como lo demuestra el hecho de que aparecieran veinte ediciones de esta obra en vida del autor. Legendre escribía que su objeto era el de «componer unos elementos de geometría muy rigurosos», pero a pesar de ello no trató de ponerse tan pedante como para llegar hasta el punto de hacer un ídolo del rigor a expensas de la claridad.

[13] Hay varios libros sobre la vida de Carnot. Véanse, por ejemplo, Marcel Reinhard, *Le grand Carnot* (1950-1952), y S. J. Watson, *Carnot* (1954).

A menudo nos sentimos inclinados a pensar que la matemática en América está influenciada principalmente por el saber alemán, debido a que entre las dos guerras mundiales se acostumbraba ir a Gotinga para ponerse en contacto con los sabios más importantes, pero al razonar así se tiene la propensión a olvidar que durante la mayor parte del siglo XIX fue la matemática francesa la que dominó en la enseñanza americana, y esta influencia se ejerció principalmente a través de las obras de los matemáticos que estamos considerando. Los libros de texto de Lacroix, de Biot y de Lagrange se publicaron en América para utilizarlos en las escuelas, pero quizá el más influyente de todos fue la geometría de Legendre. El *Davies' Legendre* llegó a ser casi un sinónimo para geometría en América. En una fecha tan tardía ya como 1885 el decano Van Amringe, de la Universidad de Columbia, escribía en el prólogo de una nueva edición:

> Se suele admitir generalmente que en claridad y precisión de las definiciones, en la sencillez y rigor de las demostraciones, en el desarrollo lógico y ordenado del tema, y en la concisión de la presentación, el *Davies' Legendre* es superior a cualquier otra obra de su nivel para la formación general de la capacidad de razonamiento lógico de los alumnos, así como para su instrucción en el importante campo de las verdades geométricas elementales.»

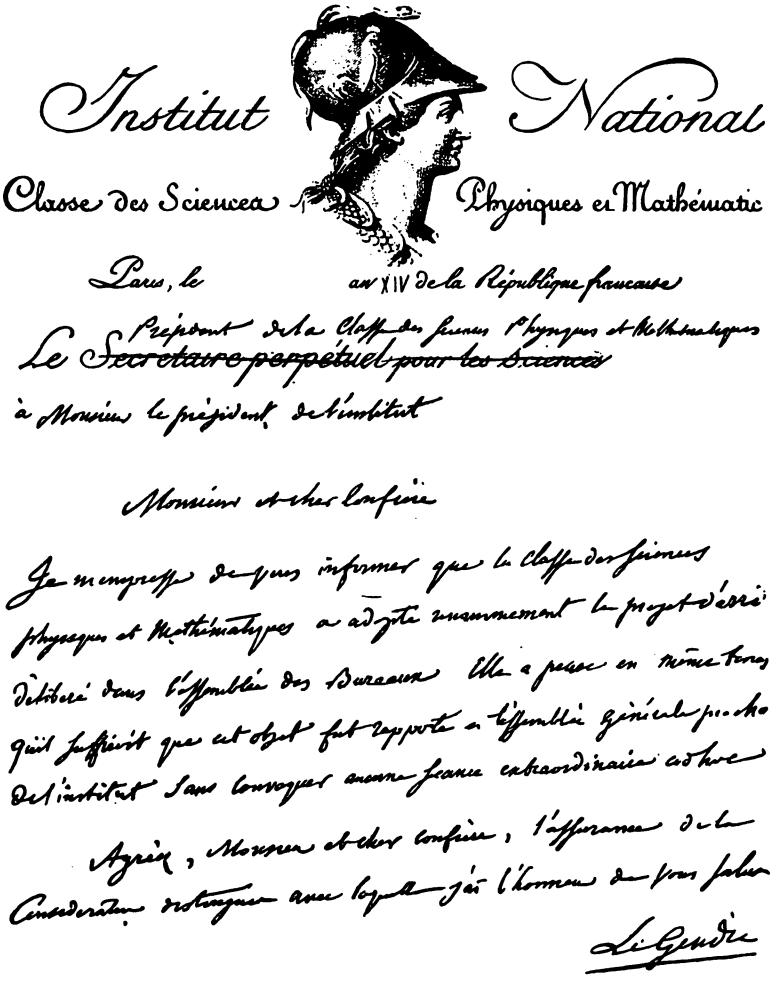
16. Las integrales elípticas

El éxito de los *Éléments de géometrie* de Legendre no nos debe llevar a pensar que el autor era principalmente un geómetra, como hemos advertido ya más arriba. Los campos en los que Legendre hizo contribuciones importantes a la matemática fueron numerosos, pero los más importantes no tuvieron apenas que ver con la geometría: el cálculo, la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de funciones, la teoría de números, la matemática aplicada, etc. Legendre escribió un tratado en tres volúmenes, los *Exercises du calcul intégral* (1811-1819), que rivalizó con los de Euler por su amplitud y autoridad; más tarde amplió aún algunos aspectos de esta obra en otros tres volúmenes que constituían el *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriénnes* (1825-1832). En estos importantes tratados, así como en otras memorias anteriores, introdujo Legendre el nombre de «integrales eulerianas» para designar a las funciones beta y gamma. Y, lo más importante de todo, creó algunas herramientas básicas del análisis que resultaron tan útiles a los físicos matemáticos, que llevan su nombre desde entonces. Entre ellas están las funciones de Legendre, que son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

Las soluciones polinómicas de esta ecuación para valores enteros positivos de n se conocen con el nombre de polinomios de Legendre.

Legendre centró gran parte de sus esfuerzos en reducir las integrales elípticas, es decir, las cuadraturas de la forma $\int R(x, s)dx$, donde R es una función racional y s



Carta autógrafa de Legendre. En algunas de sus cartas, como en este caso, aparece escrito su nombre en la forma «Le Gendre». Sin embargo, en general se escribía unido: Legendre.

es la raíz cuadrada de un polinomio en x de tercer o cuarto grado, a tres formas canónicas que llevan por ello su nombre. Las integrales elípticas de primera y segunda especie en la forma de Legendre son

$$F(K, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

y

$$E(K, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

respectivamente, donde $K^2<1$; la forma de las de tercera especie es algo más complicada y no la reproduciremos aquí. Se pueden encontrar tablas de estas integrales, tabuladas para cada K fija y para valores variables de ϕ, en la mayor parte de los buenos manuales, debido a que estas integrales aparecen en muchos problemas. Una integral elíptica de primera especie de Legendre aparece de una manera natural al resolver la ecuación diferencial del movimiento de un péndulo simple; una de segunda especie aparece al intentar calcular la longitud de un arco de elipse. Las integrales elípticas también aparecían ya en memorias anteriores de Legendre, especialmente en una de 1785 sobre la atracción gravitatoria de un elipsoide, problema en conexión con el cual surgieron los llamados «armónicos zonales» o «coeficientes de Legendre», funciones de las que hizo un uso efectivo Laplace en teoría del potencial.

Legendre fue una figura importante en geodesia, y en este contexto fue en el que desarrolló el método estadístico de los mínimos cuadrados. Podemos describir en un caso sencillo el método de los mínimos cuadrados, de la manera siguiente: Si un conjunto de observaciones experimentales nos han conducido a *tres* o más ecuaciones aproximadas en dos variables, digamos

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0\\ a_3x+b_3y+c_3&=0 \end{aligned}$$

entonces se adoptan como «los mejores» valores de x e y la solución del sistema de *dos* ecuaciones

$$\begin{aligned} (a_1^2+a_2^2+a_3^2)x+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)y+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)&=0\\ (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)x+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)y+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)&=0 \end{aligned}$$

17. La teoría de números

Las *Memoirs* del Instituto contenían también uno de los intentos de Legendre de demostrar el postulado de las paralelas, pero de todas sus contribuciones a la matemática, de las que se mostraba más satisfecho Legendre era de su obra sobre las integrales elípticas y sobre la teoría de números. Sobre este último tema publicó una obra en dos volúmenes, su *Essai sur la Théorie des nombres* (1797-1798), que es a la vez el primer tratado que se dedicaba exclusivamente a la teoría de números. El famoso «último teorema de Fermat» lo atrajo de manera especial, y hacia el 1825 dio una demostración de su insolubilidad para $n=5$. Casi igual de famoso es un teorema sobre congruencias que publicó Legendre en su tratado de 1797-1798. Cuando, dados p y q enteros existe otro entero x tal que x^2-q es divisible por p, se dice que q es un residuo cuadrático de p; escribiremos, siguiendo la notación introducida por Gauss, $x^2\equiv q\,(\mathrm{mod}\ p)$, cuando se verifique la condición anterior, lo que se expresa diciendo que «x^2 es congruente con q módulo p». Legendre redescubrió, como decíamos, un bello teorema dado anteriormente y en una forma

menos moderna por Euler, teorema que se conoce como la «ley de reciprocidad cuadrática»: si p y q son primos impares entonces las congruencias $x^2 \equiv q \pmod{p}$ y la $x^2 \equiv p \pmod{q}$ o bien son *ambas solubles* o bien *ambas insolubles*, salvo que tanto p como q sean de la forma $4n+3$, en cuyo caso una es soluble y la otra no. Por ejemplo, $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$ tiene la solución $x=8$ y $x^2 \equiv 17 \pmod{13}$ tiene la solución $x=11$, y se puede demostrar que $x^2 \equiv 5 \pmod{13}$ y $x^2 \equiv 13 \pmod{5}$ no tiene solución. En cambio, $x^2 \equiv 19 \pmod{11}$ no es soluble, mientras que $x^2 \equiv 11 \pmod{19}$ tiene la solución $x=7$. El teorema lo hemos formulado aquí en la forma moderna acostumbrada, pero en la expresión de Legendre queda en la forma

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)\,(q-1)}{4}}$$

donde el símbolo de Legendre $\left(\frac{p}{q}\right)$ representa 1 ó -1, según que la congruencia $x^2 \equiv p \pmod{q}$ sea o no soluble en x.

Desde la época de Euclides era cosa bien sabida que el número de números primos es infinito; sin embargo, resulta obvio que la densidad de números primos va decreciendo según avanzamos hacia números cada vez mayores. Estas y otras consideraciones llevaron a estudiar uno de los problemas más famosos de la teoría de números, el de intentar describir exactamente la distribución de los números primos entre los números naturales. Los matemáticos se dedicaron a buscar una regla, que se conoció después como el «teorema de los números primos»[14], que expresara el número de primos menores que un número natural n como una cierta función de n, que se suele representar por $\pi(n)$. En su tratado de 1797-1798 repetidamente citado, conjeturó Legendre que $\pi(n)$ se va aproximando a $\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}$ según va creciendo n indefinidamente, en base a un recuento de grandes cantidades de números primos. Esta conjetura se acerca a la verdad, pero una formulación precisa del teorema que afirma que $\pi(n) \to \frac{n}{\ln n}$, sugerido varias veces a lo largo del siglo XIX, no se consiguió demostrar hasta 1896. Legendre demostró que no existe ninguna función algebraica racional que tome como valores siempre números primos, pero hizo observar que el polinomio n^2+n+17 toma valores primos para todo valor de n desde $n=1$ a $n=16$, y que $2n^2+29$ es primo para valores de n desde 1 a 28. Euler había demostrado ya que n^2-n+41 es primo para valores de n desde 1 a 40.

18. La teoría de funciones

Si Carnot y Legendre eran discípulos de un pensamiento claro y riguroso, Lagrange era el sumo sacerdote de este culto. En plena época del Terror Lagrange

[14] Véanse, para un resumen histórico de estos intentos, los dos libros de Edmund Laudau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909) y *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927).

consideró seriamente la posibilidad de abandonar Francia, pero justamente en tan crítica coyuntura fueron creadas la École Normale y la École Polytechnique, y Lagrange fue invitado a dar en ellas lecciones de análisis. Lagrange parece haber acogido con satisfacción la oportunidad de enseñar, aunque habían pasado ya tantos años desde que dio sus primeras clases en Turín. En el intervalo transcurrido desde entonces Lagrange había estado bajo el patrocinio de reyes, pero durante la Revolución no tomó partido ni a favor ni en contra del rey o del segundo estado. Quizá esto fuera el resultado de su apatía política, o bien posiblemente todo fuera debido a la depresión mental que padecía Lagrange por aquella época[15]. En cualquier caso, su nombramiento para ocupar un puesto en las escuelas recién creadas lo despertó de su letargo. Los nuevos programas exigían nuevos apuntes de clase, y Lagrange los preparó para diversos niveles. Para los estudiantes de la École Normale preparó e impartió en 1795 lecciones que corresponderían hoy a un nivel medio de álgebra. El material que contenían estas notas gozó de una popularidad que se extendió a América, donde se publicaron con el título de *Lectures on Elementary Mathematics*[16]. Para los estudiantes de nivel superior de la École Polytechnique Lagrange preparó un curso de análisis que se ha considerado desde entonces como un verdadero clásico de la historia de la matemática. El resultado fue su libro *Théorie des fonctions analytiques*, que se publicó el mismo año que las *Réflexions* de Carnot, el 1797, y estos dos libros juntos hicieron del año 1797 un verdadero abanderado y heraldo del renacimiento del rigor.

La teoría de funciones de Lagrange, que desarrollaba algunas ideas presentadas por él en un artículo de hacía ya unos 25 años, no era ciertamente útil en un sentido estrecho de miras, puesto que las notaciones usuales del cálculo diferencial eran mucho más fáciles de manejar y más sugestivas que la «función derivada» de Lagrange, de donde procede nuestro nombre para la «derivada». La idea directriz de la obra no era, desde luego, la de intentar hacer el cálculo más útil o más fácil de aplicar, sino la de hacerlo más satisfactorio desde un punto de vista lógico, más riguroso en definitiva. La idea clave es muy fácil de explicar: Si desarrollamos la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ por medio de la «división larga», obtenemos la serie $1+1x+1x^2+1x^3+\cdots+1x^n+\cdots$ Si multiplicamos ahora el coeficiente de x^n por $n!$, al resultado obtenido lo llamó Lagrange el valor de la función derivada n-ésima de la función dada $f(x)$ para el punto $x=0$, con las consiguientes modificaciones para los desarrollos de funciones en torno a otros puntos distintos del origen. A esta obra de Lagrange debemos las notaciones usadas hoy universalmente para las sucesivas derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, ..., de una función $f(x)$. Lagrange creía que por este método había conseguido eliminar la necesidad de infinitesimales o de límites, a pesar de lo cual continuó utilizándolos paralelamente a sus funciones derivadas. Pero, ¡lástima!, en este bello y nuevo esquema había fallos importantes. No toda función se puede desarrollar de esta forma; en la supuesta demostración

[15] Véase George Sarton, «Lagrange's Personality», en *Proceedings of the American Philosophical Society*, 88 (1944), págs. 457-496; véase también E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), capítulo 10.

[16] Fueron traducidas por T. J. McCormack (1901). El texto original francés se encuentra en el vol. VII de las *Oeuvres* de Lagrange.

de Lagrange de la posibilidad general de tal desarrollo había algunos *lapsus;* por otra parte, la cuestión misma de la convergencia de las series infinitas vuelve a hacer inevitable la necesidad del concepto de límite. A pesar de todo, puede decirse con toda justicia que la obra de Lagrange durante la Revolución tuvo una gran influencia en el desarrollo posterior de la matemática, por su iniciación a un campo nuevo que ha sido desde entonces el verdadero centro de la matemática: la teoría de funciones de una variable real.

19. El cálculo de variaciones

A Lagrange se le suele considerar como el matemático más profundo del siglo XVIII, con Euler como único rival próximo, y hay aspectos de su obra que no son fáciles de tratar en un panorama histórico elemental. Entre ellos está la primera contribución de Lagrange a la matemática y a la vez quizá la más importante: el cálculo de variaciones. Se trataba de una nueva rama de la matemática, cuyo nombre deriva de las notaciones utilizadas por Lagrange desde el 1760 aproximadamente. En su forma más simple, de lo que trata es de determinar una cierta relación funcional $y=f(x)$ tal que una integral $\int_a^b g(x, y)dx$ tome un valor máximo o mínimo. Los problemas de isoperimetrías o de descenso más rápido son casos especiales del problema general del cálculo de variaciones. En 1755 Lagrange escribió a Euler exponiéndole los métodos generales que había desarrollado para atacar problemas de este tipo, y Euler, con la generosidad de un gran hombre, retrasó intencionadamente la publicación de algunos resultados suyos propios relacionados con el tema, con objeto de que el joven Lagrange recibiera completo reconocimiento por sus métodos nuevos, que Euler consideró superiores[17].

La fama de Lagrange se extendió desde la época de sus primeras publicaciones en la *Miscellanea* de la Academia de Turín en 1759-1761, y cuando en 1766 Euler y D'Alembert aconsejaron a Federico el Grande sobre el posible sucesor de Euler en la Academia de Berlín, ambos recomendaron decididamente el nombramiento de Lagrange. Entonces Federico el Grande escribió una presuntuosa carta a Lagrange en la que le comunicaba que era necesario que el geómetra más grande de Europa viviera cerca del más grande de los reyes. Lagrange aceptó la invitación y permaneció en Berlín durante 20 años, abandonando la ciudad solamente después de la muerte de Federico, tres años antes del comienzo de la Revolución Francesa.

Durante su larga estancia en Berlín publicó Lagrange importantes trabajos sobre mecánica, en particular sobre el problema de los tres cuerpos, sus primeras ideas sobre las funciones derivadas, e importantes resultados sobre la teoría de ecuaciones. En 1767 publicó una memoria sobre la aproximación de raíces de ecuaciones polinómicas por medio de fracciones continuas; en otro artículo en 1770 estudiaba la resolubilidad de ecuaciones en términos de las permutaciones de sus raíces. Esta última obra fue la que más tarde conduciría a la importantísima teoría

[17] Véase C. Carathéodory, «The Beginnings of Research in The Calculus of Variations», *Osiris*, 3 (1938), págs. 224-240, así como también Robert Woodhouse, *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century* (reimpresión por Chelsea, New York, s. f.).

de grupos y a las demostraciones por Abel y Galois de la irresolubilidad, en los términos usuales, de las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro. El nombre de Lagrange ha quedado asociado hasta hoy a uno de los más importantes teoremas de la teoría de grupos finitos: si a es el orden de un subgrupo H de un grupo G de orden b, entonces a es un divisor de b. Al descubrir que una resolvente de una ecuación de grado 5, lejos de ser de grado menor que 5 como se podría esperar, era de grado 6, conjeturó Lagrange que las ecuaciones polinómicas de grado mayor que 4 no serían resolubles por radicales en el sentido usual.

20. Los multiplicadores de Lagrange

Siempre con la vista puesta con la máxima generalidad y elegancia en el tratamiento de los problemas, introdujo Lagrange el llamado método de variación de las constantes en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Es decir, si $c_1u_1+c_2u_2$ es una solución general de la ecuación $y''+a_1y'+a_2y=0$, donde u_1 y u_2 son funciones de x, entonces Lagrange sustituía las constantes c_1 y c_2 por nuevas variables v_1 y v_2, funciones indeterminadas de x, que se determinaban imponiendo precisamente la condición de que $v_1u_1+v_2u_2$ sea una solución de la ecuación no homogénea dada $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.Para resolver el problema de la determinación de los máximos y mínimos de una función tal como la $f(x, y, z, w)$, condicionados por las ecuaciones $g(x, y, z, w)=0$ y $h(x, y, z, w)=0$ proponía Lagrange la utilización de lo que más tarde se llamarían los «multiplicadores de Lagrange», que dan lugar a un algoritmo elegante y simétrico. El método consiste en introducir dos constantes indeterminadas λ y μ, construir la función $F\equiv f+\lambda g+\mu h$, y a partir de las seis ecuaciones $F_x=0$, $F_y=0$, $F_z=0$, $F_w=0$, $g=0$ y $h=0$, eliminar los multiplicadores λ y μ, y resolver el sistema para hallar los valores buscados de x, y, z y w.

Lagrange se interesó también profundamente por la teoría de números, como tantos otros de los más importantes matemáticos modernos. Aunque no utilizó, desde luego, el lenguaje de las congruencias, demostró Lagrange en 1768 lo equivalente al teorema que afirma que, con respecto a un módulo primo p, la congruencia $f(x)\equiv 0$ no puede tener más de n soluciones distintas, siendo n el grado del polinomio $f(x)$ (excepto, evidentemente, en el caso trival de que todos los coeficientes de $f(x)$ sean múltiplos de p. Dos años más tarde publicó Lagrange una demostración del teorema, del que Fermat aseguraba haber dado a su vez una demostración, que dice que todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados perfectos como máximo, y debido a ello este teorema se suele conocer con el nombre de «teorema de Lagrange de los cuatro cuadrados». A la vez que esta demostración dio también la primera demostración correcta del resultado conocido como «teorema de Wilson», que había aparecido el mismo año en las *Meditationes algebraicae* de Waring[18], y que dice que para todo primo p, el

[18] Para la historia de éste y de otros teoremas de teoría de números, véase L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (1919-1923, reimpresión en Chelsea, New York).

número $(p-1)!+1$ es divisible por p. Lagrange trabajó también en teoría de probabilidades, pero en este campo ocupó un segundo lugar detrás de Laplace, más joven que él en cambio.

21. Laplace y la teoría de probabilidades

Hasta el momento poco hemos hablado de Laplace, a quien sus contemporáneos tenían, como matemático, en tan alta consideración como Lagrange. Hay dos razones para este aparente olvido. En primer lugar, Laplace no tomó parte prácticamente en actividades revolucionarias; parece haber tenido un alto sentido de la honradez intelectual en la ciencia, pero en política carecía de convicciones concretas. Esto no quiere decir que fuera timorato, puesto que parece haberse relacionado libremente con aquellos de sus colegas científicos que fueron sospechosos durante el período de crisis. Se ha dicho que también él habría estado en peligro de ser enviado a la guillotina, de no ser por sus contribuciones a la ciencia, pero esta opinión parece bastante dudosa, ya que Laplace apareció a menudo como un descarado oportunista. Jugó un papel, aunque no de gran importancia, en el Comité de Pesos y Medidas, y fue también, naturalmente, profesor de la École Normale y de la École Polytechnique, pero no publicó sus lecciones, al contrario que Monge y que Lagrange. Sus publicaciones estuvieron dedicadas principalmente a la mecánica celeste, campo en el que destacó sin rivales de su talla desde la época de Newton. Laplace tuvo también su *flirt* con la administración política unos años más tarde, cuando Napoleón, que sentía una gran admiración por los hombres de ciencia, lo nombró ministro del Interior, puesto que había ocupado también Carnot por algún tiempo con Napoleón. Pero es bien sabido que Laplace, a diferencia de Carnot, no mostró tener aptitudes para el cargo, y Napoleón se burlaba de él diciendo que «aplicaba el espíritu de lo infinitamente pequeño a la dirección de los asuntos de Estado». Una segunda razón del escaso énfasis que hemos puesto en la obra de Laplace es la de que dicha obra no tuvo la influencia inmediata y duradera que se observa en la de otros miembros de nuestro grupo. Sus obras principales representan, en cierto sentido, el final de una época más bien que el comienzo de un período nuevo, aunque tenemos que hacer una clara excepción con su obra sobre teoría de probabilidades y sobre teoría del potencial.

La teoría de probabilidades debe más a Laplace que a ningún otro matemático. Desde 1774 escribió muchos artículos sobre el tema, y los resultados obtenidos los incorporó y organizó en su libro clásico *Théorie analytique des probabilités*, de 1812. Laplace consideró la teoría de probabilidades desde todos los puntos de vista y a todos lo niveles[19], y su *Essai philosophique des probabilités* de 1814 es en realidad una exposición introductoria para el lector no especializado. Laplace escribía en ella que «en el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números»; pero su *Théorie analytique* muestra la mano magistral del analista consumado que domina el cálculo superior. El libro está lleno de

19 Lógicamente el capítulo más largo, con gran diferencia, del libro de Isaac Todhunter *A History of the Mathematical Theory of Probability* (1949) está dedicado exclusivamente a la obra de Laplace.

integrales que incluyen las funciones beta y gamma. Laplace fue uno de los primeros que demostró que la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

es decir, el áea bajo la curva de las probabilidades, es igual a $\sqrt{\pi}$. El método que utilizó para obtener este resultado era un tanto artificioso, pero tampoco difiere demasiado del artificio moderno de transformar la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

a coordenadas polares como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

la cual se puede calcular ya fácilmente y da como resultado

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Entre las muchas cosas a las que dedica su atención Laplace en su *Théorie analytique* está el cálculo de π por medio del problema de la aguja de Buffon, que había permanecido casi olvidado durante treinta y cinco años. A este problema se le conoce a veces como el problema de la aguja de Buffon-Laplace[20], dado que Laplace extendió el problema original a una cuadrícula formada por dos haces de rectas paralelas equidistantes y perpendiculares el uno al otro. Si las distancias entre las rectas de cada uno de los haces son a y b, entonces la probabilidad de que una aguja de longitud l (menor que a y que b) lanzada al azar corte a una de estas rectas es

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}$$

Laplace rescató también del olvido la obra del Rev. Thomas Bayes († 1761) sobre probabilidades inversas. En este libro aparece además la teoría de los mínimos cuadrados, inventada por Legendre, junto con la demostración formal que no había dado Legendre. La *Théorie analytique* contiene también la transformada de

[20] Véase, para una buena exposición del problema, N. T. Gridgman, «Geometric Probability and the Number π», en *Scripta Mathematica*, 25 (1960), págs. 183-195.

Laplace, que tan útil resultó para la teoría de ecuaciones diferenciales: Si se tiene que

$$f(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}\, g(t)\, dt$$

entonces se dice que la función $f(x)$ es la transformada de Laplace de la función $g(x)$.

22. Mecánica celeste y operadores

Las obras de Laplace incluyen un gran número de aplicaciones del análisis matemático más avanzado. Un ejemplo típico lo constituye su estudio de las condiciones de equilibrio de una masa fluida en rotación, problema que se le presentó en conexión con la hipótesis de los orígenes del sistema solar a partir de una nebulosa inicial. Laplace había formulado ya esta hipótesis de una manera popular en su *Exposition du système du monde* en 1796, libro que guarda la misma relación con la *Mécanique céleste* (1799-1825, 5 volúmenes), que el *Essai philosophique des probabilités* con la *Théorie analytique*. Según esta teoría de Laplace, el sistema solar evolucionó a partir de una masa de gas incandescente girando alrededor de un eje. Al irse enfriando el gas se contrajo, lo que originó que el movimiento de rotación se fuese acelerando, en virtud del principio de conservación del momento angular, lo cual provocó que se desprendieran sucesivos anillos del borde exterior, que se fueron condensando y formaron los planetas, mientras que el Sol en rotación constituye el núcleo central que queda de la nebulosa. La idea básica de esta hipótesis no era completamente original de Laplace, puesto que había sido propuesta ya en líneas generales y de una manera cualitativa por Thomas Wright e Immanuel Kant, pero la musculatura cuantitativa que debía recubrir al esqueleto de la teoría apareció formando parte de la monumental *Mécanique céleste*. En esta obra clásica nos encontramos también con la utilización por Laplace de la idea de potencial y de la ecuación de Laplace, en conexión con el problema de la atracción de un esferoide sobre una partícula. En un artículo muy técnico de 1782, titulado «Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes», que fue incluido también en la *Mécanique céleste*, desarrollaba Laplace el concepto extremadamente útil de potencial, es decir, de una función cuya derivada direccional en cualquier punto es igual a la componente de la intensidad del campo en la dirección dada. También resultó de importancia fundamental en astronomía y en física matemática el llamado «operador laplaciana» de una función $u=f(x, y, z)$. El resultado de aplicar este operador a la función u es simplemente la suma de las derivadas parciales de segundo orden de u, es decir, $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$, que suele representarse abreviadamente por la expresión $\nabla^2 u$, o «laplaciana de u», donde ∇^2 es el operador laplaciana. La función $\nabla^2 u$ es independiente del sistema de coordenadas particular que se utilice; bajo ciertas

condiciones los potenciales gravitatorio, eléctrico y otros tipos de potencial satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Euler se había encontrado ya con esta ecuación de una manera un tanto casual en 1752 en sus estudios de hidrodinámica, pero fue Laplace quien hizo de ella una de las herramientas standard de la física matemática.

La publicación de la *Mécanique céleste* de Laplace se suele considerar como la culminación de la teoría newtoniana de la gravitación. Teniendo en cuenta todas las perturbaciones que se dan en el sistema solar, consiguió demostrar Laplace que los movimientos son seculares, de manera que puede considerarse el sistema como estable. No parecía haber ya ninguna necesidad de intervención divina alguna. Se dice que Napoleón le comentó a Laplace el hecho de que no apareciese la menor mención de Dios en su obra monumental, a lo que, al parecer, replicó Laplace: «No he necesitado esa hipótesis, Sire.» Cuando le contaron la escena a Lagrange, se dice que éste exclamó: «¡Ah, pero es una bella hipótesis!»

Laplace completó no sólo la parte gravitatoria de los *Principia* de Newton, sino también algunos otros puntos de un carácter más físico. Newton había calculado una velocidad del sonido en el aire a base de consideraciones puramente teóricas, para descubrir al final que el valor calculado resultaba ser demasiado pequeño. Laplace fue el primero, en 1816, en señalar que la discrepancia entre las velocidades calculada y medida por observación era debida al hecho de que los cálculos en los *Principia* se basaban en la suposición de que las compresiones y expansiones del aire al transmitir el sonido eran isotermas, cuando en realidad las oscilaciones del sonido son tan rápidas que las compresiones y expansiones son adiabáticas, lo que incrementa el coeficiente de elasticidad del aire y, en consecuencia, la velocidad del sonido.

Las mentalidades de Laplace y de Lagrange, los dos matemáticos más importantes de la Revolución, eran diametralmente opuestas en muchos aspectos. Para Laplace la naturaleza era lo esencial, y la matemática no era más que una caja de herramientas que él sabía manejar con extraordinaria destreza. Para Lagrange la matemática era un arte sublime que justificaba por sí mismo su existencia. La matemática de la *Mécanique céleste* se ha calificado a menudo de difícil, pero probablemente casi nadie la llamaría bella; en cambio, la *Mécanique analytique* ha sido admirada siempre como «un verdadero poema científico» por la perfección y grandiosidad de su estructura.

23. Los cambios políticos

Este capítulo debería cerrarse, en cierto sentido, con la fecha del año 1799, cuando Napoleón Bonaparte se hace con el control del poder y se puede considerar finalizado el período de la Revolución. Sin embargo, bajo Napoleón continuaron siendo favorables las condiciones para el desarrollo de la matemática, y además esta fecha está lejos aún de la que marcaría el final de las actividades de los cinco supervivientes de nuestro grupo de seis, pues ya hemos visto que cada uno de ellos

continuó haciendo contribuciones a la matemática, y algunos también a la política. Todos ellos recibieron honores: Monge, Carnot y Lagrange fueron nombrados condes del imperio, y Laplace consiguió el título de marqués; el único de los seis que no parece haber llevado nunca un título de nobleza fue Legendre. Desde el punto de vista matemático, el capítulo llega a un final feliz, puesto que nuestros sabios pudieron continuar su obra hasta el final. Desde el punto de vista político, en cambio, dos de ellos resultarían derrotados; Carnot y Monge tenían los dos sólidas convicciones políticas, y ambos habían votado a favor de la ejecución de Luis XVI. Carnot, el más consistente de los dos, se opuso siempre a los dictadores, y en 1804 fue el único tribuno con el valor y la convicción suficientes como para votar en contra del nombramiento de Napoleón como emperador. No obstante, más tarde, cuando consideró que la prosperidad de Francia así lo exigía, Carnot sirvió a Napoleón de buen grado, tanto en el ejército como en la administración civil del gobierno. Monge en cambio apoyó a su ídolo desde que era un simple cabo revolucionario hasta que se convirtió en el emperador despótico. Fourier y él acompañaron a Bonaparte en las campañas de Italia y de Egipto, y Monge mismo fue el encargado de la delicada tarea de seleccionar qué obras de arte transportarían a París a su regreso como botín de guerra.

A continuación de la restauración de la monarquía francesa, Carnot se vio obligado a exiliarse en Magdeburg, y Monge fue desterrado y despojado de todos los honores, incluidos sus cargos en la École Polytechnique y en el Institut National. Este giro en los acontecimientos fue aceptado valerosamente por Carnot, que continuó desarrollando su actividad intelectual, pero quebró la resistencia espiritual de Monge, que moría poco después. Lagrange había muerto unos años antes de la crisis napoleónica. Legendre parece haber permanecido políticamente neutral a lo largo de estos cambios, por su carácter tímido y reservado, pero continuó produciendo una corriente ininterrumpida de publicaciones sobre integrales elípticas y teoría de números, así como contribuciones a otros campos de la matemática. Hacia el final de su vida, sin embargo, también él sufrió las consecuencias de represalias políticas, al ser despojado de su pensión por resistirse a la maniobra del gobierno de intentar dictar su voluntad a la Académie des Sciences. Laplace, por su parte, hacía las paces con cada régimen político según iban llegando, incluyendo en las ediciones de sus obras las más encendidas alabanzas de cualquier bando que ocupase circunstancialmente el poder. Como resultado lógico de esta actitud, la posteridad ha admirado a Laplace por su matemática, mientras despreciaba su indigno oportunismo político.

Han pasado casi dos siglos desde los días de los que hemos estado hablando, y ya podemos considerar este período desapasionadamente. Una lección que puede extraerse del panorama que hemos recorrido es la de que las cosas que realmente cuentan en la matemática, y que son las que tienen una influencia duradera, no son las que dicta una utilidad práctica inmediata. Incluso en épocas de crisis son las cosas del *esprit* (tanto en la palabra como en el sentido francés del término) las que más cuentan, y este espíritu sin duda lo transmiten mejor los grandes maestros. Pero quizá sea aún más importante que ésta la otra lección que nos enseña Carnot, de que uno no debe dejar nunca que lo domine el desánimo, por muy decepcionantes que puedan ser las perspectivas políticas o intelectuales.

Bibliografía

Alengry, Franck: *Condorcet: Guide de la révolution française* (París: Giard & E. Brière, 1904).

Arago, Francois: «Biographies of Distinguished Scientific Men» (véase Laplace), *Smithsonian Institution, Annual Report*, 1874, págs. 129-168.

Bell, E. T.: *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937).

Boyer, C. B.: «Carnot and the Concept of Deviation», *American Mathematical Monthly*, **61** (1954), 459-463.

——: «The Great Carnot», *The Mathematics Teacher*, 49 (1956), 7-14.

Burlingame, Anne E.: *Condorcet, the Torch Bearer of the French Revolution* (Boston: Stratford, 1930).

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, ed. rev. (New York: Macmillan, 1919).

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: B. G. Teubner, 1880-1908, 4 vols.).

Carnot, Hippolyte: *Mémoires sur Carnot par son fils* (París: 1861-1863, 2 vols.).

Carnot, L. N. M.: «Reflections on the Theory of the Infinitesimal Calculus», trad. W. Dickson: *Philosophical Magazine*, 8 (1800), 222-240, 335-352; 9 (1801), 39-56.

——: *Reflexions on the Metaphysical Principles of the Infinitesimal Analysis*, trad. W. R. Browell (Oxford, 1832).

Chasles, Michel: *Aperçu historique sur l'origine et de développement des méthods en géométrie* (Bruxelles, 1837; 2.ª ed., París, 1875).

Condorcet, M. J. A. N. C. de: *Oeuvres* (París, 1847-1849, 12 vols.).

——: *Sketch for a Historical Picture of the Progress of the Human Mind*, trad. June Barraclough (New York: Noonday Press, 1955).

Dickson, L. E.: *History of the Theory of Numbers* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1919-1923, 3 vols.).

École Polytechnique: *Livre du centenaire*, 1794-1894 (París, 1894-1897, 3 vols.).

École Normale: *Le centenaire de l'École Normale*, 1795-1895 (París, 1895).

Granger, G. G.: *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet* (París: Presses Universitaires de France, 1956).

Lagrange, J. L.: *Oeuvres* (París, 1867-1892, 14 vols.).

——: *Lectures on Elementary Mathematics*, trad. T. J. McCormack, 2.ª ed. (Chicago: Open Court, 1901).

Laplace, P. S.: *The System of the World*, trad. H. H. Harte (Londres: Longmans-Green, 1830, 2 vols.

——: *Oeuvres complètes* (París: Gauthier-Villars, 1878-1912, 14 vols. en 15).

——: *A Philosophical Essay on Probabilities* (New York: Wiley, 1902).

Legendre, A. M.: *Essai sur la théorie des nombres*, 2.ª ed. (París: Courcier, 1808).

——: *Elements of Geometry and Trigonometry*, trad. David Brewster, rev. por Charles Davies (New York: A. S. Barnes, 1851).

Loria, Gino: *Storia della geometria descrittiva* (Milán: Hoepli, 1921).

——: *Storia delle matematiche* (Turín: Sten, 1929-1933, 3 vols.).

Muir, T. P.: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906-1923, 4 vols.; reed., New York: Dover, 1960).

Nielsen, Niels: *Géomètres français sous la révolution* (Copenhagen: Levin & Munksgaard, 1929).

Reinhard, Marcel: *Le grand Carnot* (París: Hachette, 1950-1952, 2 vols.).

Roever, W. H.: *The Mongean Method od Descriptive Geometry* (New York: Macmillan, 1933).

Sarton, George: «Lagrange's Personality», *Proceedings of the American Philosophical Society*, 88 (1944), 457-496.
Smith, D. E.: *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929).
——: *The Poetry of Mathematics and Other Essays* (New York: Scripta Mathematic, 1934).
Taton, René: *L'oeuvre scientifique de Monge* (París: Presses Universitaire de France, 1951).
Todnunter, Issac: *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (New York: Chelsea, reinpresión, 1949).
Watson, S. J.: *Carnot* (Londres: Bodley Head, 1954).

Ejercicios

1. Las exigencias de la Revolución Francesa, ¿condujeron a un énfasis mayor en la matemática aplicada que en la matemática pura? Explíquese claramente, citando ejemplos concretos.
2. ¿Cuáles eran los principales medios de vida de los matemáticos franceses antes de la Revolución? ¿Y después de la Revolución? Explíquese claramente, citando casos concretos.
3. Menciónense tres matemáticos franceses de primera fila que apoyaran la Revolución y explíquense sus actividades en este sentido.
4. ¿Qué alternativas consideró el Comité Revolucionario de Pesos y Medidas para definir el metro, o unidad de longitud? ¿Qué matemáticos conocidos participaron en este Comité?
5. Menciónense cinco familias de los siglos XVII y XVIII que produjeran varios matemáticos cada una. Para tres de estas familias, explíquense las contribuciones principales del miembro más destacado de dicha familia.
6. Descríbase el texto matemático, de entre los publicados durante la Revolución Francesa, que ejerció una mayor influencia en América.
7. Demuéstrense los dos teoremas de geometría elemental a los que se refieren los diagramas de la figura 22.1.
8. Demuéstrese que el área del triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Utilícese el método de la geometría descriptiva de Monge para dibujar la «planta» y el «alzado» del segmento que va del punto (1, 2, 3) al (4, 1, 7). Calcúlense las longitudes del segmento dado y de cada una de sus proyecciones.
10. Demuéstrese que la longitud de la elipse viene dada por una integral elíptica, utilizando sus ecuaciones paramétricas $x = a \cdot \cos \theta$, $y = b \cdot \operatorname{sen} \theta$.
11. Utilícese la «división larga» para desarrollar la función $\dfrac{1}{1+2x}$ en serie de Taylor hasta el quinto término; hállese, a partir de este desarrollo y sin diferenciación, el valor de la cuarta derivada de la función en el punto $x = 0$.
12. Compruébese la afirmación de Legendre de que $n^2 + n + 17$ es primo para valores naturales de n menores que 17.

13. Utilícese el método de los mínimos cuadrados para hallar los «mejores» valores de x y de y que satisfagan el sistema

$$\begin{aligned} x-y+1&=0\\ 2x-y&=0\\ 3x-2y-2&=0 \end{aligned}$$

14. Hállese $\pi(n)$ para $n=100$ y compárese el resultado con $\dfrac{n}{\ln n-1}$.
15. Compruébese, para $p=11$, que $(p-1)!+1$ es divisible por p, para p primo.
16. Demuéstrese que la integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-K^2x^2)}}$$

se puede reducir a una de las formas de Legendre, por medio de la sustitución $x=\text{sen } t$.

17. Demuéstrese que la fórmula para la probabilidad en el problema de la aguja de Buffon (capítulo 21) puede obtenerse a partir de la de Laplace (véase el texto) haciendo crecer indefinidamente una de las distancias, digamos b.

*18. Demuéstrese que el baricentro de un tetraedro es el punto de corte de las rectas que unen los puntos medios de aristas opuestas.

*19. Demuéstrese el siguiente teorema de Monge: los planos trazados por los puntos medios de las aristas de un tetraedro perpendicularmente a las aristas opuestas, se cortan en un punto que es el punto medio del segmento que une el baricentro y el circuncentro del tetraedro.

*20. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es perpendicular a la recta

$$\begin{aligned} x+2y-2z-6&=0\\ 2z-y+2z&=0 \end{aligned}$$

*21. Hállese la distancia del punto a la recta del ejercicio anterior.

*22. Demuéstrese la fórmula de Lagrange

$$D=\frac{ap+bq+cr-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

para la distancia del punto (p, q, r) al plano $ax+by+cz=d$.

*23. Demuéstrese que la suma de los cuadrados de las áreas de las tres proyecciones de un triángulo sobre tres planos perpendiculares dos a dos es igual al cuadrado del área del triángulo.

*24. Demuéstrese que el volumen del tetraedro de vértices (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), es igual a

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

*25. Complétense los detalles de la demostración de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

*26. Utilícese el método de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el paralelepípedo rectangular de volumen máximo, con una superficie de área dada, es un cubo.

*27. Utilícese el método de variación de las constantes de Lagrange para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + a^2 y = \sec x$$

sabiendo que sen ax y cos ax son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

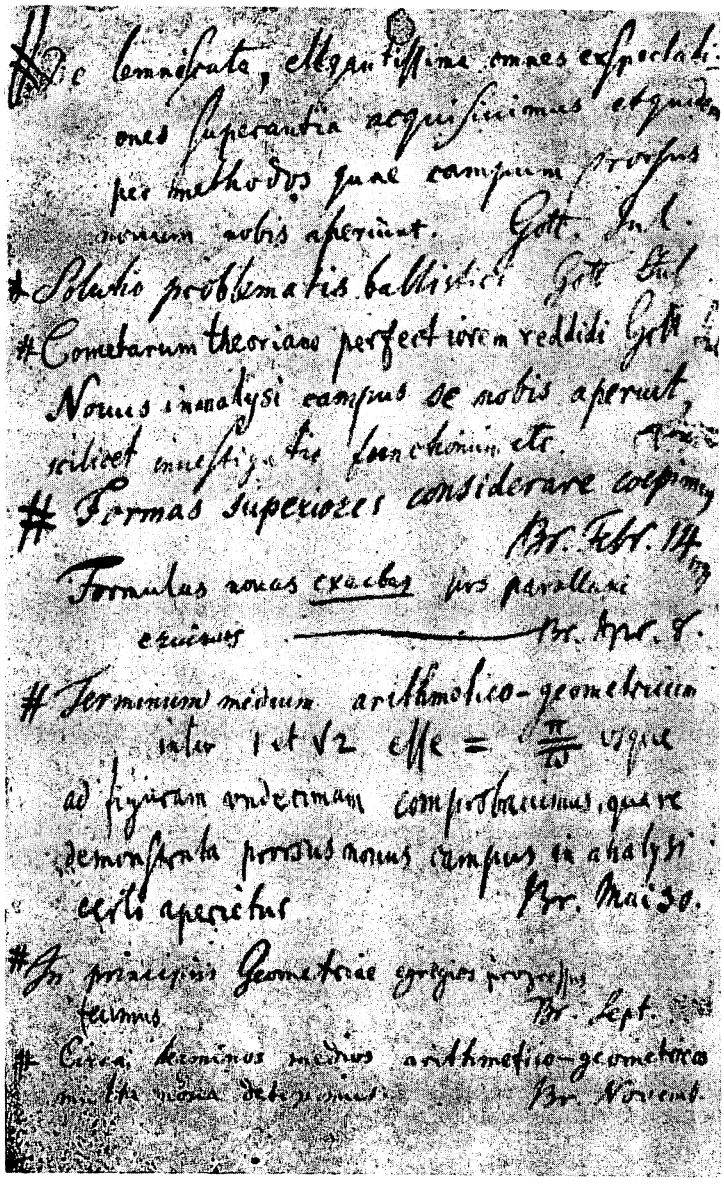
Capítulo XXIII
EL PERIODO DE GAUSS Y CAUCHY

La Matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de la Matemática.

Gauss

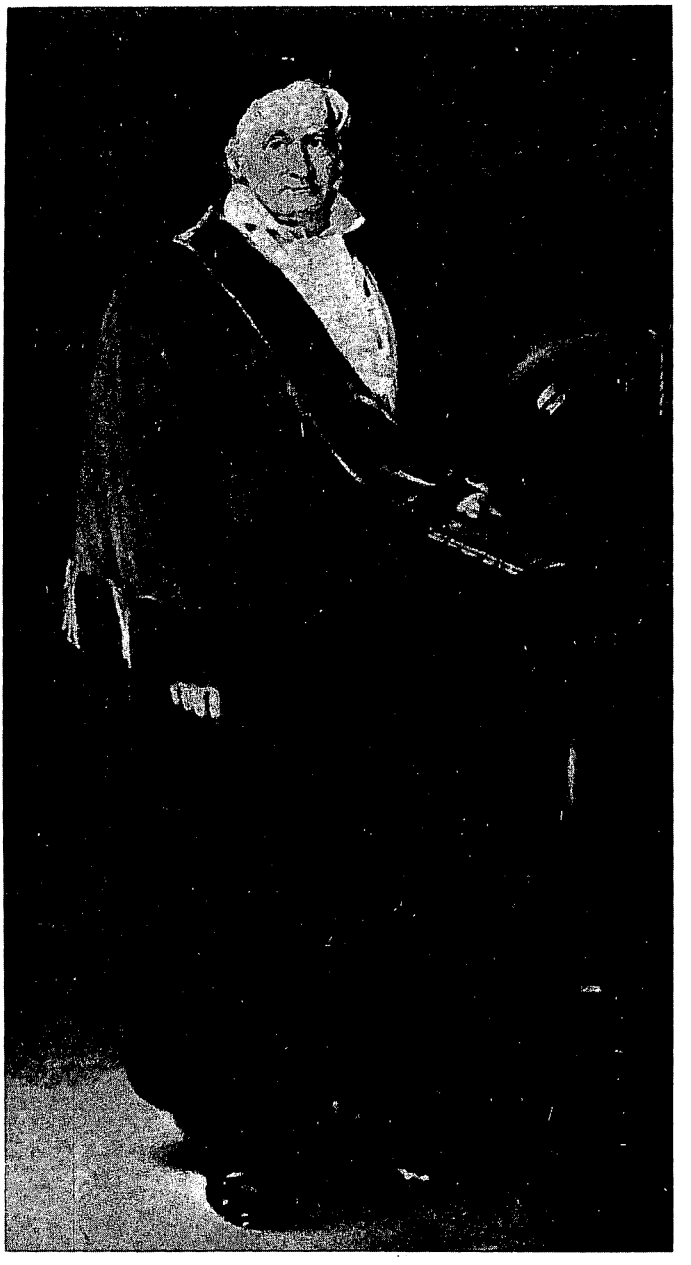
1. Los primeros descubrimientos de Gauss

Los matemáticos más importantes de la época de la Revolución Francesa fueron, casi sin excepción, franceses, pero coincidiendo con los comienzos del siglo XIX Francia tuvo que compartir de nuevo los honores del liderazgo con otros países. El matemático más grande de la primera mitad del siglo XIX, y quizá de todos los tiempos, fue tan decididamente alemán que nunca viajó fuera de Alemania, ni siquiera en lo que llamaríamos de visita. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un verdadero niño prodigio, a diferencia de cualquiera de los matemáticos que hemos estudiado en el capítulo anterior. Su padre era un obrero en Brunswick, obstinado en sus puntos de vista, que intentó evitar que su hijo recibiera una educación adecuada, pero en cambio su madre, que tampoco había recibido ningún tipo de educación, animó siempre a su hijo en sus estudios, y más tarde se mostró muy orgullosa de sus logros, hasta su muerte a la edad de 97 años. De niño asistió Gauss a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con objeto de mantener la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta tarea, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Carl su pizarra sobre la mesa, diciendo: «Ya está»; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5.050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss. El muchachito de diez años había hecho evidentemente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética $1+2+3+\cdots+98+99+100$ asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula $(m+1)\frac{m}{2}$. A los quince años comenzó Gauss en Brunswick su enseñanza media, gracias a la ayuda del duque de Brunswick, y en 1795, gozando siempre de la protección del duque, entró en la Universidad de Gotinga. Gauss estaba entonces indeciso,



Reproducción facsímil de la página 13 del famoso diario de Gauss.

dudando entre hacerse filólogo o matemático, a pesar de que había inventado ya, y justificado, el método de mínimos cuadrados, una década antes de que Legendre publicara el mismo artificio. El 30 de marzo de 1796 se decidió al fin por la matemática, porque ese mismo día, cuando le faltaba aún un mes para cumplir los 19 años, hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2.000 años se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el



Carl Friedrich Gauss. Retrato de cuerpo entero pintado por R. Wimmer y que se encuentra en el Deutsches Museum de Munich (1925).

pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. El crítico día de 1796 que acabamos de mencionar

consiguió Gauss construir, de acuerdo con las normas euclídeas, el polígono regular de 17 lados. Y ese mismo día comenzó a llevar un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos, y el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados.

El 10 de julio de 1796 confiaba Gauss a su diario el descubrimiento de que todo entero positivo es la suma de tres números triangulares como máximo. Este diario, que consta de 19 páginas solamente, es probablemente el más precioso documento de toda la historia de la matemática, en el que están registrados brevemente 146 resultados, el último de los cuales lleva la fecha de 9 de julio de 1814. Por medio de este diario es posible comprobar que Gauss fue el primero en obtener algunos resultados sobre los que más tarde hubo disputas de prioridad, así como, y esto es mucho más importante, seguirle la pista al desarrollo de su genio, dado que algunos de sus pensamientos más originales no se publicaron durante su vida. Dicho sea de paso, su escasa disposición a publicar es comparable únicamente a la de uno de sus rivales modernos en cuanto a fama matemática, Isaac Newton. (El otro, Leonhard Euler, no se le parece en absoluto en este aspecto, como hemos visto.) El diario de Gauss, un pequeño folleto de 19 páginas, permaneció escondido entre los papeles de la familia hasta 1898, en que se descubrió en posesión de un nieto de Gauss en Hamlin. En 1901 se publicó su contenido, encargándose de ello el matemático Felix Klein, en un volumen con el que se celebraba el sesquicentenario de la Real Sociedad Científica de Gotinga[1], y el nieto en cuestión cedió el diario para que se conservase en los archivos de Gauss, que se encuentran principalmente en Brunswick y en Gotinga.

2. La representación gráfica de los números complejos

El sello de Gauss llevaba escrito el lema: *pauca sed matura* («poco pero maduro») y lo cierto es que su mente estaba tan rebosante de ideas originales que no tenía materialmente tiempo de verlas madurar a todas ellas hasta el punto de perfección en que insistía antes de publicarlas. Sin embargo, su descubrimiento decisivo del 30 de marzo de 1796 sí lo anunció públicamente en una revista literaria; siempre estuvo tan orgulloso de este descubrimiento que, a imitación de Arquímedes, antiguo rival en talla matemática, expresó el deseo de que se grabara sobre su tumba un polígono regular de 17 lados. Este deseo no se cumplió nunca porque el obtuso cantero encargado de tallar la lápida se negó en redondo, insistiendo en que la figura resultante no se distinguiría de una circunferencia, pero

[1] Félix Klein, «Gauss' Wissenschaftliches Tagebuch: 1796-1814», en el *Festschrift zur Feier des Hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Berlín, 1901), págs. 1-44. El contenido apareció de nuevo en 1903 en los *Mathematische Annalen*, 57 (1903), págs. 1-34, y, con extensas notas, en Gauss, *Werke* (1917), vol. X, págs. 483-574. Hay una traducción francesa por P. Eymard y J. P. Lafon, «Le journal mathématique de Gauss», en la *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, 9 (1956), págs. 21-51.

al menos en el monumento a Gauss en Brunswick puede verse tallado realmente el egregio polígono[2].

Durante breves períodos de tiempo Gauss abandonaba Gotinga para asistir a la Universidad de Helmstädt, y fue en esta última en la que recibió su doctorado en 1798. La tesis, publicada en Helmstädt en 1799, lleva en latín el aplastante título siguiente: «Nueva Demostración del Teorema Que Afirma Que Toda Función Algebraica Racional y Entera de Una Variable Puede Resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado». Este teorema, al que se referiría Gauss más tarde con el nombre de «teorema fundamental del álgebra», es esencialmente la proposición conocida en Francia como el «teorema de d'Alembert», pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo algunos de Euler y de Lagrange, eran incorrectos. La representación gráfica de los números complejos había sido descubierta ya en 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) y publicada en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798, pero lo cierto es que la obra de Wessel pasó desapercibida prácticamente, y así el plano de los números complejos se suele denominar hoy como «plano de Gauss», a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde. Desde la época de Girard era bien conocido que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta. Wallis había llegado a sugerir incluso que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Y, sin embargo, sorprendentemente nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la obvia etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un número complejo $a+bi$ como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano, al cual estaría asociado dicho número complejo. El cubrir esta simple etapa hizo sentirse a los matemáticos mucho más cómodos con los números imaginarios, ya que ahora podían visualizarse en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa. Ver es creer, bien cierto es, y las viejas ideas acerca de la no existencia de los números imaginarios fueron abandonadas por casi todos los matemáticos[3].

3. El teorema fundamental del álgebra

La tesis doctoral de Gauss venía a demostrar que toda ecuación polinómica $f(x)=0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. No podemos entrar aquí en los detalles de la demostración, pero una ilustración indicará por lo menos las líneas generales que seguían las ideas de Gauss. Vamos a resolver la ecuación $z^2-4i=0$ gráficamente, demostrando para ello que hay un

---

[2] Detalles de la vida de Gauss, más que de su obra, pueden verse en G. Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science: A Study of His Life and Work* (1955). Una exposición más ligera, pero muy agradable de leer puede verse en William L. Schaaf, *Carl Friedrich Gauss* (1964).

[3] Véase Ernest Nagel, «Impossible Numbers», en *Studies in the History of Ideas* (publicada por el Departamento de Filosofía de la Universidad de Columbia), 3 (1935), págs. 427-474, así como Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Leipzig, 1867).

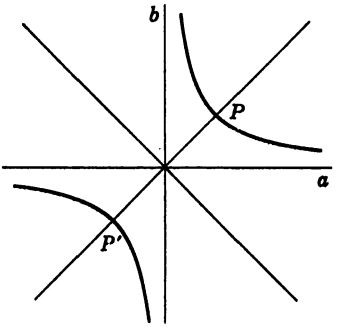


Figura 23.1

valor complejo $z=a+bi$ que satisface la ecuación. Sustituyendo en ella z por $a+bi$ y separando partes reales e imaginarias, nos queda que ha de ser $a^2-b^2=0$ y $ab-2=0$. Interpretando a y b como variables y representando estas dos ecuaciones en un mismo sistema de ejes de coordenadas, en abscisas la parte real a y en ordenadas la parte imaginaria pura b, obtenemos dos curvas: la primera consiste en el par de rectas $a+b=0$ y $a-b=0$, y la segunda es la hipérbola equilátera $ab=2$ (fig. 23.1). Está claro por la representación gráfica que las dos curvas se cortan en un punto P en el primer cuadrante (e, incidentalmente, en otro P' en el tercero). Obsérvese en particular que una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones $\theta=1\pi/4$ y $\theta=3\pi/4$, y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones $\theta=0\pi/4$ y $\theta=2\pi/4$; el punto de intersección está entre las dos direcciones $\theta=0$ y $\theta=\pi/2$. Las coordenadas a y b de este punto de intersección son la parte real e imaginaria del número complejo que es solución de la ecuación $z^2-4i=0$. Si nuestra ecuación polinómica original hubiera sido de tercer grado en vez de segundo grado, habría habido una rama de una de las dos curvas aproximándose a las direcciones $\theta=1\pi/6$ y $\theta=3\pi/6$, y la otra curva se aproximaría a las direcciones $\theta=0\pi/6$ y $\theta=2\pi/6$. Las ramas son continuas en todos los casos, por lo tanto tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de $\theta=0$ a $\theta=\pi/3$. Para una ecuación de grado n habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas $\theta=1\pi/2n$ y $\theta=3\pi/2n$, mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones asintóticas $\theta=0\pi/2n$ y $\theta=2\pi/2n$, y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre $\theta=0$ y $\theta=\pi/n$, y las coordenadas a y b del punto de intersección serán de nuevo las partes real e imaginaria de un número complejo que es una raíz de la ecuación. Vemos pues así que, sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, tiene que tener al menos una raíz compleja. A partir de este resultado se puede demostrar ya fácilmente el teorema de la tesis de Gauss de que un polinomio cualquiera se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos.

La demostración del teorema fundamental del álgebra dada por Gauss en su tesis se basa en parte en consideraciones geométricas, lo que no resultaba del todo satisfactorio. Años más tarde, en 1816, publicó Gauss dos nuevas demostraciones,

así como otra en 1850, pugnando siempre por encontrar una demostración puramente algebraica[4].

4. El álgebra de las congruencias

Dos años solamente después de la publicación de su tesis, publicó Gauss su libro más conocido, un tratado de teoría de números en latín, titulado *Disquisitiones arithmeticae*, dedicado a su protector el duque de Brunswick. Esta famosísima obra[5] es la principal responsable del desarrollo del lenguaje y de las notaciones de la rama de la teoría de números conocida como el álgebra de las congruencias, ejemplo primitivo de trabajo con clases de equivalencia. La exposición se abre con la definición siguiente:

> Si un número a divide a la diferencia entre dos números b y c, entonces b y c se llaman congruentes, y en caso contrario incongruentes, y el número a se llama módulo. Cada uno de los dos números se llama un residuo del otro, en el primer caso, un no residuo en el segundo caso.

La notación que adoptó Gauss es la misma que seguimos usando hoy, $b \equiv c$ (mod. a), y a continuación procedió a construir un álgebra para la relación $\equiv$ análoga al álgebra usual expresada en el lenguaje de la igualdad. Algunas, pero no todas las reglas del álgebra estándares, se pueden aplicar a la nueva situación. Por ejemplo, en el álgebra usual, en el anillo de los números enteros, si $ax = ay$, con $a \neq 0$, entonces se deduce que $x = y$, pero esta ley de cancelación no se verifica para las congruencias, como se ve fácilmente con un contraejemplo: si $a = 3$, $x = 4$ e $y = 7$, se tiene que $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 7$ (mod. 9), pero no es cierto, sin embargo, que $4 \equiv 7$ (mod. 9). El divisor a, para que se pueda cancelar en una congruencia ha de ser primo con el módulo. Por otra parte, si tenemos $x \cdot y = 0$ podemos deducir en álgebra ordinaria que o bien x o y (o ambos) son cero. Que éste no es el caso para congruencias se ve fácilmente del hecho que $6 \cdot 5 \equiv 0$ (mod. 15), pero ni 6 ni 5 es congruente con cero módulo 15. Para que sea válida esta regla para congruencias, el módulo y los factores x e y deben ser primos entre sí. Otro ejemplo: en el álgebra usual la ecuación general de primer grado $ax = b$, con a, b, x, enteros y $a \neq 0$, tiene una solución como máximo. En cambio, una congruencia lineal puede tener varias soluciones distintas, como puede verse del hecho que $x = 1$, $x = 4$ y $x = 7$ son soluciones de la congruencia $6x \equiv 15$ (mod. 9). Sólo si a y m son primos entre sí podemos asegurar que $ax \equiv b$ (mod. m) tendrá una y sólo una solución menor que m. Por otra parte, la relación $\equiv$ tiene las mismas tres propiedades fundamentales de

[4] Las demostraciones dadas por Gauss están reunidas en el vol. III de sus *Werke* (1870-1930). Una traducción al inglés de la segunda demostración puede verse en David Eugene Smith, *Source Book in Mathematics* (1958), págs. 292-306. Hoy se admite generalmente que el teorema fundamental del álgebra depende esencialmente de consideraciones de tipo topológico. Véase sobre ello Hans Zassenhaus, «On the Fundamental Theorem of Algebra», *American Mathematical Monthly*, 74 (1967), págs. 485-497.

[5] En 1966 apareció una traducción al inglés publicada por A. A. Clarke (Yale University Press). Mucho antes había aparecido ya una traducción francesa, en 1807, en París.

reflexividad, simetría y transitividad que la relación $=$, es decir: 1) $a \equiv a$ (mod. m); 2) si $a \equiv b$ (mod. m) entonces $b \equiv a$ (mod. m); 3) si $a \equiv b$ (mod. m) y $b \equiv c$ (mod. m), entonces $a \equiv c$ (mod. m). Es decir, en resumen, tanto $=$ como $\equiv$ son relaciones de equivalencia.

5. La ley de reciprocidad y la frecuencia de los números primos

En varios lugares la obra de Gauss venía a coincidir con la de Legendre, y este último se dejó dominar por una celosa antipatía hacia el más joven y más brillante colega. En las *Disquisitiones*, por ejemplo, aparece la ley de reciprocidad cuadrática que había publicado Legendre un par de años antes. Gauss llamó a esta ley el *Theorema aureum* o la joya de la aritmética; en trabajos posteriores intentó Gauss demostrar teoremas análogos para las congruencias $x^n \equiv p$ (mod. q), con $n = 3$ y 4, pero para estos casos descubrió que era necesario extender el significado del concepto de entero para incluir a todos los llamados «enteros de Gauss», es decir, los números complejos de la forma $a + bi$, con a y b enteros. Los enteros de Gauss forman un dominio de integridad como el de los enteros estándares, pero más general, evidentemente. Los problemas de divisibilidad se hacen aquí más complicados, ya que, por ejemplo, 5 no es primo, sino que es factorizable en el producto de los dos «primos» $1 + 2i$ y $1 - 2i$. De hecho, ningún primo natural de la forma $4n + 1$ es un «primo de Gauss», mientras que los primos naturales de la forma $4n - 1$ siguen siendo primos en el sentido generalizado. En las *Disquisitiones* incluía Gauss el Teorema Fundamental de la Aritmética, uno de los principios básicos que continúa siendo válido en el dominio de integridad de los enteros de Gauss. De hecho, a cualquier dominio de integridad con la propiedad de factorización única se le conoce hoy con el nombre de «dominio de integridad gaussiano». Una de las contribuciones de las *Disquisitiones* fue la de dar una demostración rigurosa del teorema, conocido desde Euclides, de que todo entero positivo mayor que 1 se puede expresar de una y sólo una manera (excepto por el orden de los factores) como un producto de números primos.

No todo lo que descubrió Gauss sobre los números primos aparece en las *Disquisitiones*. En la última página de un ejemplar de una tabla de logaritmos que tenía desde que era un muchacho de 14 años, aparece escrita la siguiente críptica expresión en alemán

$$\text{Primzahlen unter } a(=\infty)\frac{a}{1a}$$

Esta es una formulación un tanto esotérica del famoso teorema de los números primos: el número de números primos menores que a tiende asintóticamente al cociente $\dfrac{a}{\ln a}$ cuando a crece indefinidamente[6].

[6] Véase Hans Reichardt (ed.), *C. F. Gauss. Leben und Werk* (1960).

Legendre había estado muy cerca de anticipar este teorema, como hemos visto, pero lo sorprendente es que si Gauss escribió esto, como suponemos que en efecto lo hizo, se reservó este bello resultado para sí mismo. No sabemos si tenía o no una demostración del teorema, y ni siquiera sabemos cuándo fue escrita la fórmula anterior. La distribución de los primos ha ejercico una verdadera fascinación sobre muchos matemáticos. En 1845, cuando Gauss era ya viejo, un profesor de París, Joseph L. F. Bertrand (1822-1900), conjeturó que si $n>3$ hay siempre al menos un número primo entre n y $2n$ (o, más exactamente, $2n-2$) inclusive. Esta conjetura, conocida como la «conjetura de Bertrand», fue demostrada en 1850 por Pafnuti Tchebycheff (1821-1894) (o Chebychew o Chebichew o Tschebytschew, según las traducciones) de la Universidad de San Petersburgo. Tchebycheff era un rival de Lobachevsky en lo que se refiere al rango de primer matemático ruso de la época, y llegó a ser miembro extranjero del Institut de France y de la Royal Society de Londres. Tchebycheff, desconociendo evidentemente la obra de Gauss sobre los números primos, consiguió demostrar que si $\pi(n)\cdot\dfrac{\ln n}{n}$ tiende a un límite cuando n crece indefinidamente, entonces este límite tiene que ser 1, pero no pudo demostrar la existencia del límite. Hasta dos años después de la muerte de Tchebycheff en 1894 no se conoció ninguna demostración, pero en 1896 dos matemáticos, trabajando independientemente uno del otro, consiguieron sendas demostraciones el mismo año. Estos dos matemáticos coincidieron también casualmente en alcanzar ambos una edad venerable. Uno de ellos fue el matemático belga C. J. de la Vallée-Poussin (1866-1962), que vivió casi 96 años, y el otro fue el francés Jacques Hadamard (1865-1963), que murió poco antes de cumplir los 98 años.

6. Los polígonos regulares constructibles

Los problemas relativos al número y distribución de los números primos han fascinado, como hemos dicho, a muchos de los matemáticos más importantes de la historia, desde Euclides o antes hasta nuestros días. Un teorema que podemos considerar como un profundo y difícil corolario al teorema de Euclides sobre la infinitud de los primos fue el que demostró un amigo de Gauss que le sucedió en Gotinga en 1855. Nos referimos a Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), el hombre que hizo más que ningún otro por extender las *Disquisitiones*. El teorema de Dirichlet afirma que no sólo el número de los primos es infinito, sino que si consideramos solamente los números naturales de una progresión aritmética indefinida

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots,\ a+nb,\ \ldots$$

en la que a y b son primos entre sí, entonces incluso en este subconjunto relativamente «diseminado» de números naturales hay aún infinitos primos. La demostración que dio Dirichlet exigía complicadas herramientas del análisis, campo en el que el nombre de Dirichlet ha quedado asociado también al criterio llamado de Dirichlet para la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Entre otras contribuciones de Dirichlet a la teoría de números está la primera demostración del teorema conocido como conjetura de Bertrand, del que ya hemos hablado. No podemos entrar aquí en estas sutilezas cada vez más sofisticadas de la teoría de números del siglo XIX, pero sí tenemos que subrayar que el teorema de Dirichlet venía a mostrar que el dominio discreto de la teoría de números no parecía poderse estudiar aislado de la rama de la matemática que trabaja con variables continuas, es decir, que la teoría de números parecía exigir la ayuda del análisis. Gauss mismo, en sus *Disquisitiones*, había dado ya un sorprendente ejemplo del hecho que las propiedades de los números primos se infiltran de las maneras más inesperadas incluso en el dominio de la geometría.

Hacia el final de las *Disquisitiones* incluye Gauss el primer descubrimiento matemático importante que había hecho, es decir, la construcción del polígono regular de 17 lados, llevando el tema a su final lógico al demostrar cuáles de los infinitos polígonos regulares posibles se pueden construir con regla y compás y cuáles no. Los teoremas generales, tales como el que demuestra aquí Gauss, son siempre de una importancia teórica mucho mayor que un caso particular, por espectacular que éste pueda ser. Recordemos que Fermat creía que todos los números de forma $2^{2^n}+1$ eran primos, conjetura que Euler demostró ser incorrecta. El número $2^{2^2}+1=17$ sí es primo, lo mismo que lo son $2^{2^3}+1=257$ y $2^{2^4}+1=65.537$. Gauss había demostrado ya que el polígono de 17 lados es constructible, y por lo tanto se planteaba también de una manera natural la cuestión de si el polígono regular de 257 o de 65.537 lados se pueden construir por métodos euclídeos. Gauss contesta a esta pregunta en sentido afirmativo en las *Disquisitiones*, al demostrar que un polígono regular de N lados puede construirse con regla y compás si y sólo si el número N es de la forma $N=2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_r$, con $m>0$ y p_1, p_2, ..., p_r, primos de Fermat distintos. Quedaba aún un aspecto del problema al que Gauss no dio respuesta, y que todavía no ha sido resuelto hasta hoy. Se trata de la pregunta ¿es finito o infinito el número de primos de Fermat? Para $n=0$, 1, 2, 3 y 4 los números de Fermat son primos, mientras que para $n=5$, 6, 7, 8 y 9 se sabe que *no son* primos, y parece posible al menos que haya cinco y sólo cinco polígonos regulares constructibles de un número primo de lados, dos de ellos conocidos ya en la antigüedad y los tres que descubrió Gauss. Un amigo a quien Gauss admiraba mucho, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), profesor de matemáticas en Berlín, añadió una nueva conjetura sobre números primos a la teoría de números, al aventurar la hipótesis, no comprobada hasta hoy, de que todos los números de la forma 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$, $2^{2^{2^{2^2}}}+1$, etc., son primos. Se le atribuye a Gauss la afirmación de que «ha habido sólo tres matemáticos de excepcional importancia: Arquímedes, Newton y Eisenstein». La cuestión de si Eisenstein, en el tiempo de duración de una vida normal, hubiera llegado a cumplir con predicción tan entusiasta, queda pendiente de conjetura, puesto que este joven matemático murió antes de cumplir los 30 años, siendo aún «Privatdozent».

7. La astronomía y la ley de mínimos cuadrados

Gauss había planeado las *Disquisitiones* como una obra en dos volúmenes, pero lo cierto es que nunca llegó a escribir el segundo volumen. En una ocasión se refirió

a la matemática como la reina de las ciencias, y a la aritmética (es decir, la teoría de números) como la reina de la matemática, pero Gauss abandonó prácticamente a su Reina de la Matemática durante los primeros años del siglo XIX, reclamada su atención por tantos otros temas interesantes. Más tarde se lamentaba de haber abandonado su «primer amor». Entre los otros campos que cautivaron su atención tuvo un papel destacado la astronomía, a la que se vio conducido de una manera casi accidental. Exactamente el primer día del siglo XIX se descubrió un nuevo planeta o asteroide, al que se le puso por nombre Ceres, y que al cabo de unas semanas se perdió de vista de nuevo, debido a su pequeño tamaño. Gauss gozaba de una facilidad excepcional para el cálculo numérico, a la que venía a unirse la ventaja de su método de los mínimos cuadrados, y con estas armas se enfrentó al verdadero desafío que suponía el calcular, a partir de las pocas observaciones registradas del asteroide, la órbita que recorría en su movimiento. Gauss inventó un método para el cálculo de órbitas de cuerpos celestes a partir de un número limitado de observaciones, conocido como «método de Gauss», que aún se utiliza para seguir la trayectoria de los satélites artificiales. El resultado de los cálculos de Gauss fue un éxito resonante: a finales de año volvió a encontrarse el asteroide casi exactamente en la posición que indicaban dichos cálculos. Desde este momento la astronomía y la estadística contaron entre los intereses más serios de Gauss, que dedicó gran parte de los siguientes 20 años a cálculos astronómicos. Esta actividad está en contraste con la opinión expresada por Gauss de que «todas las medidas del mundo no equivalen a un solo teorema que produzca un avance importante en nuestra ciencia, la más grande de todas». Sin embargo, a partir de entonces su fama en astronomía quedó tan sólidamente establecida como en matemáticas; como consecuencia de ello fue nombrado director del Observatorio Astronómico de Gotinga en 1807, puesto que ocupó durante unos 40 años. Gauss podría muy bien haber ocupado una cátedra universitaria de matemáticas, pero es probable que eligiera su cargo en el observatorio menos por preferencia por la astronomía que por aversión a la enseñanza. Gauss disfrutaba ayudando a unos pocos discípulos brillantes y entusiastas, pero la enseñanza rutinaria y elemental de la clase parece haberle desagradado[7].

8. Funciones elípticas

El puesto de Gauss en el observatorio no le impidió, sin embargo, continuar haciendo importantes contribuciones a la matemática. En 1811 informaba a un astrónomo amigo, F. W. Bessel (1784-1846), de un descubrimiento que había hecho en lo que pronto se iba a convertir en un campo de investigación nuevo en las manos del matemático francés más importante de la época, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), y que hoy lleva su nombre. La teoría de funciones de una variable real la había desarrollado Lagrange, pero la teoría de funciones de una

[7] Para un excelente resumen general de los puntos de vista de Gauss véase el capítulo sobre «The Prince of Mathematicians», en *Men of Mathematics* por E. T. Bell (1937). Este capítulo aparece reproducido en James Newman, *The World of Mathematics* (New York, Simon and Schuster, 1956, 4 vols.).

variable compleja esperaba aún los trabajos de Cauchy. Sin embargo, Gauss se dio cuenta de un teorema de una importancia fundamental en este territorio aún no explorado. Se trata del hecho siguiente: si en el plano complejo o de Gauss dibujamos una curva cerrada simple, y si una función $f(z)$ de la variable compleja $z=x+iy$ es analítica (es decir, tiene derivada) en todo punto de la curva y en todo punto interior, entonces la integral de línea de $f(z)$ tomada a lo largo de la curva es cero.

Los papeles no publicados de Gauss pendían como una auténtica espada de Damocles sobre la matemática de la primera mitad del siglo XIX. Cuando algún otro matemático anunciaba un nuevo resultado importante, ocurría muy a menudo que Gauss había tenido ya la idea anteriormente, pero no se había molestado en publicarla. Entre los ejemplos más sorprendentes de esta situación está el del descubrimiento de las funciones elípticas, descubrimiento en el que estuvieron mezclados cuatro matemáticos de primera fila. Uno de ellos era Legendre, desde luego, que había estado casi 40 años estudiando las integrales elípticas de una manera casi aislada. Legendre desarrolló una gran cantidad de fórmulas en este contexto, algunas de las cuales recordaban en cierto sentido las relaciones entre las funciones trigonométricas inversas, cierto número de las cuales las había conocido ya mucho antes Euler. Este hecho no es sorprendente, dado que la integral elíptica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)\,(1-x^2)}}$$

incluye la

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

como caso particular para $K=0$. Sin embargo, quedaba para Gauss y dos de sus contemporáneos más jóvenes el mérito de aprovechar de una manera completa las ventajas de un punto de vista que facilita enormemente el estudio de las integrales elípticas. Si escribimos la integral

$$u=\int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

como $u=\text{arcsen } v$, entonces u viene expresada como función de la variable independiente v (puesto que x es la variable ligada de integración), pero resulta más ventajoso invertir los papeles de u y v eligiendo u como variable independiente. En este caso tendremos $v=f(u)$ o, en el lenguaje trigonométrico usual, $v=\text{sen } u$. Esta función $v=\text{sen } u$ es mucho más cómoda de manejar y tiene además una notable propiedad que $u=\text{arcsen } v$ no tiene: es una función periódica. Los papeles privados de Gauss muestran que quizá tan pronto como hacia el 1800 había descubierto ya la doble periodicidad de las funciones elípticas (o «lemniscáticas»). Sin embargo, hasta el 1827-1828 no fue redescubierta esta notable propiedad por uno de los

matemáticos más brillantes de todos los tiempos, Niels Henrik Abel (1802-1829), en una memoria publicada en el *Journal* de Crelle. El joven Abel murió cuando sólo tenía 26 años, dejando tras sí varios resultados muy profundos en álgebra y teoría de funciones, algunos de los cuales vamos a presentar a continuación, antes de volver a Gauss.

9. Vida y obra de Abel

La vida de Abel es un ejemplo dramático de lo estrechamente relacionadas que pueden llegar a estar la pobreza y la tragedia. Niels Henrik nació en una familia muy numerosa, hijo del pastor protestante del pueblecillo de Findö en Noruega. A los dieciséis años su maestro le aconsejó leer los grandes libros de los matemáticos más eminentes, incluido el *Disquisitiones* de Gauss. En sus lecturas Abel se dio cuenta de que Euler sólo había demostrado el teorema binomial para potencias racionales, y cubrió el hueco dando una demostración válida para el caso general. Cuando Abel tenía 18 años murió su padre, y gran parte de la responsabilidad de la familia cayó sobre sus espaldas. No obstante, al año siguiente hizo un descubrimiento matemático notable. Desde la resolución de la cúbica y la cuártica en el siglo XVI, los matemáticos no habían cesado de perseguir la resolución de la quíntica. Abel también creyó, al principio, que había dado con una solución, pero en 1824 publicó una memoria titulada «Sobre la Resolución Algebraica de Ecuaciones», en la que llegaba a la conclusión opuesta, dando la primera demostración de que no es posible ninguna solución y poniendo así punto final a un largo camino de investigación. No puede haber ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas sobre los coeficientes de una ecuación polinómica, que nos dé las raíces de la ecuación, si el grado del polinomio es mayor que 4. Una demostración anterior de la insolubilidad de la quíntica, menos satisfactoria y que no fue tomada en consideración en general, fue la que publicó Paolo Ruffini (1765-1822) en 1799, por lo que el resultado se suele llamar «teorema de Abel-Ruffini».

La demostración de la imposibilidad de resolver la quíntica, uno de los teoremas más famosos de la matemática, la dio Abel cuando tenía sólo 19 años, y, sin embargo, en 1826, cuando visitó a Legendre, a Cauchy y a otros matemáticos en París, aún no se le había ofrecido ningún puesto académico adecuado a su capacidad. Durante esta visita a París escribía Abel a un amigo: «Cualquier principiante tiene grandes dificultades para hacerse notar aquí. Yo mismo acabo de terminar un extenso tratado sobre una cierta clase de funciones trascendentes, ... pero Mr. Cauchy apenas se ha dignado echarle un vistazo.» Por esta época, y en contraste con el siglo XVIII, la mayor parte de los puestos de trabajo para matemáticos lo eran ya de profesores en universidades, y Abel tenía la esperanza de conseguir uno de ellos. Con este objeto le dejó la memoria a Cauchy para que emitiese su opinión sobre ella. Este trabajo contenía resultados nuevos de una generalidad extraordinaria, pero Cauchy no tardó en perderlo (con celo digno de mejor causa), con el resultado de que cuando apareció impreso era ya demasiado tarde. Abel murió en 1829 de tuberculosis, enfermedad adquirida según se supone

debido a su pobreza y a sus responsabilidades para sostener a la familia que dependía de él. Dramáticamente, dos días después de su muerte le llegaba una carta en la que se le informaba que iba a ser nombrado profesor de Matemáticas en la universidad de Berlín, puesto conseguido para él por Crelle. El mismo año le escribía a Legendre el matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) para preguntar por la memoria que Abel había dejado en manos de Cauchy, debido a que le habían llegado a Jacobi vagas noticias de que tenía que ver con su importante descubrimiento. En vista de cómo se ponían las cosas, Cauchy buscó y encontró de nuevo el manuscrito, que Legendre describía más tarde como «un monumento más duradero que si fuera de bronce», y en 1841 fue publicado al fin por el Institut de France entre las memorias presentadas por extranjeros. Este trabajo contenía una generalización importante de la obra de Legendre sobre integrales elípticas. Si consideramos la integral

$$u=\int_0^v \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)\,(1-x^2)}}$$

entonces u es una función de v, $u=f(v)$, cuyas propiedades había estudiado Legendre de una manera casi exhaustiva en su tratado sobre integrales elípticas. De lo que no se dio cuenta Legendre, pero sí vieron en cambio con claridad Gauss, Abel y Jacobi, era el hecho de que invirtiendo la relación funcional entre u y v podemos obtener una función más bella y mucho más útil $v=f(u)$. Esta función, que se suele representar por $v=sn\ u$, y que se lee «v igual al seno amplitud de u», junto con otras definidas de una manera muy parecida, reciben el nombre de funciones elípticas[8].

La propiedad más sorprendente de estas nuevas funciones trascendentes de orden superior era, como vieron sus tres descubridores independientes, que el campo complejo tienen una *doble periodicidad*, es decir, que hay dos números complejos m y n tales que $v=f(u)=f(u+m)=f(u+n)$, cualquiera que sea u. Mientras que las funciones trigonométricas tienen solamente un período real (un período de 2π) y la función exponencial $y=e^x$ tiene sólo un período imaginario ($2\pi i$), las funciones elípticas tienen dos períodos distintos. Jacobi quedó tan impresionado por la simplicidad conseguida mediante una sencilla inversión de la relación funcional en las integrales elípticas, que desde entonces consideró el consejo «debes invertir siempre» como el verdadero secreto del éxito en la matemática.

La cuestión de la prioridad con respecto al descubrimiento de la doble periodicidad no es fácil de zanjar. El clásico tratado de Jacobi *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* apareció en 1829, el año de la muerte de Abel, y la obra de Abel estaba terminada ya en 1827-1828. Gauss, sin embargo, parece haber sido el primero, con gran diferencia, en hacer el descubrimiento, descubrimiento

[8] Se ha producido una cierta confusión histórica debido al hecho de que Legendre utilizó el nombre de «fonctions elliptiques» en el título de su tratado sobre integrales elípticas. Sin embargo, la frase tal como la usa Legendre se refiere a las integrales elípticas, y no a lo que conocemos hoy como funciones elípticas.

que había permanecido dormido entre sus papeles durante un cuarto de siglo hasta que Abel y Jacobi dieron con él de nuevo. A Jacobi corresponde el mérito del descubrimiento de varios teoremas fundamentales relativos a las funciones elípticas; en 1834 demostró que si una función univalente de una variable es doblemente periódica, entonces la razón de los períodos no puede ser real, así como que es imposible para una función univalente de una sola variable el tener más de dos períodos distintos. A él le debemos también el estudio de las llamadas «funciones theta de Jacobi», una clase de funciones enteras cuasi-doblemente periódicas de las que las funciones elípticas son cocientes.

10. La teoría de determinantes

La memoria de Abel, entregada desgraciadamente al menos indicado para recibirla, contenía también las sugerencias esenciales de algo incluso más general que las funciones elípticas. Si en lugar de una integral elíptica consideramos una integral de la forma

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado posiblemente mayor que 4, e invertimos de nuevo las relaciones entre u y v para obtener la función $v = f(u)$, esta función es un caso especial de lo que se conoce como una «función abeliana». No obstante, Jacobi fue el primero que demostró en 1832 que dicha inversión puede efectuarse no sólo en el caso de una única variable, sino para funciones de varias variables.

El nombre de Abel ha quedado perpetuado también asociado al de «grupo abeliano», con el que se designa a un grupo conmutativo. El nombre de Jacobi también es conocido hoy, pero principalmente relacionado con algo completamente distinto. La historia de la teoría de determinantes es una historia singularmente accidentada, en la que han ido apareciendo esporádicamente ciertos indicios de la teoría en la antigua China, en algunos trabajos de Leibniz, en una regla de Cramer y en algunos resultados de Lagrange con propiedades de simetría. Sin embargo, hasta el siglo XIX no tuvo lugar un desarrollo continuo, cuyos comienzos se debieron en gran medida, al menos en la Europa continental, a Cauchy y a Jacobi. Esta es una de las pocas ramas de la matemática en la que Gauss apenas jugó ningún papel, aunque sí fue de la terminología utilizada por Gauss en un contexto algo diferente, de donde derivó Cauchy el nombre de «determinante» para lo que describía como una clase de funciones simétricas alternadas, tales como la $a_1 b_2 - b_1 a_2$. Podría muy bien fijarse el origen de la historia definitiva de la teoría de determinantes en 1812, cuando Cauchy leyó ante el Institut una larga memoria sobre el tema[9], aunque al hacerlo así cometamos una cierta injusticia con algunos

[9] Durante el mismo año se leyó también en el Institut otra memoria más breve y menos importante, escrita por Binet. Para una exposición detallada de estas y otras obras sobre los determinantes, véase Thomas Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. Los cuatro primeros volúmenes de esta obra, que cubren el desarrollo de la teoría hasta 1900, pueden encontrarse reeditados por Dover, New York, 1960.

trabajos pioneros de Laplace y de Vandermonde tan tempranos como del año 1772. Cauchy era en 1812 un ingeniero militar de «Ponts et Chaussées». Había nacido en París pocas semanas después de la caída de la Bastilla, y había estudiado en la École Polytechnique, donde tanto Lagrange como Laplace se habían interesado por sus progresos; incidentalmente, Cauchy fue quien ocupó el sillón de Monge en la Academia cuando fueron expulsados de ella Monge y Carnot en la restauración de 1816. Al mismo tiempo Cauchy fue nombrado profesor de la École Polytechnique, hasta que, con la revolución de 1830, se produjo un nuevo giro político. Cauchy fue durante toda su vida un devoto católico y un reaccionario convencido, y así salió vigorosamente en defensa de la Orden de los Jesuitas, que muchos años antes había atacado ya d'Alembert, y cuando «su rey» Charles X tuvo que exiliarse, Cauchy abandonó también París, para no regresar hasta 1838. Sin embargo, independientemente de donde se encontrase, fuera en Turín o en Praga, o bajo qué gobierno, Cauchy continuó produciendo tal corriente de libros y de memorias que sólo Euler lo supera en la extensión de su obra. Pero mientras que Euler se había mostrado dispuesto siempre a escribir, utilizando una lógica más que discutible, sobre todos los aspectos prácticamente de la matemática, tanto pura como aplicada, Cauchy seguía en la línea de la tradición de Lagrange, en su preferencia por la matemática pura desarrollada de una manera elegante y prestando la debida atención a las demostraciones rigurosas de los teoremas. Su artículo de 1812 sobre los determinantes, al que seguirían muchos otros sobre el mismo tema, estaba en la línea de esta tradición, al poner especial énfasis en las simetrías de notación que abundan en él.

En la exposición pedagógica de la teoría de determinantes, hoy se acostumbra comenzar con una distribución cuadrada de números, para después asociarle como significado un valor numérico por medio de un desarrollo expresado en términos de transposiciones o permutaciones. Cauchy, en cambio, hace lo contrario en su memoria; comienza por los n elementos o números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, y forma el producto de ellos por todas las diferencias posibles entre dos de ellos, es decir, $a_1a_2a_3 \ldots a_n(a_2-a_1)\,(a_3-a_1) \ldots (a_n-a_1)\,(a_3-a_2)\,(a_4-a_2) \ldots (a_n-a_2) \ldots (a_n-a_{n-1})$. A continuación define el determinante correspondiente como la expresión obtenida cambiando en el resultado anterior toda potencia indicada por un segundo subíndice, de manera que a_r^s se convierte en $a_{r.s}$; la expresión así obtenida la representa Cauchy por $S(\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3}\cdots a_{n.n})$ y ordena las n^2 cantidades diferentes en este determinante en una distribución cuadrada prácticamente idéntica a la que utilizamos hoy:

$$
\begin{array}{l}
a_{1.1},\ a_{1.2},\ a_{1.3},\ \ldots a_{1.n} \\
a_{2.1},\ a_{2.2},\ a_{2.3},\ldots a_{2.n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n.1},\ a_{n.2},\ a_{n.3},\ldots a_{n.n}
\end{array}
$$

Las n^2 cantidades del determinante así ordenadas forman «un sistema simétrico de orden n», según lo denomina Cauchy. Define también como «términos conjugados» las parejas de elementos con los mismos subíndices pero en orden

inverso, y a los términos autoconjugados los llama «términos principales»; al producto de los términos principales, es decir, a los que forman lo que nosotros llamamos la diagonal principal, lo denomina «producto principal». Más adelante, en la misma memoria, da Cauchy otras reglas para determinar el signo de un término en el desarrollo, utilizando substituciones circulares.

La larga memoria de 1812 de Cauchy, con sus 84 páginas, no fue, como hemos dicho ya, su única obra sobre el tema de los determinantes; a partir de entonces encontró muchas oportunidades de utilizarlos en gran diversidad de ocasiones. En otro trabajo de 1815 sobre propagación de ondas, aplicó el lenguaje de los determinantes a un problema geométrico y también a un problema físico. Cauchy afirmaba que si A, B y C son las longitudes de las tres aristas de un paralelepípedo, y si las proyecciones de estas aristas sobre los ejes de coordenadas rectangulares x, y, z, son respectivamente

$$A_1,\ B_1,\ C_1$$
$$A_2,\ B_2,\ C_2$$
$$A_3,\ B_3,\ C_3$$

entonces el volumen del paralelepípedo será $A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = \mathrm{S}(\pm A_1B_2C_3)$. En la misma memoria, y en conexión con la propagación de las ondas, aplica su notación de determinantes a derivadas parciales, reemplazando una condición que requería dos líneas para escribirla desarrollada, por la simple expresión abreviada

$$S\left(\pm \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc}\right) = 1$$

El término de la izquierda de esta igualdad es obviamente lo que nosotros llamamos el «jacobiano» de x, y, z, con respecto a a, b, c. El nombre de Jacobi ha quedado asociado a los determinantes funcionales de esta forma, no porque él fuera el primero en usarlos, sino porque fue un constructor de algoritmos que se mostró particularmente convencido de las grandes posibilidades inherentes en la notación de los determinantes, pero lo cierto es que hasta 1829 no usó Jacobi por primera vez el tipo de determinante funcional que hoy lleva su nombre.

11. Jacobianos

Los años de infancia y juventud de Jacobi fueron, en cierto sentido, la antítesis de los de Abel, debido a que el padre de Jacobi era un próspero banquero cuyos hijos nunca sintieron la angustia de la necesidad. C. G. J. Jacobi era el segundo hijo en la familia y recibió una educación esmerada en la Universidad de Berlín, especializándose en filología y matemáticas. Al igual que Gauss, se decidió al fin por la segunda, pero, a diferencia de él, Jacobi era un maestro nato que disfrutaba

enseñando a otros. Los resultados más famosos de Jacobi como investigador fueron los que obtuvo en el campo de las funciones elípticas, publicados en 1829 y que le valieron los elogios de Legendre. Por medio de este nuevo análisis volvería a demostrar más tarde Jacobi el teorema de los cuatro cuadrados de Fermat y de Lagrange. En 1829 publicó también Jacobi un artículo en el que hacía un uso sistemático y general de los determinantes jacobianos, expresándolos de una manera mucho más moderna que como había hecho Cauchy:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\

científicos, pero ninguno de ellos dedicado principalmente a la matemática seria. La iniciativa para la creación de revistas matemáticas la tomó la École Polytechnique al comenzar a publicar su *Journal.* Poco después, en 1810, se empezó a publicar la primera revista matemática fundada privadamente; se trataba de los *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, editada por Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859), oficial artillero y *ancien élève* de la École Polytechnique. Gergonne era un matemático muy competente y contribuyó a sus *Annales* con numerosos artículos, pero estos artículos los estudiaremos en el capítulo siguiente. En Alemania comenzó a publicarse en 1826 una revista parecida a los *Annales* de Gergonne, y que alcanzó un éxito aún mayor, por August Leopold Crelle (1780-1855), con el título de *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Una vez más el editor era en principio un ingeniero, pero los artículos publicados se inclinaban de una manera tan abrumadora en la dirección de la matemática pura (*reine*) (especialmente los escritos por Abel, de quien aparecieron cinco nada menos en el primer volumen) que no faltaron quienes opinaran que el título sería más correcto si las dos palabras alemanas *und angewandte* («y aplicada») se sustituyeran por la palabra única *unangewandte* («inaplicada» o inaplicable). Los *Annales* de Gergonne tuvieron una vida corta, pero la laguna producida por su desaparición volvió a cerrarse en 1836 por otra revista francesa análoga a la de Crelle tanto en sus motivaciones como en el mismísimo título: el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, fundada y editada por Joseph Liouville (1809-1882). Liouville fue un matemático muy activo en la investigación, cuya obra la estudiaremos en el capítulo relativo a la aritmetización del análisis. Los editores de estos dos *Journals*, el francés y el alemán, han cambiado a menudo desde aquella época, naturalmente, pero a estas dos prestigiosas revistas, que han seguido publicándose hasta hoy, aún se las suele conocer en el argot usual entre matemáticos como el *Journal de Crelle* y el *Journal de Liouville.* A estas dos venerables revistas se ha unido, como se sabe, una verdadera avalancha de otras más recientes, especialmente durante los últimos cien años, de las que algunas son los órganos de expresión de organizaciones matemáticas. Antes de 1865 se había fundado ya gran número de sociedades científicas, pero no había ninguna organización a gran escala dedicada principalmente a la matemática, hasta que en ese mismo año se fundó la London Mathematical Society, que comenzó a publicar inmediatamente sus *Proceedings.* Desde entonces casi todas las naciones importantes han llegado a poder jactarse de tener una o más organizaciones matemáticas dentro de sus fronteras, algunas de las cuales publicando varias revistas. La publicación de investigación matemática ha llegado a ser hoy tan desmesurada que un único volumen de una revista dedicada exclusivamente a recensiones, tal como el *Mathematical Reviews*, patrocinada por la American Mathematical Society (fundada en 1888) es varias veces más grueso que los correspondientes volúmenes de los *Journals* de *Crelle* y de *Liouville* juntos[10].

[10] Quien esté interesado en las fechas de fundación de algunas de las más importantes organizaciones matemáticas, puede ver el libro de George Sarton *The Study of the History of Mathematics* (1936), págs. 62.

13. La teoría de funciones de variable compleja

A veces se dice de Gauss que fue el último matemático que conoció toda la matemática de su tiempo. Una generalización como ésta corre grave riesgo de ser inexacta, y también se ha aplicado, de hecho, a algunos matemáticos posteriores, pero sí sirve en nuestro caso concreto para subrayar la gran amplitud de intereses que mostró Gauss. En 1809 publicó una exposición de sus métodos astronómicos en un libro con el título de *Theoria motus corporum coelestium*, donde se refiere a su descubrimiento del principio de mínimos cuadrados. Legendre creía haber sido el único inventor de este principio, y prácticamente llegó a acusar a Gauss de plagio, compartiendo su indignación con Jacobi. Nosotros sabemos hoy que Gauss tenía razón en atribuirse la prioridad del descubrimiento, pero uno no puede menos que pensar que hubiera sido deseable que publicara sus descubrimientos más puntualmente o que fuera más comprensivo con los que hicieron más tarde los mismos descubrimientos, al comunicar los suyos. Gauss, lo mismo que Newton, intentaba ser escrupulosamente justo con los demás, pero a veces se mostraba muy poco ecuánime con la obra de otros, especialmente con la de Cauchy, su más próximo rival en talla matemática, y a cuya obra no se refirió Gauss ni una sola vez en su vida.

Cauchy era completamente distinto a Gauss en un aspecto concreto: tan pronto como tenía algo terminado lo enviaba a publicar. Quizá sea ésta una de las razones de que la característica principal de la matemática del siglo XIX, la de la introducción del rigor, se atribuya más bien a Cauchy que a Gauss, a pesar del alto nivel de precisión lógica que se impuso a sí mismo Gauss. Posiblemente también tuvo gran importancia en este sentido la tradición pedagógica de la École Polytecnique, puesto que Cauchy, a quien le gustaba enseñar, tenía mucho más de pedagogo que Gauss, que lo detestaba. Gauss tenía escritos aquí y allá, en su diario o en notas, esbozos de teoremas sobre funciones de variable compleja, pero era Cauchy quien llenaba las páginas del *Journal* de la École Polytechnique y las *Comptes Rendus* de la Académie des Sciences de memorias cada vez más largas. Las había sobre una gran variedad de temas, pero especialmente sobre la teoría de funciones de variable compleja, rama de la matemática de la que podemos considerar a Cauchy, desde 1814 en adelante, como el verdadero fundador. En 1806, Jean Robert Argand (1768-1822), de Ginebra, había publicado una exposición de la representación gráfica de los números complejos y, a pesar de que, al principio, esta obra pasó casi tan desapercibida como la de Wessel, a finales de la segunda década del siglo XIX casi toda Europa estaba ya familiarizada, gracias a Cauchy principalmente, no sólo con la representación de Wessel-Argand-Gauss para los números complejos, sino también con las propiedades fundamentales de las funciones de variable compleja. Durante el siglo XVIII se habían presentado ocasionalmente problemas sobre variables complejas con Euler y d'Alembert, en conexión con problemas físicos, pero a partir de ahora se iban a convertir en una parte de la matemática pura. Dado que ya se necesitan dos dimensiones para representar gráficamente la variable independiente, se necesitarían cuatro dimensiones para representar gráficamente una relación funcional entre dos variables complejas $w=f(z)$. Necesariamente, pues, la teoría de funciones de variable

compleja implica un grado de abstracción y de complejidad más alto que el de la teoría de funciones de variable real. Las definiciones y las reglas de diferenciación, por ejemplo, no pueden transferirse fácilmente del caso real al caso complejo y en particular la derivada, en el segundo caso, no puede considerarse ya como la pendiente de la tangente a una curva. A falta de las «andaderas» que nos ofrece la posibilidad de visualizar la situación, uno se ve forzado a dar unas definiciones más precisas y detalladas de los conceptos utilizados. El satisfacer estas necesidades de rigor fue una de las principales contribuciones de Cauchy al análisis, tanto de variable real como compleja.

14. Los fundamentos del cálculo infinitesimal

Los primeros profesores de la École Polytechnique habían establecido el precedente de que ni siquiera los más grandes matemáticos podían considerarse excluidos de escribir libros de texto a todos los niveles, y Cauchy siguió, desde luego, en la línea de esta tradición. En tres de sus libros, el *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), el *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) y las *Leçons sur le calcul différentiel* (1829), dio al cálculo infinitesimal elemental la forma que tiene hoy. Cauchy rechazó el planteamiento de Lagrange basado en el desarrollo en serie de potencias del teorema de Taylor, tomando en cambio como fundamental el concepto de límite de d'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético que lo hace más preciso. Prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, formula Cauchy la siguiente definición de límite, casi tan precisa ya como la definición moderna:

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás[11].

Y donde tantos matemáticos anteriores habían considerado un infinitésimo como un *número constante* muy pequeño, Cauchy lo define con toda claridad como una *variable*:

> Diremos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero.

En el cálculo de Cauchy los conceptos de función y de límite de una función son los conceptos fundamentales. Para definir la derivada de la función $y=f(x)$ con respecto a x, le da a la variable x un incremento $\Delta x=i$ y forma el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

[11] Esta y otras definiciones pueden verse en el vol. III de las *Oeuvres completes* de Cauchy (París, 1882-1932, 25 vols.). Véase también C. B. Boyer, *Concepts of the Calculus* (New York: Dover, 1959), págs. 271 y sigs., y A. Robinson, *Non-standard analysis* (Amsterdam, North Holland, 1966), págs. 269 y sigs.

y al límite de este cociente de diferencias cuando i tiende hacia cero, lo define como la derivada $f'(x)$ de y con respecto a x. La diferencial, que había desempeñado con Leibniz y sus sucesores el papel primordial, la relega Cauchy a un papel secundario, aunque era perfectamente consciente de su comodidad operativa. Si dx es una cierta cantidad finita, entonces la correspondiente diferencial dy de $y=f(x)$ vendrá definida simplemente como $f'(x)\,dx$. Cauchy dio también una definición satisfactoria de función continua: La función $f(x)$ es continua entre límites dados de la variable x, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño i de la variable x siempre da lugar a un incremento infinitamente pequeño $f(x+i)-f(x)$ de la función misma. Teniendo en cuenta la propia definición de Cauchy de las cantidades infinitamente pequeñas en términos de límites, su definición de continuidad es completamente análoga a la que utilizamos hoy.

Durante el siglo XVIII la integración había sido considerada como la operación inversa de la diferenciación; sin embargo, la definición de Cauchy de la derivada mostraba claramente que no existiría la derivada en un punto anguloso de la curva o en un punto en que la función fuese discontinua, mientras que la integral podría no ofrecer dificultad alguna. Incluso las curvas discontinuas (en el sentido de Cauchy) pueden determinar un área bien definida, por no decir las continuas aunque no sean derivables. Como consecuencia de estas observaciones, Cauchy decidió recuperar el sentido geométrico original de la integral como área, y definir la integral definida en términos del límite de las sumas integrales, de una manera no muy distinta de la que se sigue hoy en los textos elementales, excepto en que él tomaba el valor de la función correspondiente a cada subintervalo siempre en el extremo izquierdo del subintervalo. Así, si

$$S_n=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

entonces el límite S de estas sumas S_n, según las longitudes de los intervalos (x_i-x_{i-1}) disminuyen indefinidamente, es, por definición, la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo que va de $x=x_0$ a $x=X$. De esta recuperación por Cauchy del sentido geométrico de la integral como límite de sumas, más bien que del de la antiderivada, es de donde han surgido las numerosas y fructíferas generalizaciones modernas de la idea de integral.

Al definir la integral de una manera completamente independiente del proceso de diferenciación, necesitaba Cauchy demostrar la relación usual que liga la integral con la antiderivada, cosa que consiguió utilizando el teorema del valor medio. Si $f(x)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un valor x_0 tal que $a<x_0<b$ y que

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Esta es una simple generalización del teorema de Rolle, conocido desde hacía un siglo. Este teorema del valor medio no había sido objeto de atención seria hasta Cauchy, pero desde entonces ha continuado jugando un papel básico en análisis.

Hay que reconocer, sin embargo, que con justicia se suele conocer como teorema del valor medio de Cauchy a la forma más general

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

con restricciones adecuadas sobre $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

15. Bernhard Bolzano

En la historia de la matemática abundan los casos de descubrimiento simultáneo o casi simultáneo por varios matemáticos independientes, de los cuales hemos visto ya varios. La obra de Cauchy relativa a los fundamentos del cálculo que acabamos de exponer es otro caso del mismo tipo, ya que ideas muy parecidas las desarrollaba por la misma época Bernhard Bolzano (1781-1848), un cura checoslovaco cuyas ideas teológicas se vieron rechazadas por su iglesia, y cuya obra matemática fue ignorada de la manera más inmerecida por sus contemporáneos, tanto laicos como eclesiásticos. Cauchy vivió algún tiempo en Praga, durante su exilio, ciudad en la que nació, vivió y murió Bolzano. Sin embargo, no hay ningún indicio de que ambos llegasen a encontrarse. Las analogías en su aritmetización del cálculo, en sus definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia fueron sólo una coincidencia. Bolzano había publicado en 1817 un libro con el título de *Rein analytischer Beweis*, dedicado a dar una demostración puramente aritmética o analítica del teorema del valor intermedio para funciones continuas, lo que exigía un planteamiento no geométrico de la idea de continuidad de una función o de una curva. Avanzando considerablemente más lejos en sus poco ortodoxas ideas, reveló algunas propiedades importantes de los conjuntos infinitos en una obra póstuma publicada en 1850 con el título de *Paradoxien des Unendlichen*[12].

Partiendo de la conocida paradoja de Galileo acerca de la correspondencia biunívoca entre los números naturales y los cuadrados perfectos, Bolzano avanza un poco más para demostrar que tales correspondencias biunívocas entre los elementos de un conjunto infinito y los de un subconjunto propio suyo son más bien la regla que la excepción. Por ejemplo, una simple ecuación lineal tal como la $y=2x$ establece una correspondencia biunívoca entre los números reales x del intervalo [0, 1] y los números reales y del intervalo [0, 2]. Es decir, que hay exactamente tantos números reales entre 0 y 1 como entre 0 y 2, o bien, que hay exactamente tantos puntos en un segmento de longitud 1 cm como en otro de longitud 2 cm, lo cual es obviamente absurdo. Bolzano parece haberse dado cuenta incluso, hacia 1840, de que la infinitud de la colección de los números reales es de un tipo diferente que la infinitud de la colección de los números naturales, siendo la primera no numerable. En estas especulaciones sobre los conjuntos infinitos, el filósofo y matemático bohemio se aproximó más a ciertas partes de la matemática

[12] Exactamente un siglo más tarde apareció una buena traducción de este libro al inglés. Véase B. Bolzano, *Paradoxes of the Infinite*, ed. por D. A. Steele (1950).

moderna que sus contemporáneos mucho más conocidos que él. Tanto Gauss como Cauchy parecen haber sufrido una especie de *horror infiniti*, insistiendo en que no podía haber en la matemática una cosa tal como un infinito completo y actual. Sus trabajos sobre «órdenes de infinitud» no tenían absolutamente nada que ver, en realidad, con las ideas de Bolzano, puesto que decir, como hacía esencialmente Cauchy, que una función y es «infinita de orden n» con respecto a x cuando $\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x^n} = K \neq 0$ es algo totalmente distinto de hacer alguna afirmación acerca de la existencia de correspondencias entre conjuntos.

16. Los criterios de convergencia

Bolzano fue realmente «una voz gritando en el desierto», y muchos de sus resultados tuvieron que ser descubiertos de nuevo más tarde. Entre ellos está el descubrimiento de que existen funciones patológicas que no se compartan como habían supuesto siempre los matemáticos que lo harían. Newton, por ejemplo, había admitido implícitamente que las curvas están engendradas por movimientos continuos y «lisos». Más tarde se consideraron curvas con cambios abruptos de dirección e incluso con discontinuidades en puntos aislados, pero durante la primera mitad del siglo XIX era una suposición universalmente admitida la de que una función real continua debe tener derivada en la mayor parte de los puntos. Sin embargo, en 1834 Bolzano había inventado ya una función continua en un intervalo, pero que, a pesar de la intuición física en sentido contrario, no tenía derivada en ningún punto de dicho intervalo[13]. Desgraciadamente el ejemplo dado por Bolzano pasó de nuevo casi totalmente ignorado, y así el mérito de construir la primera función continua pero no diferenciable en ningún punto se le suele atribuir a Weierstrass, más o menos un tercio de siglo más tarde. Análogamente, es el nombre de Cauchy y no el de Bolzano el que va asociado a un importante criterio de convergencia para sucesiones y series infinitas. Antes de esta época se habían producido esporádicamente algunas llamadas de atención sobre la necesidad de comprobar la convergencia de una serie infinita antes de utilizarla. Gauss, por ejemplo, había usado ya el criterio del cociente, en fecha tan temprana como la de 1812, para demostrar que su serie hipergeométrica

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha\beta(\alpha+1)\,(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha\beta(\alpha+1)\,(\beta+1)\cdots(\alpha+n-1)\,(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

converge para $|x|<1$ y diverge para $|x|>1$. Este mismo criterio parece haber sido usado por primera vez mucho antes, en Inglaterra, por Edward Waring, aunque se

[13] Para una descripción completa de esta función véase Gerhard Kowalewski, «Über Bolzanos nicht-differenzierbare stetige Funktion», en *Acta Mathematica*, 44 (1923), págs. 315-319. Una exposición más breve puede verse en C. B. Boyer, *Concepts of the Calculus* (1959), págs. 269-270.

le suele conocer con el nombre de criterio de d'Alembert o, menos frecuentemente, de criterio de Cauchy.

El nombre de Cauchy aparece hoy relacionado con un gran número de teoremas sobre series, debido a que, a pesar de los esfuerzos de Gauss y de Abel, la conciencia de los matemáticos se vio espoleada principalmente por Cauchy en lo que se refiere a la necesidad de vigilar la convergencia de las series infinitas. Después de definir una serie convergente como la que verifica la condición de que, para valores crecientes de n, la suma S_n de los n primeros términos tiende a un límite S, llamado suma de la serie, demuestra Cauchy que una condición necesaria y suficiente (e intrínseca a la serie misma) para que una serie converja, es la de que, para cada valor de p, la diferencia entre S_n y S_{n+p} tienda hacia cero según crece n indefinidamente. Esta condición «intrínseca», en la que no aparece la posible suma de la serie, se conoce con el nombre de criterio de Cauchy, pese a que, como hemos dicho más arriba, lo conocía ya Bolzano, y posiblemente incluso Euler mucho antes.

Cauchy anunció también en 1831 el teorema que afirma que toda función analítica de una variable compleja $w=f(z)$ se puede desarrollar en un punto $z=z_0$ en serie de potencias que converge para todos los valores de z pertenecientes a un entorno circular abierto de centro en z_0 y cuya circunferencia pase por el punto singular z_1 para $f(z)$ más próximo a z_0. A partir de esta época el uso de las series infinitas se convirtió en una parte esencial de la teoría de funciones, tanto de variable real como compleja. Varios criterios de convergencia llevan el nombre de Cauchy, así como una forma particular del resto en el desarrollo en serie de Taylor de una función, aunque la forma más usual se suele atribuir a Lagrange. El período del rigor en la matemática estaba prendiendo rápidamente; se dice que cuando Cauchy leyó ante la Académie su primer artículo sobre la convergencia de series, Laplace corrió a su casa a comprobar que no había utilizado ninguna serie divergente en su *Mécanique céleste*. Hacia el final de su vida Cauchy se dio cuenta de la importancia de la idea de «convergencia uniforme», que se había confundido a veces con la convergencia ordinaria, al igual que en el caso de la continuidad, pero tampoco aquí estaba solo, ya que se le había anticipado el físico G. G. Stokes (1819-1903).

El prolífico Cauchy hizo contribuciones a casi tantos campos de la matemática como su contemporáneo Gauss. A pesar de que su obra en teoría de números es menos conocida que las de Legendre y Gauss, debemos a Cauchy la primera demostración general de uno de los más bellos y a la vez más difíciles teoremas de Fermat: el que afirma que todo entero positivo es la suma de como máximo tres números triangulares, como máximo cuatro cuadrados, cinco números pentagonales, seis números hexagonales, etc. La demostración de este teorema constituye una auténtica culminación del estudio de los números figurados iniciado por los pitagóricos unos 2.300 años antes.

17. La geometría

Cauchy se sentía poco atraído por la geometría en sus diversas formas, evidentemente; sin embargo, en 1811, en uno de sus primeros trabajos, presentó una

generalización de la fórmula de Descartes-Euler para los poliedros $C+V=A+2$, donde C, V y A son respectivamente los números de caras, vértices y aristas del poliedro. Por otra parte, ya hemos mencionado un caso en que aplicó los determinantes al cálculo del volumen de un tetraedro. Gauss tampoco se mostró particularmente aficionado a la geometría, y, sin embargo, sí pensó lo suficiente sobre el tema como para conseguir dos cosas: 1) llegar, hacia el 1824, a una importante conclusión acerca del axioma del paralelismo, conclusión que no fue publicada, y 2) publicar en 1827 un tratado que se hizo clásico y que suele considerarse generalmente como la piedra angular de una nueva rama de la geometría. Gauss, siendo aún un estudiante en Gotinga, había intentado demostrar el postulado de las paralelas, como lo había intentado también su íntimo amigo Wolfgang (o Farkas) Bolyai (1775-1856). Ambos continuaron buscando una demostración, hasta que el segundo renunció a ello perdiendo toda esperanza de conseguirlo, mientras que Gauss llegaba al fin a la convicción de que no sólo tal demostración era imposible, sino que se podría desarrollar una geometría muy diferente de la de Euclides negando su postulado de las paralelas. Si Gauss hubiera desarrollado y publicado sus ideas sobre el postulado de las paralelas hubiera sido aclamado como el inventor de la geometría no euclídea, pero su silencio en torno al tema tuvo como consecuencia que tal reconocimiento recayera en otros matemáticos, como veremos en el próximo capítulo.

La nueva rama de la geometría que inició Gauss en 1827 se conoce como geometría diferencial, y puede considerarse quizá como incluida en el análisis más bien que en el campo tradicional de la geometría. En realidad, desde la época de Newton y de Leibniz los matemáticos habían aplicado sistemáticamente el cálculo al estudio de curvas planas, y en cierto sentido estas aplicaciones constituían ya, evidentemente, un anticipo de la geometría diferencial. Euler y Monge, por su parte, habían extendido este campo para incluir el estudio analítico de las superficies, y por lo tanto se les considera a veces como los verdaderos padres de la geometría diferencial. Sin embargo, hasta que apareció el tratado clásico de Gauss, *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827)[14], no se dispuso de un volumen exhaustivo dedicado exclusivamente al tema. En términos generales puede decirse que la geometría ordinaria se interesa por la totalidad de una figura dada, por sus propiedades globales, mientras que la geometría diferencial centra su atención en las propiedades de una curva o una superficie en las proximidades de uno de sus puntos, es decir, en un entorno de dicho punto; se trata pues de propiedades locales de las curvas y superficies. Desde este punto de vista, Gauss generaliza la obra de Huygens y de Clairaut sobre la curvatura de una curva plana o alabeada en uno de sus puntos, definiendo la curvatura de una superficie en un punto, la «curvatura gaussiana» o «curvatura total». Si en un punto P de una superficie S suficientemente «lisa» consideramos la normal N a S, entonces el haz de planos que pasan por N cortará a la superficie S en una familia de curvas planas que pasan por P, cada una de las cuales tendrá su radio de curvatura. Las direcciones de las curvas con radios de curvatura máximo y mínimo, R y r, se llaman las direcciones principales en el

[14] Puede verse una traducción de esta obra al inglés por Adam Hiltebeitel y James Morehead, con el título de *General Investigations of Curved Surfaces* (1965).

plano tangente a S por P, y ocurre que siempre son perpendiculares entre sí. A R y r se les llama los «radios de curvatura principales» de la superficie S en el punto P, y a partir de ellos se define la «curvatura gaussiana o total» de la superficie S en el punto P como $K = \frac{1}{R \cdot r}$. (En cambio, la «curvatura media» de S en P se define como $K_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$, y también es útil.) Gauss da fórmulas para la curvatura total K en términos de las derivadas parciales de la ecuación de la superficie con respecto a varios sistemas de coordenadas, tanto cartesianas como curvilíneas. También descubrió Gauss lo que incluso a él mismo le parecieron «teoremas notables» sobre propiedades de familias especiales de curvas sobre la superficie, tales como las geodésicas. Continuando este tipo de estudios en geometría diferencial fue como los matemáticos del siglo XIX prepararon el terreno para las teorías científicas, principalmente las teorías físicas, del siglo XX.

18. La matemática aplicada

El hecho de que a lo largo de este capítulo nos hayamos centrado de una manera tan exclusiva en la matemática pura de Gauss y de Cauchy puede dejar al lector con una impresión falsa de su obra, globalmente considerada. De hecho, ambos contribuyeron a las ciencias físicas mucho más esencialmente de lo que se podría deducir de nuestros comentarios anteriores. Gauss, por ejemplo, publicó obras sobre astronomía y geodesia, sobre capilaridad y sobre cristalografía. Sus descubrimientos sobre el magnetismo terrestre y sobre instrumentos magnéticos fueron tan importantes que, en honor a ellos, la unidad estándar de intensidad magnética más utilizada hoy se conoce como el gauss. (Por este motivo, de un barco que ha sido preparado para protegerlo contra las minas magnéticas se suele decir en el argot naval que ha sido «desgaussado»). Gauss fue también el matemático que en 1833-1834 colaboró con Wilhelm Weber en la construcción del primer telégrafo electromagnético que tuvo éxito. Mientras que la mayor parte de la obra no estrictamente matemática de Gauss la hizo al final de su vida, en el caso de Cauchy proviene mayormente de sus años de juventud. El tratado de Gauss sobre la refracción, las *Dioptrische Untersuchungen*, se publicó en 1840, mientras que la memoria sobre la propagación de las ondas ópticas de Cauchy, el más joven de los dos, la *Mémoire sur la théorie des ondes*, apareció en 1815, precisamente en el período durante el cual estaba tomando su forma definitiva la teoría ondulatoria de la luz, por obra de Young y de Fresnel. Cauchy fue también uno de los fundadores de la teoría matemática de la elasticidad, y contribuyó al desarrollo de la mecánica celeste, campos ambos en los que también trabajaba al mismo tiempo un contemporáneo que ha quedado inmerecidamente casi eclipsado, Simeón-Denis Poisson (1781-1840).

Poisson era hijo de un administrador de una ciudad pequeña a quien se le encargó llevar los asuntos locales al estallar la Revolución, y así el muchacho se crió bajo los principios republicanos; más tarde, sin embargo, se convirtió en un

decidido legitimista, y en 1825 fue recompensado con un título de barón. En 1837, bajo el reinado de Louis Philippe, fue nombrado par de Francia. Al principio su familia esperaba que el joven Poisson se hiciera médico, pero su gran interés por la matemática le llevó a entrar en la École Polytechnique en 1798, donde, después de su graduación, pasó a ser sucesivamente profesor ayudante, profesor y examinador. Se dice que en cierta ocasión afirmó Poisson que la vida vale la pena vivirla por dos motivos solamente: el hacer matemáticas y el enseñarlas. Consecuente con esta idea, publicó casi 400 trabajos y disfrutó de la fama de ser un excelente profesor. La dirección en que estaba orientada su investigación se nos revela en parte por una frase de un carta escrita por Abel a un amigo en 1826, en la que le habla de los matemáticos parisinos: «Cauchy es el único que se ocupa de matemática pura; en cambio Poisson, Fourier, Ampére, etc., se dedican exclusivamente al magnetismo y a otros temas físicos»[15]. Esta afirmación no hay que tomarla demasiado al pie de la letra, pero lo cierto es que Poisson, en varias memorias que datan de 1812, contribuyó poderosamente a hacer de la electricidad y el magnetismo una rama de la física matemática, como hicieron también Gauss, Cauchy y Green. Poisson se mostró también como un digno sucesor de Laplace en sus estudios sobre mecánica celeste y sobre la atracción entre esferoides. La integral de Poisson en teoría del potencial, los paréntesis de Poisson en teoría de ecuaciones diferenciales, el cociente de Poisson en teoría de elasticidad y la constante de Poisson en electricidad, indican la importancia de sus contribuciones a los diversos campos de la matemática aplicada. Dos de sus tratados más conocidos son el *Traité de mécanique* (2 vols., 1811-1833) y las *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837). En esta última obra es donde aparece la conocida distribución de Poisson o ley de los grandes números de Poisson. En la distribución binomial $(p+q)^n$ (donde $p+q=1$ y n es el número de experimentos), según crece n indefinidamente, la distribución binomial tiende usualmente a una distribución normal, pero, si, según crece n indefinidamente p tiende a cero, permaneciendo constante el producto np, entonces el caso límite de la distribución binomial es la distribución de Poisson.

Gauss y Cauchy murieron en un intervalo de dos años, el primero en 1855 y el segundo en 1857. Ambos habían recibido diversos y abundantes honores, tal como había sido el caso anteriormente con Lagrange, Carnot y Laplace. Lagrange y Carnot fueron nombrados condes, y a Laplace le concedió el emperador el título de marqués. Cauchy fue nombrado barón por Carlos X, como recompensa a su fidelidad. Gauss, en cambio, nunca alcanzó el rango de la nobleza en el sentido legal del término, pero la posteridad lo ha aclamado unánimemente con el título aún más glorioso de *Princeps Mathematicorum* o «Príncipe de los Matemáticos».

Bibliografía

Bell, E. T.: *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937).

Bolzano, Bernhard: *Paradoxes of the Infinite*, trad. D. A. Steele (Londres: Routledge and Kegan Paul, 1950).

[15] Véase E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), pág. 318. Véase también Maximilien Marie, *Histoire des Sciences Mathématiques et physiques* (París, 1883-1888, 12 vols.), vol. XI, págs. 174-191.

Boncompagni, B.: «La Vie et les travaux du Baron Cauchy... par C.-A. Valson», *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **2** (1896, 1-95).
Boyer, C. B.: *Concepts of the Calculus* (New York: Dover paperback, 1959).
Brill, A., y M. Noether: «Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer and neurer Zeit», *Jahresbericht, Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, **3** (1892-1893), 107-566.
Dunnington, G. Waldo: *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science; A Study of His Life and Work* (New York: Exposition Press, 1955).
Gauss, C. F.: *Werke* (Leipzig, 1866-1933, 12 vols.).
——: *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*, trad. G. W. Dunnington (Baton Rouge, La.: Louisiana State University, 1937).
——: *Theory of the Motion of Heavenly Bodies* (New York: Dover, reimpresión, 1963).
——: *General Investigations of Curved Surfaces*, trad. Adam Hiltebeitel y James Morehead (New York: Raven Press, 1965).
——: *Disquisitiones arithmeticae*, trad. inglesa por A. A. Clarke (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1966).
Jourdain, P. E. B.: «The Theory of Functions with Cauchy and Gauss», *Bibliotheca Mathematica* (3), 6 (1905), 190-207.
——: «The Origin of Cauchy's Conceptions of a Definite Integral and of the Continuity of a Function», *Isis*, **1** (1913), 661-703.
Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlín: Springer, 1926-1927, 2 vols.).
Merz, J. T.: *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (Edinburgh y Londres, 1896-1914, 4 vols.; New York: Dover paperback, 1965).
Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906-1930, 4 vols y suplemento; reed., New York: Dover, 1960).
Pierpont, James: «Mathematical Rigor, Past and Present», *Bulletin, American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53.
Pringsheim, A., y J. Molk: «Principes fondamentaux de la théorie des fonctions», *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, vol. II, parte I, fascículo 1.
Reichardt, Hans (ed.): *C. F. Gauss. Leben und Werk* (Gauss Gedenkband, Berlín: Haude & Spener, 1960).
Sarton, George: *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass., 1936; New York: Dover paperback, 1957).
Schaaf, William L.: *Carl Friedrich Gauss* (New York: Watts, 1964).
Smith, D. E.: *Source Book in Mathematics* (New York: Dover, reimpresión, 1958, 2 vols.).
Stolz, Otto: «B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung», *Mathematische Annalen*, 18 (1881), 255-279.
Valson, C.-A.: *La Vie et les travaux du baron Cauchy*, con prólogo de Hermite (París, 1868), vol. I.

Ejercicios

1. ¿Qué se fundó primero, las organizaciones matemáticas o las revistas matemáticas? Dense ejemplos que apoyen la respuesta.
2. Descríbanse varios aspectos en los que la matemática de Gauss y de Cauchy se apartaba de la tradición del siglo XVIII.
3. ¿Fue Gauss o fue Cauchy el que ejerció una mayor influencia en la matemática que se estudia hoy en un primer ciclo universitario? Explíquese claramente.

4. Explíquese claramente por qué se le ha llamado a Gauss el «Príncipe de los Matemáticos».
5. ¿Qué son las funciones elípticas? ¿Por qué se llaman así y en qué se diferencian básicamente de las funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas?
6. Explíquense algunas diferencias importantes entre los respectivos entornos, temperamentos e intereses de Gauss y de Cauchy.
7. Explíquense dos aspectos en los que el álgebra de las congruencias se parezca a la de la igualdad ordinaria, y otros dos en que difiera sensiblemente de ella, dando ejemplos en cada caso.
8. Represéntense los números $1-i$, $3i$ e $i+7$ en el plano de Gauss.
9. De los 50 polígonos regulares de menos de 53 lados, hágase una lista formada por todos aquellos que son constructibles con regla y compás.
10. Los polígonos regulares de 26.214 y de 17.990 lados, ¿son constructibles con regla y compás? Explíquese por qué.
11. Demuéstrese que la ecuación $x^2+2ix+i=0$ tiene una raíz de la forma $a+bi$.
12. Hállese un valor x_0 que satisfaga el teorema del valor medio $f(b)-f(a)=f'(x_0)\cdot(b-a)$ para la función $f(x)=x^3$, con $a=-1$ y $b=2$.
13. Si $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $a=-1$ y $b=2$, ¿existe un valor x_0 que satisfaga el teorema del valor medio del ejercicio 12? Explíquese por qué.
14. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=-1$ y $b=2$, ¿existe un valor x_0 que satisfaga en este caso el teorema del valor medio? Explíquese por qué.
15. Si $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2$, $a=1$ y $b=3$, hállese un valor x_0 que satisfaga el teorema del valor medio generalizado de Cauchy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

16. Utilícese el teorema del valor medio generalizado de Cauchy para demostrar la regla de L'Hospital para límites indeterminados.
17. Demuéstrese que el jacobiano de las funciones sen xy, cos xy es idénticamente nulo, y hállese una relación funcional entre ambas funciones.
18. Demuéstrese que las funciones e^{xy}, $e^x\cdot e^y$ no son funcionalmente dependientes.
19. Compárese el valor de $\pi(n)$ con el de $\dfrac{n}{\ln n}$ para $n=100$.
20. Compruébese el postulado de Bertrand para $n=42$.

*21. Resolver la ecuación $ix^3+8=0$ gráficamente, haciendo la sustitución $x=u+iv$ e igualando partes reales y partes imaginarias de ambos miembros de la ecuación, y representando en el mismo sistema de ejes las ecuaciones en u, v, resultantes. Compruébese la solución obtenida resolviendo la ecuación $ix^3+8=0$ exactamente por el teorema de De Moivre.

*22. Demuéstrese que $4\cdot 5\equiv 4\cdot 8$ (mód. 12) y que, sin embargo, $5\not\equiv 8$ (mód. 12).

*23. Hállense tres soluciones, todas ellas menores que 9, de la ecuación en congruencias $3x\equiv 51$ (mód. 9).

*24. Demuéstrese que si $a\equiv b$ (mód. m) y $b\equiv c$ (mód. m), entonces $a\equiv c$ (mód. m).

*25. Factorícese el número 13 en producto de dos primos gaussianos.

*26. Utilícese el principio de Cauchy y las singularidades de arc tg x y de su derivada para demostrar que el desarrollo de arctg x en serie de potencias de x converge para $|x|<1$.

Capítulo XXIV
LA EPOCA HEROICA DE LA GEOMETRIA

> No hay ninguna rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.
>
> *Lobachewsky*

1. Los teoremas de Brianchon y de Feurbach

La geometría ha sido, de todas las ramas de la matemática, la que más sometida ha estado a cambios, según cambiaban las preferencias de una época a otra. En la Grecia clásica alcanzo su cenit, sólo para caer hasta su nadir hacia la época del hundimiento del Imperio Romano. En Arabia y en la Europa renacentista recuperó parte del terreno perdido; durante el siglo XVII se encontraba en el umbral de una nueva era, para ser casi olvidada a continuación durante más de un siglo, al menos por los matemáticos que se dedicaban a la investigación, languideciendo así a la sombra de las ramas del análisis que proliferaban de una manera exuberante. Inglaterra había librado una batalla perdida, especialmente a finales del siglo XVIII, para reponer los *Elementos* de Euclides en el glorioso lugar que ocuparan antaño, pero lo cierto es que poco se hizo por promover la investigación en el tema. Los esfuerzos de Monge y de Carnot condujeron a un movimiento de renovación de la geometría pura durante el período de la Revolución Francesa, pero el verdadero renacimiento, en forma casi explosiva, de la geometría como rama viva de la matemática se produjo a comienzos del siglo XIX. Y, como podría haberse imaginado, la École Polytechnique jugó un papel importante en este movimiento, pues allí fue descubierto el bien conocido teorema de Brianchon por un estudiante, y se publicó en 1806 en el *Journal de l'École Polytechnique*. Charles Julien Brianchon (1785-1864) acababa de ingresar en la escuela el año anterior, estudiando con Monge y leyendo la *Géométrie de position* de Carnot. Este estudiante de 21 años, que llegó a ser más tarde oficial de artillería y profesor, demostró en primer lugar el teorema de Pascal, olvidado durante largo tiempo, teorema que formulaba Brianchon ya en su forma moderna: «Para todo hexágono inscrito en una cónica, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos están en una recta.» Siguiendo unas cuantas demostraciones, nos encontramos con el teorema que lleva su nombre: «En cualquier hexágono circunscrito a una cónica, las tres diagonales se cortan en el mismo punto.» Lo mismo que Pascal se había mostrado impresionado por el gran número de corolarios que había conseguido deducir de su teorema, así también Brianchon

hace observar que su propio teorema «está preñado de consecuencias curiosas»[1]. Los teoremas de Pascal y Brianchon son, de hecho, fundamentales para el estudio proyectivo de las cónicas. Además, constituyen el primer ejemplo claro de un par de importantes teoremas «duales» en geometría, es decir, de teoremas que se convierten el uno en el otro si se intercambian las palabras «punto» y «recta». Si leemos la frase «una recta es tangente a una cónica» como «una recta está sobre una cónica», entonces podemos enunciar los dos teoremas de la siguiente forma combinada:

Los seis $\left\{\begin{matrix}\text{vértices}\\ \text{lados}\end{matrix}\right\}$ de un hexágono están sobre una cónica si y sólo si los tres $\left\{\begin{matrix}\text{puntos}\\ \text{rectas}\end{matrix}\right\}$ comunes a los tres pares de $\left\{\begin{matrix}\text{lados}\\ \text{vértices}\end{matrix}\right\}$ opuestos tienen una $\left\{\begin{matrix}\text{recta}\\ \text{punto}\end{matrix}\right\}$ común.

Este tipo de relaciones entre puntos y rectas con respecto a un cónica fueron explotadas más tarde de una manera efectiva por otro alumno de la École Polytechnique, el hombre al que podemos considerar con razón como el verdadero fundador de la geometría proyectiva. Nos referimos a Jean-Victor Poncelet (1788-1867), que estudió también con Monge, ingresó en el cuerpo de ingenieros del ejército con el tiempo justo para tomar parte en la desdichada campaña de Napoleón en Rusia en 1812, y permaneció prisionero varios años en una cárcel de Moscú. A su regreso a Francia se convirtió en la figura más importante quizá del renacimiento de la geometría pura. Entre sus primeros descubrimientos está uno que compartió con Brianchon, y que ambos publicaron en un artículo conjunto de los *Annales* de Gergonne correspondientes a los años 1820-1821. El título de este artículo, «Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère», no da ninguna pista de uno de los bellos teoremas que contiene, el que se refiere a lo que conocemos hoy como «la circunferencia de los nueve puntos». Brianchon y Poncelet demuestran en este trabajo que

> La circunferencia que pasa por los pies de las perpendicualres trazadas por los vértices de un triángulo a los lados opuestos, pasa también por los puntos medios de los lados, así como por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices del triángulo con el punto de intersección de las tres perpendiculares[2].

Este notable teorema no suele llevar los nombres ni de Brianchon ni de Poncelet, sino el de otro matemático, Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), que, de manera independiente, publicó este teorema y otros análogos en 1822 en un

[1] Véase D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics* (1959), págs. 331-336.

[2] Puede verse la demostración original de Brianchon y Poncelet en D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, págs. 337-338. Parece ser que algunas de las propiedades de la circunferencia de los nueve puntos las conoció ya Euler muchos años antes; véase N. A. Court, *College Geometry*, 2.ª ed. (New York, Barnes and Noble, 1952), pág. 299.

breve libro en alemán con un título prolijo y difuso. El hecho de que la circunferencia de los nueve puntos se conozca hoy como la «circunferencia de Feuerbach» está justificado, en parte, no por la prioridad en su publicación, sino por otras propiedades de dicha circunferencia descubiertas por Feuerbach. El centro de la circunferencia de los nueve puntos está situado sobre la recta de Euler del triángulo, tal como demostró Feuerbach, y coincide con el punto medio del segmento cuyos extremos son el ortocentro y el circuncentro. Aún más notable es la propiedad expresada en lo que hoy se conoce como el teorema de Feuerbach: «La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo cualquiera es tangente internamente a la circunferencia inscrita y tangente externamente a las tres circunferencias exinscritas», lo que constituye posiblemente, en palabras de Coolidge, «el teorema más bello de la geometría elemental que se ha descubierto desde la época de Euclides»[3]. En su demostración hace uso Feuerbach del hecho que los radios de las circunferencias inscrita y exinscritas a un triángulo vienen dados por

$$\frac{2K}{\pm a \pm b \pm c}$$

donde a, b, c, son los lados del triángulo y K su área, y donde debe usarse un signo menos como máximo.

2. La geometría de la inversión

La obra de Feuerbach, que murió cuando sólo tenía 34 años, puede considerarse como un ejemplo típico de los numerosos resultados nuevos sobre la geometría del triángulo y la circunferencia que se fueron descubriendo a lo largo del siglo XIX. Ningún país especial tuvo el monopolio de este desarrollo de la matemática elemental, pero quizá se pueda atribuir a Alemania el papel principal, por ser la patria de Jakob Steiner (1796-1863), uno de los muchos descubridores independientes de la circunferencia de los nueve puntos y, mucho más importante aún, el matemático al que se suele considerar generalmente como el más grande de los geómetras de la época moderna, tal como Apolonio lo fue en la antigüedad. En realidad Steiner nació en Suiza, pero hizo sus estudios en Heidelberg y en Berlín y, gracias al apoyo de Jacobi, obtuvo una cátedra en Berlín que ocupó hasta su muerte. En sus manos la geometría sintética hizo progresos comparables a los que había hecho anteriormente el análisis, y rivalizó con Abel en el número de artículos publicados en el *Journal de Crelle*. El nombre de Steiner aparece en geometría en muchos contextos, incluido el que se refiere a las propiedades de los «puntos de

[3] Véase J. L. Coolidge, «The Heroic Age of Geometry», en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, 35 (1929), págs. 19-37, especialmente la pág. 21. Para la historia de este teorema puede verse John S. Mackay, «History of the Nine-point Circle», *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 11 (1892), pág. 19, así como **5** (1886-1887), pág. 62. Una traducción al inglés del teorema y su demostración original puede verse en D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, págs. 339-345.

Steiner»: Si se unen de todas las manera posibles los seis puntos de una cónica en el «hexagrama místico» de Pascal, se obtienen 60 rectas de Pascal que se cortan tres a tres en 20 puntos de Steiner. También demostró Steiner que todas las construcciones euclídeas pueden efectuarse con la regla únicamente, siempre que se nos dé además una única circunferencia fija. Steiner sentía una gran aversión por los métodos analíticos, y demostró, en un artículo publicado en el *Journal de Crelle*, y utilizando exclusivamente métodos sintéticos, un sorprendente teorema que parece pertenecer de manera natural, por su complejidad, al análisis, el de que una superficie de tercer orden sólo puede contener 27 rectas.

La historia de la geometría durante el siglo XIX está llena de casos de descubrimientos independientes y casi simultáneos, y Steiner se vio mezclado en varios de estos casos. En 1822, Poncelet, inspirado por la obra de Mascheroni, había sugerido que todas las construcciones euclídeas planas podrían efectuarse con la regla únicamente, si se daba además una circunferencia concreta y su centro, teorema que demostró en 1833 Steiner, como hemos visto. Es decir, que el teorema de Poncelet-Steiner demuestra que no podemos prescindir completamente del compás en la geometría euclídea, pero que una vez utilizado para trazar una circunferencia cualquiera, podemos desecharlo a favor de la regla únicamente, de una manera parecida a como Mascheroni había utilizado únicamente el compás[4].

Steiner nos recuerda en cierto modo a Gauss, por el hecho de que las ideas y los descubrimientos se amontonaban en su mente con tal rapidez que a duras penas conseguía ponerlos ordenadamente por escrito. En 1824 había descubierto ya la fructífera transformación geométrica conocida como inversión[5]. Si los puntos P y P' están sobre una semirrecta cuyo origen es el centro O de una circunferencia C de radio $r \neq 0$, y si el producto de las distancias OP y OP' es r^2, entonces se dice que cada uno de los puntos P, P', es inverso del otro con respecto a la circunferencia C. A todo punto P exterior al círculo que determina C le corresponde en la inversión uno y sólo uno P' interior al círculo, mientras que el centro O es el único punto interior al círculo que no corresponde a ningún punto exterior. Nos encontramos aquí, de una manera indirecta, con una paradoja del tipo de las de Bolzano: el interior de un círculo cualquiera, por pequeño que sea, contiene, como si dijéramos, un punto más que la región del plano exterior al círculo. De una manera totalmente análoga al caso del plano, se puede definir fácilmente la inversión con respecto a una superficie esférica en el espacio tridimensional.

Se pueden demostrar sin dificultad gran cantidad de teoremas pertenecientes a la geometría de la inversión del plano o del espacio, bien sea por métodos analíticos o sintéticos. En particular, es inmediato demostrar que, en una inversión plana, toda circunferencia que no pase por el centro de inversión se transforma en otra circunferencia, mientras que toda circunferencia que pase por el centro de inversión se transforma en una recta que no pasa por él, así como resultados análogos relativos a esferas y planos en la geometría de la inversión tridimensional.

---

[4] Pueden verse más detalles en Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, ed. rev. (New York, Holt, 1964), págs. 99-100.

[5] Véase N. A. Court, «Notes on Inversion», en *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), págs. 655-657.

Un poco más difícil de demostrar es el importante resultado de que la inversión es una transformación conforme, es decir, que conserva los ángulos entre curvas. Un teorema demostrado por Joseph Liouville muestra claramente que las transformaciones que conservan los ángulos no son frecuentes en absoluto; este teorema afirma que en el espacio las únicas transformaciones conformes son las inversiones, las semejanzas y las congruencias como caso particular[6]. Steiner no publicó sus ideas sobre la teoría de la inversión, y otros matemáticos del mismo siglo volvieron a descubrir repetidas veces esta transformación; entre ellos figura Lord Kelvin (o William Thompson) (1824-1907), que se vio conducido a ella en 1845 a través de la física, aplicándola a problemas de electrostática.

Si el centro O de la circunferencia de inversión de radio a coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas del plano, entonces las coordenadas x', y', del inverso P' de un punto arbitrario (x, y) distinto del origen, vienen dadas por las ecuaciones

$$x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Estas ecuaciones sugirieron más tarde a Luigi Cremona (1830-1903), que fue profesor de geometría sucesivamente en Bolonia, Milán y Roma, el estudio de unas transformaciones mucho más generales, de la forma

$$x' = R_1(x, y)$$
$$y' = R_2(x, y)$$

donde R_1 y R_2 son funciones algebraicas racionales. Tales transformaciones, de las que las inversiones son sólo un caso muy especial, se conocen hoy con el nombre de «transformaciones de Cremona», en honor al matemático que publicó en 1863 una exposición acerca de ellas y que más tarde las generalizaría para el espacio tridimensional.

3. La geometría proyectiva de Poncelet

Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. De entre ellas, las que se hicieron más populares fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta nueva geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet. Durante los años 1813-1814 que permaneció prisionero en Rusia, escribió Poncelet un tratado de geometría analítica titulado *Applications*

[6] Véase D. J. Struik, «Outline of a History of Differential Geometry», en *Isis*, 19 (1933), págs. 92-120; 20 (1933), págs. 161-191.

d'analyse et de géométrie, que se basaba en los principios que había aprendido en la École Polytechnique. Esta obra no se publicó, sin embargo, hasta medio siglo más tarde (1862-1864, 2 vols.), a pesar del hecho de que inicialmente estaba destinada a servir de introducción a la obra, mucho más famosa, del mismo autor, el *Traité des propriétés projectives des figures*, de 1822. Esta segunda obra se diferencia profundamente por su estilo de la primera, puesto que el tratamiento es sintético y no analítico. Las preferencias de Poncelet cambiaron a su regreso a París, y desde ese momento se convirtió en un firme defensor de los métodos sintéticos. Dándose cuenta de que las ventajas que presenta la geometría analítica se derivan de su generalidad, intentó que sus teoremas de geometría sintética fueran tan generales como fuera posible. Para llevar a cabo este proyecto, formuló Poncelet lo que llamó el «principio de continuidad» o «principio de permanencia de las relaciones matemáticas», que enunciaba de la manera siguiente:

> Las propiedades métricas descubiertas para una figura primitiva siguen siendo aplicables, sin otras modificaciones que cambios de signos, a todas las figuras correlativas que puedan considerarse como surgiendo de la primera.

Como ejemplo de aplicación de este principio, menciona Poncelet el teorema sobre la igualdad de los productos de los segmentos en que quedan divididas dos cuerdas que se cortan en un punto interior a un círculo, que se convierte, cuando el punto de intersección es exterior al círculo, en la igualdad de los productos de los segmentos de secantes, ambos con signo menos en este caso. Y si una de las rectas es tangente a la circunferencia, el teorema sigue siendo válido reemplazando el producto de los segmentos determinados sobre la secante por el cuadrado de la tangente. Cauchy no se privó de burlarse de este principio de continuidad de Poncelet que, según él, no era otra cosa que una atrevida inducción injustificada. En cierto sentido este principio no difiere mucho del punto de vista adoptado por Carnot, pero Poncelet lo generalizó hasta incluir en él los puntos del infinito que habían sugerido Kepler y Desargues: Así, se podría decir que dos rectas siempre se cortan, bien en un punto ordinario o, en el caso de que sean paralelas, en un punto del infinito, llamado un «punto ideal» del plano. Con objeto de alcanzar la misma generalidad que en el análisis, consideró necesario Poncelet introducir en la geometría sintética no sólo puntos ideales o del infinito, sino también «puntos imaginarios», porque sólo así se podría asegurar que una circunferencia y una recta siempre se cortan. Entre otros descubrimientos sorprendentes de Poncelet está el de que todas las circunferencias del plano tienen dos puntos comunes; se trata de dos puntos ideales imaginarios, conocidos como puntos cíclicos del infinito y que se suelen representar por I y J (o, de una manera informal, como Isaac y Jacob).

Poncelet sostenía que su principio de continuidad, que parecía venir sugerido por la geometría analítica, formaba parte propiamente de la geometría sintética, y rápidamente se convirtió en un apasionado defensor de esta última frente a los analíticos. Durante la segunda mitad del siglo XVIII se había producido ya una cierta controversia, sobre todo en Alemania, en torno a las ventajas relativas del análisis y de la síntesis. En 1759 el matemático e historiador A. G. Kaestner (1719-1800), que fue profesor en Leipzig y en Gotinga, manifestaba su punto de vista de

que el análisis era superior en tanto que planteamiento heurístico de los problemas, lo que permitía una mayor potencia con una economía de pensamiento mayor. Uno de sus discípulos, G. S. Klügel (1739-1812), escribía en 1767 que sospechaba que los ingleses trataban de realzar sus méritos de una manera exagerada recurriendo a la dificultad de sus demostraciones sintéticas. Durante los primeros años del siglo XIX el interés por estas dos metodologías rivales fue tan alto en Francia, que la Sociedad Científica de Bordeaux convocó en 1813 un concurso para premiar el mejor trabajo que caracterizase a la síntesis y al análisis, así como la influencia que había ejercido cada una de ellas a lo largo de la historia. El ensayo ganador, escrito por un profesor de Versalles[7], terminaba mostrando su esperanza de que pudiera darse al fin una reconciliación de las dos tendencias mencionadas, pero lo cierto fue que media docena de años más tarde la controversia volvió a estallar de nuevo y se fue haciendo cada vez más agria. Es interesante hacer notar que los dos rivales más importantes fueron Poncelet y Gergonne, que habían sido ambos discípulos de Monge, un matemático que había trabajado tanto en geometría analítica como sintética. Al principio la rivalidad fue amistosa, y ambos publicaron artículos en los *Annales* de Gergonne en 1818, el año de la muerte de Monge, Poncelet apoyando la superioridad de la geometría sintética y Gergonne defendiendo los métodos analíticos, pero hacia el año 1826 surgió la controversia en torno a la prioridad en el reciente descubrimiento del principio de dualidad. Ya vimos más arriba cómo los teoremas de Pascal y de Brianchon estaban relacionados por un simple intercambio de las palabras punto y recta, y Gergonne se convenció de que los métodos analíticos permitirían demostrar que tal intercambio es universalmente válido. Es decir, que para cualquier teorema de geometría plana sobre puntos y rectas, Gergonne suponía confiadamente que el dual de este teorema, obtenido intercambiando en él las palabras punto y recta, también sería válido, y así comenzó a publicar parejas de teoremas duales uno frente al otro, en columnas paralelas, en sus *Annales*. Poncelet afirmaba, por su parte, que él había sido el primero en descubrir el fenómeno de la dualidad, y que el principio en cuestión era una consecuencia de las relaciones que hay en geometría pura entre un punto como polo y su recta polar con respecto a una cónica.

4. La notación abreviada de Plücker

El problema de la prioridad en el reconocimiento del principio de dualidad no es fácil de resolver, pero en 1829 Julius Plücker (1801-1868) dio al fin una justificación lógica rigurosa de dicho principio, utilizando para ello un punto de vista nuevo que iba a ser muy importante para la geometría analítica. Lo mismo que Monge había sido quizá el primer especialista moderno en geometría en

[7] Para más detalles véase C. B. Boyer, «Analysis: Notes on the Evolution of a Subject and a Name», en *The Mathematics Teacher*, 47 (1954), págs. 450-462, especialmente pág. 459. Una discusión mucho más amplia puede verse en G. Fano y S. Carrus, «Exposé parallèle du développement de la géométrie synthetique et de la géométrie analytique pendat le 19-sième siècle», en la *Encyclopédie des sciences mathématiques*, parte III, 3, págs. 185-259.

general, Plücker se convirtió en el primer especialista en geometría analítica en particular. Sus primeras publicaciones en los *Annales* de Gergonne en 1826 habían sido en gran parte sintéticas, pero poco a poco se fue viendo mezclado en la controversia con Poncelet, hasta tal punto que Plücker terminó por abandonar el campo de los sintéticos y convertirse en el más prolífico de todos los geómetras analíticos, pasando a creer firmemente que los métodos algebraicos eran preferibles, con mucho, al planteamiento puramente geométrico de Poncelet y de Steiner. El hecho de que su nombre aparezca en la geometría de coordenadas asociado a lo que se suele llamar la notación abreviada de Plücker, es un tributo a su influencia, aunque en este caso la frase le hace más que justicia. Durante la primera parte del siglo XIX hubo un cierto número de matemáticos, incluido Gergonne, que consideraron que la geometría analítica estaba sobrecargada por los incómodos y complicados cálculos algebraicos, en vista de lo cual comenzaron a abreviar drásticamente las notaciones utilizadas. Por ejemplo, la familia de todas las cincunferencias que pasan por los dos puntos de intersección de dos circunferencias dadas $x^2+y^2+ax+by+c=0$ y $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$, la representaba Gabriel Lamé (1795-1870) en 1818 simplemente por la ecuación $mC+m'C'=0$, utilizando dos parámetros o multiplicadores m y m'. Gergonne y Plücker prefirieron utilizar un único parámetro, representado por una letra griega, escribiendo el primero $C+\lambda C'=0$, de donde proviene el nombre de la ecuación «lambdalizada», mientras que el segundo usaba la expresión $C+\mu C'=0$, de la que se ha derivado el nombre de «la μ de Plücker». Lamé parece haber sido el que inició el estudio de familias uniparamétricas de curvas en geometría analítica utilizando la nueva notación abreviada, pero fue Plücker quien dio a este estudio el impulso definitivo, especialmente durante los años 1827-1829. Casualmente, el hecho de que el haz lineal de circunferencias $C+\mu C'=0$ constituye una interesante «familia radical», ya sea que las dos circunferencias $C=0$ y $C'=0$ se corten o no, había sido descubierto unos 15 años antes por L. Gaultier en el contexto de la geometría pura o sintética, y a eso se debe el que el eje radical de las dos circunferencias (que es la única recta que pertenece a la familia $C+\mu C'=0$) se conozca a veces con el nombre de «recta de Gaultier». Esta recta tiene la propiedad de que las tangentes trazadas desde un punto cualquiera de ella a todas las circunferencias de la familia radical, son iguales, o, como prefería expresarlo Steiner, que la «potencia» de un punto cualquier del eje radical con respecto a todos los miembros de la familia de circunferencias es la misma.

Entre los muchos usos que hizo Plücker de la notación abreviada, podemos destacar uno de 1828, publicado en los *Annales* de Gergonne, en el que explica la llamada «paradoja de Cramer-Euler». Supongamos que tenemos, por ejemplo, 14 puntos arbitrarios del plano; entonces podemos escribir la ecuación de la cuártica que pasa por todos ellos como $Q+\mu Q'=0$, donde $Q=0$ y $Q'=0$ son las ecuaciones de dos cuárticas distintas que pasan por los mismos trece puntos de los catorce dados. Determínese ahora el valor de μ de manera que las coordenadas del punto decimocuarto satisfagan la ecuación $Q+\mu Q'=0$. Entonces $Q=0$, $Q'=0$ y $Q+\mu Q'=0$ tendrán todas ellas en común no sólo los *trece* puntos originales, sino también los *dieciséis* puntos de intersección de $Q=0$ y $Q'=0$. Por tanto, para cualquier conjunto de trece puntos hay otros tres puntos asociados o relacionados

con los trece primeros, de manera que ningún conjunto de catorce o más puntos tomados entre los dieciséis dependientes en cuestión, nos determinará una única cuártica, a pesar del hecho de que un conjunto de catorce puntos arbitrarios determinan, en general, una única cuártica. De una manera más general, cualquier conjunto de

$$\frac{n(n+3)}{2} - 1$$

puntos arbitrarios del plano nos determinará un conjunto adicional de

$$n^2 - \left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos «dependientes» de los primeros, tales que cualquier curva de grado n que pase por el conjunto dado de puntos, pasará también por todos los puntos dependientes[8]. Plücker dio también una forma dual de su teorema sobre la famosa paradoja, así como generalizaciones a superficies algebraicas en el espacio tridimensional.

5. Las coordenadas homogéneas

Plücker fue quien elevó el uso de la notación abreviada de Lamé y Gergonne a un status de verdadero principio geométrico, en el primer volumen de su obra *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1828). En el segundo volumen de esta importante obra, publicado en 1831, volvió a descubrir Plücker de una manera efectiva un nuevo sistema de coordenadas que ya había sido inventado anteriormente tres veces por lo menos, de manera independiente. Se trata del sistema que ahora llamamos nosotros de coordenadas homogéneas, del cual uno de los inventores había sido Feuerbach[9]. Otro de los descubridores de la misma idea fue A. F. Möbius (1790-1860) que la publicó en 1827 en una obra titulada *Barycentrische Calcul.* Sin embargo, el autor de este libro clásico es más conocido por la superficie de una sola cara que lleva su nombre, la «banda de Möbius», obtenida de una cinta rectangular de papel al pegar uno sobre otro sus lados más cortos después de girar uno de ellos 180°. Otro inventor aún de las coordenadas homogéneas fue Étienne Bobillier (1798-1840), graduado por la École Polytechnique, quien publicó su nuevo sistema de coordenadas en los *Annales* de Gergonne para 1827-1828. Las notaciones utilizadas y las líneas generales de razonamiento

[8] Véase Charlotte A. Scott, «On the Intersections of Plane Curves», en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4 (1897-1898), págs. 260-273.

[9] Véase Albert Keifer, *Die Einführung der homogenen Koordenaten durch K. W. Feuerbach*; M. D. Schauberg (Estrasburgo, 1910).

de cada uno de estos cuatro inventores de las coordenadas homogéneas eran algo distintas[10], pero todas ellas tenían una cosa en común: hacían uso de *tres* coordenadas en vez de *dos* para localizar un punto en un plano. Los sistemas eran equivalentes a lo que se ha conocido también como «coordenadas trilineales». Plücker, de hecho, tomó al principio concretamente como sus tres coordenadas x, y, t, de un punto P del plano, las tres distancias de P a los tres lados de un triángulo de referencia. Más tarde, en el volumen II de sus *Analytisch-geometrische Entwicklungen* dio la definición más usual de las coordenadas homogéneas de un punto P como el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, t) de números, tales que están relacionados con las coordenadas cartesianas (X, Y) de P por las igualdades $x=X\cdot t$ e $y=Y\cdot t$. Es inmediato comprobar que las coordenadas homogéneas de un punto P no son únicas, tal como se admite ya en la misma definición, ya que las dos ternas (x, y, t) y (kx, ky, kt), con $k\neq 0$, corresponden a la misma pareja $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$, de coordenadas cartesianas. Sin embargo, esta falta de unicidad no produce mayores dificultades que la falta análoga de unicidad en las coordenadas polares o la falta de unicidad de forma en el caso de la igualdad de fracciones. El calificativo de «homogéneas» para estas coordenadas proviene, como es bien sabido, del hecho de que cuando uno utiliza las ecuaciones de la transformación para convertir la ecuación de una curva algebraica $f(X, Y)=0$ dada en coordenadas cartesianas rectangulares a la forma en coordenadas homogéneas $f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)=0$, la nueva ecuación tendrá todos sus términos del mismo grado en las variables x, y, t, es decir, será una ecuación homogénea. Más importante aún es el hecho que hay que subrayar de que en el sistema de coordenadas cartesianas no hay ningún par de números que corresponda a una terna de coordenadas homogéneas de la forma $(x, y, 0)$; una terna de este tipo, siempre que x e y no sean ambas cero simultáneamente, representa un punto ideal o un «punto del infinito». ¡Por fin los elementos del infinito de Kepler, de Desargues y de Poncelet se habían conseguido tratar dentro de un sistema de coordenadas que sólo utilizaba números usuales! Por otra parte, y de la misma manera que cualquier terna de números reales no todos nulos representa en coordenadas homogéneas un punto del plano, también toda ecuación lineal $ax+by+ct=0$ corresponde a una recta en el plano, siempre que a, b y c no sean los tres nulos simultáneamente. En particular, todos los «puntos del infinito» del plano están situados evidentemente sobre la recta dada por la ecuación $t=0$, que se conoce como la «recta del infinito» o recta ideal del plano. Es obvio, pues, que este nuevo sistema de coordenadas se adapta extraordinariamente bien al estudio de la geometría proyectiva, que hasta este momento se había enfocado casi exclusivamente desde el punto de vista sintético de la geometría pura.

---

[10] Para más detalles y referencias, véase C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), págs. 241-244, 249-252.

6. Coordenadas de rectas y dualidad

La introducción de las coordenadas homogéneas constituyó una importante etapa en la dirección de la aritmetización de la geometría, pero en 1829 Plücker publicó en el *Journal de Crelle* un artículo en el que se exponía un punto de vista revolucionario que venía a romper completamente con la vieja concepción cartesiana de las coordenadas como longitudes de segmentos rectilíneos. La ecuación de una recta en coordenadas homogéneas tiene, como hemos visto, la forma $ax+by+ct=0$. Los tres coeficientes o parámetros (a, b, c) determinan, pues, una única recta en el plano, exactamente lo mismo que las tres coordenadas homogéneas (x, y, t) determinaban un único punto del plano. Dado que las coordenadas son números lo mismo que los coeficientes o parámetros, Plücker vio claramente que uno podría modificar el lenguaje usual y llamar a la terna (a, b, c) las *coordenadas homogéneas* de la recta correspondiente. Si, por último, invertimos el convenio cartesiano de manera que las letras del comienzo del alfabeto representen variables y las del final constantes, entonces la ecuación $ax+by+ct=0$ representa el haz de todas las rectas que pasan por el punto (x, y, t) en vez del haz de todos los puntos situados sobre la recta fija (a, b, c). Si consideramos, pues, una ecuación «no comprometida *a priori*» de la forma $pu+qv+rw=0$, está claro que la podemos considerar indiferentemente como representando la colección de todos los puntos (u, v, w) que están sobre la recta (p, q, r), o como la colección de todas las rectas (p, q, r) que pasan por el punto fijo (u, v, w).

Lo que Plücker había descubierto de una manera tan elegante era la contrapartida analítica inmediata del principio geométrico de dualidad, sobre el que tanto habían batallado Gergonne y Poncelet; quedaba así perfectamente claro ahora que la justificación que la geometría pura había buscado en vano, la servía aquí en bandeja el punto de vista algebraico. El intercambio de las palabras «punto» y «recta» corresponde simplemente, desde este punto de vista, a un intercambio de las palabras «constante» y «variable» con respecto a las cantidades p, q, r y u, v, w. Dada la simetría total de la situación algebraica, resulta claro evidentemente que todo teorema relativo a la forma lineal $pu+qv+rw=0$ aparecerá inmediatamente desglosado en dos formas, una dual de la otra. Además Plücker demostró que cualquier curva que no sea una línea recta puede considerarse como generada de una manera dual: bien como el lugar geométrico engendrado por un punto móvil a lo largo de dicha curva, o bien como la envolvente de una recta móvil que pasa por el punto y que además de trasladarse va girando en torno al punto (de tangencia). Y un hecho bastante sorprendente es el de que el grado de una curva descrita en términos de coordenadas de puntos (u «orden» de la curva) no coincide necesariamente con el grado de la misma curva en términos de coordenadas de rectas (o «clase» de la curva), y uno de los descubrimientos más importantes de Plücker, publicado en el *Journal de Crelle* en 1834, consistió en la determinación de las cuatro ecuaciones que llevan su nombre y que relacionan la clase y el orden con el número de singularidades de una curva:

$$m=n(n-1)-2\delta-3\kappa \qquad \text{y} \qquad n=m(m-1)-2\tau-3\tau$$
$$1=3n(n-2)-6\delta-8\kappa \qquad \text{y} \qquad \kappa=3m(m-2)-6\tau-8\tau$$

donde m es la clase, n el orden, δ el número de nodos, κ el número de puntos cuspidales, ι el número de tangentes estacionarias (es decir, de puntos de inflexión) y τ el número de bitangentes. De estas ecuaciones resulta, a simple vista, que una cónica, cuyo orden es 2, no puede tener singularidades, y por lo tanto debe ser también de clase 2.

En otro artículo del *Journal de Crelle* de 1831, extendía Plücker el principio de dualidad a tres dimensiones, donde las relaciones entre las coordenadas homogéneas (a, b, c, d) de un plano y las coordenadas homogéneas (x, y, z, t) de un punto, mostraban que el dual de un teorema relativo al espacio tridimensional se obtiene intercambiado las palabras «punto» y «plano», y dejando invariable la palabra «recta». El geómetra francés Michel Chasles (1793-1880) hizo constar, por su parte, que había tenido la idea de introducir las coordenadas de rectas y de planos más o menos a la vez que Plücker, lo que viene a añadir otro ejemplo más de simultaneidad en el descubrimiento en el campo de la geometría durante el siglo XIX[11]. En artículos y libros posteriores extendió Plücker sus descubrimientos para incluir el tratamiento de coordenadas cartesianas y homogéneas imaginarias. Desde este punto de vista se podía justificar trivialmente el teorema de Poncelet de que todas las circunferencias tienen dos puntos imaginarios del infinito comunes, puesto que los puntos $(1, i, 0)$ y $(i, 1, 0)$ satisfacen ambos la ecuación $x^2+y^2+axt+byt+ct^2=0$, cualesquiera que sean los valores de los parámetros a, b y c. Plücker demostró también que los focos de las cónicas tienen la propiedad de que las tangentes imaginarias trazadas por estos puntos a la curva, pasan por los dos puntos cíclicos anteriores, y en vista de ello definió como «foco» de una curva plana de orden superior a cualquier punto que tuviera esta misma propiedad con respecto a la curva.

7. El renacimiento de la matemática inglesa

Durante la época de Descartes y de Fermat, y más tarde de nuevo durante el período de Monge y Lagrange, Francia había sido el centro del desarrollo de la geometría analítica, pero con la obra de Plücker el liderazgo en este campo cruzó el Rin para establecerse en Alemania. Sin embargo, Plücker fue en buena medida un ejemplo típico del proverbial profeta al que no se hace caso en su tierra. En su país se admiraba entonces desmedidamente a Steiner, y Steiner había mostrado claramente una gran aversión por los métodos analíticos. El término mismo «análisis» implica ya una cierta cantidad de técnica o de aparato más o menos mecánico; frecuentemente se refiere uno al análisis como una herramienta, término que no se aplica nunca a la síntesis, y Steiner ponía objeciones a todo tipo de herramientas o «apoyaturas» en geometría. El cálculo, argumentaba, viene a reemplazar al pensamiento, mientras que la geometría debería estimular el pensamiento. Möbius permaneció neutral en la controversia análisis-síntesis, pero Jacobi, pese al hecho de ser un conspicuo productor de algoritmos, se unió a

[11] Véase C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, pág. 251, nota 65.

Steiner en su polémica oposición a Plücker[12]. Desanimado, Plücker abandonó en 1847 la geometría por la física, donde publicó una serie de artículos sobre magnetismo y sobre espectroscopía.

Es una de las frecuentes ironías de la historia el hecho de que la obra de Plücker encontrase apoyo donde uno menos lo hubiera esperado: en Inglaterra. Inglaterra había sido un verdadero bastión de la geometría sintética a lo largo de todo el siglo XVIII; mientras Monge y Lagrange estaban poniendo a funcionar la revolución analítica en Francia, la geometría por coordenadas apenas había avanzado en Inglaterra más lejos que en la obra de Newton. Incluso las *Cónicas* de Wallis habían caído en desuso en Cambridge, donde el interés por la matemática estaba en el punto de marea baja a comienzos del siglo XIX[13]; el rápido avance de la investigación matemática en Francia y en Alemania había hecho ciertamente poca impresión en Gran Bretaña. Frente a esta situación, un grupo de matemáticos jóvenes de Cambridge formaron en 1812 lo que llamaron la *Analytical Society*. En palabras de Charles Babbage (1792-1871), uno de los líderes del grupo, los fines de la Sociedad eran, entre otros, los de «promover los principios del puro *d*-ismo, en oposición a la *punto*-manía de la universidad» (otro de los fines de la Sociedad era el de «dejar el mundo más sabio que lo hemos encontrado»). Se trataba, evidentemente, de una referencia al continuo rechazo de los ingleses a abandonar las fluxiones «punteadas» de Newton por las diferenciales de Leibniz; de una manera más general, esto implicaba también un deseo de aprovechar los grandes progresos que había hecho recientemente la matemática en la Europa continental[14]. En 1816, y como resultado de la influencia de la Sociedad, se publicó una traducción al inglés del *Calculus* de Lacroix en un volumen, y en unos pocos años los matemáticos ingleses estaban ya en situación de competir con sus contemporáneos del continente. Por ejemplo, George Green (1793-1841), el hijo autodidacta de un molinero, publicó en 1828, para hacerlo circular privadamente, un ensayo sobre electricidad y magnetismo que contenía el importante teorema que hoy lleva su nombre: Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en una región R del plano Oxy limitada por una curva cerrada C, entonces

$$\int_C (P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy) = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

Este teorema, o su análogo en el espacio de tres dimensiones, se conoce también como teorema de Gauss, debido a que los resultados obtenidos por Green fueron ignorados casi completamente hasta que los volvió a descubrir Lord Kelvin en 1846. Mientras tanto, el mismo teorema fue descubierto también de manera independiente por Michel Ostrogradski (1801-1861), y en Rusia lleva su nombre hasta hoy.

---

[12] Una excelente exposición de la obra de Plücker puede verse en la obra de Wilhelm Ernst, *Julius Plücker* (1933). Véase también Alfred Clebsch, «Notice sur les travaux de Jules Plücker», trad. por Paul Mansion, *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 5 (1872), págs. 183-212.

[13] Véase W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge, 1889).

[14] Véase J. M. Dubbey, «The Introduction of the Differential Notation to Great Britain», en los *Annals of Science*, 19 (1963), págs. 37-48.

8. Cayley y la geometría *n*-dimensional

Del nuevo despertar de la matemática en Inglaterra viene a dar testimonio el hecho de que en 1839 se funda el *Cambridge Mathematical Journal*, y poco más tarde produjo Inglaterra uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, un hombre con cuya productividad científica sólo pueden rivalizar Euler y Cauchy. Se trata de Arthur Cayley (1821-1895), un brillante estudiante en Cambridge que ganó casi todos los premios en matemáticas y que, desde muy joven, publicó artículos en el *Cambridge Mathematical Journal* y sus sucesores. Cayley era básicamente un algebrista, más que un geómetra, pero fue precisamente en el aspecto algebraico en el que Plücker mostró su flanco más débil. Uno no puede menos que sorprenderse al observar que Plücker no aprovechó los desarrollos que se habían llevado a cabo ya en la teoría de determinantes, posiblemente debido a su enemistad con Jacobi; y éste puede haber sido el motivo por el que no desarrolló sistemáticamente una geometría analítica de más de tres dimensiones. Plücker se acercó mucho a esta idea al hacer en 1846 su observación de que los cuatro parámetros que determinan una recta en el espacio tridimensional los podemos considerar como cuatro coordenadas, pero sólo mucho más tarde, en 1865, volvió a la geometría analítica y desarrolló la idea de una «nueva geometría del espacio», es decir, de un espacio de cuatro dimensiones en el que las rectas eran los elementos básicos, en vez de los puntos. Mientras tanto, Cayley había iniciado, en 1843, su estudio de la geometría analítica ordinaria del espacio *n*-dimensional, utilizando para ello los determinantes como una herramienta esencial. En su notación, usando coordenadas homogéneas, las ecuaciones de la recta y del plano pueden escribirse respectivamente como

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cayley hace notar que el correspondiente elemento fundamental $(n-1)$-dimensional en el espacio n-dimensional vendrá expresado en coordenadas homogéneas por un determinante análogo a los anteriores, pero de orden $n+1$. Así, muchas de las fórmulas sencillas que son válidas para dos y tres dimensiones, si se expresan adecuadamente, se pueden generalizar con toda facilidad n dimensiones. En 1846 publicó Cayley un artículo en el *Journal de Crelle* en el que de nuevo extendía algunos teoremas válidos para dimensión tres al espacio de cuatro dimensiones, y en 1847 publicaba a su vez Cauchy un artículo en las *Comptes Rendus*, en el que consideraba ya los «puntos analíticos» y las «rectas analíticas» en un espacio de más de tres dimensiones[15].

[15] Para ver algunos fragmentos de éstas y otras obras relacionadas, consúltese el libro de D. E. Smith (ed.), *Source Book in Mathematics*, págs. 524-545.

9. La geometría en Alemania

Sólo un año después de la publicación del primer artículo de Cayley sobre la geometría en dimensiones superiores, aparecieron también en Alemania puntos de vista bastante parecidos, en la *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (1809-1877). Utilizando una notación horrible y completamente nueva, y un estilo de exposición muy oscuro, intentaba construir Grassmann en este libro un «cálculo de magnitudes extensas» que supusieran un número indefinido de elementos o dimensiones para determinarlas, pero lo cierto es que sus esfuerzos por edificar una especie de análisis vectorial para n dimensiones encontraron muy poco eco entre sus contemporáneos[16]. Quizá una de las razones para ello fuera el que la figura dominante de Steiner continuaba defendiendo a ultranza la geometría pura. Steiner publicó en 1832 sus *Systematische Entwicklungen*, en los que daba un tratamiento de la geometría proyectiva basado en consideraciones métricas, y algunos años más tarde la geometría pura encontró otro defensor apasionado en el matemático alemán K. G. C. von Staudt (1798-1867), que en su obra *Geometrie der Lage*, de 1847, construyó la geometría proyectiva sin hacer ninguna referencia a magnitudes ni a números. Mientras tanto en Francia la obra de Poncelet se había visto continuada por Chasles, que se había graduado también en la École Polytechnique, de la que llegó a ser profesor de geometría. A Chasles se debe, entre otras cosas, el énfasis puesto en las seis razones dobles o razones anarmónicas

$$\frac{c-a}{c-b}\Big/\frac{d-a}{d-b}$$

entre cuatro puntos alineados o entre cuatro rectas concurrentes, así como en la invariancia de estas razones bajo transformaciones proyectivas. Su *Traité de géométrie supérieure* (1852) tuvo también la importancia de establecer el uso de segmentos orientados en la geometría pura. Chasles, de quien no podemos dejar de mencionar su famosa obra histórica *Aperçu historique sur l'origine et la développement des méthodes en géométrie* (1837), fue uno de los últimos grandes geómetras proyectivos franceses, y fue principalmente en Alemania donde su obra se vio continuada por hombres tales como los ya mencionados Steiner y Von Staudt. A este último en particular se debe en gran parte la forma que iba a adoptar en el futuro la geometría proyectiva sintética[17].

10. Lobachewsky y Ostrogradsky

No ha resultado fácil presentar un cuadro general del desarrollo de la geometría durante la primera mitad del siglo XIX, debido a las corrientes opuestas y

[16] Una exposición resumida de las ideas principales de Grassmann puede verse en J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1963), págs. 252-257, y en el libro de Smith *Source Book in Mathematics*, págs. 684-696, aparece traducido al inglés un fragmento de la *Ausdehnugslehre* de Grassmann.

[17] Para más detalles, véase J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, págs. 92-101.

a las interrelaciones entre los numerosos aspectos del tema, pero hubo uno de estos aspectos, la aparición de la geometría no-euclídea, que se desarrolló de una manera completamente independiente de los movimientos que hemos descrito más arriba. Sin embargo, también en este caso nos encontramos con una sorprendente situación de simultaneidad de descubrimiento, ya que durante el primer tercio del siglo XIX se le ocurrieron ideas muy parecidas a tres matemáticos, uno alemán, otro húngaro y el tercero ruso. Ya dijimos que durante la segunda década del siglo Gauss había llegado a la conclusión de que los esfuerzos por demostrar el postulado euclídeo de las paralelas que habían hecho Saccheri, Lambert, Legendre y su amigo húngaro Farkas Bolyai eran esfuerzos vanos, y que eran posibles otras geometrías distintas de la de Euclides. No obstante, Gauss no comunicó a nadie este punto de vista; simplemente había elaborado esta idea, como él decía, «para sí mismo». Por lo tanto, los intentos de demostrar el postulado de las paralelas continuaron, y entre los que perseguían una tal demostración estaba el joven Nicolai Ivanovitch Lobachewsky (1793-1856), hijo de un modesto funcionario del gobierno ruso que murió cuando Nicolai tenía sólo siete años. Lobachewsky cursó estudios en la universidad de Kazán, a pesar de las difíciles circunstancias por las que atravesaba la familia, y allí entró en contacto con los eminentes profesores que habían llegado a esta universidad desde Alemania, entre los que estaba J. M. Bartels (1769-1836), con el que anteriormente había estudiado ya Gauss. A la temprana edad de 21 años Lobachewsky entró a formar parte del cuadro de profesores, y en 1827 fue nombrado rector de la Universidad. Allí permaneció, como profesor y como administrador, hasta el final de sus días, a pesar de que la ceguera y la falta de aprecio por su obra entristecieron sus últimos años.

Lobachewsky y Ostrogradsky fueron ambos matemáticos rusos eminentes, pero eran muy distintos tanto por sus intereses matemáticos como políticos. Ostrogradsky había estudiado durante largo tiempo en París, donde se vio fuertemente influenciado por el análisis «francés» de Cauchy, tema en el que se estaban haciendo grandes progresos. Lobachewsky en cambio había sido formado dentro de un espíritu más «alemán» y geométrico, en el que tanto las fronteras como la dirección del progreso estaban más controvertidas. Además, Ostrogradsky provenía de una familia aristocrática y rica, y se había formado en un ambiente social y político conservador, mientras que Lobachewsky, enfrentado siempre con la pobreza y las privaciones, no disfrutó nunca de una posición social desahogada y apoyó a menudo causas liberales impopulares en su entorno. Así ocurrió que en su época Ostrogradsky gozó de una estimación de la que no gozó Lobachewsky; hoy en cambio se conoce el nombre de Ostrogradsky, si acaso, asociado a un único teorema, mientras que a Lobachewsky se le considera como el «Copérnico de la geometría», el hombre que revolucionó este campo creando en él una rama totalmente nueva, la «geometría lobachewskiana», que venía a demostrar que la geometría euclídea no era la ciencia exacta de la verdad absoluta, como se había admitido hasta entonces. En cierto sentido el descubrimiento de la geometría no-euclídea supuso un golpe tan devastador para la filosofía kantiana como lo fue para el pensamiento pitagórico el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. La obra de Lobachewsky mostraba que era necesario revisar los conceptos fundamentales que se admitían sobre la naturaleza de la matemática, pero sus

colegas estaban demasiado cerca de la situación como para verla bajo una perspectiva adecuada, y el explorador de estos dominios desconocidos tuvo que desarrollar sus ideas en un solitario aislamiento.

11. La geometría no euclídea

El punto de vista revolucionario de Lobachewsky no parece precisamente haber caído sobre él como una especie de inspiración repentina. En un bosquejo general de la geometría que redactó en 1823, probablemente para usarlo como notas de clase, escribía Lobachewsky sobre el postulado de las paralelas simplemente que «no se ha descubierto hasta ahora ninguna demostración rigurosa de su verdad»[18]. Según parece, por estas fechas Lobachewsky no excluía la posibilidad de que se descubriera aún una demostración tal. Tres años más tarde leía en la universidad de Kazán un trabajo en francés (que desgraciadamente se ha perdido) sobre los principios de la geometría, que incluía «une démonstration rigoreuse du théorème des paralleles». El año 1826 en que se hizo público este trabajo puede considerarse como la fecha de nacimiento no oficial de la geometría lobachewskiana, pues fue entonces cuando el autor presentó muchos de los teoremas característicos de la nueva teoría. Otros tres años más tarde publicó Lobachewsky en el *Kazan Messenger* correspondiente al año 1829 un artículo titulado «Sobre los Principios de la Geometría», que marca el nacimiento oficial de la geometría no-euclídea. Entre 1826 y 1829 parece haber llegado Lobachewsky al profundo convencimiento de que el quinto postulado de Euclides no podía ser demostrado a partir de los otros cuatro, y en este artículo de 1829 se convirtió en el primer matemático que cubrió la revolucionaria etapa de hacer pública una geometría construida expresamente sobre una hipótesis que contradecía frontalmente el postulado euclídeo del paralelismo: Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC y que no corta a la recta AB. Con este nuevo postulado dedujo Lobachewsky una teoría geométrica armónica, sin contradicciones lógicas inherentes. Se trataba pues de una geometría correcta desde cualquier punto de vista, pero parecía tan opuesta al sentido común, incluso para Lobachewsky, que él mismo la llamó «geometría imaginaria».

Lobachewsky fue perfectamente consciente del significado de su descubrimiento de la «geometría imaginaria», como se deduce claramente del hecho que durante la veintena de años que van del 1835 al 1855 escribió tres exposiciones completas de la nueva geometría: En 1835-1838 apareció su obra *Nuevos fundamentos de geometría* en ruso; en 1840 publicó sus *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas* en alemán, y en 1855 se publicó su último libro, *Pangeometría*, simultáneamente en francés y en ruso. Todos estos libros han sido traducidos más tarde a otros muchos idiomas, entre ellos al inglés. Gauss supo de las contribuciones de Lobachewsky a la geometría no-euclídea por la segunda de las tres obras

[18] Véase V. Kagan, *N. Lobachewsky and his Contribution to Science* (1957), pág. 33, así como Alexander Vucinich, «Nikolai Ivanovich Lobachevskii. The Man behind the First Non-Euclidean Geometry», en *Isis*, 53 (1962), págs. 465-481.

que hemos mencionado, y por recomendación suya Lobachewsky fue elegido en 1842 miembro de la Sociedad de Ciencias de Gotinga. En cartas a sus amigos, Gauss elogió la obra de Lobachewsky, pero nunca lo apoyó en letra impresa, por temor, según sus palabras, a la mofa de «los Beocios». En parte por este motivo la nueva geometría se difundió sólo muy lentamente.

12. Los Bolyai

El matemático húngaro amigo de Gauss Farkas Bolyai, había pasado la mayor parte de su vida intentando demostrar el postulado de las paralelas, y cuando descubrió que su propio hijo Janos Bolyai (1802-1860) se encontraba también absorbido por el problema de las paralelas, el padre, un profesor de matemáticas de provincias, escribió a su hijo, que era un brillante oficial del ejército:

> Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque, lo mismo que ellas, puede llegar a absorver todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida.

El hijo no se dejó disuadir y continuó sus esfuerzos hasta que, hacia el año 1829, llegó a la misma conclusión a la que había llegado sólo unos pocos años antes Lobachewsky. En vez de intentar demostrar lo imposible, desarrolló Bolyai lo que llamó la «Ciencia Absoluta del Espacio», partiendo de la hipótesis de que por un punto exterior a una recta se pueden trazar, en el plano que los contiene, infinitas rectas paralelas a la recta dada. Janos envió sus reflexiones a su padre, quien las publicó en forma de apéndice a un tratado que había escrito y que llevaba un largo título en latín que comenzaba con la palabra *Tentamen*. Este *Tentamen* del viejo Bolyai lleva un *imprimatur* fechado en 1829, el mismo año en que publicó Lobachewsky su artículo en el *Kazan Messenger*, pero el hecho es que no apareció hasta 1832.

La reacción de Gauss a la «Ciencia Absoluta del Espacio» fue análoga a la que tuvo en el caso de Lobachewsky: sincera y calurosa aprobación, pero total falta de apoyo público en forma impresa. Cuando Farkas Bolyai le escribió para pedirle una opinión sobre la obra tan heterodoxa de su hijo, Gauss respondió que no podía elogiar en conciencia la obra de Janos sin elogiarse a sí mismo, dado que había mantenido los mismos puntos de vista desde hacía muchos años. El joven y temperamental Janos se sintió molesto e inquieto, temiendo que se le tratase de usurpar la prioridad en el descubrimiento. La persistente falta de reconocimiento público, junto con la publicación de la obra de Lobachewsky en alemán en 1840, le produjo tal frustración que ya no publicó nada más. En consecuencia, la parte del león en los honores correspondientes a la invención y desarrollo de la geometría no-euclídea ha correspondido a Lobachewsky[19].

[19] Partes de las obras tanto de Lobachewsky como de Bolyai pueden verse en inglés en muchos lugares, incluido el *Source Book* de Smith. Una exposición muy completa aparece en el libro de Friedrich Engel y Paul Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichtenklidischen Geometrie* (1898-1913). Entre las exposiciones más extensas en inglés está la de Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (1955), que contiene sendas traducciones al inglés de la *Teoría de las paralelas* de Lobachwesky, y de la *Ciencia absoluta del espacio*, de Bolyai.

13. La geometría riemanniana

La geometría no-euclídea continuó siendo durante varias décadas un aspecto marginal de la matemática, hasta que se integró en ella completamente gracias a las concepciones extraordinariamente generales de G. F. B. Riemann (1826-1866). Riemann era hijo del pastor protestante de una pequeña aldea, y se crió en circunstancias económicamente muy modestas, conservando a lo largo de su vida una salud frágil y un carácter tímido y poco comunicativo. A pesar de todo, consiguió obtener una buena educación, primero en Berlín y más tarde en Gotinga, donde se doctoró con una tesis sobre teoría de funciones de variable compleja. En esta tesis aparecen las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, que debe satisfacer una función analítica $w = f(z) = u + iv$ de una variable compleja $z = x + iy$, aunque estas condiciones se conocían ya desde la época de Euler y d'Alembert[20]. Esta misma tesis conducía también al concepto de superficie de Riemann, anticipando así en cierto modo la parte que la topología estaba destinada a jugar en el análisis.

En 1854, Riemann alcanzó el rango de *Privatdozent* en la universidad de Gotinga y, según la costumbre, tuvo que leer una *Habilitationsschrift* ante la Facultad. El resultado en el caso de Riemann fue la más famosa disertación de habilitación docente de toda la historia de la matemática, ya que presentaba un amplio y profundo panorama de la geometría globalmente considerada. Esta tesis de habilitación llevaba el título de «Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen» (es decir, «Sobre las Hipótesis en que se apoyan los Fundamentos de la Geometría»), pero no presentaba un ejemplo concreto, sino que insistía en cambio en una visión global de la geometría como el estudio de las variedades de cualquier número de dimensiones en cualquier tipo de espacio. Así pues, sus geometrías eran no-euclídeas en un sentido mucho más general que en el caso de Lobachewsky, donde la cuestión esencial era simplemente la de cuántas paralelas se podían trazar por un punto a una recta. Riemann consideraba que la geometría no debería tratar ni siquiera necesariamente de puntos o rectas o del espacio en el sentido usual, sino de conjuntos de n-uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo con ciertas leyes.

Entre las reglas más importantes en cualquier geometría está, según Riemann, la que nos da la distancia entre dos puntos infinitamente próximos. En la geometría euclídea ordinaria está «métrica» viene dada por la expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

pero se podrían utilizar otras infinitas fórmulas para calcular la distancia, y, desde luego, la métrica utilizada determinará las propiedades del espacio, es decir, su geometría. Un espacio cuya métrica sea de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}\,dx^2 + g_{12}\,dx\,dy + g_{13}\,dx\,dz \\ & + g_{21}\,dy\,dx + g_{22}\,dy^2 + g_{23}\,dy\,dz \\ & + g_{31}\,dz\,dx + g_{32}\,dz\,dy + g_{33}\,dz^2 \end{aligned}$$

[20] Véase E. T. Bell, *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940), pág. 465.

donde las g_{ij} sean o bien constantes o, de una manera aún más general, funciones de x, y, z, se conoce con el nombre de «espacio de Riemann». Así, un espacio (localmente) euclídeo no es más que un caso muy especial de un espacio de Riemann en el que se verifica que $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$ y todos los demás g_{ij} son cero. Riemann desarrolló incluso a partir de la métrica una fórmula para la curvatura gaussiana de una «superficie» en uno de sus «espacios». No es sorprendente por lo tanto que después de la disertación de Riemann, y casi por única vez en su larga carrera científica, Gauss expresara entusiasmo por la obra de algún otro colega[21].

Hoy utilizamos el nombre de «geometría riemanniana» también en un sentido más restringido: el de la geometría plana que se obtiene de la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri, si abandonamos además la infinitud de las rectas. Se puede construir un modelo de esta geometría interpretando el «plano» como la superficie de una esfera, y una «línea recta» como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera. En este caso la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos ángulos rectos, mientras que en la geometría de Lobachewsky y Bolyai (que corresponde a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri) la suma de los ángulos es siempre menor que dos rectos. Este uso del nombre de Riemann no hace justicia, sin embargo, a los cambios tan fundamentales en el pensamiento geométrico que introdujo en 1854 su célebre *Habilitationsschrift* (que no se publicó hasta 1867, póstumamente ya). Fue precisamente la sugerencia de Riemann de estudiar los espacios métricos curvos en general, en vez de los casos especiales tales como la geometría sobre la esfera, la que hizo posible finalmente la teoría general de la relatividad. Riemann mismo hizo importantes contribuciones a la física teórica en diversos campos, y así resultó algo completamente justo el que en 1859 fuera nombrado Riemann para suceder a Dirichlet en la cátedra de la Universidad de Gotinga que ocupara en su día Gauss.

Al mostrar que la geometría no-euclídea correspondiente al hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo sea mayor que dos rectos, se verifica sobre la superficie de una esfera, como hemos dicho, lo que venía a demostrar esencialmente Riemann era la consistencia de los axiomas en que se basa dicha geometría. En el mismo sentido Eugenio Beltrami (1835-1900), que fue compañero de Cremona en Bolonia, y más tarde profesor en Pisa, Pavía y Roma, demostró que también había a mano un modelo análogo para la geometría de Lobachewsky. Se trata de la superficie engendrada al girar una tractriz alrededor de su asíntota, superficie conocida como «seudoesfera» debido a que tiene curvatura constante negativa, mientras la esfera tiene curvatura constante positiva. Si definimos una «línea recta» por dos puntos de la seudoesfera como la geodésica que une estos dos puntos, entonces la geometría que resulta cumple todas las propiedades que se puedan deducir de los postulados de Lobachewsky. Dado que el plano es una superficie de curvatura constante e igual cero, puede considerarse la geometría euclídea como un caso intermedio entre los dos tipos de geometría no-euclídea, la hiperbólica y la elíptica.

[21] Véase E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), págs. 484-509.

14. Espacios de dimensión superior

La unificación de la geometría que había logrado Riemann resultaba especialmente importante en el aspecto «microscópico» de la geometría diferencial o geometría local o de «pequeña escala». La geometría analítica o geometría a «gran escala» no había cambiado mucho. De hecho, la disertación de Riemann tuvo lugar más o menos hacia la mitad del retiro geométrico que se autoimpuso Plücker, durante el cual hubo en Alemania una disminución en la actividad en torno a la geometría analítica. En 1865 volvió a publicar Plücker, y esta vez en revistas inglesas y no en el *Journal de Crelle*, debido probablemente a que Cayley se había interesado por la obra de Plücker. Ese año publicó un artículo en las *Philosophical Transactions* (conocida también como *Phil. Trans.* simplemente), artículo que desarrolló tres años más tarde en forma de libro con el título de *Nueva geometría del espacio*. Aquí formulaba Plücker explícitamente un principio que ya había insinuado unos 20 años antes. No es necesario, afirmaba, considerar un espacio como una totalidad de puntos; se puede visualizar igualmente bien como compuesto de rectas. De hecho, cualquier figura que se haya considerado previamente como un lugar geométrico o conjunto de puntos, puede ser considerada en sí como un *elemento* del espacio, y la dimensionalidad del espacio corresponderá al número de parámetros que se necesiten para determinar este elemento. Si consideramos nuestro espacio tridimensional ordinario como un «haz cósmico de varillas infinitamente delgadas e infinitamente largas», en vez de como una «aglomeración de perdigones de caza infinitamente pequeños»[22], entonces tendrá dimensión cuatro en vez de tres. En 1868, el mismo año en que publicó Plücker su libro sobre este tema, desarrollaba Cayley analíticamente en las *Phil. Trans.* la idea de considerar el plano cartesiano bidimensional ordinario como un espacio de dimensión cinco, cuyos elementos son cónicas. En el libro de Plücker *Neue Geometrie des Raumes* hay más ideas nuevas: La representación geométrica de una ecuación única $f(x, y, z)=0$ en coordenadas cartesianas de puntos es una superficie; dos ecuaciones simultáneas determinan una curva, y tres ecuaciones uno o más puntos, en general. En su «nueva geometría» del espacio de rectas de dimensión cuatro, Plücker llama a la «figura» representada por una única ecuación $f(r, s, t, u)=0$ en las cuatro coordenadas de dicho espacio de rectas, un «complejo»; dos ecuaciones representarán una «congruencia» y tres una «serie» de rectas. Plücker descubrió que un complejo cuadrático de rectas tiene propiedades análogas a las de una superficie cuadrática o cuádrica, pero no vivió lo suficiente como para completar el amplio estudio que planeaba. Murió el año 1868, el mismo año en que apareció su *Neue Geometrie des Raumes*, editada por uno de sus más brillantes discípulos, Felix Klein (1849-1925).

15. El programa de Erlangen, de Klein

Klein había sido ayudante de Plücker en la universidad de Bonn durante el regreso de éste a la geometría, y en cierto sentido se convirtió en el sucesor de

[22] Véase E. T. Bell, *Men of Mathematics*, pág. 400.

Plücker en su entusiasmo por la geometría analítica. Sin embargo, la obra del joven Klein en este campo se orientó en una dirección diferente, dirección que sirvió para introducir un importante elemento de unidad en la diversidad de resultados nuevos producidos por la investigación. El nuevo punto de vista pudo haber sido en parte el resultado de las visitas de Klein a París, donde se habían desarrollado ya las sugerencias de Lagrange sobre la teoría de grupos, especialmente a través de los grupos de sustituciones, hasta llegar a constituir una rama del álgebra en plena floración. Klein quedó profundamente impresionado por las posibilidades unificadoras que encerraba el concepto de grupo, y se dedicó durante la mayor parte del resto de su vida a desarrollar, a aplicar y a popularizar este concepto. En parte de este trabajo colaboró con el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899), compañero de Klein en sus años de estudiantes en Gotinga, que descubrió las transformaciones de contacto y escribió un tratado monumental en tres volúmenes sobre la teoría de grupos de transformaciones (1888-1893). Las transformaciones de contacto de Lie, sistematizadas por Klein, establecían una correspondencia biunívoca entre las rectas y las esferas del espacio euclídeo, de tal manera que a rectas que se cortan correspondían esferas tangentes[23]. Hay que recordar que, según las ideas de Plücker, tanto las rectas como las esferas de un espacio euclídeo tridimensional constituían espacios de cuatro dimensiones. En su forma más general, y como su nombre indica, las transformaciones de contacto son transformaciones analíticas que transforman superficies tangentes en superficies tangentes.

Un conjunto de elementos se dice que forma un grupo con respecto a una operación dada, si (1) el conjunto es cerrado bajo dicha operación, (2) el conjunto contiene un elemento identidad con respecto a la operación, (3) para todo elemento en el conjunto hay un elemento inverso con respecto a la operación, y (4) la operación es asociativa. Los elementos del conjunto pueden ser números (como en la aritmética), puntos u otras figuras (en geometría), transformaciones (en álgebra o en geometría), o bien cualesquiera otros objetos en absoluto. La operación puede estar definida aritméticamente (tal como en el caso de la suma o la multiplicación) o geométricamente (como una rotación en torno a un punto o a un eje), o por cualquier otra regla que permita combinar dos elementos arbitrarios del conjunto base (tales como dos transformaciones) para obtener un tercer elemento del conjunto. La generalidad que encierra el concepto de grupo es evidente, y Klein, cuando accedió a su puesto de profesor en Erlangen en 1872, pronunció una famosa disertación inaugural en la que mostró cómo podría ser aplicado este concepto como un medio adecuado para caracterizar las diversas geometrías que habían ido apareciendo a lo largo del siglo.

Esta disertación de Klein, que se hizo famosa con el nombre de *Erlanger Programm*, describía una geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones. Por lo tanto, cualquier clasificación de los grupos de transformaciones se convierte inmediatamente en una clasificación de las geometrías. La geometría euclídea plana, por ejemplo, consiste en el estudio de las propiedades de

[23] Véase J. L. Coolidge, *History of Geometrical Methods*, págs. 298 y sigs.

las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de transformaciones que está engendrado por las traslaciones y rotaciones en el plano, es decir, las llamadas transformaciones rígidas o movimientos, lo que viene a ser equivalente al axioma no formulado por Euclides de que las figuras no varían en sus propiedades cuando se las somete a movimientos en el plano. Las transformaciones rígidas del plano pueden expresarse analíticamente de la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

donde $ae - bd = 1$; estas transformaciones son los elementos del grupo. La «operación» que combina dos de estos elementos es simplemente la de hacer actuar las dos transformaciones en el orden correspondiente, una tras otra. Es fácil ver que si la transformación anterior viene seguida por otra del mismo tipo

$$\begin{cases} x'' = Ax' + By' + C \\ y'' = Dx' + Ey' + F \end{cases}$$

el resultado final de las dos transformaciones realizadas sucesivamente es equivalente a una transformación única del mismo tipo, que transformará el punto (x, y) en el punto (x'', y'').

Si en este grupo de transformaciones reemplazamos la restricción de que $ae - bd = 1$ por la menos exigente, y por lo tanto más general, de que $ae - bd \neq 0$, entonces las nuevas transformaciones (entre las que estarán todas las anteriores, obviamente) también forman un grupo. Sin embargo, las longitudes y las áreas ya no permanecerán necesariamente invariantes bajo estas transformaciones, pero una cónica de un cierto tipo (elipse, parábola o hipérbola) se transformará en otra cónica del mismo tipo. Tales transformaciones, que había estudiado ya anteriormente Möbius, se conocen con el nombre de transformaciones afines, y caracterizan una geometría conocida como «geometría afín», nombre que deriva del hecho de que a cualquier punto finito le corresponde otro punto finito bajo cualquiera de estas transformaciones. Es evidente, pues, que la geometría euclídea, desde el punto de vista de Klein, es sólo un caso especial de la geometría afín. Y la geometría afín se convierte a su vez solamente en un caso especial de una geometría aún más general, la geometría proyectiva. Una transformación proyectiva es la que puede escribirse en la forma

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \qquad y' = \frac{Ax + By + c}{dx + ey + f}$$

Obviamente, si $d = e = 0$ y $f = 1$, entonces la transformación proyectiva se reduce a una transformación afín. Entre las propiedades interesantes de las transformaciones proyectivas están los dos hechos de que (1) una cónica se transforma en otra cónica y (2) la razón doble permanece invariante. Pappus

conocía ya estas propiedades un milenio y medio antes, pero no tuvo en cambio ni la menor noción del concepto de grupo, que fue el que hizo posible una clasificación tan perfecta y elegante de las geometrías. De hecho, para Pappus había *una única* geometría, puesto que los puntos ideales o del infinito de la geometría proyectiva habrían sido inconcebibles en la antigüedad. El *Erlanger Programm* de Klein fue un producto tan claramente típico del siglo XIX que no hubiera podido ser transferido, conservando su significado, a *ninguna* época anterior. Al principio tuvo una circulación bastante limitada, pero antes de que finalizara el siglo llegó a ejercer una gran influencia sobre el mundo matemático internacional[24]. La persistente influencia del *Erlanger Programm* hasta el día de hoy puede verse en casi cualquier exposición moderna de la geometría elemental[25].

16. El modelo hiperbólico de Klein

La obra de Klein viene a ser en cierto sentido la culminación de «La época heroica de la geometría», puesto que enseñó y dio conferencias durante medio siglo. Su entusiasmo era tan contagioso que algunas figuras de finales del siglo XIX se mostraron dispuestas a profetizar que no sólo la geometría sino toda la matemática quedaría incluida finalmente dentro de la teoría de grupos. Sin embargo, no toda la obra de Klein se refiere a grupos. Su clásica historia de la matemática a lo largo del siglo XIX (que se publicó póstumamente)[26] muestra lo familiarizado que estaba con todos los aspectos del tema; hoy se recuerda su nombre también en topología, asociado a la superficie de una sola cara conocida como «botella de Klein». También se interesó mucho por la geometría no-euclídea, a la que dio sus nombres de «geometría elíptica» y «geometría hiperbólica», correspondientes respectivamente a las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo; para la segunda propuso un modelo muy sencillo como alternativa al diferencial de Beltrami. Representemos el plano hiperbólico por el interior de un círculo C en el plano euclídeo, y llamemos «línea recta hiperbólica» que pasa por los dos puntos P_1 y P_2 al intervalo abierto de la recta euclídea P_1P_2 que queda en el interior de C; llamemos «distancia» entre los puntos P_1 y P_2 interiores al círculo, al número real positivo

$$\ln \frac{P_2Q_1 \cdot P_1Q_2}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}$$

donde Q_1 y Q_2 son los puntos de intersección de la recta euclídea P_1P_2 con la circunferencia del círculo C (Fig. 24.1). Con una definición adecuada de «ángulo»

[24] Una traducción al inglés, con el título «A Comparative Review of Recent Researches in Geometry», apareció en 1893 en el segundo volumen del *Bulletin of the New York Mathematical Society* (llamado ahora *Bulletin of the American Mathematical Society*).

[25] Véase, por ejemplo, Annita Tuller, *A Modern Introduction to Geometries* (Princeton, N. Y.; D. Van Nostrand Co., 1967).

[26] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927). Hay traducción inglesa en Math Sci Press (Brookline, Mass., 1979).

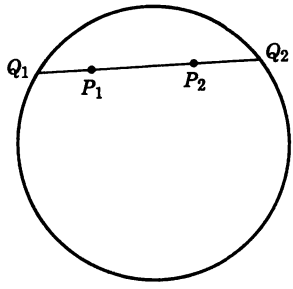


Figura 24.1

entre dos «rectas», los «puntos», «rectas» y «ángulos» en este modelo hiperbólico de Klein tienen propiedades análogas en todo a las de la geometría euclídea, excepto en lo relativo al paralelismo, que no verifican el postulado *V* de Euclides, sino el de Lobachewsky, como se comprueba inmediatamente en la figura.

Desde Monge no había habido un maestro que ejerciese una influencia tan intensa, porque además de sus sugerentes lecciones, Klein se interesó por la enseñanza de la matemática en sus diversos niveles y ejerció también una gran influencia en los círculos pedagógicos. En 1886 fue nombrado profesor de matemáticas en Gotinga y, bajo su liderazgo, esta universidad se convirtió en una especie de Meca a la que acudían estudiantes de muchos países, incluso de América. Durante sus últimos años Klein desempeñó de manera muy propia y eficaz el papel de «viejo estadista» en el reino de la matemática[27]. Así pues, la Edad de Oro de la geometría moderna, que había comenzado de manera tan prometedora en Francia en la École Polytechnique, con la obra de Lagrange, de Monge y de Poncelet, alcanzó su cenit en Alemania en la universidad de Gotinga, gracias a la investigación y la enseñanza de Gauss, de Riemann y de Klein.

Bibliografía

Bolyai, Johann: *Geometrische Untersuchungen*, ed. por Paul Stäckel (Leipzig: B. G. Teubner, 1913).

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, trad. H. S. Carslaw (New York: Dover reprint, 1955).

Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956).

Cajori, Florian: *History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1931).

Chasles, Michel: *Apercu historique sur l'origine et la développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837; 2.ª ed., París, 1875).

Clebsch, Alfred: «Notice sur les travaux de Jules Plücker», trad. Paul Mansion, *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **5** (1872), 183-212.

Coolidge, J. L.: «The Heroic Age of Geometry», *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35** (1929), 19-37.

——: *A History of Geometrical Methods* (New York: Dover reprint, 1963).

[27] Véase, por ejemplo, G. A. Miller, «Felix Klein and the History of Mathematics», en los *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13 (1927), págs. 611-613.

DeVries, Hk.: «How Analytic Geometry Became a Science», *Scripta Mathematica*, 14 (1948), 5-15.
Engel, Friedrich, y Paul Stäckel: *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig: B. G. Teubner, 1898-1913, 2 vols.).
Ernst, Wilhelm: *Julius Plücker* (Bonn, 1933).
Fano, G.: «Gegensatz von synthetischer und analytischer. Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert», *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. III, parte 1, 1.ª mitad, págs. 223-288; trad. francesa en *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, tomo III, vol. 1, págs. 185-259.
Kagan, V.: *N. Lobachevsky and his Contribution to Science* (Moscow: Foreign Languages Publishing House, 1957).
Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlín: Springer, 1926-1927, 2 vols.).
——: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, vol. II, *Geometry* (New York: Dover paperback, 1939).
Kötter, Ernst: «Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, von Monge bis auf Staudt, 1847», *Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung*, 5, parte 2 (1898-1901).
Loria, Gino: *Storia delle matematiche* (Turín: Sten, 1929-1935, 3 vols.).
——: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4.ª ed. Padua: Cedam, 1931).
Nagel, Ernest: «The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry», *Osiris*, 7 (1939), 142-224.
Patterson, Boyd C.: «The Origins of the Geometric Principle of Inversion», *Isis*, 19 (1933), 154-180.
Pierpont, James: «The History of Mathematics in the Nineteenth Century», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11 (1904), 136-159.
Schmidt, Franz, y Paul Stäckel (eds.): *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai* (Leipzig, 1899).
Simon, Max: «Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsbände*, 1 (1906).
Smith, D. E.: *Source Book in Mathematics* (New York: Dover reprint, 1959).
Sommerville, D. M. Y.: *Bibliography of Non-Euclidean Geometry* (London: Harrison, 1911).
Vucinich, Alexander: «Nikolai Ivanovich Lobachevskii, "The Man behind the First Non-Euclidean Geometry"», *Isis*, 53 (1962), 465-481.

Ejercicios

1. El papel de la École Polytechnique, a fin de cuentas una escuela de ingeniería, ¿fue el de una ayuda o el de un obstáculo para el renacimiento de la geometría pura durante el siglo XIX? Explíquese claramente.
2. Cítese una media docena de casos de descubrimientos independientes y casi simultáneos en geometría durante la primera mitad del siglo XIX, mencionando en cada caso los papeles desempeñados por los distintos descubridores.
3. Dense los nombres de tres importantes geómetras en Francia y tres en Alemania durante el siglo XIX, mencionando algunas de sus contribuciones principales e indicando de paso si fueron básicamente geómetras analíticos o sintéticos.
4. ¿Fue una casualidad o una consecuencia natural y lógica el hecho de que la geometría no-euclídea apareciera en primer lugar en Alemania, Rusia y Hungría, y no en Francia ni en Inglaterra? Dar razones precisas que apoyen la respuesta.

5. El descubrimiento y la justificación del principio de dualidad ¿fueron resultado de los desarrollos de la geometría analítica o de la geometría sintética? Explíquese.
6. ¿Cómo explicaría usted el hecho de que Inglaterra, un verdadero bastión de la geometría durante el siglo XVIII, no consiguiera situarse en primer lugar durante el renacimiento de la geometría pura del siglo XIX?
7. Descríbanse varios aspectos en los que la geometría con coordenadas del siglo XIX se distinguió de la de Fermat y Descartes.
8. Hállese el eje radical o «recta de Gaultier» del par de circunferencias

$$x^2+y^2+2x-4y=0$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2-1=0$$

Dibújense varias circunferencias de la familia radical junto con el eje radical.

9. Demuéstrese que, con la definición de distancia de Klein para su modelo de la geometría hiperbólica, tres puntos alineados en el orden P, Q, R, tienen siempre la propiedad de que $\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$.
10. Compruébese que en el modelo de Klein toda recta es infinitamente larga en el sentido de que la distancia entre dos de sus puntos crece indefinidamente si uno de los puntos se mantiene fijo y el otro se hace tender hacia uno de los puntos de intersección de la recta euclídea en cuestión con la circunferencia del círculo.
11. Para el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, calcúlense los radios de los círculos inscrito y exinscritos, así como el radio del correspondiente círculo de los nueve puntos.
12. Constrúyanse con regla y compás el círculo inscrito, los tres círculos exinscritos y el círculo de los nueve puntos de un triángulo cualquiera.
13. Demostrar que el círculo de los nueve puntos de un triángulo rectángulo isósceles es tangente a los dos círculos, inscrito y circunscrito.
14. Demostrar que, en coordenadas planas homogéneas, el inverso $P'(x', y', t')$ del punto $P(x, y, t)$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2=a^2t^2$ viene dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= a^2xt \\ y' &= a^2yt \\ t' &= x^2+y^2 \end{aligned}$$

15. Demuéstrese que la inversa de una parábola no es una parábola.

*16. Demuéstrese que el centro del círculo de los nueve puntos de cualquier triángulo es el punto medio del segmento cuyos extremos son el circuncentro y el ortocentro del triángulo.

*17. Demuéstrese que si los ángulos de la base de un cuadrilátero son ángulos rectos, y si los dos lados perpendiculares a la base son iguales, entonces los ángulos superiores tienen que ser iguales. ¿Son estos ángulos agudos, rectos u obtusos? Explíquese claramente.

*18. Demuéstrese que, en el plano, la inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por el centro de inversión. ¿Cuál es la inversa de una circunferencia que pase por el centro de inversión?

*19. ¿Una inversión del espacio tridimensional con respecto a una esfera, transformará un plano en un plano? Explíquese detalladamente.

*20. Demuéstrese que una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión se transforma en ella misma, pero que el inverso del centro no es el centro de la circunferencia invertida.

*21. Si $C_1=0$ y $C_2=0$ son dos circunferencias del plano, descríbanse los miembros de la familia $K_1C_1+K_2C_2=0$ para los tres casos siguientes: (a) $C_1=0$ y $C_2=0$ se cortan; (b) $C_1=0$ y $C_2=0$ son tangentes; (c) $C_1=0$ y $C_2=0$ no tienen ningún punto común.

*22. Compruébese el teorema de Green, usando una integral de línea y una integral doble, para el caso en que $P=xy$ y $Q=x^2+y^2$, y la región R es la región del plano limitada por el cuadrado unidad de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 0) y (1, 1).

*23. Demuéstrese que una cónica se transforma por una inversión en una cúbica o una cuártica, según que el centro de inversión esté o no sobre la cónica.

*24. ¿Cuál sería la dimensionalidad de una geometría plana en la que los elementos fundamentales no fueran los puntos, sino (a) las rectas, o (b) las circunferencias, o (c) las parábolas, o (d) las secciones cónicas, o (e) las curvas algebraicas de grado tres?

Capítulo XXV
La aritmetización del análisis

> En la mayor parte de las ciencias una generación derriba lo que otra había construido, y lo que uno parecía haber demostrado firmemente otro lo deshace. Sólo en la matemática cada generación construye un nuevo piso sobre la vieja estructura.
>
> *Hermann Hankel*

1. La teoría de series de Fourier

El análisis, es decir, el estudio de los procesos infinitos, lo habían entendido tanto Newton como Leibniz como referido a las llamadas magnitudes continuas, tales como longitudes, áreas, velocidades, aceleraciones, etc., mientras que la teoría de números tiene como dominio claramente definido el mundo discreto de los números naturales. Hemos visto, sin embargo, que Bolzano intentó dar demostraciones puramente aritméticas de proposiciones tales como el teorema de separación de raíces del álgebra elemental, que parecía depender evidentemente de las propiedades de las funciones continuas; y Plücker había aritmetizado completamente la geometría analítica. La teoría de grupos se había ocupado originalmente de conjuntos discretos de elementos, pero Klein abordó una unificación de los aspectos continuos y los discretos de la matemática bajo el concepto de grupo. El siglo XIX fue ciertamente un período de puesta en correlación en la matemática, y la aritmetización del análisis, frase acuñada por Klein mismo en 1895, fue uno de los más importantes aspectos de esta tendencia.

La palabra clave del análisis es, desde luego, la de «función», y fue precisamente en la clarificación de este término como fue surgiendo la tendencia a la aritmetización. Ya durante la primera mitad del siglo XVIII habían aparecido diferencias de opinión sobre la manera de representar funciones, cuando d'Alembert y Euler dieron sus soluciones al problema de la cuerda vibrante, en la llamada «forma cerrada», utilizando un par de funciones arbitrarias, mientras que Daniel Bernoulli había encontrado una solución en términos de una serie infinita de funciones trigonométricas. Y como esta última solución parecía implicar claramente el carácter periódico de la función, mientras que las funciones arbitrarias de D'Alembert y de Euler no eran periódicas necesariamente, parecía que la solución de Bernoulli era menos general. Que no era éste el caso lo demostró al fin J. B. J. Fourier (1768-1830) en 1824.

Joseph Fourier era hijo de un sastre de Auxerre, y recibió su educación en los monjes benedictinos, Orden en la que, en un cierto momento, intentó entrar y hacerse sacerdote. En lugar de ello terminó haciéndose profesor de matemáticas, primero en la escuela militar de su ciudad natal y más tarde en la École Normale y en la École Polytechnique. En 1798 acompañó a Napoleón, junto con Monge, en su aventura egipcia, siendo nombrado secretario del Institut d'Egypte, cargo en el que redactó su obra *Description de l'Egypte*. A su regreso a Francia ocupó diversos cargos administrativos, que le permitieron sin embargo continuar sus investigaciones científicas. Su obra más conocida hoy es la célebre *Théorie analytique de la chaleur*, de 1822. En este libro, que más tarde describiría Kelvin como «un gran poema matemático», desarrollaba Fourier ideas que le habían valido diez años antes el premio de la Académie des Sciences para un trabajo sobre la teoría matemática del calor. Las tres grandes «L», Lagrange, Laplace y Legendre, que eran los encargados de informar sobre los trabajos recibidos, criticaron la memoria de Fourier por su vaguedad y «alegría» en los razonamientos; precisamente la clarificación posterior de las ideas de Fourier fue en cierta medida la razón de que al siglo XIX se le llegara a llamar «la época del rigor»[1]. La contribución más importante de Fourier, ya clásica hoy en la matemática, fue la idea, intuida por Daniel Bernoulli, como hemos visto, de que cualquier función $y=f(x)$ se puede representar por una serie de la forma

$$y=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$
$$+b_1\operatorname{sen} x+b_2\operatorname{sen} 2x+\cdots+b_n\operatorname{sen} nx+\cdots$$

serie que conocemos hoy con el nombre de serie de Fourier. Las representaciones por medio de tales series permiten un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a las que se puede aplicar para estudiarlas, que el que permite la serie de Taylor. Incluso si hay muchos puntos en los que no exista la derivada de la función (como en la fig. 25.1) o en los que la función no sea continua (como en la fig. 25.2), la función puede tener aún un desarrollo en serie

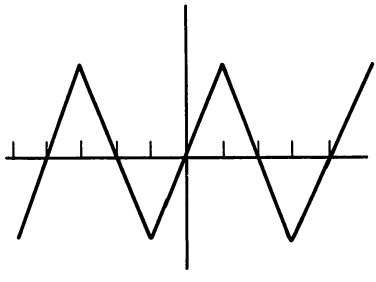


Figura 25.1

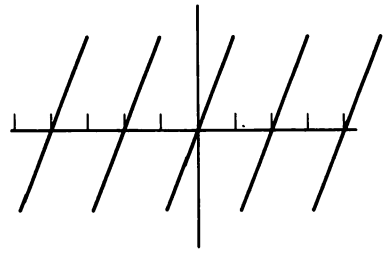


Figura 25.2

[1] Véase P. E. B. Jourdain, «Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics», *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), vol. II, págs. 526-527.

de Fourier; los coeficientes del desarrollo se pueden determinar fácilmente observando que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx$$

Fourier, lo mismo que Monge, cayó en desgracia cuando se produjo la restauración borbónica a continuación del exilio de Napoleón en 1815, pero su obra ha permanecido desde entonces como una herramienta de importancia fundamental tanto para la física como para la matemática. Las funciones ya no necesitaban ser de tan «buen comportamiento» en su forma como las que los matemáticos habían manejado hasta entonces. Lejeune Dirichlet, por ejemplo, propuso en 1837 una definición de función[2] sumamente amplia y general: si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. Esta definición se acerca mucho ya a la idea moderna de una correspondencia general entre dos conjuntos de números reales, pero lo cierto es que los conceptos de «conjunto» y de «número real» estaban lejos de tener un significado preciso en la época de Dirichlet. Para mostrar lo completamente arbitraria que podía ser la regla de correspondencia, propuso Dirichlet una función de «muy mal comportamiento»: Sean c y d dos números reales distintos; cuando x es racional sea $y=c$, y cuando x es irracional sea $y=d$. Esta función, que se suele conocer como función de Dirichlet, es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x. Dirichlet dio también la primera demostración rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier para una función que cumpla ciertas restricciones, conocidas como condiciones de Dirichlet. Una serie de Fourier obtenida de una función no siempre converge al valor de la función dada, pero Dirichlet demostró, en un artículo publicado el año 1828 en el *Journal de Crelle*, el teorema siguiente: Si $f(x)$ es periódica de período 2π, si para $-\pi<x<\pi$ la función $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades, y si

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

es finita, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge al valor $f(x)$ en todos los puntos en los que la función f es continua, y en los puntos de discontinuidad de salto converge a la media aritmética de los límites de la función por la derecha y por la izquierda. También es útil otro teorema que se conoce como criterio de Dirichlet: si los términos de la serie $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n+\cdots$ son tales que los b_i son todos positivos y tienden monótonamente a cero, y si existe un número M tal que $|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m|<M$ para todos los valores de m, entonces la serie dada converge.

[2] Véase Dirichlet, *Mathematische Werke* (1889-1897), vol. I, pág. 135.

El nombre de Dirichlet aparece en muchos otros campos, tanto de matemática pura como aplicada. Es especialmente importante en termodinámica y en electrodinámica el problema de Dirichlet: Dada una región R limitada por una curva cerrada C, y una función $f(x, y)$ continua sobre C, hallar otra función $F(x, y)$ que sea continua en R y sobre C, que satisfaga la ecuación de Laplace en R y que coincida con f sobre la curva C. En matemática pura es bien conocido Dirichlet por su aplicación del análisis a la teoría de números, en cuyo contexto introdujo las llamadas series de Dirichlet —$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$—, donde los coeficientes de Dirichlet a_n son números complejos, los exponentes de Dirichlet λ_n forman una sucesión monótona creciente de números reales, y s es una variable compleja.

2. La teoría analítica de números

El sucesor de Dirichlet en Gotinga, Bernhard Riemann, obtuvo también profundos teoremas que relacionaban la teoría de números con el análisis clásico. Euler había observado ya algunas conexiones entre la teoría de números primos y la serie

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

donde s es un entero, que es evidentemente un caso particular de serie de Dirichlet. Riemann estudió la misma serie, pero considerando a s como una variable compleja, de manera que la suma de la serie define una función $\zeta(s)$ que se conoce desde entonces con el nombre de «función zeta de Riemann». Uno de los problemas más tentadores que los matemáticos no han podido aún ni demostrar ni refutar es la famosa conjetura de Riemann, que afirma que todos los ceros imaginarios $s=\sigma+i\tau$ de la función zeta[3] tienen parte real $\sigma=\frac{1}{2}$. Probablemente ninguna rama de la matemática nos ha legado tantos problemas sin resolver como la teoría de números. Riemann fue un matemático polifacético y con una mente muy prolífica, al que interesaron casi todos los campos de la matemática, contribuyendo así no sólo a la geometría y a la teoría de números, sino también al análisis. En análisis su nombre viene asociado a los refinamientos en la definición de integral, al énfasis puesto en las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y a las superficies de Riemann. Estas superficies constituyen un ingenioso recurso para uniformizar una función compleja, es decir, para representar como una aplicación biunívoca una función compleja que en el plano de Gauss ordinario no sería uniforme (tomaría varios valores para cada valor de la variable independiente). Aquí podemos ver el aspecto más sorprendente de la obra de Riemann, que

[3] Para más propiedades de la función zeta véase E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909). Un resumen de la hipótesis de Riemann puede verse en E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), pág. 293.

consiste en el desarrollo del análisis dentro de un marco fuertemente intuitivo y geométrico, que contrasta nítidamente con las tendencias aritmetizadoras de la escuela de Weierstrass. Su planteamiento se ha calificado como «un método de descubrimiento», mientras que el de Weierstrass era, como veremos, «un método de demostración»[4], y sus resultados fueron tan importantes que Bertrand Russell lo caracteriza como «lógicamente el predecesor inmediato de Einstein». Fue la intuición genial de Riemann tanto en física como en matemáticas la que produjo conceptos tales como el de curvatura de una variedad o espacio de Riemann, sin el cual no se podría haber formulado la teoría general de la relatividad[5].

3. Los números trascendentes

La teoría de números estudia, en principio, los números enteros y, de una manera más general, las razones entre números enteros, es decir, los llamados números racionales. Estos números son todos ellos raíces de alguna ecuación lineal $ax+b=0$ con coeficientes enteros. En cambio, el análisis real se ocupa de un tipo de número más general, que puede ser racional o irracional. Desde Euclides se sabe ya esencialmente que las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son múltiplos enteros de una longitud dada, se pueden construir geométricamente con regla y compás. Si los coeficientes de la ecuación

$$ax^n+bx^{n-1}+\cdots+px+q=0$$

son números enteros a, b, ..., p, q, y $n>2$, entonces las raíces de la ecuación no son constructibles en general por métodos euclídeos. Las raíces de una ecuación algebraica de este tipo, siendo $n>0$, reciben el nombre de «números algebraicos», para indicar la manera como están definidos. Y como todo número racional es raíz de una ecuación tal, con $n=1$, surge de manera natural la cuestión de si todo número irracional será o no raíz de una ecuación de esta forma, para algún $n\geqslant 2$. La respuesta negativa a esta pregunta la dio finalmente Liouville en 1844, al construir ese año una amplia clase de números reales no algebraicos. La clase particular de números que introdujo contiene a todos los llamados «números de Liouville», mientras que los números que pertenecen a la clase más extensa de los números reales no algebraicos, reciben el nombre de «números trascendentes». La construcción original de Liouville de los números trascendentes es muy complicada, pero sin intentar dar una demostración de su carácter trascendente, podemos dar algunos ejemplos sencillos de números trascendentes, tales como 0.1001000100001...

o

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$$

[4] Henri Poincaré, «L'oeuvre mathématique de Weierstrass», en *Acta Mathematica*, 22 (1898-1899), págs. 1-18.

[5] En el libro de E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), hay un capítulo titulado «Amina Candida» y dedicado íntegramente a Riemann y su obra, en el que se presenta su personalidad bajo una perspectiva de cálida simpatía; págs. 484-509.

Demostrar que un número real concreto, tal como e o π, es trascendente, suele ser muy difícil. Liouville, por ejemplo, sólo pudo demostrar en 1844 en su *Journal*, que ni e ni e^2 podían ser raíces de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros; por lo tanto, dado un segmento unidad, los segmentos de longitudes e y e^2 no son constructibles con regla y compás. Y tuvieron que pasar casi otros 30 años antes de que otro matemático francés, Charles Hermite (1822-1901), siguiendo los pasos de Liouville, consiguiera demostrar en 1873, en un artículo en las *Comptes Rendus* de la Académie, que e no podía ser raíz de *ninguna* ecuación polinómica con coeficientes enteros, es decir, que e era trascendente al fin[6].

El teorema que afirma que e es un número trascendente se suele conocer como «teorema de Hermite» por antonomasia. Hermite se formó en la École Polytechnique, como muchos de sus predecesores, y allí enseñó más tarde y fue considerado generalmente como el más importante tratadista francés en teoría de funciones desde la época de Cauchy. Entre otros de sus más notables resultados está una resolución de la ecuación quíntica general por medio de funciones elípticas[7]. A Liouville se le conoce también por otras variadas contribuciones al análisis y a la geometría. En análisis se recuerda su obra en el llamado «teorema de Liouville»: Si $f(z)$ es una función analítica entera de la variable compleja z, acotada en el plano complejo, entonces $f(z)$ es una constante. De este teorema puede deducirse como un simple corolario el teorema fundamental del álgebra de la manera siguiente: Si $f(z)$ es un polinomio de grado $n>0$ y $f(z)$ fuese distinta de cero sobre todo el plano complejo, entonces su inversa $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ cumpliría las condiciones del teorema de Liouville, y en consecuencia $F(z)$ tendría que ser una constante, es decir, $f(z)$ tendría que ser también constante, lo cual obviamente no es cierto. Por lo tanto, la ecuación $f(z)=0$ ha de satisfacerse para un valor complejo al menos $z=z_0$. En geometría analítica plana hay otro sorprendente «teorema de Liouville»: Las longitudes de las tangentes trazadas desde un punto P a una cónica C, son proporcionales a las raíces cúbicas de los radios de curvatura de C en los correspondientes puntos de tangencia[8].

El *status* del número π entre los números irracionales trajo desconcertados a los matemáticos nueve años más que el del número e. Lambert había demostrado ya en 1770 y Legendre en 1794 que tanto π como π^2 eran irracionales, pero estas demostraciones no resolvían, evidentemente, el viejísimo problema de la cuadratura del círculo. El asunto alcanzó al fin su solución definitiva en 1882, en un artículo de C. L. F. Lindemann (1852-1939), de Munich en los *Mathematische Annalen*. El artículo, titulado «Über die Zahl π», demostraba de manera concluyente que π era

---

[6] Para una exposición muy completa del marco histórico de este descubrimiento, véase U. G. Mitchel-Mary Strain, «The Number *e*», en *Osiris*, 1 (1936), págs. 476-496. Véase también D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (New York; Dover Reprint, 1959), págs. 99-106.

[7] Véase E. Picard, «L'oeuvre scientifique de Charles Hermite», en los *Annales Scientifiques* (3), 18 (1901), págs. 9-34, de la École Normal Supérieur, o el prólogo a las *Oeuvres* de Charles Hermite editadas por Emile Picard (1905-1917).

[8] Para éste y otros aspectos de la obra de Liouville véase Gino Loria, «L. Liouville and His Work», en *Scripta Mathematica*, 4 (1936), págs. 147-154, 257-262, 301-305, o su versión francesa en *Archeion*, 18 (1936), págs. 117-139.

también un número trascendente, generalizando la obra de Liouville y de Hermite. En su demostración, Lindemann lo primero que hacía era demostrar que la ecuación $e^{ix}+1=0$ no se verifica para x algebraico; ahora bien, como Euler había demostrado que $x=\pi$ satisface la ecuación, la única posibilidad es que π no sea algebraico. Aquí estaba por fin la respuesta definitiva al clásico problema de la cuadratura del círculo. Para que la cuadratura del círculo fuera posible con métodos euclídeos, el número π tendría que ser raíz de una ecuación algebraica, y una raíz expresable por medio de raíces cuadradas. Dado que π no es algebraico, el círculo no es cuadrable con regla y compás según las reglas clásicas[9]. Animado por su éxito, Ferdinand Lindemann publicó más tarde varias supuestas demostraciones del último teorema de Fermat que se comprobó eran incorrectas.

4. La inquietud acerca de los fundamentos del análisis

El año 1872 fue un año verdaderamente excepcional no sólo para la geometría, como vimos en el capítulo anterior, sino también, y aún en mayor grado, para el análisis. Durante este año se publicaron importantes contribuciones a la aritmetización del análisis debidas nada menos que a cinco matemáticos distintos, un francés y cuatro alemanes. El francés era H. C. R. (Charles) Méray (1835-1911) de Borgoña; los cuatro alemanes eran Karl Weierstrass (1815-1897), de la universidad de Berlín, su discípulo H. E. Heine (1821-1881), de Halle, Georg Cantor (1845-1918), también de Halle, y J. W. R. Dedekind (1831-1916), de Braunschweig. Estos hombres representaban en cierto sentido la culminación de medio siglo de investigaciones en torno a la idea de función y de número que habían comenzado en 1822 con la teoría del calor de Fourier y con un intento de reducir todo el análisis a la aritmética, hecho ese mismo año por Martin Ohm (1792-1872), en su obra *Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik*. Hubo dos causas principales de inquietud durante este intervalo de 50 años. Una radicaba en la falta de confianza en las operaciones efectuadas con series infinitas: No estaba claro ni siquiera si una serie de funciones, de potencias o de senos y cosenos por ejemplo, convergía siempre o no a la función de la que se había obtenido. Una segunda causa de preocupación la producía la falta de una definición precisa del concepto de «número real», que constituye el mismísimo núcleo de cualquier programa de aritmetización. Bolzano se había mostrado ya en 1817 tan claramente consciente de la necesidad del rigor en análisis, que Klein lo consideraba «el padre de la aritmetización»; pero en época tan temprana Bolzano había ejercido una influencia mucho menor que Cauchy, cuyo análisis estaba aún (quizá a la vez inevitable y afortunadamente) fuertemente «contaminado» por la intuición geométrica. Incluso la función continua pero no diferenciable dada por Bolzano en torno a 1830 fue

[9] Para una extensa exposición del final de la historia de los tres problemas clásicos véase el libro de Felix Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*, trad. por Beman y Smith (Dover reprint, New York, 1955). Véase también E. W. Hobson, *Squaring the Circle*, y D. E. Smith, «The History and Transcendence of π», en J. W. A. Young, *Monographs on Topics of Modern Mathematics* (New York, 1915), págs. 387-416. También puede consultarse Hermann von Baravalle, «The Number π», en *The Mathematics Teacher*, 45 (1952), págs. 340-348, y 60 (1967), págs. 479-487.

ignorada por sus sucesores, suponiéndose generalmente que el ejemplo de una función tal dado por Weierstrass (primero en sus clases en 1861 y más tarde en un artículo para la Academia de Berlín en 1872) era el primero conocido.

Mientras tanto, Riemann había mostrado, por su parte, una función $f(x)$ discontinua en infinitos puntos de un intervalo, cuya integral existía sin embargo, y definía una función continua $F(x)$ que no tenía derivada en los infinitos puntos de discontinuidad de $f(x)$. La función de Riemann es, en un cierto sentido, menos patológica que las de Bolzano y Weierstrass, pero venía a mostrar claramente que la idea de integral exigía una definición más cuidadosa que la de Cauchy, que había estado inspirada en gran medida por la intuición geométrica del área encerrada bajo una curva. La definición de integral definida sobre un intervalo que se suele utilizar actualmente, en términos de sumas superiores e inferiores, se conoce como «integral de Riemann», en honor al hombre que dio las condiciones necesarias y suficientes para que una función acotada sea integrable. La función de Dirichlet, por ejemplo, no es integrable en el sentido de Riemann en ningún intervalo. A comienzos del siglo siguiente se propondrían definiciones aún más generales de la integral, con condiciones más débiles sobre la función, pero la definición de integral de una función que se sigue utilizando en la mayor parte de los cursos de análisis de nivel medio es aún la de Riemann.

5. El teorema de Bolzano-Weierstrass

Hubo un intervalo, como hemos visto, de unos 50 años entre la obra de Bolzano y la de Weierstrass, pero la unidad del esfuerzo durante este medio siglo y la necesidad de volver a descubrir la obra olvidada de Bolzano fueron tales que hay un famoso teorema que hoy lleva el nombre de ambos matemáticos, el teorema de Bolzano-Weierstrass: «Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite.» Este teorema lo demostró Bolzano, y al parecer también lo conocía Cauchy, pero fue la obra de Weierstrass la que lo divulgó entre los matemáticos.

Lagrange había expresado sin ambigüedad su escepticismo acerca de las series de Fourier, pero Cauchy, en 1823, creyó haber demostrado la convergencia de la serie de Fourier general. Dirichlet mostró que la demostración de Cauchy era incorrecta, y dio al mismo tiempo condiciones suficientes para dicha convergencia; fue precisamente en su intento de liberalizar las condiciones de Dirichlet para la convergencia de una serie de Fourier, cuando desarrolló Riemann su definición de la integral; en este contexto demostró el importante teorema de que una función $f(x)$ puede ser integrable en el sentido de Riemann en un intervalo sin ser representable por una serie de Fourier[10]. Y también fue el estudio de las series trigonométricas lo que condujo a la teoría de conjuntos de Cantor, de la que hablaremos más adelante en este mismo capítulo.

[10] Para más detalles véase la obra de Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), en sus capítulos 3 y 4. Los trabajos relacionados con el análisis de Riemann y de Weierstrass se analizan detalladamente en Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in* 19 *Jahrhunden* (1926-1927), vol. I.

6. La definición de número real

Dirichlet murió el crítico año de 1872, y sólo un año más tarde moría también, a la temprana edad de 34 años, un joven profesor que prometía hacer importantes contribuciones tanto a la matemática como a su historia. Se trataba de Hermann Hankel (1839-1873), alumno de Riemann y más tarde profesor de matemáticas en Leipzig. En 1867 publicó Hankel un libro titulado *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, en el que señalaba que «la condición para construir una aritmética universal es por lo tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles». Ya hemos visto que la revolución en geometría tuvo lugar cuando Gauss, Lobachewsky y Bolyai consiguieron liberarse de ideas preconcebidas sobre la estructura del espacio; en un sentido muy parecido, la aritmetización plena y correcta del análisis se hizo posible sólo cuando los matemáticos entendieron que, como había previsto Hankel, los números reales había que considerarlos como «estructuras intelectuales» y no como las magnitudes dadas intuitivamente heredadas de la geometría de Euclides. El punto de vista de Hankel no era en realidad tan nuevo; durante una generación al menos, como veremos en el próximo capítulo, los algebristas, especialmente los ingleses, habían estado desarrollando ya una aritmética universal y diversas álgebras. Sin embargo, las consecuencias para el análisis apenas habían sido reconocidas. Bolzano había hecho un intento de desarrollar una teoría de números reales como límites de sucesiones de números racionales[11] a comienzos de la década de los 1830, pero esta teoría pasó desapercibida y no se publicó hasta 1962. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) quizá había sentido tal necesidad de alguna manera, pero el hecho de que hiciera referencia básicamente al tiempo en vez de al espacio supuso un cambio de lenguaje, aunque no, desde luego, de forma lógica, del usual en el marco geométrico. El punto clave del problema fue atacado y resuelto efectivamente por primera vez por el quinteto que mencionamos antes, que publicó sus resultados en 1872.

Méray fue uno de los más rápidos en publicar sus ideas, pues ya en 1869 publicó un artículo en el que llamaba la atención sobre un grave *lapsus* de razonamiento del que se habían mostrado culpables prácticamente todos los matemáticos desde la época de Cauchy. La *petitio principii* en cuestión consistía esencialmente en definir el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales. Hay que recordar que tanto Bolzano como Cauchy habían intentado demostrar que una sucesión que «converge en sí misma», es decir, una S_n tal que S_{m+p} difiere de S_m (para m suficientemente grande y p cualquier número natural) en menos que cualquier magnitud ε dada de antemano, también converge en el sentido de su relación «externa» con un número real S, el límite de la sucesión. Méray, en su obra *Nouveau preçis d'analyse infinitésimale*, de 1872, cortó el nudo gordiano al renunciar a utilizar la condición externa de convergencia, es decir, el

[11] Véase B. von Rootselaar, «Bolzano's Theory of Real Numbers», en el *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1964-1965), págs. 168-180.

número real S. Utilizando solamente el criterio de Bolzano-Cauchy, en el que m y p son números naturales y ε un número racional positivo, se puede describir completamente la convergencia sin hacer referencia alguna a los números irracionales. En un sentido general, Méray consideraba que una sucesión convergente *determinaba* o bien un número racional como límite o un «número ficticio» como su «límite ficticio». Estos «números ficticios» pueden ordenarse, como demostraba, y son esencialmente lo que conocemos como «los números irracionales». Méray no es muy preciso acerca de si su sucesión convergente *es o no* el número mismo. Si lo es, como parece deducirse de las consecuencias, entonces su teoría viene a ser equivalente a la que desarrolló al mismo tiempo Weierstrass.

7. El análisis de Weierstrass

Weierstrass también trataba de separar el análisis de la geometría y basarlo únicamente en el concepto de número; al igual que Méray, Weierstrass se dio cuenta perfectamente de que para ello era necesario dar una definición de número irracional independiente del concepto de límite, puesto que, hasta el momento, este segundo concepto había supuesto el primero. Para corregir el error lógico de Cauchy, Weierstrass zanjó el problema de la *existencia* del límite de una sucesión convergente identificando la sucesión misma con el número límite. El esquema de Weierstrass es demasiado sutil para exponerlo aquí en detalle, pero en una forma sumamente simplificada podemos decir que el número $\frac{1}{3}$ no es *el límite* de la sucesión

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}$$

sino que *es* la sucesión misma asociada a la serie

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

(En realidad, en la teoría de Weierstrass los números irracionales se definen de una manera aún más general como *conjuntos* de racionales, más bien que como meras *sucesiones ordenadas* de racionales como se deduce de nuestra explicación.)

Weierstrass no publicó sus ideas sobre la aritmetización del análisis, pero estas ideas las dieron a conocer sus discípulos, como Ferdinand Lindemann y Eduard Heine, que habían seguido sus cursos. En 1871, Cantor había comenzado a desarrollar un tercer programa de aritmetización parecido a los de Méray y Weierstrasse. Heine sugirió ciertas simplificaciones que llevaron al llamado desarrollo de Heine-Cantor, publicado por Heine en el *Journal de Crelle* en 1872 en su artículo «Die Elemente der Funktionenlehre». No podemos entrar en el detalle de esta teoría, pero esencialmente se parece a la de Méray en que las sucesiones

convergentes que no convergen a números racionales se las considera, por *fiat*, como que definen números irracionales. Un planteamiento completamente distinto del mismo problema, y uno de los más conocidos hoy, fue el que dio Dedekind el mismo año en un libro que se hizo famoso, *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* (es decir, «Continuidad y números irracionales»)[12].

8. El concepto de «cortadura» de Dedekind

Dedekind dedicó su atención al problema de los números irracionales tan pronto como en 1858, año en que se encontraba dando clases de análisis. Entonces llegó a la conclusión de que el concepto de límite habría que desarrollarlo de una manera puramente aritmética, sin referencia alguna a la geometría como era lo usual, si se quería que fuese un concepto riguroso. En vez de buscar simplemente una salida al círculo vicioso de Cauchy, Dedekind se preguntó, tal como expresa el título de su libro, qué es lo que distingue a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales. Tanto Galileo como Leibniz habían pensado que la «continuidad» de los puntos de una recta era el resultado de su densidad, es decir, del hecho de que entre dos puntos distintos cualesquiera hay siempre otro. Sin embargo, los números racionales gozan de esta propiedad a pesar de que no forman obviamente un continuo. Reflexionando sobre este problema, Dedekind llegó a la conclusión de que la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión, sino a una propiedad opuesta exactamente a ésta, la de la división de un segmento en dos partes por un punto del segmento. En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y sólo a una de las dos clases, y tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase, hay uno y sólo un punto que produce la división. Tal como escribía Dedekind: «En esta observación trivial se revela el secreto de la continuidad.» La observación puede haber sido trivial, pero su autor parece haber tenido algunos escrúpulos acerca de ella, ya que dudó en publicarla durante algunos años.

Dedekind vio que se podía extender el dominio de los números racionales para formar un continuo de números reales si se admite lo que hoy suele llamarse el axioma de Cantor-Dedekind, que afirma que los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales. Expresado este hecho aritméticamente, significa que para cualquier partición de los números racionales en dos clases disjuntas A y B tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la segunda clase B, existe uno y sólo un número real que produce este *Schnitt* o «cortadura» de Dedekind. Si en A hay un número máximo o en B un mínimo, entonces la cortadura define un número racional, pero si en A no hay máximo ni en B mínimo, entonces la cortadura define un número irracional. Si ponemos, por ejemplo, en A todos los números racionales negativos,

[12] Puede verse una traducción al inglés de esta obra con el título *Essays on the Theory of Numbers*, trad. por W. W. Beman (Chicago, 1901; New York, Dover, 1963). Este libro contiene también la traducción de la importante obra de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*, de 1888.

el cero y todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2, y en B todos los números racionales positivos cuyos cuadrados sean mayores que 2, entonces habremos dividido el dominio de los números racionales de manera que queda definido un número irracional, en este caso el número que solemos escribir convencionalmente como $\sqrt{2}$. Ahora bien, señalaba Dedekind, con esta definición los teoremas fundamentales sobre límites se pueden demostrar rigurosamente sin recurrir ya a la intuición geométrica. La geometría fue, sin duda alguna, la que mostró el camino para una definición adecuada de la idea de continuidad, pero al final quedó excluida, como se pretendía, de la definición aritmética formal del concepto. La idea de «cortadura de Dedekind» en el dominio de los números racionales, o cualquier otra construcción formal equivalente de los números reales, ha venido a reemplazar así a la idea de magnitud geométrica como columna vertebral del análisis.

Las distintas definiciones de los números reales son, como había hecho observar Hankel que debían ser, construcciones intelectuales hechas sobre la base de los números racionales, y no algo impuesto a la matemática desde fuera. De las definiciones anteriores una de las más populares ha sido la de Dedekind, y en los primeros años de este siglo Bertrand Russell (1872-1970) propuso una ligera modificación del concepto de cortadura de Dedekind: Russell observó que, dado que cualquiera de las dos clases A y B en una cortadura de Dedekind quedaba unívocamente determinada por la otra, una sola bastaba para la determinación de un número real. Así $\sqrt{2}$ puede definirse simplemente como el segmento o subclase del conjunto de los números racionales formado por todos los números racionales negativos, el cero y todos los números racionales positivos cuyos cuadrados sean menores que 2. Y, de la misma manera, todo número real no es nada más que un segmento del sistema de los números racionales.

9. El concepto de límite

Weierstrass contribuyó al programa de aritmetización no sólo con una definición satisfactoria de número real, sino también con una definición depurada del concepto de límite. La definición de Cauchy hacía uso de expresiones tales como «valores sucesivos», «aproximarse indefinidamente», o «tan pequeño como uno quiera». Aunque estas expresiones son muy sugestivas y seguramente satisfactorias desde el punto de vista pedagógico, les falta, sin embargo, la precisión que se suele esperar de los matemáticos. En vista de ello, Weierstrass insistía en sus lecciones en lo que a veces se ha llamado la «teoría estática de las variables». Heine, en sus *Elemente* de 1872, escritos bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, definía el límite de una función $f(x)$ en x_0 de la manera siguiente:

> Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

En esta definición fría, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a cantidades que fluyan engendrando magnitudes de dimensiones superiores, ni el

menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. No han quedado nada más que números reales, la operación de sumar y su opuesta la de restar, y la relación «menor que» entre números reales. Tanto el lenguaje como el simbolismo utilizados por Weierstrass y por Heine, precisos e inequívocos, desterraron del análisis la vieja y sugestiva idea de variabilidad continua, e hicieron innecesario el persistente recurso a los infinitésimos constantes. Podía decirse que la «Edad del Rigor» había llegado ya, verdaderamente, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por la crítica precisión lógica. Hoy la η de Weierstrass se ha visto reemplazada casi universalmente por otra letra griega, la δ, pero ése ha sido prácticamente el único cambio, y la definición de límite de una función que aparece en los textos usuales es esencialmente la misma que introdujeron Weierstrasse y Heine hace poco más de un siglo. Lo que en el argot matemático de hoy se denominan demostraciones de tipo $\varepsilon - \delta$ o «epsilónica», forma parte ya del patrimonio de todo matemático.

10. La influencia de Gudermann

Weierstrass se había criado en una familia católica devota pero liberal, en la que el padre se había convertido del protestantismo al catolicismo. Karl, que era el hijo mayor, tenía un hermano y dos hermanas, pero ninguno de los cuatro llegó a casarse, posiblemente debido a la actitud dominante del padre; y Karl tenía al menos otro rasgo más o menos excéntrico: su aversión a la música. La escuela primaria se le dio tan bien que su padre insistió en que se preparase para un cargo público estudiando derecho en la universidad de Bonn, en la que Karl se hizo un experto, eso sí, pero en beber y en esgrima más que en derecho o matemáticas, y abandonó la universidad sin llegar a graduarse. Entonces pensó en prepararse para ser profesor de enseñanza secundaria, y así lo hizo en Münster, donde un instructor, Christoph Gudermann (1798-1851), tomó a Weierstrass bajo su protección. Gudermann era un matemático que estaba interesado especialmente en las funciones elípticas e hiperbólicas, teoría en la que su nombre ha quedado inmortalizado en el «gudermanniano»: si u es una función de x que satisface la ecuación $\text{tg } u = \text{senh } x$, entonces a u se le denomina el gudermanniano de x, y se escribe $u = \text{gd } x$. Más importante para la matemática que esta contribución menor fueron el tiempo que dedicó y el estímulo que comunicó a su discípulo, que estaba destinado a convertirse a su vez en el más importante profesor de matemáticas de mediados del siglo XIX, al menos si se mide su estatura en términos del número de grandes investigadores que surgieron de entre sus alumnos. Gudermann había inculcado profundamente en el joven Weierstrass la utilidad que tenía la herramienta del desarrollo de una función en serie de potencias, y fue precisamente en este contexto en el que Weierstrass iba a producir su obra más importante, siguiendo las huellas de Abel.

Weierstrass consiguió su certificado de profesor a la edad relativamente tardía de 26 años, y durante más de otra docena de años enseñó en diversas escuelas secundarias. En 1854, sin embargo, un artículo suyo sobre funciones abelianas que apareció publicado en el *Journal de Crelle* produjo tal impresión que poco después

se le ofrecía un puesto de profesor en la universidad de Berlín, puesto que Weierstrass aceptó. Weierstrass tenía entonces casi 40 años, lo que le convierte en una sorprendente excepción de la ley general que afirma que un gran matemático suele destacarse a una edad temprana en su vida. A pesar de estos comienzos tardíos, Weierstrass fue reconocido sin reservas como el analista más importante del mundo durante el último tercio del siglo XIX[13].

Hasta mediados del siglo XIX se había admitido generalmente que si una serie convergía sobre un intervalo a una función continua y diferenciable $f(x)$, entonces la serie obtenida diferenciando la primera término a término convergería necesariamente a $f'(x)$ en el mismo intervalo. Sin embargo, por esta época varios matemáticos llamaron la atención sobre el hecho de que éste no era necesariamente el caso, y que sólo se puede confiar en la diferenciación término a término si la serie en cuestión es *uniformemente convergente* sobre el intervalo, es decir, si puede encontrarse un N fijo, tal que para todo valor de x en el intervalo la suma parcial $S_n(x)$ difiera de la suma de la serie $S(x)$ en menos que un ε dado de antemano, para todo $n > N$. Weierstrass demostró, por su parte, que para series uniformemente convergentes también era correcta la integración término a término. En el estudio de las propiedades de la convergencia uniforme, Weierstrass no estaba solo ni mucho menos, ya que al menos tres matemáticos se tropezaron con el mismo concepto casi simultáneamente: Cauchy en Francia (quizá en 1853), Sir G. G. Stokes en Cambridge (en 1847) y P. L. V. Seidel (1821-1896) en Alemania (en 1848)[14]. Sin embargo, quizá nadie merece más que Weierstrass el calificativo de padre del movimiento crítico en análisis[15]. Desde 1857 hasta su retiro en 1890 impulsó a varias generaciones de estudiantes a utilizar con cuidado las representaciones de funciones por medio de series infinitas, y uno de estos estudiantes, Heine, demostró en 1870 que el desarrollo en serie de Fourier de una función continua es único si se añade la condición extra de que la convergencia sea uniforme. En este sentido Heine iba allanando las dificultades que aparecían en la obra de Dirichlet y de Riemann sobre series de Fourier.

Otra de las contribuciones importantes de Weiertrass al análisis es la que se conoce como principio de prolongación analítica. Weierstrass había demostrado que el desarrollo en serie de potencias de una función de variable compleja $f(z)$ en torno a un punto P_1 del plano complejo convergía en todos los puntos interiores a un círculo C_1 centrado en P_1 y cuya circunferencia pasa por la singularidad de $f(z)$ más cercana a P_1. Si uno desarrolla ahora la función $f(z)$ en torno a otro punto $P_2 \neq P_1$, pero interior a C_1, la serie obtenida convergerá en el interior de un círculo C_2 centrado en P_2 y cuya circunferencia pase por la singularidad más próxima a P_2; este círculo C_2 puede muy bien incluir puntos exteriores a C_1, y por lo tanto habremos conseguido extender así la región del plano sobre la que está definida $f(z)$ analíticamente por una serie de potencias; el proceso puede continuarse

[13] Sobre la vida de Weierstrass véase E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), cap. 22, así como Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1937), vol. I, cap. 5.

[14] Véase E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, pág. 270.

[15] Véase James Pierpont, «Mathematical Rigor, Past and Present», en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), págs. 23-53.

evidentemente encadenando más círculos. Ante esta situación, Weierstrass definió una función analítica como una serie de potencias junto con todas las que se obtienen de ella por prolongación analítica. La importancia de una obra tal como ésta de Weierstrass puede observarse especialmente en física matemática, donde las soluciones de las ecuaciones diferenciales raramente pueden obtenerse en otra forma que la de un desarrollo en serie.

En algunos aspectos la vida de Dedekind fue parecida a la de Weierstrass. Dedekind tuvo también tres hermanos, tampoco se casó, y ambos llegaron a octogenarios. En cambio, la familia de Dedekind era luterana, y además él mismo comenzó su carrera en la matemática mucho antes que lo había hecho Weierstrass, ingresando en la universidad de Gotinga a los 19 años y consiguiendo su doctorado tres años más tarde con una tesis en análisis que se ganó los elogios de Gauss, tan parco en elogiar. Dedekind permaneció en Gotinga durante unos cuantos años, enseñando y asistiendo a las lecciones de Dirichlet, y después decidió dedicarse a la enseñanza secundaria durante el resto de su vida, principalmente en Brunswick. Dedekind vivió tantos años después de la introducción de sus famosas «cortaduras», que la prestigiosa casa editorial de Teubner registró su muerte el 4 de septiembre de 1899, en su *Calendario para matemáticos*. Este desagradable hecho Dedekind lo encontró, no obstante, divertido, y escribió al editor que había pasado «el día de su muerte» en interesante charla con su amigo Georg Cantor. Dedekind vivió, sin duda para contradecir contundentemente la noticia anterior, otros 17 años, y murió en 1916.

11. La juventud de Cantor

La vida de Cantor fue trágicamente muy distinta de la de su amigo Dedekind[16]. Cantor nació en San Petersburgo de padres que habían emigrado de Dinamarca, pero pasó en Alemania la mayor parte de su vida, debido a que la familia se trasladó a Frankfurt cuando Cantor tenía 11 años. Sus padres eran cristianos de ascendencia judía: su padre se había convertido al protestantismo, mientras que su madre había nacido ya en una familia católica. El hijo, Georg, se interesó mucho por los sutiles argumentos de los teólogos medievales acerca del infinito y el continuo, cosa que no favorecía precisamente, desde luego, el que se dedicase a una carrera mundana de ingeniero, tal como quería su padre. Durante sus estudios en Zurich, Gotinga y Berlín, el muchacho se concentró, como cabía esperar, en filosofía, física y matemáticas, programa que parece haber fomentado su insólita imaginación matemática. Cantor consiguió su doctorado en Berlín en 1867 con una tesis sobre teoría de números, pero sus primeras publicaciones mostraron ya una atracción por el análisis de la escuela de Weierstrass. Este campo fue el que dio impulso a las revolucionarias ideas que brotaron en su mente entre los 25 y los 30 años aproximadamente. Ya nos hemos referido a la obra de Cantor en conexión con un nombre aparentemente prosaico, el de «número real», pero lo cierto es que

[16] Véase Bell, *Men of Mathematics*, cap. 29, o Prasad, *Great Mathematicians*, vol. II, cap. 7.

sus contribuciones más originales se centraron en torno a una cuestión mucho más provocativa, la del «infinito».

Desde los días del viejo Zenón los hombres no han cesado de hablar del infinito, tanto en teología como en matemáticas, pero nadie antes de 1872 habría podido decir con precisión de qué estaba hablando. Lo más frecuente era que en las discusiones sobre el infinito los ejemplos que se citaran fueran cosas tales como un poder ilimitado o una magnitud indefinidamente grande. A veces la atención se centró en cambio, como en la obra de Galileo y de Bolzano, en los infinitos elementos de una colección concreta, por ejemplo los números naturales o los puntos de un segmento. Cauchy y Weierstrass pensaban que sólo podían resultar paradojas de los intentos de identificar un infinito «completo» o actual en la matemática, creyendo que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño no representaban más que las correspondientes potencialidades de Aristóteles, es decir, el carácter *esencialmente incompleto* del *proceso* en cuestión. Aunque se encontraban bajo la influencia del análisis de Weierstrass, dos de sus discípulos llegaron, sin embargo, a una conclusión digamos opuesta. El primero fue Dedekind, que vio en las paradojas de Bolzano no algo anómalo, sino justamente una propiedad universal de los conjuntos infinitos, que Dedekind tomó como una definición precisa:

> Un sistema S se llama *infinito* cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito.

En una terminología un poco más moderna, un conjunto S se llama infinito si existe un subconjunto propio S' de S tal que los elementos de S' se pueden poner en correspondencia biunívoca con los elementos de S. Así, por ejemplo, el hecho de que el conjunto S de los números naturales es infinito resulta claramente de que el subconjunto S' formado por los números triangulares es tal que a cada elemento n de S le corresponde uno y sólo un elemento de S' dado por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esta definición «positiva» de un conjunto «infinito completo» no debe confundirse con la proposición negativa que se escribe a veces utilizando el símbolo de Wallis en la forma $\frac{1}{0} = \infty$; esta última «ecuación» significa simplemente que no hay ningún número real, «por grande que sea», que multiplicado por cero dé como resultado el número uno.

12. La idea de «potencia» de un conjunto infinito

La definición de conjunto infinito de Dedekind apareció en 1872 en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* (En 1888, Dedekind extendería sus ideas en otro importante tratado, su *Was sind und was sollen die Zahlen.*) Dos años más tarde se casaba Cantor, y en su luna de miel viajó con su esposa a Interlaken, donde se encontraron con Dedekind. El mismo año, en 1874, publicaba Cantor en el *Journal*

de Crelle uno de sus más revolucionarios artículos[17]. Cantor reconoció, lo mismo que Dedekind, la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos, pero se dio cuenta además de que no todos los conjuntos infinitos son del «mismo tamaño», cosa que no parecía haber pensado Dedekind. En el caso finito, dos conjuntos se dice que tienen el mismo número (cardinal) si se pueden poner sus elementos en correspondencia biunívoca. De una manera análoga, se puso a construir Cantor una jerarquía de conjuntos infinitos, atendiendo a la *Mächtigkeit* o «potencia» del conjunto. El conjunto de los cuadrados perfectos y el conjunto de todos los números triangulares tienen la misma potencia que el conjunto de los números naturales, puesto que se pueden poner en correspondencia biunívoca con este último. Estos conjuntos parecen ser mucho más «pequeños» que el conjunto de los números racionales, y, sin embargo, Cantor demostró que este último también es numerable, es decir, también se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, y por lo tanto tiene la misma potencia. Para demostrar esto podemos recurrir simplemente a seguir las flechas en la figura 25.3, «contando» así las fracciones de paso.

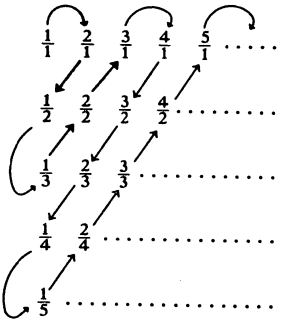


Figura 25.3

Las fracciones racionales tienen una propiedad fundamental que es la de estar tan «densamente» ordenadas en su orden natural que entre dos cualesquiera de ellas, por próximas que estén, hay siempre otra al menos; y, sin embargo, el esquema de Cantor[18] muestra de manera irrefutable que el conjunto de los números racionales tiene la misma potencia que el conjunto de los números naturales. Uno podría empezar a preguntarse, con razón, si será que todos los conjuntos infinitos de números tendrán la misma potencia, pero Cantor demostró concluyentemente que no es éste el caso. El conjunto de los números reales, por

[17] Una exposición sistemática y muy completa de la obra de Cantor puede verse en la introducción a una traducción al inglés de los dos artículos de Cantor de 1895 y 1897, publicada bajo el título *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, editada por P. E. B. Jourdain (1915). Véase también Herbert Meschkowsky, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco; Holden Day, 1964), págs. 91-104.

[18] Cantor demostró la numerabilidad de los números racionales en su artículo de 1874, pero allí daba un tipo de demostración diferente. Más tarde dio la demostración que hemos presentado.

ejemplo, tiene una potencia mayor que la del conjunto de los números racionales. Para demostrar esto utilizó Cantor un razonamiento por *reductio ad absurdum*: Supongamos que los números reales entre 0 y 1 son numerables, y supongámoslos expresados todos ellos como decimales que no terminan en una sucesión de ceros (es decir, que, por ejemplo $\frac{1}{3}$ aparecerá representado por 0,3333..., $\frac{1}{2}$ por 0,4999..., etc.); si los números $0<x<1$ pudieran ordenarse en un orden numerable tendríamos una sucesión:

$$a_1 = 0{,}a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots$$
$$a_2 = 0{,}a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\cdots$$
$$a_3 = 0{,}a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

donde a_{ij} es un dígito entre 0 y 9, ambos incluidos. Para demostrar que en cualquier ordenación de este tipo no pueden figurar *todos* los números reales entre 0 y 1, Cantor construye un decimal infinito distinto de todos los de la lista: para ello basta escribir el decimal $0{,}b_1\,b_2\,b_3\,b_4...$, donde $b_k=9$ si $a_{kk}=1$, y $b_k=1$ si $a_{kk}\neq 1$. Este número real estará entre 0 y 1 y, sin embargo, será distinto evidentemente de todos los de la sucesión dada, que habíamos supuesto contenía *todos* los números reales entre cero y uno.

13. Propiedades de los conjuntos infinitos

Los números reales pueden clasificarse en dos tipos de diferentes maneras, por ejemplo: (1) en racionales e irracionales, o (2) en algebraicos y trascendentes. Cantor demostró que incluso la clase de los números algebraicos, que es mucho más extensa que la de los números racionales, tiene, sin embargo, la misma potencia que el conjunto de los números naturales. Por lo tanto, son los números trascendentes los que le dan al sistema de los números reales el fuerte carácter de «densidad» que trae como consecuencia su potencia más alta. Que es básicamente un asunto de densidad lo que determina la potencia de un conjunto viene reflejado en el hecho de que la potencia del conjunto de los puntos de una recta de longitud infinita es exactamente la misma que la del conjunto de los puntos de un segmento cualquiera, por pequeño que sea. Para demostrar esto, sea *RS* una recta y sea *PQ* un segmento cualquiera de longitud finita (fig. 25.4). Situemos este segmento de manera que corte a la recta *RS* en un punto 0, pero sin estar contenido en la recta ni ser perpendicular a ella. Si tomamos los puntos *M* y *N* en la perpendicular a *RS* por 0 y de manera que *MP* y *NQ* sean paralelas a la recta *RS*, entonces trazando semirrectas de origen *M* que corten a *OP* y a *OR*, y semirrectas de origen *N* que corten a *OQ* y a *OS*, queda establecida fácilmente la correspondencia biunívoca buscada.

Más sorprendente aún es el hecho de que la dimensión no es en absoluto lo que determina la potencia de un conjunto. La potencia del conjunto de los puntos del

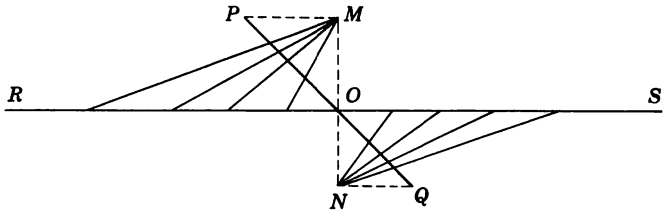


Figura 25.4

segmento unidad es exactamente la misma que la del conjunto de puntos del cuadrado unidad o del cubo unidad, o, para el caso, de todo el espacio tridimensional. (La dimensión mantiene, sin embargo, alguna medida de su autoridad en el hecho de que cualquier correspondencia biunívoca entre los puntos de dos espacios de distinta dimensión tiene que ser necesariamente una función discontinua.) Algunos resultados de la teoría de conjuntos de puntos eran tan paradójicos y chocaban tan frontalmente con la intuición, que Cantor mismo escribía en una ocasión a Dedekind, en 1877, con ocasión precisamente de su construcción de una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y su lado: «Je le vois, mais je ne le crois pas» («Lo veo, pero no lo creo»), y le pedía vehementemente a su amigo que revisase cuidadosamente la demostración[19]. Los editores de revistas se mostraron también a menudo indecisos acerca de si aceptar o no sus artículos, y varias veces la publicación de artículos de Cantor en el *Journal de Crelle* se retrasó por indecisiones editoriales y por miedo de que los errores acechasen escondidos en un planteamiento tan decididamente poco convencional de los conceptos matemáticos como era el de Cantor.

14. La aritmética transfinita

Los sorprendentes resultados de Cantor le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos como una rama autónoma de la matemática y con todos los derèchos, teoría a la que se dio el nombre de *Mengenlehre* (teoría de conjuntos) o *Mannigfaltigkeitslehre* (teoría de variedades o de «multiplicidades»), y que tuvo a mediados del siglo XX unos efectos tan profundos en la enseñanza de la matemática en todos sus niveles. Durante los años a lo largo de los cuales Cantor puso las bases de esta teoría, tuvo que emplear grandes esfuerzos en convencer a sus contemporáneos de la validez y corrección de sus resultados, debido a que había un *horror infiniti* considerable, y muchos matemáticos se mostraban poco dispuestos a aceptar un *eigentlich Unendlich* o infinito completo y actual. Amontonando evidencia sobre evidencia, terminó Cantor por construir una aritmética transfinita completa. La «potencia» de un conjunto pasó a ser el «número cardinal» del conjunto, y así el «número cardinal» del conjunto de los números naturales era el

[19] Una exposición de la obra de Cantor especialmente legible puede verse en el libro de Herbert Meschkowsky *Evolution of Mathematical Thought* (1965), cap. 5.

número transfinito «más pequeño» $\aleph_0$, mientras que el «número cardinal» del conjunto de los números reales o del conjunto de los puntos de una recta era un número «mayor» c, el cardinal del continuo. Aún permanece abierto el problema de si hay o no números transfinitos entre $\aleph_0$ y c. En cambio, Cantor mismo demostró que hay infinitos números transfinitos mayores que c, al demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado tiene siempre una potencia o cardinal mayor que el conjunto mismo; por lo tanto, el cardinal del conjunto de todos los conjuntos de números reales será un tercer número transfinito, el conjunto de los subconjuntos de este conjunto de subconjuntos determinará un cuarto número aún mayor, y así indefinidamente. Lo mismo que hay infinitos números naturales, pero en un sentido incomparablemente más fuerte, hay infinitos números transfinitos.

Los números transfinitos que acabamos de describir son los números *cardinales*, pero Cantor desarrolló también una aritmética de números ordinales transfinitos. Las relaciones de orden son un tema complejo y delicado en la matemática, y así no podía por menos que ocurrir que la aritmética ordinal transfinita fuera muy distinta de la aritmética ordinal finita. Para el caso finito las reglas que rigen el comportamiento de los números ordinales son exactamente las mismas que las de los cardinales (lo que permite identificarlos simplemente): así, por ejemplo, $3+4=4+3$, ya sea que estos dígitos representen cardinales u ordinales. Sin embargo, si representamos por ω el número ordinal correspondiente al conjunto de los números naturales con su buena ordenación natural, entonces $\omega+1$ no es el mismo que $1+\omega$, dado que $1+\omega$ es obviamente igual a ω, pero no así $\omega+1$. La multiplicación de ordinales transfinitos tampoco es conmutativa, ya que, por ejemplo, $\omega \cdot 2=\omega+\omega$, mientras que $2 \cdot \omega=\omega \neq +\omega$. Las operaciones con cardinales transfinitos sí son conmutativas en cambio.

15. La crítica de Kronecker a la obra de Cantor

Dedekind y Cantor eran ambos matemáticos excepcionalmente competentes y, con toda seguridad, los más originales de su época, y, sin embargo, ninguno de los dos consiguió alcanzar una posición profesional de máximo nivel. Dedekind, como hemos dicho ya, dedicó casi toda su vida a la enseñanza secundaria, mientras que Cantor pasó la mayor parte de su carrera profesional en la universidad de Halle, una universidad pequeña sin ningún renombre especial. Cantor había esperado durante largos años alcanzar la distinción de un puesto de profesor en la prestigiosa universidad de Berlín, y le echaba la culpa a Leopold Kronecker (1823-1891) de su continuo fracaso en conseguirlo. Kronecker, lo mismo que Cantor, era hijo de padres judíos, pero también, al igual que Cantor, prefirió la religión cristiana protestante[20]. En la universidad de Berlín estuvo en contacto con Weierstrass, Dirichlet, Jacobi y Steiner, culminando su doctorado en 1845 con una tesis sobre teoría algebraica de números. Kronecker aprobaba el programa de

[20] Para su vida y obra véase E. T. Bell, *Men of Mathematics*, cap. 25, o Prasad, *Great Mathematicians*, vol. II, cap. 3.

aritmetización universal del análisis, como Weierstrass, pero exigía que la aritmética fuese finita, y aquí entró en agudo conflicto con Cantor. Volviendo a los puntos de vista de los antiguos pitagóricos, insistía Kronecker en que tanto la aritmética como el análisis deberían basarse exclusivamente en los números enteros. «Dios hizo los enteros», solía decir, «y todo lo demás es obra del hombre». Rechazaba categóricamente las construcciones del número real de su época, sobre la base de que no podían conseguirse por medio de procesos finitos únicamente, e hizo llamamientos para llevar a cabo una revolución aritmética que excluiría a los números irracionales como inexistentes. En el marco del análisis, Kronecker hizo poco pero criticó abiertamente a casi todos sus contemporáneos tanto en sus lecciones como en conversaciones privadas. Se dice que llegó a preguntarle a Lindemann de qué utilidad era su demostración de que π no es algebraico, dado que los números irracionales no existían. En álgebra, Kronecker hizo importantes contribuciones, pero los analistas de la época consideraron sus puntos de vista como excesivamente metafísicos. A veces se afirma que su movimiento teórico murió de inanición[21], pero veremos más adelante que puede decirse que reapareció en una forma nueva en la obra de Poincaré y de Brouwer.

Kronecker fue durante la mayor parte de su vida un próspero hombre de negocios, pero estuvo siempre estrechamente relacionado con los científicos de la universidad de Berlín, donde finalmente se le ofreció y él aceptó un puesto de profesor en 1883. Su postura finitista también molestaba obviamente a Weierstrass, pero a quien ocasionó un daño más serio fue sin duda a Cantor. Kronecker no solamente impidió que Cantor obtuviese un puesto en Berlín, sino que intentó ir destruyendo subterráneamente la rama de la matemática que estaba aquél creando. Cantor, a su vez, escribió una enérgica defensa de su teoría en 1883, en su *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* («Fundamentos de una teoría general de variedades»), en la que sostenía que «numeraciones definidas pueden darse para los conjuntos infinitos lo mismo que para los finitos». Cantor no tenía miedo de caer en lo que él describía como «un abismo de trascendencia» y, sin embargo, de vez en cuando se dejaba llevar por argumentos de tipo teológico. Kronecker continuaba con sus persistentes ataques, aunque nunca se prestó a una discusión pública y directa, y el hipersensible y temperamental Cantor sufrió en 1884 la primera de las crisis nerviosas que iban a presentarse de nuevo periódicamente durante los últimos 33 años de su vida. Los ataques de depresión le llevaron a veces a dudar de su propia obra, aunque en esos momentos se sentía algo confortado por el apoyo de matemáticos tales como Hermite. Hacia el final de su vida se ganó Cantor el reconocimiento general por sus descubrimientos, pero después de una dura vida de lucha casi sin pausa, su muerte en 1918 en un sanatorio mental de Halle nos viene a recordar que el genio y la locura están a veces estrechamente relacionados. La tragedia de su vida personal se ve un tanto mitigada por el canto de alabanza de uno de los matemáticos más importantes de comienzos del siglo XX, David Hilbert, que se refería a la nueva aritmética transfinita como «el más sorprendente producto del pensamiento matemático y

[21] Véase Pierpont, «Mathematical Rigor, Past and Present», en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), págs. 23-53, 38-40.

una de las realizaciones más bellas de la actividad humana en el dominio de la inteligencia pura». Donde otros espíritus timoratos habían dudado, Hilbert exclamó: «Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros»[22].

Bibliografía

Bell, E. T.: *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940).

Bourbaki, Nicolas: *Éléments d'histoire des mathématiques* (París: Hermann, 1960).

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus* (New York: Columbia University Press, 1939; reed. Dover, 1959).

Brill, A., y M. Noether: «Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neurer Zeit», *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereinigung*, **3** (1892-1893), 107-566.

Cajori, Florian: *History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1931).

Cantor, Georg: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. P. E. B. Jourdain (Chicago y Londres: Open Court, 1915; New York: Dover paperback, n.d.).

Dantscher, Victor: *Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen* (Leipzig y Berlín: B. G. Teubner, 1908).

Dedekind, Richard: *Essays on the Theory of Numbers*, trad. W. W. Beman (Chicago: Open CCourt, 1901).

Dirichlet, G. L.: *Werke*, ed. L. Kronecker y L. Fuchs (Berlín, 1889-1897, 2 vols.).

Eves, Howard, y Carrol V. Newsom: *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (New York: Rinehart, 1958).

Fourier, Joseph: *Oeuvres*, ed. G. Darboux (París, 1888-1890, 2 vols.).

Heine, E.: «Die Elemente der Funktionenlehre», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 74 (1872), 172-188.

Hermite, Charles: *Oeuvres*, ed. Émile Picard (París: Gauthier-Villars, 1905-1917, 4 vols.).

Hobson, E. W.: «On the Infinite and the Infitesimal in Mathematic Analysis», *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35 (1903), 117-140.

Jourdain, P. E. B.: «The Development of the Theory of Transfinite Numbers», *Archiv der Mathematik und Physik* (3), 10 (1906), 254-281; **17** (1908-1909), 287-311; **16** (1910), 21-43; **22** (1913-1914), 1-21.

——: «Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics», *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), vol. II, págs. 526-527.

——: «On Isoid Relations and Theories of Irrational Number», *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), vol. II, págs. 492-496.

Klein, Felix: *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, trad. Frances Hardcastle (Cambridge: Cambridge University Press, 1893).

——: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert* (Berlín: Springer, 1926-1927, 2 vols.).

Kronecker, Leopold: *Werke*, ed. Kurt Hensel (Leipzig: B. G. Teubner, 1895-1931, 5 vols.).

Langer, Rudolph E.: *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory* (Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America, 1947).

[22] «Sur l'infini», en *Acta Mathematica*, 48 (1926), págs. 91-122, especialmente págs. 97-100, o bien «Über das Unendlich», en los *Mathematische Annalen*, 95 (1926), págs. 161-190, especialmente págs. 167-170.

Loria, Gino: «Le mathématicien J. Liouville et ses oeuvres», *Archeion*, 18 (1936), 117-139; trad. inglesa en *Scripta Mathematica*, vol. 4 (1936).
Manheim, Jerome H.: *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Pergamon Press, 1964).
Méray, Charles: *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* (París, 1872).
Merz, J. T.: *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (Edinburgh y London, 1896-1914, 4 vols; reed., New York: Dover, 1965).
Meschkowski, Herbert: *Evolution of Mathematical Thought* (San Francisco: Holden-Day, 1965).
Pierpont, James: «The History of Mathematics in the Nineteenth Century», *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11** (1904), 136-159.
——: «Mathematical Rigor, Past and Present», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53.
Pincherle, Salvatore: «Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass», *Giornale di Matematiche*, 18 (1880), 178-254, 317-357.
Poincaré, Henri: «L'oeuvre mathématique de Weierstrass», *Acta Mathematica*, 22 (1898-1899), -18.
Prasad, Ganesh: *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 vols.).
Waismann, Friedrich: *Introduction to Mathematical Thinking* (New York: Harper reprint, 1959).
Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke* (Berlín: Mayer & Müller, 1894-1927, 7 vols.).

Ejercicios

1. Explíquese por qué se le ha llamado al siglo XIX «un siglo de correlación» en la matemática, citando contribuciones específicas que apoyen este punto de vista.
2. ¿Hasta qué punto los desarrollos del análisis durante el siglo XIX estuvieron motivados por factores internos a la matemática, más bien que por necesidades o preferencias sociales? Dé ejemplos concretos que apoyen su respuesta.
3. Compárense los niveles de rigor del análisis durante el siglo XIX con el del siglo XVIII y con el de las obras de Arquímedes, apoyando su explicación con ejemplos concretos.
4. Explíquese la importancia del año 1872 para el proceso de aritmetización del análisis.
5. Los matemáticos más importantes del siglo XIX, ¿fueron a la vez profesores con mayor o menor frecuencia que durante el siglo XVIII? Dense ejemplos que apoyen su respuesta.
6. La afirmación de Kronecker en el sentido de que Dios hizo los enteros y que todos los demás números son obra del hombre, ¿es defendible o indefendible? Explíquese claramente.
7. Demuéstrese que el conjunto de los números reales entre 3 y 7, ambos inclusive, se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales entre 1 y 11.
8. Defínase con precisión «número real» y «número irracional». ¿Cuándo y cómo se reconoció por primera vez la necesidad de los números irracionales, y cuándo y cómo surgió la necesidad de una definición precisa? Explíquese claramente.
9. Compárese la definición de «límite de una función» dada por Weierstrass con la que había formulado anteriormente Cauchy, señalando las ventajas y desventajas relativas.
10. Entre el conjunto de los números naturales y el de las raíces n-ésimas de todos los números naturales, ¿cuál tiene cardinal mayor? Explíquese por qué.

11. Dados dos segmentos cualesquiera de distinta longitud, demuéstrese que entre ambos, considerados como conjuntos de puntos, se puede establecer una correspondencia biunívoca.
12. Escríbanse en forma decimal infinita una docena de números trascendentes distintos, dando en cada caso la ley de formación de la sucesión de sus dígitos. ¿Es racional alguno de ellos? Explíquese con detalle.
13. Demuéstrese que si $u = \text{gd } x$, entonces $\cos u = \text{sech } x$ y $\text{sen } u = \text{tgh } x$.
*14. En el desarrollo de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \text{ sen } x + b_2 \text{ sen } 2x + \cdots$$

multiplíquense ambos miembros de la ecuación por $\cos 2x$ e intégrense (el segundo, término a término) desde $-\pi$ a $+\pi$ para demostrar que

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx$$

*15. En la misma situación que en ejercicio 14, multiplíquense ambos miembros de la ecuación por sen $2x$ e intégrese entre $-\pi$ y $+\pi$ para obtener una expresión análoga para b_2.
*16. Dibújese la gráfica de la función $f(x) = 1$ si $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ cuando n es par, y $f(x) = 0$ si $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ cuando n es impar, y hállese el desarrollo en serie de Fourier de esta función.

Capítulo XXVI
LA APARICION DEL ALGEBRA ABSTRACTA

> No supone ninguna paradoja decir que en nuestras especulaciones más teóricas podemos estar lo más próximos posible a nuestras aplicaciones más prácticas.
>
> *A. N. Whitehead*

1. La Edad de Oro de la matemática

El siglo XIX merece ser llamado, más que ningún otro período anterior de la historia, la Edad de Oro de la Matemática. Los progresos hechos en la matemática durante estos 100 años superan con mucho, tanto en cantidad como en calidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores. Este siglo fue también, con la posible excepción de la Epoca Heroica en la antigua Grecia, el más revolucionario de la historia de la matemática. En 1829 se descubría un mundo nuevo en la geometría, por obra de Lobachewsky, un matemático ruso discípulo de un profesor alemán, y en 1874 el dominio del análisis se vio conmocionado por la matemática del infinito que acababa de introducir Cantor, un matemático alemán que había nacido en Rusia. Ya no era Francia el centro reconocido del mundo matemático, aunque produjera la meteórica carrera de un Évariste Galois (1811-1832). El carácter ya irreversiblemente internacional de la matemática queda de manifiesto en el hecho de que las dos contribuciones más revolucionarias al álgebra, en 1843 y 1847, las hicieron dos matemáticos que enseñaban en Irlanda. La primera de ellas fue obra de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), y la segunda de George Boole (1815-1864). No obstante, los algebristas más prolíficos del siglo XIX fueron dos ingleses que vivieron parte de su vida en Estados Unidos; se trata de Arthur Cayley (1821-1895) y J. J. Sylvester (1814-1897), y fue principalmente de su *alma mater*, Cambridge, de donde surgió el desarrollo del álgebra moderna.

Durante los primeros años del siglo XIX la Universidad de Cambridge era un centro al que uno difícilmente hubiera vuelto los ojos en busca de nuevos descubrimientos matemáticos. Bien es verdad que 100 años antes había sido el *alma mater* de Sir Isaac Newton, pero el chauvinismo y la controversia sobre la prioridad en la invención del cálculo habían conducido a un profundo aislamiento intelectual que más tarde pagaron caro los ingleses. Las universidades escocesas mantuvieron a lo largo del siglo XVIII un contacto más estrecho con la Europa continental que las inglesas, pero las primeras tenían un nivel comparativamente más bajo en matemáticas que en biología y en química. Cuando Jacobi visitó

Cambridge en 1842, le preguntaron que quién era el más grande matemático inglés vivo, a lo que al parecer contestó: «No hay ninguno»[1]. Era, desde luego, en esta época, además de una descortesía, un juicio excesivamente duro. Es cierto, sin embargo, que una generación antes, en Inglaterra en general y en Cambridge en particular, no había apenas la menor conciencia de los enormes pasos que se habían dado tanto en análisis como en geometría en la Europa continental. Quizá fue por esta razón que, cuando Inglaterra logró salir de la trampa del provincianismo, pasó a ocupar el primer lugar en el desarrollo del álgebra, ya que en este campo los progresos que se habían hecho en el contienente durante el siglo XVIII no habían sido tan espectaculares.

2. La matemática en Cambridge

El momento decisivo para la matemática inglesa tuvo lugar en 1815, cuando se constituyó la Analytical Society en el Trinity College, en Cambridge, de la que ya hemos hablado en el capítulo anterior, constituida por tres jóvenes cantabrigenses: el algebrista George Peacock (1791-1858), el astrónomo John Herschel (1792-1871), y Charles Babbage (1792-1871), famoso por sus «máquinas calculadoras». La finalidad inmediata de la Society fue la de reformar la enseñanza y la notación del cálculo infinitesimal, y cuando Peacock fue nombrado en 1817 examinador de los famosos *tripos* en matemáticas, la notación diferencial pasó a sustituir al simbolismo fluxional en los exámenes de Cambridge. Peacock mismo se había graduado en Cambridge y más tarde fue profesor de esta universidad, siendo el primero de los muchos colegiales del Trinity College que iban a destacarse en el desarrollo del álgebra. Se graduó como segundo *wrangler*, es decir, que obtuvo el segundo puesto en los exámenes *tripos* (que comenzaron a celebrarse en 1725) para estudiantes que se habían especializado en matemáticas, siendo primer *wrangler* John Herschel, otro de los fundadores de la Analytical Society. Peacock fue un administrador y reformador entusiasta, y tomó parte muy activa en la reforma de los estatutos de la universidad y en la fundación de la Astronomical Society of London, de la Philosophical Society of Cambridge y de la British Association for the Advancement of Science, la última de las cuales sirvió de modelo para la American Association for the Advancement of Science. Los últimos 20 años de su vida los pasó ocupando el puesto de deán de la catedral de Ely.

Peacock no produjo ningún resultado nuevo de importancia destacada en matemáticas, pero tuvo gran importancia en el proceso de reforma de esta ciencia en Inglaterra, especialmente en lo que se refiere al álgebra. En Cambridge había dominado una tendencia tan conservadora en álgebra como en análisis y geometría; mientras los matemáticos del continente desarrollaban la representación gráfica de los números complejos, en Inglaterra se oían declaraciones en las que se negaba validez incluso a los números negativos. En un esfuerzo por justificar los puntos de vista más generales en álgebra, publicó Peacock en 1830 su *Treatise on*

1 Véase Alexander Macfarlane, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (1966), pág. 10, y W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (1889).

Algebra, en el que intentaba darle al tema una estructura lógica comparable a la de los *Elementos* de Euclides. En esta obra trataba de formular, con no demasiado éxito según los cánones modernos, las leyes fundamentales de la aritmética: las leyes conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y la distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, aunque sin utilizar estos nombres modernos. Este planteamiento, ampliado más tarde a una obra en dos volúmenes en 1842-1845, señala los comienzos del pensamiento axiomático aplicado a la aritmética y al álgebra. En el primer volumen el autor aplica las reglas a los números, en lo que él llama «álgebra aritmética»; en el segundo volumen, dedicado al «álgebra simbólica», extiende estas reglas al estudio de las magnitudes en general. En el «álgebra aritmética» de Peacock los símbolos + y − se entienden en su estricto significado aritmético ordinario, de modo que la expresión $a-b$ tiene un significado sólo si a es mayor o igual que b (ya que lo que tenía en la mente Peacock eran los números naturales). En el «álgebra simbólica» tales restricciones se eliminan, pero las reglas del álgebra numérica se supone, sin embargo, que se verifican universalmente en el nuevo sistema más abstracto[2]:

> Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma.

La justificación de una extrapolación tan atrevida no aparece clara en absoluto; Peacock se limita a aceptar esto como un «principio de permanencia de las formas equivalentes», algo análogo en cierto sentido al principio de correlación que Carnot y Poncelet habían utilizado de una manera tan fructífera en geometría. Sin embargo, la forma algebraica de este difuso postulado sirvió, en un aspecto muy concreto al menos, como un freno al progreso, puesto que sugería claramente que las leyes del álgebra son las mismas no importa qué clase de número u otros objetos se manejen dentro del álgebra. Al parecer, Peacock pensaba básicamente en el sistema numérico de los enteros y en el de las magnitudes reales de la geometría (sistemas que no están regidos ciertamente por las mismas leyes formales), y su distinción entre los dos tipos de álgebra no era tan diferente a fin de cuentas (después de casi 250 años) de la que había hecho Viète entre la «logística numerosa» y la «logística speciosa». Así se explica que el subtítulo del segundo volumen de la obra de Peacock sea *On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position*, cuyas tres últimas palabras pudieran implicar que el autor había estado leyendo a Carnot.

3. Peacock, el «Euclides del álgebra»

Peacock, el «Euclides del álgebra», encontró apoyo para sus puntos de vista en la obra de Augustus de Morgan (1806-1871), que también ayudó a fundar la British

[2] *Treatise on Algebra* (reimpresión por Scripta Mathematica, New York, 1940, de la edición de 1842-1845), vol. I, págs. VI-VIII. Puede verse una biografía de Peacock en Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, cap. 1.

Association for the Advancement of Science (1831), y que en cierto modo se unió a Peacock en la constitución de lo que podría llamarse una «Escuela Inglesa» de matemáticas. De Morgan nació en la India, porque su padre era miembro de la East India Company, pero estudió en el Trinity College, donde se graduó como cuarto *wrangler*. No pudo conseguir un puesto ni en Cambridge ni en Oxford porque se negó dignamente a someterse al indispensable examen religioso, a pesar de que había sido educado en la Iglesia de Inglaterra, en la que su madre esperaba que se hiciese pastor. A consecuencia de ello, De Morgan se vio nombrado profesor de matemáticas, a la temprana edad de 22 años, en la recién creada Universidad de Londres, más tarde University College de la Universidad de Londres, donde enseñó de manera continua, excepto durante breves períodos a consecuencia de sucesivas dimisiones provocadas por casos de reducción de la libertad académica. De Morgan fue siempre un defensor de la tolerancia intelectual y religiosa, así como un profesor y escritor excepcional. Era ciego de un ojo, de nacimiento, raro *handicap* que pudiera explicar algunas de sus inofensivas excentricidades, tales como su odio a la vida rural, su negativa a votar en ninguna elección y su renuncia a solicitar el ingreso en la Royal Society. De Morgan gustaba mucho de acertijos, rompecabezas y problemas ingeniosos, muchos de los cuales aparecen coleccionados en su libro bien conocido *Budget of Paradoxes*, que es una deliciosa sátira sobre los cuadradores del círculo publicada después de su muerte por su viuda[3].

Peacock fue una especie de profeta en el desarrollo del álgebra abstracta, y De Morgan fue con respecto a él como Eliseo a Elías. En el *Algebra* de Peacock los símbolos se entendían en general como números o magnitudes, pero De Morgan los consideraba ya de manera abstracta, dejando sin significado concreto no sólo a las letras que utilizaba, sino también a los símbolos que representaban operaciones; así las letras tales como A, B, C, podían significar virtudes y vicios, y $+$ y $-$ podían representar premio y castigo. De Morgan insistía en que, «con una sola excepción, ninguna palabra o símbolo de la aritmética ni del álgebra tienen un ápice de significado a lo largo de este capítulo, cuyo objeto son los símbolos mismos y sus leyes de combinación, lo que da lugar a un álgebra simbólica que puede convertirse en adelante en la gramática de cien álgebras concretas distintas». La excepción a la que se refiere De Morgan es el símbolo de igualdad, ya que se suponía que en $A=B$ los símbolos A y B «deben tener el mismo significado final, cualquiera que sea el camino por el que se hayan obtenido». Esta idea, expresada tan pronto como en 1830 en su libro *Trigonometry and Double Algebra*, está próxima ya a la idea moderna de que la matemática trabaja más bien con funciones proposicionales que con proposiciones, pero De Morgan no parece haberse dado cuenta del carácter completamente arbitrario, en principio, de las reglas y definiciones del álgebra. Se encontraba aún lo suficientemente próximo a la filosofía kantiana como para creer que las leyes fundamentales usuales del álgebra se aplicarían a cualquier sistema algebraico. Vio que esto era así al pasar del «álgebra simple» del sistema de los números reales al «álgebra doble» de los

[3] Una amplia exposición de la vida y la obra de De Morgan puede verse en Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, cap. 2. Véase también *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth de Morgan with Selections from His Letters* (1882).

números complejos, donde las reglas que verifican las operaciones son las mismas. Y De Morgan creyó que estas dos formas agotan los tipos de álgebras posibles, y que un álgebra triple o cuádruple no se podría desarrollar. En este importante aspecto Hamilton demostraría más tarde que estaba equivocado. Hamilton fue otro de los matemáticos del Trinity, pero esta vez no se trataba del Trinity College de Cambridge, sino del Trinity College de Dublín. Otro de los hombres del Trinity (Dublín) fue George Salmon (1819-1904), que enseñó allí matemáticas y teología y escribió excelentes textos sobre cónicas, álgebra y geometría analítica.

4. Hamilton y los cuaterniones

Tanto el padre de Hamilton, que era un abogado en ejercicio, como su madre, de quien se dice que gozaba de altas cualidades intelectuales, murieron cuando Hamilton era todavía un muchacho, pero antes incluso de quedarse huérfano la educación del pequeño estuvo dirigida por un tío suyo que era lingüista. William Hamilton demostró ser un niño tan extraordinariamente precoz que a los cinco años leía griego, hebreo y latín, y a los diez sabía una media docena de lenguas orientales. Un encuentro con un prodigio del cálculo numérico, unos años más tarde, fue quizá lo que estimuló el interés de Hamilton por la matemática, que ya era grande, lo mismo que su amistad con Wordsworth y Coleridge fue probablemente lo que le animó a continuar escribiendo la mala poesía que escribía desde la adolescencia[4]. Hamilton ingresó en el Trinity College de Dublín, y antes incluso de graduarse, a la edad de 22 años, fue nombrado astrónomo real de Irlanda, director del Observatorio de Dunsink y profesor de astronomía. Ese mismo año presentaba un trabajo a la Irish Academy sobre sistemas de rayos en el que desarrollaba uno de sus temas favoritos, el de que el espacio y el tiempo están «indisolublemente unidos entre sí». A primera vista esta idea podría tomarse como un presagio de la teoría de la relatividad, pero Hamilton saca de ella, de una manera un tanto decepcionante, una conclusión menos fructífera: dado que la geometría es la ciencia del espacio puro, el álgebra debe ser la ciencia del puro tiempo. Quizá Hamilton seguía aquí a Newton, que, cuando tropezaba con dificultades al definir conceptos abstractos en el método de fluxiones, se sentía más cómodo recurriendo al concepto de tiempo del mundo físico. Es posible que su conclusión fuera simplemente la de que, dado que la geometría es la ciencia del espacio, y que el espacio y el tiempo son los dos aspectos fundamentales de la intuición sensorial, el álgebra tendría que ser la ciencia del tiempo[5].

Poco después de presentar su primer trabajo, la predicción que hacía en él Hamilton del fenómeno de refracción cónica en ciertos cristales se vio confirmada experimentalmente por los físicos. Esta verificación satisfactoria de una de sus

[4] Pueden verse resúmenes de su vida y su obra en E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), cap. 19, y en Alexander Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, cap. 3. En *Scripta Mathematica*, 10 (1944), hay varios artículos dedicados a la vida y la obra de Hamilton. El estudio más extenso es el de R. P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton* (1882). Véase también C. Lanczos, «William Rowan Hamilton», en *American Scientist*, 55 (1967), págs. 129-143.

[5] Véase E. T. Bell, *Men of Mathematics*, pág. 359.

teorías matemáticas aseguró su reputación, y a la edad de 30 años fue elevado a la nobleza. Dos años antes, en 1833, había presentado un largo e importante artículo a la Irish Academy, en el que introducía y estudiaba un álgebra formal de parejas de números reales, cuyas reglas de combinación son precisamente las que se dan hoy para el sistema de los números complejos. La importante regla que define la multiplicación de parejas es, desde luego,

$$(a, b)\cdot(\alpha, \beta)=(a\alpha-b\beta, a\beta+b\alpha)$$

y Hamilton interpreta este producto como una operación en la que interviene una rotación[6]. Aquí podemos ver ya la versión definitiva del concepto de número complejo como un par ordenado de números reales, idea que ya estaba implícita en la representación gráfica tanto de Wessel como de Argand y Gauss, pero que ahora se hacía explícita por primera vez.

Hamilton se dio cuenta, evidentemente, de que sus pares ordenados podían interpretarse como entidades dirigidas en el plano, y de manera natural intentó extender la idea a tres dimensiones, pasando de los números complejos binarios $a+bi$ a las ternas de números ordenados $a+bi+cj$. La operación de sumar no producía ninguna dificultad, pero durante diez años lo tuvo desconcertado la multiplicación de n-uplas, para n mayor que dos. Un día de 1843 en que se encontraba paseando con su esposa a lo largo del Royal Canal, tuvo un relámpago de inspiración: sus dificultades desaparecerían si utilizaba cuádruplas en vez de ternas y si abandonaba además la propiedad conmutativa de la multiplicación. Resultaba más o menos claro que para cuádruplas de números $a+bi+cj+dk$ se debería tomar $i^2=j^2=k^2=-1$; ahora Hamilton veía claramente que debería ser $i\cdot j=k$, pero $j\cdot i=-k$, y análogamente $j\cdot k=i=-k\cdot j$ y $ki=j=-ik$. En todo lo demás, las leyes que rigen las operaciones serían las del álgebra usual.

De la misma manera exactamente como Lobachewsky había creado una nueva geometría consistente abandonando el postulado de las paralelas, así creó Hamilton un álgebra nueva, consistente también, abandonando la propiedad conmutativa de la multiplicación. Se detuvo en su paseo, y grabó con una navaja la fórmula fundamental $i^2=j^2=k^2=i\cdot j\cdot k$ en una piedra del puente de Brougham; el mismo día, el 16 de octubre, pedía permiso a la Royal Irish Academy para leer una comunicación sobre los cuaterniones en la siguiente sesión. El descubrimiento clave fue repentino e inesperado, pero lo cierto es que el descubridor lo había estado buscando durante unos quince años. Hamilton siempre consideró, naturalmente, el descubrimiento de los cuaterniones como su obra más importante. Mirando todo el proceso retrospectivamente, queda claro que lo fundamental no era tanto el que este tipo particular de álgebra fuera más o menos importante, sino más bien el descubrimiento espectacular de la gran libertad de que goza la matemática para construir álgebras que no necesitan satisfacer las restricciones impuestas por las llamadas «leyes fundamentales» que se venían invocando sin excepción hasta entonces, basándose en el vago principio de permanencia de las

[6] Una exposición del artículo en el que Hamilton presentaba esta idea puede verse en C. C. MacDuffee, «Algebra's Debt to Hamilton», en *Scripta Mathematica*, 10 (1944), págs. 25-36.

leyes formales. Durante los últimos 20 años de su vida Hamilton concentró sus energías en su álgebra favorita, a la que tendió a atribuir un significado cósmico, y que algunos matemáticos ingleses consideraron como un tipo de *arithmetica universalis* en el sentido de Leibniz. Sus *Lectures on Quaternions* se publicaron en 1853, y desde entonces Hamilton se dedicó a la preparación de la versión ampliada *Elements of Quaternions*. Esta obra no estaba aún completamente terminada cuando murió en 1865, pero al año siguiente la publicó su hijo. La tragedia de una esposa casi inválida amargó sus últimos años, y una cierta intemperancia con el alcohol llevó a algún bromista a afirmar que aunque muy bien podría controlar realmente el tiempo puro, lo que no controlaba desde luego era el tiempo sublunar. No obstante, para los americanos resulta gratificante recordar que durante aquellos tristes años de la Guerra Civil, la recién creada National Academy of Sciences nombró a Sir William Rowan Hamilton su primer miembro extranjero asociado.

5. Grassmann y Gibbs

En 1844, al año siguiente del descubrimiento de la multiplicación correcta de los cuaterniones por Hamilton, publicaba Grassmann en Alemania unas ideas algo parecidas en su tratado titulado *Die lineale Ausdehnungslehre; ein neuer Zweig der Mathematik* («Teoría de la Extensión Lineal; una Nueva Rama de la Matemática»). Se trata de un cálculo muy general con vectores de cualquier número de dimensiones, y aquí nos encontramos también con el desarrollo de la idea de una multiplicación no conmutativa; de hecho, en el sistema Grassmann la multiplicación no es ni siquiera necesariamente asociativa. Es interesante hacer notar que Grassmann también era lingüista, como Hamilton, y especialista en literatura sáncrista, pero, al revés que Hamilton, nunca alcanzó una posición social importante, dedicándose a la enseñanza en el nivel de la escuela secundaria. Además, la importancia de su *Ausdehnungslehre* sólo se reconoció lentamente, debido a que el libro no solamente tenía un contenido poco convencional, sino que resultaba además difícil de leer. Una de las razones para ello era la de que Grassmann, al igual que Desargues 200 años antes, utilizaba una terminología muy extraña, pero lo más importante era la novedad y la extremada generalidad del enfoque de la cuestión de la extensión por el autor. Incluso Gauss, que manifestó su aprobación por la obra de Grassmann, parece haber encontrado excesiva la abstracción filosófica de la misma[7]. Grassmann redactó de nuevo su *Ausdehnungslehre* para la segunda edición de 1862, y entonces se empezó a notar más su influencia. En particular tuvo como consecuencia el desarrollo en Estados Unidos de un álgebra más restringida para los vectores del espacio tridimensional, por obra principalmente de un físico de la universidad de Yale, Josiah Williard Gibbs (1839-1903). Este álgebra de vectores es de nuevo un álgebra múltiple en la que no

[7] E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), pág. 183. No hay ninguna buena exposición en inglés de la vida y la obra de Grassmann, pero puede verse la traducción de un fragmento de la *Ausdehnungslehre* en D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), págs. 684-685.

se verifica la propiedad conmutativa de la multiplicación. De hecho, en 1867 demostraba por fin Hankel que el álgebra de los números complejos es, como había sospechado ya De Morgan, el álgebra más general posible que satisface todas las fundamentales de la aritmética[8]. El *Vector Analysis* de Gibbs apareció en 1881 y otra vez en 1884, y el autor publicó además diversos artículos sobre el tema en la misma década. Estos trabajos provocaron una controversia fogosa, y con no muy buenos modos, con los defensores de los cuaterniones, acerca de los respectivos méritos de las dos álgebras. En 1895, un colega de Gibbs en Yale fundó una pintoresca «Asociación Internacional para la Promoción del Estudio de los Cuaterniones y Sistemas Afines de la Matemática», de la que fue primer presidente un furibundo defensor de los cuaterniones. Sin embargo, no pasó mucho tiempo sin que los «sistemas afines», tales como los vectores y su generalización natural los tensores, eclipsaran durante un cierto período a los cuaterniones[9], pero éstos tienen hoy su lugar reconocido no sólo en álgebra, sino también en física cuántica y otros campos. Además, aunque el nombre de Hamilton no se vea relacionado frecuentemente con los vectores, ya que la notación de Gibbs provenía mayormente de Grassmann, las propiedades principales de los vectores fueron desarrolladas, sin embargo, en las interminables investigaciones de Hamilton sobre las «álgebras múltiples».

6. Cayley y la teoría de matrices

A mediados del siglo XIX los matemáticos alemanes sobresalían por encima de los de otros países en análisis y geometría, con las universidades de Berlín y Gotinga en cabeza, y con sus publicaciones centradas principalmente en el *Journal de Crelle*. El álgebra, en cambio, fue durante un tiempo casi un monopolio inglés, con el Trinity College de Cambridge en primera línea y el *Cambridge Mathematical Journal* como principal medio de expresión. Peacock y De Morgan fueron ambos miembros del Trinity, como lo era también Cayley, prolífico investigador en álgebra y geometría, que se graduó como *senior wrangler*. Ya hemos hablado de la obra de Cayley en geometría analítica, en especial sobre el uso de los determinantes, pero Cayley fue también uno de los primeros en estudiar las matrices, en lo que constituye otro ejemplo del peculiar interés inglés por la forma y la estructura en álgebra. Estos trabajos tuvieron su origen en una memoria de 1858 sobre la teoría de transformaciones. Por ejemplo, si la transformación

$$T_1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

[8] Véase Kenneth O. May, «The Impossibility of a Division Algebra of Vectors in Three Dimensional Space», en el *American Mathematical Monthly*, 73 (1966), págs. 289-291.

[9] La Universidad de Notre Dame publicó en 1967 un libro por Michael J. Crowe sobre la historia del análisis vectorial. Crowe ha traducido también la *Ausdehnungslehre* de Grasmann. Hay una introducción histórica en el libro *Vectors* (Princeton, N. J., 1965) de P. H. Moon y D. E. Spencer. Véase también G. J. Pawlikowski, «The Men Responsible for the Development of Vectors», en el *The Mathematics Teacher*, 60 (1967), págs. 393-396.

la hacemos seguir por otra transformación

$$T_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

el resultado (que había aparecido ya anteriormente, por ejemplo en las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, de 1801) es equivalente a la única transformación compuesta

$$T_2 T_1 \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

En cambio, si invertimos el orden en que actúan T_1 y T_2, de manera que ahora T_2 es la transformación

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

y T_1 la

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

entonces las dos, aplicadas sucesivamente, son equivalentes a la transformación única

$$T_1 T_2 \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}$$

Así pues, el invertir el orden de las transformaciones da lugar, en general, a diferentes resultados. Expresándolo en el lenguaje de la teoría de matrices,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

y, dado que dos matrices son iguales, por definición, si y sólo si todas las parejas de elementos correspondientes son iguales, resulta claramente que tenemos un nuevo ejemplo de multiplicación no conmutativa.

La definición de la multiplicación de matrices es la que aparece aplicada en las igualdades anteriores, y la suma de dos matrices de las mismas dimensiones viene definida como la matriz obtenida sumando los elementos correspondientes de las dos matrices; así, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{pmatrix}$$

La multiplicación de una matriz por un escalar K viene definida por la ecuación

$$K \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que se suele representar por I, deja invariante por multiplicación a cualquier matriz cuadrada de orden 2, y por lo tanto se le llama la matriz identidad o unidad para la multiplicación. La única matriz de orden 2 que deja invariante a cualquier otra matriz de este orden por la operación de sumar es, desde luego, la matriz cero

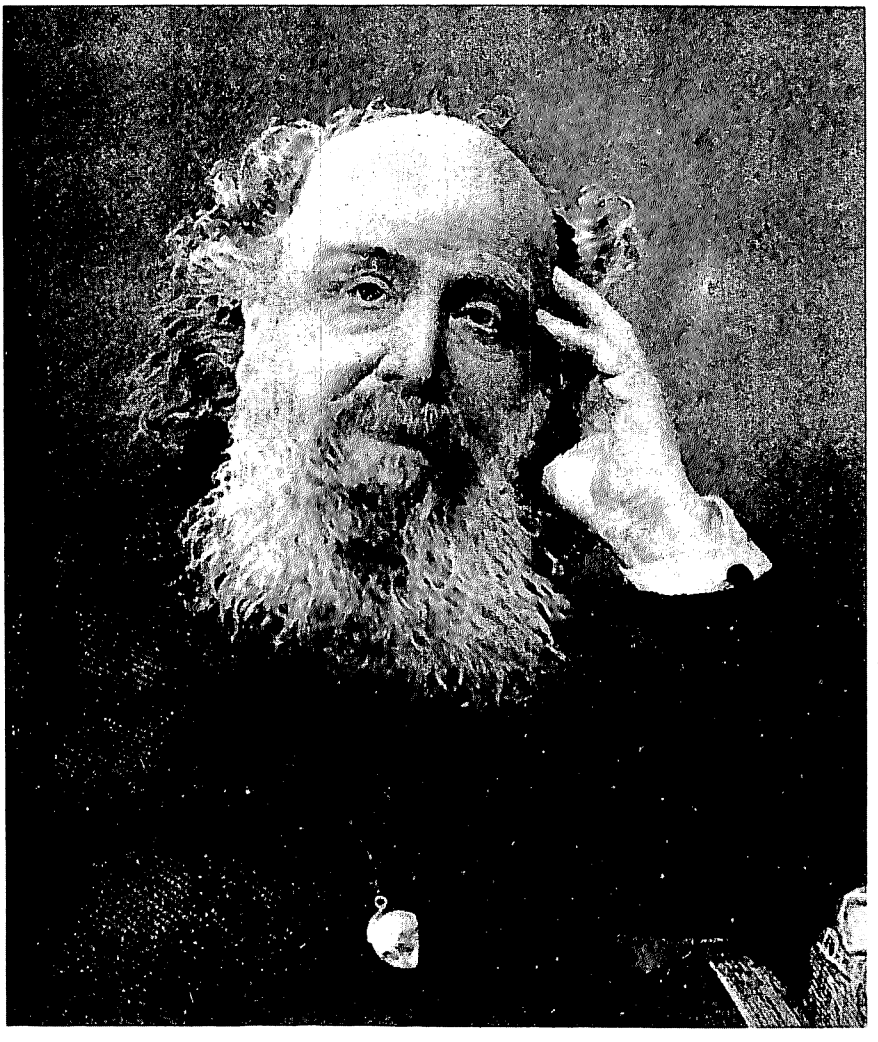
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es, pues, la matriz identidad para la suma. Con estas definiciones podemos considerar ya que las matrices con sus operaciones constituyen un «álgebra», y esto fue justamente lo que hizo Cayley y los matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809-1880) y su hijo Charles S. Peirce (1839-1914). Los Peirce vinieron a jugar en Estados Unidos más o menos el mismo papel que Hamilton, Grassmann y Cayley en Europa. El estudio del álgebra matricial y de otras álgebras no conmutativas ha sido en todas partes uno de los principales factores en el desarrollo de una concepción cada vez más abstracta del álgebra[10], especialmente durante la primera mitad del siglo XX.

7. El álgebra de Sylvester

Poco después de graduarse en el Trinity College, Cayley se dedicó al derecho durante 14 años; este hecho no interfirió demasiado en su investigación matemáti-

[10] Véase, por ejemplo, Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques* (1960), págs. 120-128.



James Joseph Sylvester.

ca, como demuestra abrumadoramente el que publicase varios cientos de artículos durante estos años. Muchos de estos artículos trataban de la teoría de invariantes algebraicos, un campo en el que él y su amigo James Joseph Sylvester fueron las figuras preeminentes. Cayley y Sylvester constituían un verdadero estudio de contrastes, en el que el primero era una persona apacible y tranquila, mientras que el segundo era vivaz e impaciente. Los dos eran «cantabrigensis», Cayley del Trinity y Sylvester del St. John, pero Sylvester estaba excluido de una posible graduación porque era judío. Durante tres años a partir de 1838 Sylvester enseñó en el University College de Londres, donde fue compañero de su antiguo maestro De Morgan, y después aceptó un puesto de profesor en la universidad americana

de Virginia. Una vez allí, los problemas de disciplina disgustaron tanto al temperamental matemático que abandonó Estados Unidos precipitadamente después de sólo tres meses de estancia. A su regreso a Inglaterra pasó casi 10 años dedicado a los negocios, para dedicarse después al estudio del derecho, y fue precisamente en esta actividad cuando conoció a Cayley en 1850. En adelante los dos matemáticos mantuvieron una profunda amistad y ambos abandonaron al fin el derecho. En 1854 Sylvester consiguió un puesto en la Royal Military Academy en Woolwich, y en 1863 Cayler aceptó el puesto de *saldlerian professor* en Cambridge. En 1876 Sylvester tuvo de nuevo la tentación de enseñar en América, esta vez en la recién fundada Johns Hopkins University, en la que permaneció casi hasta sus 70 años, cuando aceptó un puesto de profesor que le ofrecía la universidad de Oxford. En 1881, mientras Sylvester estaba aún en Johns Hopkins, Cayley fue invitado a impartir allí un curso sobre funciones theta y funciones abelianas, invitación que aceptó. Aunque los artículos de Cayley, que rivalizan en volumen con los de Cauchy (dejando, de entrada, al inaccesible Euler «fuera de concurso»), son principalmente de álgebra y geometría, también hizo importantes contribuciones al análisis, y su *único* libro, publicado en 1876, es un *Treatise on Elliptic Functions*[11].

Los intereses de Cayley fueron variados, pero la lealtad de Sylvester al álgebra fue firme, y resulta muy apropiado el que su nombre esté asociado hoy a lo que se conoce como método dialítico de Sylvester para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones polinómicas. El artificio es muy sencillo, y consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por la incógnita que se quiere eliminar, repitiendo el proceso si es necesario hasta que el número total de ecuaciones sea uno más que el número de potencias de la incógnita. De este conjunto de $n+1$ ecuaciones se pueden eliminar entonces todas las n potencias, considerando cada potencia como una incógnita distinta. Así pues, para eliminar x del par de ecuaciones

$$x^2+ax+b=0$$
$$x^3+cx^2+dx+e=0$$

hay que multiplicar la primera por x y de nuevo la ecuación resultante por x, y la segunda ecuación también por x. Entonces, considerando a cada una de las cinco potencias x^4, x^3, x^2, x, $x^0=1$, de la incógnita x como una incógnita distinta, la condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal homogéneo tenga una solución no trivial ($x^0=1$), hace que el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & a & b & 0 \\ 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & d & e \\ 1 & c & d & e & 0 \end{vmatrix}$$

[11] Sus *Collected Mathematical Papers* (1889-1898) ocupan 14 grandes y temibles volúmenes.

conocido como la resultante en el método de Sylvester, igualado a cero, dé el resultado de la eliminación.

8. La teoría de invariantes de formas cuadráticas

Más importante que su obra en teoría de la eliminación fue la colaboración de Sylvester con Cayley en el desarrollo de la teoría de las «formas» (o «cuánticas», como prefería llamarlas Cayley), de donde les vino el apodo de «los gemelos invariantes». Entre 1854 y 1878 Sylvester publicó casi una docena de artículos sobre formas, es decir, sobre polinomios homogéneos en dos o más variables, y sus invariantes[12]. Los casos más importantes en geometría analítica y en física son las formas cuadráticas en dos y en tres variables, que, al igualarlas a una constante, representan cónicas y cuádricas. En particular, la cuántica o forma $Ax^2+2Bxy+Cy^2$, al igualarla a una constante no nula, representa una elipse (real o imaginaria), una parábola o una hipérbola, según que B^2-AC sea menor, igual o mayor que cero. Además, si la forma se transforma por una rotación de los ejes en torno al origen en la nueva forma $A'x^2+2B'xy+C'y^2$, entonces $B'^2-A'C'=B^2-AC$, es decir, que la expresión B^2-AC, que se conoce como la característica de la forma, es un invariante bajo tal transformación. La expresión $A+C$ es otro invariante. Aún otros invariantes importantes asociados con la forma son las raíces k_1 y k_2 de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} A-k & B \\ B & C-k \end{vmatrix}=0 \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} A'-k & B' \\ B' & C'-k \end{vmatrix}=0$$

Estas raíces son, de hecho, los coeficientes de x^2 y de y^2 en la forma canónica $k_1x^2+k_2y^2$ a la que puede reducirse la forma cuadrática por una rotación de los ejes, si no es de tipo parabólico. El temperamental Sylvester se jactaba de haber descubierto y desarrollado la reducción de las formas binarias a sus formas canónicas de una sentada, «con la compañía de una garrafa de Oporto para sostener las energías naturales cuando flaqueaban»[13].

Si llamamos M a la matriz de los coeficientes de la forma cuadrática e I a la matriz unidad de orden 2, entonces podemos escribir la ecuación característica como $|M-kI|=0$, donde las líneas verticales representan el determinante de la matriz. Una de las propiedades importantes del àlgebra de matrices es la de que toda matriz cuadrada M satisface su ecuación característica, resultado publicado en 1858 y que se conoce como teorema de Hamilton-Cayley. A veces se afirma que el

---

[12] Breves resúmenes de algunos de los artículos de Cayley sobre cuánticas y otros temas se incluyen en el libro de Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1934), vol. II, págs. 1-33. Véase también R. W. Feldmann, «History of Elementary Matrix Theory», en *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), págs. 482-484, 589-590, 657-659.

[13] En el capítulo 21 del libro de Bell, *Men of Mathematics*, pág. 398, hay una buena exposición general de las vidas tanto de Sylvester como de Cayley. En Macfarlane, *The British Mathematicians*, hay un capítulo entero dedicado a cada uno.

álgebra de matrices de Cayley fue un simple subproducto del álgebra de cuaterniones de Hamilton, pero Cayley mismo negaba expresamente tal conexión en 1894; él admiraba la teoría de cuaterniones, pero afirmaba que su desarrollo de la teoría de matrices provenía de la de determinantes, como una manera conveniente de expresar una transformación[14].

9. Boole y el análisis de la lógica

Mientras los matemáticos de los Trinity, Hamilton y Cayley (el primero de Dublín y el segundo de Cambridge) desarrollaban sus dos tipos de álgebra nuevos, otro matemático inglés estaba inventando ya un tercer tipo de álgebra radicalmente diferente de los anteriores. Se trataba del matemático esencialmente autodidacta George Boole (1815-1864). Boole nació en una familia de clase social baja y pobre, hijo de un modesto comerciante de Lincoln, y recibió únicamente la educación elemental usual, pero estudió por su cuenta griego y latín, con la idea de que estos conocimientos le ayudarían a mejorar su posición social. Durante sus primeros años como maestro de escuela primaria, se dio cuenta Boole de que tenía que aprender más matemáticas, y comenzó a estudiarse a fondo las obras de Laplace y de Lagrange, a la vez que estudiaba otros idiomas. Hizo amistad con De Morgan, y siguió con vivo interés una controversia sobre lógica que había suscitado el filósofo escocés Sir William Hamilton (1788-1856) con De Morgan. (No confundir al filósofo escocés Sir William Hamilton con el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton [1805-1865]; ambos eran nobles, el escocés Sir William un barón que había heredado su título, y el irlandés Sir William un caballero que se había ganado el suyo.) El resultado fue que Boole publicó en 1847 un librito titulado *The Mathematical Analysis of Logic*, obra que De Morgan consideró como de las que marcan una época.

La historia de la lógica se puede dividir, si nos permitimos un pequeño exceso de simplificación, en tres etapas: 1) la lógica griega; 2) la lógica escolástica, y 3) la lógica matemática[15]. En la primera etapa las fórmulas lógicas se enunciaban con palabras del lenguaje ordinario, sujetas naturalmente a las reglas sintácticas usuales. Durante la segunda etapa la lógica se abstrajo del lenguaje ordinario, caracterizándose por unas reglas sintácticas diferenciadas y unas funciones semánticas especiales. En la tercera etapa la lógica quedó marcada por el uso de un lenguaje artificial en el que los signos y palabras estaban regidos por una sintaxis exacta y tenían una función semántica estrechamente delimitada y definida también exactamente. Mientras que en las dos primeras etapas los teoremas lógicos *se derivaban* del lenguaje usual, en la tercera etapa la lógica procede al contrario: primero *construye* un sistema puramente formal, y sólo más tarde busca una interpretación en el lenguaje diario. Aunque a veces se considera a Leibniz como un precursor de este último punto de vista, lo cierto es que su fecha concreta de

[14] E. T. Bell, *Development of Mathematics*, págs. 188-189.

[15] Véase I. M. Bochenski, *Formale Logik* (Amsterdam: North Holland, 1956; traducción al inglés de 1961).

nacimiento es el año en que apareció el primer libro de Boole, así como la *Formal Logic* de De Morgan. La obra de Boole en particular insistía en que la lógica debería estar asociada a la matemática más bien que a la metafísica, como sostenía el escocés Sir William Hamilton.

Más importante incluso que su lógica matemática era la concepción de la matemática misma por parte de Boole. En la Introducción a su *Mathematical Analysis of Logic* protesta Boole contra la definición de la matemática que se admitía entonces como la ciencia del número y de la magnitud (definición que se puede ver aún en los malos diccionarios e incluso en algunos buenos). Boole escribía, defendiendo un punto de vista mucho más general:

> Podríamos asignarle con justicia el carácter definitivo de un verdadero Cálculo, que es un método que se basa en el uso de Símbolos, cuyas leyes de combinación son conocidas y generales, y cuyos resultados admiten una interpretación consistente... Es precisamente sobre la base de este principio general sobre la que me propongo edificar el Cálculo de la Lógica, y en virtud de la que reclamo para éste un lugar entre las formas reconocidas del Análisis Matemático[16].

Peacock sugería ya en su *Algebra* de 1830 que los símbolos que designaban objetos en álgebra no necesitaban representar precisamente números, y De Morgan sostenía que las interpretaciones de los símbolos que designaban operaciones también podían ser arbitrarias; pues bien, Boole llevó este formalismo a su conclusión natural. Ya no se podía limitar a la matemática al estudio de las cuestiones relativas al número y la magnitud continua. Aquí se expresa por primera vez claramente la idea de que la característica esencial de la matemática no es tanto su contenido como su *forma*. Si un tema cualquiera se presenta de tal manera que consista únicamente en símbolos y reglas precisas para operar con estos símbolos, sujeto todo ello solamente a una exigencia de consistencia interna, entonces este tema constituye una parte de la matemática. A pesar de que el *Mathematical Analysis of Logic* no tuvo demasiado éxito, probablemente fue debido a la influencia de esta obra el hecho de que Boole fuese nombrado dos años más tarde profesor de matemáticas en el recién creado Queens College en Cork.

Un gran matemático y filósofo del siglo XX, Bertrand Russell, sostenía que el máximo descubrimiento del siglo XIX fue el de la naturaleza de la matemática pura. Y añadía a esta afirmación las palabras: «La Matemática Pura fue descubierta por Boole en una obra que tituló *The Laws of Thought*.» Russell se refiere en su afirmación a la obra más conocida de Boole, publicada en 1854, pero para ser más exactos podría haber sido mejor citar el libro anterior de 1847, en el que presentaba casi los mismos puntos de vista.

10. El álgebra de Boole

La *Investigation of the Laws of Though* de Boole, de 1854, es ya una obra clásica en la historia de la matemática, porque en ella extendió y clarificó las ideas

[16] George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), págs. 3 y 4. Esta obra está reeditada en la Philosophical Library (New York, 1948).

presentadas en 1847, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra, que conocemos hoy como «álgebra de Boole», y que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica. Boole utilizaba las letras x, y, z, ..., para representar objetos cualesquiera de un cierto subconjunto de cosas (números, puntos, ideas u otras entidades) seleccionadas de un conjunto universal o universo del discurso, cuya totalidad representaba por el símbolo o «número» 1. Por ejemplo, si el símbolo 1 representaba al conjunto de todos los europeos, x podría representar a todos los europeos que son ciudadanos franceses, y podría representar a todos los hombres europeos de más de 21 años, y z podría representar a todos los europeos que miden entre 1,50 y 1,80 metros de estatura. El símbolo o «número» 0 lo tomó Boole para representar el conjunto vacío, que no contiene ningún elemento del conjunto universal. El signo + entre dos letras o símbolos, como en $x+y$, lo consideró representando la unión de los subconjuntos x e y, es decir, el conjunto formado por los elementos que figuran en x o en y o en ambos. El signo de multiplicación × representaba la intersección de conjuntos, de manera que $x \times y$ representaba el conjunto de todos los elementos que están simultáneamente en el subconjunto x y en el subconjunto y. En el ejemplo anterior, $x+y$ consistiría en el conjunto de todos los europeos que o son ciudadanos franceses o son hombres y tienen más de 21 años o las dos cosas simultáneamente; $x \times y$ (que se escribe también como $x \cdot y$, o simplemente xy) sería el conjunto de los ciudadanos franceses que son hombres y tienen más de 21 años. (Boole, al contrario que De Morgan, utilizaba la unión excluyente, no permitiendo que hubiera elementos comunes entre x e y, pero en el álgebra de Boole moderna se considera más conveniente tomar la operación + como la unión usual, no excluyente, de conjuntos que pueden tener elementos comunes.) El signo = representa también aquí la relación de identidad (en el sentido extensional para conjuntos). Es inmediato comprobar que las cinco leyes fundamentales del álgebra se verifican en cualquier álgebra de Boole de conjuntos, es decir, que $x+y=y+x$, $xy=yx$, $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(yz)=(xy)z$ y $x(y+z)=xy+xz$. Sin embargo, no todas las reglas del álgebra usual siguen siendo válidas. Por ejemplo, se tiene evidentemente que $1+1=1$ y que $x \cdot x=x$ (la segunda propiedad aparece en la obra de Boole, pero no la primera, por utilizar la unión excluyente). La ecuación $x^2=x$ tiene, en el álgebra ordinaria, las dos únicas raíces $x=0$ y $x=1$; a este respecto el álgebra de la lógica y el álgebra ordinaria están de acuerdo. La misma ecuación $x^2=x$, si la escribimos en la forma $x(1-x)=0$, sugiere claramente que $1-x$ debería representar al complemento del conjunto x, es decir, al conjunto de todos los elementos del conjunto universal 1 que no están en el subconjunto x. Aunque en el álgebra de Boole es cierto que $x^3=x$ o bien que $x(1-x^2)=0$ o que $x(1-x)\,(1+x)=0$, la solución en el álgebra ordinaria difiere de la del álgebra de Boole, en la que no hay «números» negativos. El álgebra de Boole difiere también del álgebra usual en que de la igualdad $zx=zy$, donde z es un conjunto no vacío, es decir, no nulo, no se deduce necesariamente que $x=y$; ni tampoco es cierto que si $xy=0$, entonces o bien x o bien y tengan que ser 0, obviamente.

Boole demostró que su tipo general de álgebra suministraba un algoritmo fácil para el razonamiento silogístico. La ecuación $xy=x$, por ejemplo, expresa elegantemente que todos los x son y; si se sabe también que $yz=y$, es decir, que

todos los y son z, entonces sustituyendo en la primera ecuación el valor de y dado por la segunda, el resultado obtenido es $x(yz)=x$; utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, esta última ecuación queda en la forma $(xy)z=x$, y sustituyendo xy por x, nos queda finalmente que $xz=x$, que es simplemente la manera simbólica y compacta de decir que todos los x son z.

El *Mathematical Analysis of Logic* (1847) y, por supuesto, *The Laws of Thought* (1854) contienen muchas más cosas que el álgebra de conjuntos que hemos esbozado. La segunda obra, en particular, incluye aplicaciones a la teoría de probabilidades. Hoy utilizan frecuentemente el álgebra de Boole no sólo los matemáticos puros, sino también otros que la aplican a problemas de teoría del seguro y de teoría de la información. Las notaciones han cambiado algo desde la época de Boole, y así la unión y la intersección se suelen representar hoy por $\cup$ y $\cap$, en vez de por $+$ y $\times$, y el símbolo para el conjunto vacío no es ya el 0, sino ϕ, pero los principios fundamentales son exactamente los mismos que estableció Boole hace más de 130 años.

Hay un aspecto de la obra de Boole que no está relacionado apenas con sus tratados de lógica ni con la teoría de conjuntos, pero que conoce bien cualquier estudiante de ecuaciones diferenciales. Se trata del algoritmo relativo a los operadores diferenciales que introdujo Boole para facilitar el tratamiento de las ecuaciones diferenciales lineales. Si queremos resolver, por ejemplo, la ecuación diferencial $ay''+by'+cy=0$, la podemos escribir en la forma $(aD^2+bD+c)y=0$. Entonces, considerando a D como una incógnita en vez de como un operador, resolvemos la ecuación *algebraica* $aD^2+bD+c=0$; si las raíces de la ecuación algebraica son p y q, entonces e^{px} y e^{qx} son soluciones de la ecuación diferencial, y $Ae^{px}+Be^{qx}$ es una solución general de dicha ecuación. Hay otras muchas situaciones en las que Boole, en su *Treatise on Differential Equations* de 1859, establece paralelismos entre las propiedades de los operadores diferenciales (y sus inversos) y las reglas del álgebra. Así pues, los matemáticos ingleses de la segunda mital del siglo XIX estaban alcanzando de nuevo un alto nivel en el campo del análisis algorítmico, en el que 50 años antes habían mostrado grandes deficiencias.

Boole murió en 1864, sólo diez años después de haber publicado sus *Laws of Thought*, pero el reconocimiento a su obra, incluida una graduación honoraria por la Universidad de Dublín, le llegó afortunadamente antes de su muerte[17]. Es curioso observar que Cantor, que como Boole fue uno de los principales exploradores de territorios de la matemática hasta entonces desconocidos, del siglo XIX, fue uno de los pocos que se negó a aceptar la obra de Boole.

[17] No hay ninguna biografía extensa de Boole. Para más detalles véase Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, págs. 50-63; Bell, *Men of Mathematics*, cap. 23, o el artículo sobre Boole por T. A. A. Broadbent en el *Dictionary of Scientific Biography* (Scribner's, New York). Una exposición del álgebra de Boole fácilmente legible aparece en el libro de Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (1964), págs. 74-83. Véase también el artículo sobre «Logic, History of», en *The Encyclopedia of Philosophy*, editada por Paul Edwards (8 vols. en 4; Nre York; Macmillan, 1967), vol. IV, págs. 513-571.

11. De Morgan y los Peirce

Entre los que continuaron la obra de Boole después de su muerte estuvieron De Morgan y Benjamin Peirce. Ambos encontraron, independientemente, lo que se suele denominar como ley de dualidad de De Morgan: para toda proposición en la que intervengan la suma y la multiplicación lógicas, hay otra proposición correspondiente a ella en la que están intercambiadas suma y multiplicación. En particular tenemos lo que se llama fórmula de De Morgan para conjuntos: Si x e y son subconjuntos de un conjunto S, entonces el complemento de la unión de x e y es la intersección de los complementos de x y de y, y el complemento de la intersección de x e y es la unión de los complementos de x y de y.

Benjamin Peirce estuvo ligado al Harvard College durante más de 50 años, primero como estudiante y luego como profesor. Su obra más importante fue su artículo sobre *Linear Associative Algebra*, leído ante la American Association for the Advancement of Sciencie en 1864, pero que no se publicó hasta 1881 en el *American Journal of Mathematics*. Las álgebras lineales asociativas incluyen el álgebra ordinaria, el análisis vectorial y los cuaterniones como casos particulares, pero no están restringidas a las unidades 1, i, j, k. Peirce construyó tablas de multiplicar para 162 álgebras distintas, ¡lo que estaba sin duda bien lejos de la idea predominante a comienzos de este siglo de que había un álgebra única! C. S. Peirce continuó la obra de su padre en esta dirección demostrando que, de todas estas álgebras, sólo hay tres en las que la división esté definida de manera única: el álgebra real ordinaria, el álgebra de los números complejos y el álgebra de los cuaterniones. Fue en conexión con su trabajo sobre álgebras lineales asociativas cuando Benjamin Peirce dio en 1870 su definición bien conocida, «la Matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias». Su hijo estaba completamente de acuerdo con este punto de vista, como resultado de la influencia de Boole, pero insistía en que la matemática y la lógica no son lo mismo, «la Matemática es una ciencia puramente hipotética: no ofrece nada más que proposiciones condicionales. La lógica en cambio es categórica en sus afirmaciones»[18]. Esta distinción iba a verse discutida más a fondo por todo el mundo matemático durante el primer tercio del siglo XX.

En Inglaterra, mientras tanto, desarrollaba ideas bastante parecidas William Kingdon Clifford (1845-1879), otro de los muchos graduados por el Trinity que nos encontramos, cuya brillante obra, como la de otro graduado del Trinity muy anterior a él, Roger Cotes, se vio interrumpida por su muerte prematura a los 34 años. Clifford era una persona extraordinaria en varios aspectos. Por mencionar uno insólito, Clifford fue un gimnasta consumado que podía elevarse en la barra con una cualquiera de las dos manos, proeza extraordinaria para cualquiera, pero especialmente para un matemático. Además, ganó algunos premios de declamación, algo casi inaudito para alguien que se graduó como segundo *wrangler* en

[18] Para una breve selección de la obra, tanto de Benjamin Peirce como de Charles Sanders Peirce, véase *The Treasury of Mathematics*, ed. por Henrietta O. Midonick (1965), págs. 610-642. Véase también *Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce* (2.ª serie, Amherst, Mass, University of Massachusetts Press, 1964).



Charles Sanders Peirce.

matemáticas. Y, por último, escribió una colección de cuentos para niños, *The Little People*, lo mismo que hizo el matemático de Oxford C. L. Dodgson (1832-1898), más conocido por el seudónimo de Lewis Carroll, autor del famosísimo cuento *Alice in Wonderland*. En 1870, Clifford escribió un artículo titulado «On the Space-Theory of Matter» en el que se mostraba como un firme defensor en Inglaterra de las geometrías no-euclídeas de Lobachewsky y de Riemann[19]. En álgebra también adoptó Clifford los puntos de vista más recientes, y su nombre ha quedado inmortalizado en las llamadas «álgebras de Clifford», de las que la de los

[19] Véase E. T. Bell, *Men of Mathematics*, págs. 503-504, así como D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics* (1967), págs. 171-173.

octoniones o de los bicuaterniones son casos particulares. Estas álgebras no conmutativas las utilizó Clifford para estudiar los movimientos en espacios no-euclídeos, de los que ciertas variedades se conocen como espacios de Clifford y de Klein[20]. ¡Qué distinta se nos presenta la avanzada matemática de vanguardia inglesa de finales del siglo XIX, de las obtusas ideas conservadoras de comienzos de siglo!

12. La trágica vida de Galois

La gran variedad de tipos de álgebras inventadas a lo largo del siglo XIX podrían haber producido en la matemática una peligrosa tendencia centrífuga, de no haber sido por el desarrollo simultáneo de ciertos conceptos estructurales básicos. Uno de los más importantes de éstos fue el concepto de grupo, cuyo papel unificador en la geometría hemos comentado ya. En álgebra, el concepto de grupo fue sin duda el que ejerció una fuerza de cohesión más importante, a la vez que era uno de los factores esenciales que promovieron la aparición y el rápido desarrollo de los conceptos abstractos. Ningún matemático concreto puede considerarse como el responsable del origen de la idea de grupo, pero la figura que se nos presenta inevitablemente como la más importante en este contexto es la del hombre que dio su nombre a este concepto, el joven Évariste Galois (1811-1832), que murió trágicamente antes de cumplir los 21 años.

Galois nació en las cercanías de París, en el pequeño pueblo de Bourg-la-Reine, donde su padre era alcalde. Sus padres tenían ambos una sólida formación cultural, aunque no habían mostrado ninguna aptitud especial para las matemáticas, pero lo que sí aprendió de ellos el joven Galois fue un profundo odio a cualquier forma de tiranía. Cuando el muchacho comenzó a asistir a la escuela, a la edad de doce años, mostró poco interés por el latín, el griego y el álgebra, pero en cambio se sintió inmediatamente fascinado por la *Géométrie* de Legendre. Más tarde estudió con aprovechamiento álgebra y análisis en las obras de maestros tales como Lagrange y Abel, pero su trabajo rutinario de clase en matemáticas fue siempre mediocre, y sus profesores lo consideraron como un muchacho raro. A los 16 años Galois sabía ya lo que sus maestros no habían conseguido descubrir: que era un genio para las matemáticas. Por lo tanto, tenía la esperanza de entrar en la escuela en la que se habían formado tantos matemáticos famosos, es decir, en la École Polytechnique, pero fue rechazado debido a su falta de preparación sistemática. Se trataba sólo de su primero y amargo fracaso. No obstante, a los 17 años Galois desarrolló por escrito sus descubrimientos fundamentales en un artículo que entregó a Cauchy para que lo presentase a la Académie. Cauchy esta vez no sólo puso el artículo en algún lugar que luego no recordaba, como había hecho ya con un importante trabajo de Abel, sino que directamente ¡perdió el artículo! (se estaba haciendo un verdadero especialista en estas técnicas). Ahora Galois ya tenía motivos para odiar no sólo a los profesores examinadores, sino también a los académicos. Otro fracaso

[20] Puede verse una biografía de Clifford en Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, págs. 78-91, pero los juicios que se expresan en este libro sobre la obra matemática de Clifford son infundados. Véanse también los *Mathematical Papers* de Clifford (Londres, 1882).

en su segundo intento de ingresar en la École Polytechnique vino a intensificar su amargura y su decepción, pero el golpe más fuerte estaba aún por llegar: atacado a causa de intrigas clericales, su padre se sintió perseguido y se suicidó.

A pesar de los reveses que había sufrido en tan pocos años, Galois consiguió entrar al fin en la École Normale para prepararse para la enseñanza. Al mismo tiempo continuó con sus investigaciones, presentando en 1830 una memoria al concurso de la Académie para el premio en matemáticas. La memoria en cuestión no pareció pasar por las manos de Cauchy, pero el resultado final fue el mismo, porque Fourier, que era el secretario de la Académie, se llevó el artículo a su casa para leerlo con calma, pero desgraciadamente murió poco después y este segundo trabajo se perdió también irremediablemente. Enfrentado por todas partes con la tiranía y la frustración, Galois hizo suya la causa de la revolución de 1830. Una hiriente carta en la que se criticaba la indecisión del director de la École Normale, tuvo como consecuencia la expulsión de Galois de la escuela. Por tercera vez intentó Galois presentar un artículo a la Académie, esta vez a través de Poisson. El trabajo contenía resultados importantes de lo que conocemos hoy como teoría de Galois, pero Poisson, que era el encargado de informar sobre el artículo, lo devolvió con la observación de que era «incomprensible». Completamente decepcionado ya, Galois se unió a la Guardia Nacional. En 1831, en una reunión de republicanos, propuso un brindis que se consideró como una amenaza a la vida de Louis Philippe, y Galois fue arrestado. Aunque fue puesto en libertad, fue arrestado de nuevo unos meses más tarde y condenado a seis meses de cárcel. Poco después se vio relacionado con una *coquette* y, en un asunto poco claro y bajo el código implícito del honor, no pudo evitar el duelo. En una carta a unos amigos escribía: «He sido desafiado por dos patriotas; me era imposible negarme.» La noche anterior al duelo, con el presentimiento de su muerte, Galois dedicó las horas que le quedaban a redactar, en una carta para sus amigos, algunas breves notas para la posteridad sobre sus descubrimientos[21]. Galois pedía que se publicase dicha carta (tal como se hizo, efectivamente, el mismo año) en la *Revue Encyclopédique*, y expresaba su esperanza de que Jacobi y Gauss pudieran dar públicamente sus opiniones sobre la importancia de los teoremas. A primera hora de la mañana del 30 de mayo de 1832, Galois se enfrentó a su adversario en duelo a pistola. Recibió un disparo que le perforó los intestinos y permaneció en el lugar donde cayó hasta que un campesino que pasaba casualmente por allí lo llevó a un hospital, donde murió de peritonitis a la mañana siguiente. A su funeral asistieron varios miles de republicanos[22]. Galois tenía entonces sólo 20 años, siendo el matemático más joven que hizo nunca descubrimientos de tal importancia.

13. La teoría de Galois

Galois confió al destinatario de su última carta unos manuscritos destinados a la Académie, y en 1846 Liouville seleccionó algunos de ellos y los publicó en su

[21] Una traducción al inglés de esta carta aparece en el *Source Book in Mathematics*, ed. por D. E. Smith, págs. 278-285.

[22] Véase George Sarton, «Évariste Galois», en *Osiris*, 3 (1937), págs. 241-259.

Journal. Liouville encontró la tarea difícil, debido a que Galois había incumplido sistemáticamente el consejo de Descartes: «Cuando se discuten cuestiones trascendentales hay que ser trascendentalmente claro», pero Liouville se sintió recompensado cuando, después de rellenar las lagunas de la demostración, vio el método que había seguido Galois para demostrar su bello teorema:

> Para que una ecuación irreducible de grado primo sea resoluble por radicales, es necesario y suficiente que todas sus raíces sean funciones racionales de dos cualesquiera de ellas.

El objeto principal de las investigaciones de Galois había sido el de determinar cuándo son resolubles por radicales las ecuaciones polinómicas. Gauss, en su criterio para la constructibilidad de los polígonos regulares, había resuelto esencialmente el problema de la resolución de la ecuación $a_0X^n+a_n=0$ en términos de operaciones racionales y raíces cuadradas sobre los coeficientes. Galois venía a generalizar este resultado dando criterios para la resolubilidad de la ecuación a_0X^n+a, $X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n=0$ en términos de operaciones racionales y de raíces n-ésimas sobre los coeficientes. Su planteamiento del problema, lo que se conoce hoy como teoría de Galois, fue otra de las contribuciones completamente originales del siglo XIX al álgebra. Sin embargo, se ha dicho que la teoría de Galois es como el ajo, en que no existe tal cosa como un poco de ella. Uno tiene que profundizar sustancialmente en su estudio para comprender el razonamiento utilizado, como demuestra justamente la experiencia de Galois con sus contemporáneos. No obstante, podemos indicar de una manera general qué hay detrás de la teoría de Galois y por qué ha sido tan importante.

Galois comenzó sus investigaciones por los trabajos de Lagrange sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica. Cualquier cambio en la disposición ordenada linealmente de n objetos se llama una permutación de estos objetos. Por ejemplo, si el orden de las letras a, b, c, se cambia al c, a, b, esta permutación se representa abreviadamente por (acb), notación que significa que cada letra se sustituye por la que le sigue inmediatamente, considerando a la primera como sucesora inmediata de la última; así la letra a se sustituye por la c, la c por la b y la b por la a. En cambio, la notación (ac) o (ac, b) significa que a se sustituye por c, c por a y b permanece invariante. Si se efectúan sucesivamente dos permutaciones, la permutación resultante se conoce como el producto de las dos permutaciones dadas. Así, el producto de (acb) por (ac, b), que se escribe como $(acb)(ac, b)$, es la permutación (a, bc). La permutación idéntica I es la que sustituye cada letra por ella misma, es decir, la que deja el orden a, b, c, sin modificar. Es inmediato comprobar que el conjunto de todas las permutaciones de las letras a, b, c, satisface, con la operación de composición, las condiciones de la definición de grupo dada en el capítulo XXIV sobre la geometría; este grupo, que contiene seis permutaciones, se conoce como el grupo simétrico del conjunto $\{a, b, c\}$. En el caso de n elementos distintos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ el grupo simétrico correspondiente contiene exactamente $n!$ permutaciones. Si estos n elementos son las raíces de una ecuación irreducible, entonces las propiedades del grupo simétrico en cuestión dan condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación sea resoluble por radicales.

Inspirado por la demostración de Abel de la insolubilidad por radicales de la ecuación quíntica general, descubrió Galois que una ecuación algebraica irreducible es soluble por radicales si y sólo si su grupo, es decir, el grupo simétrico del conjunto de sus raíces, es resoluble. La definición de lo que es un grupo resoluble es técnicamente complicada, y viene dada en términos de las relaciones entre el grupo y sus subgrupos, por lo que no la formularemos aquí. Las tres permutaciones (abc), $(abc)^2$ y $(abc)^3 = I$ forman un subgrupo del grupo simétrico de $\{a, b, c\}$; Lagrange había demostrado ya que el orden de un subgrupo debe ser un divisor del orden del grupo, pero Galois fue más lejos y encontró relaciones entre la factorizabilidad del grupo de una ecuación y la resolubilidad de la ecuación. A él le debemos además el uso, en 1830, de la palabra «grupo» en el sentido técnico que tiene hoy para nosotros en la matemática[23].

La teoría de Galois nos puede proporcionar, de hecho, un algoritmo para calcular de manera efectiva las raíces de una ecuación, cuando éstas son expresables por radicales, pero el énfasis en el planteamiento de Galois de la teoría de ecuaciones está puesto más bien en la estructura algebraica general que en el manejo de casos concretos. Aunque su obra fue anterior a la de la mayoría de los algebristas británicos del gran período 1830-1850, sus ideas no ejercieron ninguna influencia hasta que se publicaron en 1846. Para entonces el álgebra se estaba convirtiendo en algo tan general y abstracto, que los métodos heurísticos de cálculo de raíces quedaron subordinados a las cuestiones lógicas relativas a los teoremas de existencia. Galois estaba tan próximo ya a las posiciones modernas en álgebra, y, sin embargo, tuvo tales dificultades para expresarlas, que fue incapaz de hacerse entender por los matemáticos de su época. Ultimamente se habla mucho de la «nueva matemática» en la enseñanza, pero lo cierto es que sólo es nueva en el sentido de que las ideas de Galois alcanzaron al fin el reconocimiento y el lugar merecido, más de un siglo después de que el destino lo tratase de una manera tan cruel.

14. La teoría de cuerpos

La obra de Galois fue importante no sólo por hacer del concepto abstracto de grupo la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas, sino también por haber conducido, a través de los descubrimientos de Dedekind, Kronecker y Kummer, a lo que podríamos llamar un enfoque aritmético del álgebra, algo parecido en cierto modo a la aritmetización del análisis. Esto no significaba en absoluto una vuelta a la concepción medieval y renacentista del álgebra como un catálogo de algoritmos para hallar valores de incógnitas. Significaba más bien el desarrollo de un tratamiento axiomático preciso de las estructuras algebraicas que tienen que ver

[23] Véanse sus *Oeuvres* editadas por E. Picard (1897), pág. 28. Para más detalles sobre la teoría de Galois y la resolubilidad de ecuaciones véase Emile Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Math. Lect., núm. 2; Notre Dame, Ind., 1959), o bien consúltese algún texto de álgebra moderna, tales como el de Garrett Birkhoff y Saunders MacLane, *Survey of Modern Algebra* (New York; Macmillan, 1941), o el de L. E. Dickson, *Modern Algebraic Theories* (Chicago; B. H. Sanborn, 1926). Una exposición muy breve puede verse en E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, págs. 218-220. Cf. Garret Brikhoff, «Galois and Group Theory», en *Osiris*, 3 (1937), págs. 260-268.

con los diversos cuerpos numéricos. El concepto de cuerpo estaba implícito ya en la obra de Abel y de Galois, pero Dedekind parece haber sido el primero en dar, en 1879, una definición explícita de un cuerpo de números: un conjunto de números que forma un grupo abeliano con respecto a la suma y con respecto a la multiplicación (excepto en lo que se refiere al inverso del cero), y tal que la multiplicación es distributiva con respecto a la suma. Los ejemplos más sencillos son los sistemas de los números racionales, de los números reales y de los números complejos. Kronecker dio otros ejemplos en 1881 basados en sus «dominios de racionalidad». El conjunto de los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son racionales, es un cuerpo que contiene a todos los números racionales y a $\sqrt{2}$, como se comprueba fácilmente. En todos estos casos el número de elementos del cuerpo es infinito; un cuerpo con un número finito de elementos se conoce como un «cuerpo de Galois», y un ejemplo sencillo es el cociente de los enteros módulo 5 (o cualquier otro primo).

El interés en la idea abstracta de estructura y la aparición de nuevas álgebras, especialmente durante la segunda mitad del siglo XIX, condujo también a amplias generalizaciones en el campo de los números y su aritmética. Ya vimos que Gauss extendió la idea de número entero ordinario a los llamados enteros de Gauss, que son los números complejos de la forma $a+bi$, con a y b enteros. Dedekind la generalizó a su vez en su teoría de los «enteros algebraicos», es decir, números que son raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros y tales que el coeficiente del término de mayor grado sea 1. Tales sistemas de «enteros» no constituyen cuerpos, desde luego, puesto que los elementos no nulos no tienen inversos para la multiplicación, en general. Sí tienen algo en común con los cuerpos, de hecho, ya que verifican todas las restantes propiedades de un cuerpo de números; se dice, pues, que forman un «dominio de integridad». Tales generalizaciones de la idea de entero costaron un precio, sin embargo, que fue la pérdida de la propiedad de factorización única. Debido a ello, Dedekind y otro matemático contemporáneo, Ernst Eduard Kummer (1810-1893), introdujeron en la aritmética el concepto de «ideal», basado en la idea de «anillo».

Un conjunto R de elementos sobre el que están definidas dos operaciones, de sumar y de multiplicar, se dice que es un anillo si: 1) es un grupo abeliano con respecto a la suma, y 2) la multiplicación es asociativa y distributiva con respecto a la suma. Por lo tanto, un anillo en el que la multiplicación es conmutativa, que tiene elemento unidad y que no tiene divisores de cero, es un dominio de integridad. Un ideal es entonces un subconjunto I del anillo R tal que: 1) es un grupo para la suma, y 2) siempre que x pertenezca a R e y pertenezca a I, xy e yx pertenecen a I. El conjunto de los números enteros pares, por ejemplo, es un ideal del anillo de los enteros. Ocurre que en el anillo R (de hecho, dominio de integridad) de los enteros algebraicos, cualquier ideal I de R se puede expresar de manera única (excepto en el orden de los factores) como un producto de ideales primos. Es decir, que la unicidad en la factorización puede salvarse a través de la teoría de ideales[24].

[24] Para una buena introducción a la teoría de ideales, véase N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Mathematical Monographs, núm. 8; The Mathematical Association of America, 1948).

Kummer había quedado huérfano de padre a los tres años, pero su madre se ocupó de que su hijo consiguiera una educación superior en la universidad de Halle, en la que obtuvo su doctorado a los 21 años. Después de una docena de años de enseñanza en gymnasiums de nivel medio, sucedió a Dirichlet en Berlín cuando éste sucedió a Gauss en Gotinga en 1855; y en Berlín permaneció Kummer hasta su retiro en 1883. Poco después de su graduación comenzó a interesarse Kummer por el último teorema de Fermat, del que, por cierto, Cauchy creyó haber dado en una ocasión una demostración, erróneamente por supuesto. Kummer consiguió demostrar el teorema para un conjunto de exponentes muy amplio, pero no pudo lograr una demostración general. El escollo fundamental consistió en que, al intentar factorizar x^n+y^n mediante la resolución de la ecuación $x^n+y^n=0$ para x en función de y, los enteros algebraicos raíces de la ecuación no satisfacen necesariamente el teorema fundamental de la aritmética, es decir, pueden no ser factorizables de manera única. El resultado fue que, aunque fracasó en su intento de demostrar el último teorema de Fermat, precisamente el intento le sirvió para crear, en cierto sentido, una nueva aritmética, la teoría de ideales que descubrió en 1846, muchos años antes de que Dedekind hiciera descubrimientos análogos. Una de las lecciones que enseña claramente la historia de la matemática es la de que la investigación en busca de soluciones a problemas aún sin resolver, sean éstos solubles o no, conduce casi invariablemente a descubrimientos importantes en el camino.

15. Frege y la definición de número cardinal

A menudo se ha comparado a la matemática con un árbol, ya que crece sin cesar en una estructura que se extiende y se ramifica cada vez más sobre el suelo, mientras que, al mismo tiempo, hunde sus raíces cada vez más profundas y más extensas, buscando una base firme. Este doble y simétrico crecimiento caracterizó de una manera muy especial el desarrollo del análisis durante el siglo XIX, puesto que la rápida expansión de la teoría de funciones estuvo acompañada por el continuo esfuerzo de aritmetización rigurosa del análisis que va de Bolzano a Weierstrass. En lo que se refiere al álgebra, el siglo XIX se puede caracterizar más por los nuevos desarrollos que por la atención prestada a los fundamentos, y los esfuerzos de Peacock por conseguir una base sólida resultan muy débiles si se los compara con la precisión de Bolzano en análisis. Sin embargo, durante los últimos años del siglo se produjeron varios intentos de fundamentar el álgebra sobre bases más sólidas. Los números complejos se definían en términos de números reales, los cuales se definían a su vez como clases de números racionales, que eran a su vez parejas ordenadas de números enteros; pero, a fin de cuentas, ¿qué eran los números enteros? Todo el mundo cree que sabe lo que es, por ejemplo, el número 3, hasta que intenta definirlo y explicar su significado, y la idea de igualdad entre números enteros se supone obvia. Sintiéndose insatisfecho con esta situación en la que los conceptos básicos de la aritmética, y por tanto del álgebra, se apoyaban sobre bases tan imprecisas, el lógico y matemático alemán F. L. G. Frege (1848-

1925) se vio conducido a su definición de número cardinal, hoy bien conocida. Las bases de sus consideraciones provenían de la teoría de conjuntos de Boole y de Cantor. Recordemos que Cantor consideraba que dos conjuntos infinitos tenían la misma «potencia» si los elementos de los dos conjuntos se podían poner en correspondencia biunívoca. Frege vio que esta idea de la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos es también la idea básica para la definición de la igualdad de números naturales, como caso muy particular de potencias o cardinales. Se dice que dos conjuntos finitos tienen el mismo número cardinal, es decir, que son equivalentes, si los elementos de uno cualquiera de ellos se pueden poner en correspondencia biunívoca con los elementos del otro. Entonces, si partimos de un conjunto finito concreto, tal como el conjunto de los dedos de una mano, y formamos la extensa clase de todos los conjuntos cuyos elementos se pueden poner en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto inicial, entonces esta clase de todos los conjuntos tales constituirá un número cardinal, en nuestro caso el número 5. De una manera general, la definición de Frege de número cardinal de un conjunto dado, finito o infinito, lo identifica con la clase de todos los conjuntos que son semejantes al conjunto dado (donde por «semejantes» debe entenderse que los elementos de los dos conjuntos en cuestión puedan ponerse en correspondencia biunívoca).

Esta definición de número cardinal de Frege (que más tarde se retocó ligeramente para evitar las paradojas) apareció en 1884 en un libro muy conocido, *Die Grundlagen der Arithmetik* («Los Fundamentos de la Aritmética»), y de esta definición dedujo las propiedades de los números naturales que se estudian en aritmética elemental. Durante los 20 años siguientes Frege extendió y generalizó sus ideas, publicando su obra más importante, los *Grundgesetze der Arithmetik* («Leyes Básicas de la Aritmética»), en dos volúmenes, el primero de los cuales se publicó en 1893 y el segundo diez años más tarde. Aquí aborda el autor la tarea de deducir los conceptos de la aritmética de los de la lógica formal, discrepando por completo de la afirmación de C. S. Peirce de que la matemática y la lógica son claramente distintas. Frege había estudiado en las universidades de Jena y Gotinga, y enseñó en Jena durante largos años. Sin embargo, su programa de fundamentación de la matemática no encontró eco apenas hasta que fue emprendido independientemente por Bertrand Russell a comienzos del siglo XX, cuando se convirtió en una de las metas más importantes de los matemáticos[25]. Frege se sintió profundamente decepcionado por la pobre acogida dispensada a su obra, pero la culpa la tuvo en buena parte la excesiva novedad del contenido, así como la forma filosófica en que venían enunciados los resultados fundamentales y la complicada notación empleada. La historia muestra reiteradamente que las ideas innovadoras se ven aceptadas con más facilidad si vienen expresadas de una forma relativamente convencional.

---

[25] Hay una traducción inglesa de los *Grundlagen*, con el título de *The Foundations of Arithmetic*, por J. L. Austin (New York: Philosophical Library, 2.ª ed., 1953). Un fragmento de esta traducción se incluye en *The Treasury of Mathematics*, ed. por Henrietta O. Midonick. Hay también una versión inglesa de la introducción al volumen I y del epílogo al volumen II de los *Grundgesetze*, trad. por Montgomery Furth (Berkeley, University of California Press, 1964).

16. Los axiomas de Peano

Italia había tomado una parte algo menos activa en el desarrollo del álgebra abstracta que Francia, Alemania e Inglaterra, pero durante los últimos años del siglo XIX hubo varios matemáticos italianos que se interesaron profundamente por la lógica matemática. El más conocido de ellos es Giuseppe Peano (1858-1932), cuyo nombre ha quedado asociado a los llamados «axiomas de Peano», sobre los que se han apoyado tantas construcciones rigurosas del álgebra y del análisis. Su objetivo era parecido al de Frege, pero era a la vez más ambicioso y, sin embargo, más a ras de tierra[26]. En su *Formulaire de mathématiques* (1894 et seq.) intentaba desarrollar Peano un lenguaje formalizado en el que pudiera expresarse no sólo la lógica matemática, sino todas las ramas más importantes de la matemática. El hecho de que su programa atrajera a un numeroso grupo de colaboradores y discípulos, se debió, en parte al menos, a que evitaba tanto las cuestiones como el lenguaje metafísico, y a la sencilla y afortunada elección del simbolismo, en el que figuraban símbolos tales como el $\in$ («pertenece a la clase»), $\cup$ (suma lógica o unión), $\cap$ (producto lógico o intersección), $\supset$ («contiene a»), etc., muchos de los cuales se siguen usando actualmente. Para su fundamentación de la aritmética eligió Peano tres conceptos primitivos: «cero», «número» (es decir, número natural o entero no negativo), y la relación binaria «es el sucesor de», que verifican los cinco postulados siguientes:

1. Cero es un número.
2. Si a es un número, entonces el sucesor de a también es un número.
3. Cero no es el sucesor de ningún número.
4. Si los sucesores de dos números son iguales, entonces los números mismos son iguales.
5. Si un conjunto de números S contiene al cero y también al sucesor de cualquier número que pertenezca a S, entonces todo número pertenece a S.

La última condición es el axioma de inducción completa, evidentemente. Los axiomas de Peano, que aparecieron formulados por primera vez en 1889 en la obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representan el más notable intento del siglo por reducir la aritmética usual, y por lo tanto la mayor parte de la matemática, a lo estricta y absolutamente esencial de simbolismo formalizado. (Peano expresaba, desde luego, sus axiomas en simbolismo formal, y no con palabras del lenguaje ordinario como hemos hecho nosotros). Aquí el método axiomático alcanzaba una cota de precisión nueva e inédita, en la que no quedaba ya ambigüedad alguna de significado ni hipótesis ocultas. Peano dedicó también muchos de sus esfuerzos al desarrollo de la lógica simbólica, otro de los temas favoritos del siglo XX.

Quizá deberíamos mencionar también aquí otra contribución de Peano a la matemática que, aunque no tiene nada que ver con el álgebra, constituyó uno de los descubrimientos más inquietantes de la época. El siglo XIX se había visto

[26] Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques* (1960), pág. 20.

obligado, en sus comienzos mismos, a reconocer que las curvas y las funciones no tenían por qué ser necesariamente del tipo de las de «buen comportamiento» que hasta entonces habían monopolizado el campo, y Peano mostró en 1890 de una manera espectacular lo concienzudamente que la matemática podía violentar el sentido común, al construir curvas continuas que «llenan un espacio», es decir, curvas dadas por un sistema de ecuaciones paramétricas $x=f(t)$, $y=g(t)$, donde f y g son funciones reales continuas sobre el intervalo $0\leqslant t\leqslant 1$, y cuyos puntos (x, y) llenan completamente el cuadrado unidad $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Esta sorprendente paradoja es, evidentemente, del mismo tipo que la que implicaba el descubrimiento de Cantor de que no hay más puntos en el cuadrado unidad que en el segmento unidad[27], y fue uno de los factores que obligó al siglo siguiente a dedicar mucha más atención a la estructura fundamental de la matemática. Peano mismo, sin embargo, se dedicó desde 1903 a su invento de un idioma internacional artificial, que llamó «Interlingua» o «Latino sine flexione», con un vocabulario extraído del latín, francés, inglés y alemán. Este movimiento resultó ser mucho más efímero, aunque tenga aún sus seguidores, que su estructuración axiomática de la aritmética, que ha conservado su nombre para la posteridad.

Mirando retrospectivamente, podemos admirar al siglo XIX como un período de descubrimientos sin par hasta entonces, ya sea en geometría, análisis o álgebra. En extensión, imaginación, rigor, abstracción y generalidad, ninguno de los siglos anteriores puede compararse con él. Sin embargo, y a pesar de los rápidos progresos y de las formulaciones aparentemente definitivas, no se tenía apenas la sensación de que los desarrollos matemáticos estuvieran destinados a ir disminuyendo. El característico pesimismo *fin de siècle* que había expresado Lagrange a finales del siglo XVIII, estaba visiblemente ausente cuando se despedía el siglo XIX. La Era Victoriana no rezumaba más que optimismo en lo que a la matemática se refiere. En el próximo y último capítulo de este libro estudiaremos algunos de los aspectos en los que tan optimistas expectativas se cumplieron con creces, pero no antes de que serios problemas hicieran tambalear la seguridad de los matemáticos durante los primeros años del nuevo siglo. La aparición de paradoja tras paradoja hizo temer que el siglo XX sería el siglo de las grandes dudas más que de las grandes esperanzas. Afortunadamente el principio «reto-respuesta» parece haber funcionado, y por los logros matemáticos ya registrados, este siglo puede considerarse que supera ampliamente a todos los anteriores.

Bibliografía

Ball, W. W. R.: *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press, 1889).

Bell, E. T.: *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937).

——: *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940).

[27] Una descripción de la curva de Peano y de sus axiomas puede verse en el libro de Ettore Carruccio, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, trad. por Isabel Quigly (1964), págs. 306-308. Esta obra incluye también referencias a otros aspectos de la obra de Peano.

Bochenski, I. M.: *Formale Logik* (Amsterdam: North Holland, 1956; trad. inglesa, 1961).
Boole, George: *The Laws of Thought*, reimpreso como vol. II en sus *Collected Logical Works* (Chicago: Open Court, 1916).
——: *The Mathematical Analysis of Logic* (Cambridge: Macmillan, 1847; reed., New York: Prhilosophical Library, 1948).
——: *Studies in Logic and Probability* (Londres: Waters, 1952).
——: *Treatise on Differential Equations* (Londres: Macmillan, 1859).
Bourbaki, Nicolas: *Éléments d'histoire des mathématiques* (París: Hermann, 1960).
Carruccio, Ettore: *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, trad. Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964).
Cayley, Arthur: *Collected Mathematical Papers* (Cambridge, 1889-1898, 14 vols.).
Crowe, Michael J.: *History of Vector Analysis* (University of Notre Dame Press, 1967).
De Morgan, Sophia Elizabeth: *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters* (Londres, 1882).
Feldmann, R. W.: «History of Elementary Matrix Theory», *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), 482-484, 589-590, 657-659.
Galois, Évariste: *Oeuvres*, ed. E. Picard (París, 1897).
Graves, R. P.: *Life of Sir William Rowan Hamilton* (Dublín: Hodges, Figgis, 1882, 3 vols.).
Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlín: Springer, 1926-1927, 2 vols.).
MacDuffee, C. C.: «Algebra's Debt to Hamilton», *Scripta Mathematica*, 10 (1944), 25-36.
Macfarlane, Alexander: *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (New York: Wiley, 1916).
Meschkowski, Herbert: *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco: Holden-Day, 1964).
Midonick, Henrietta O. (ed.): *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965).
Peacock, George: *Treatise on Algebra* (1840-1845, 2 vols.; reed., Mew York: Scripta Mathematica, 1940).
Prasad, Ganesh: *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 vols.).
Prior, A. N. (ed.): «Logic, History of», *The Encyclopedia of Philosophy* (New York: Macmillan, 1967, 8 vols.), IV, 513-571.
Sarton, George: «Évariste Galois», *Osiris*, 3 (1937), 241-259.
Smith, D. E. (ed).: *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; reed., New York: Dover, 1959).
Struik, D. J.: *Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover paperback, 1967).

Ejercicios

1. Inglaterra destacó en álgebra durante el siglo XIX, mientras que durante el siglo XVIII había dado una preferencia ostensible a la geometría sintética. Explíquese cómo ciertos factores pueden dar cuenta de este hecho, mencionando ejemplos concretos.
2. El álgebra del siglo XIX, ¿contribuyó o no a la matemática con puntos de vista nuevos más notables que el análisis y la geometría? Cítense ejemplos concretos que apoyen su respuesta.
3. Según fue haciéndose más abstracta el álgebra durante el siglo XIX, ¿cambiaron los medios materiales de vida de los matemáticos? Explíquense los medios de ganarse la vida de algunas de las figuras más importantes.

4. Bertrand Russell afirmaba que había sido el siglo XIX el que descubrió la verdadera naturaleza de la matemática pura. Explíquese lo que quería decir al hacer esta afirmación.
5. ¿Hasta qué punto pueden establecerse semejanzas entre Hamilton y Boole, y en qué medida fueron distintas sus vidas y sus obras?
6. A Cayley y Sylvester se les llama a veces los «gemelos invariantes». Explíquese por qué e indíquese en qué aspectos estuvieron muy lejos de ser gemelos.
7. ¿Confirma el álgebra del siglo XIX la impresión general de que la mayor parte de los grandes descubrimientos son obra de matemáticos jóvenes? Dense ejemplos que justifiquen su respuesta.
8. A lo largo del siglo XIX muchos de los matemáticos ingleses más eminentes estudiaron y enseñaron en el Trinity College de Cambridge, en el que también estudió y enseñó Newton. Menciónense algunos de ellos, indicando el papel que desempeñaron en Cambridge y sus contribuciones a la matemática.
9. Explíquese en qué sentido el álgebra de los números complejos es un «álgebra doble». ¿Por qué la asoció De Morgan con los elementos de la trigonometría?
10. De Morgan, que había nacido en el siglo XIX, propuso el siguiente acertijo relativo a su edad: «En el año x^2 tenía x años.» Resuélvase el acertijo.
11. Si A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y B es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿es $AB = BA$?

12. Demuéstrese que, para un polinomio cuadrático en x e y, la suma de los coeficientes de los términos en x^2 y en y^2 permanece invariante bajo una rotación de los ejes de centro el origen de coordenadas.
13. Demuéstrese, por medio de un diagrama, que la fórmula de De Morgan para conjuntos es correcta.
14. Si A es la permutación (abc) y B la permutación (cba), ¿es el producto AB el mismo que BA? Explíquese por qué.
15. Demuéstrese que el entero de Gauss $1+i$ no tiene inverso para la multiplicación, y por lo tanto que el conjunto de los enteros de Gauss $a+bi$ no forman un cuerpo.
16. Utilizando el concepto de Hamilton de número complejo $x+yi$ como par ordenado de números reales (x, y), escríbase el cociente $\dfrac{(a, b)}{(\alpha, \beta)}$ también como un par ordenado de reales.
17. A partir de las fórmulas de Hamilton para los cuaterniones $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, y utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, demuéstrese que $ij = -ji$, $ik = -ki$ y $jk = -kj$.
18. Utilícese el método de los operadores diferenciales de Boole para resolver la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.
*19. Demuéstrese que el conjunto de todas las permutaciones del conjunto de letras $\{a, b, c\}$ forman un grupo. ¿Es un grupo abeliano? ¿Conocía Abel este grupo? Explíquese claramente.

*20. Demuéstrese que el conjunto de los enteros módulo 5 forma un cuerpo.
*21. Demuéstrese que en el cuerpo de los enteros módulo 5 todo elemento x satisface la ecuación $x^5 = x$.
*22. Demuéstrese que el conjunto de todos los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, con a y b racionales, forman un cuerpo.
*23. Demuéstrese que la relación $B^2 - AC$ entre los coeficientes de una cónica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ es invariante bajo una rotación de los ejes de coordenadas. Utilícese este resultado para demostrar que la cónica en cuestión es una elipse, una parábola o una hipérbola, según que $B^2 - AC$ sea menor, igual o mayor que cero.

Capítulo XXVII
ASPECTOS DEL SIGLO VEINTE

> La edad de oro de la matemática no fue la época de Euclides, sino la nuestra.
>
> *C. J. Keyser*

1. La naturaleza de la matemática

Uno de los hallazgos culturales decisivos del siglo XIX fue el descubrimiento de que la matemática no es una ciencia natural, sino una creación intelectual del hombre. Bertrand Russell escribía en 1901 en el *International Monthly*:

> El siglo XIX, que se muestra tan orgulloso de la invención de los ingenios de vapor y de la evolución, podría haber reclamado a más justo título la fama por el descubrimiento de la matemática pura.

T. H. Huxley (1825-1895), el llamado «Darwin's bulldog» por su defensa de la evolución, había advertido ya que «la matemática es la ciencia que no sabe nada de observación, nada de experimentos, nada de inducción, nada de causación». Y en otra ocasión, criticando a Kelvin por lo que consideraba como una subestimación de la edad la tierra, hizo Huxley el siguiente comentario, bien conocido:

> Podemos comparar a la Matemática con un molino fabricado con precisión exquisita, que puede moler harina de cualquier grado de finura que uno quiera; pero lo que se obtenga de él depende, sin embargo, de lo que se le eche; y de la misma manera que el mejor molino del mundo no dará harina de trigo de cáscaras de guisantes, así también páginas y páginas de fórmulas no permitirán obtener ningún resultado concreto a partir de datos imprecisos.

Es decir, que hacia finales de siglo era un hecho reconocido incluso por no matemáticos que la matemática es una forma de pensamiento axiomático, en la que uno deduce conclusiones válidas de sistemas de premisas arbitrarias. La cuestión de si los axiomas son verdaderos o no, en el sentido científico del término, carece de importancia; de hecho, las palabras mismas con que se expresan los axiomas son términos indefinidos. Esto es lo que trataba de poner de relieve Bertrand Russell con su descripción humorística de la matemática, en 1901, como la materia en la que no sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad.

Dos años más tarde, al comienzo de su libro *Principles of Mathematics*, daba Russell una definición precisa de la matemática:

> La Matemática Pura es la clase de todas las proposiciones de la forma p implica q, donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni p ni q contienen ninguna constante salvo las constantes lógicas[1].

Esta definición subraya el hecho de que la característica esencial de la matemática es su estructura lógica, y no ningún tipo de afirmación categórica que pueda contener, referente al mundo de los sentidos. En resumen, Russell identifica aquí la matemática con la lógica, pero en este sentido no ha habido ni mucho menos acuerdo general entre los matemáticos. Sylvester discrepaba completamente de Huxley, aduciendo que la matemática surge

> ...directamente de las facultades y actividades inherentes a la mente humana, y de una introspección continuamente renovada de ese mundo interior del pensamiento, cuyos fenómenos son tan variados y exigen una atención tan cuidadosa para distinguirlos como los del mundo físico exterior.

Dicho con otras palabras, Sylvester se inclinaba más hacia lo que ahora se llama una concepción intuicionista de la matemática, puesto que consideraba como el objetivo de la matemática pura «el desvelamiento de las leyes de la inteligencia humana», de igual manera que la física tiene como objeto descubrir las leyes del mundo exterior o de los sentidos[2]. En este sentido, Sylvester representaba un rechazo de las tendencias formalizadoras de Boole, Dedekind y Peano. A Kronecker se le podría considerar quizá en el mismo bando que Sylvester, a pesar de la aritmetización que representó, al considerar que los enteros en la matemática tenían un significado dado por Dios directamente. Más decididamente intuicionista fue otro matemático que puede ser considerado como una de las dos grandes figuras de transición entre los siglos XIX y XX; se trata de Henri Poincaré (1854-1912), un hombre al que admiraba el viejo Sylvester como un joven excepcionalmente prolífico.

2. La teoría de funciones de Poincaré

Cuando murió Gauss el año 1855 se pensaba que ya no volvería a haber otro matemático tan universal, que dominase todas las ramas, tanto puras como aplicadas. Si ha habido alguien desde entonces que haya demostrado que tal previsión estaba equivocada, éste ha sido Poincaré, que extendió también sus dominios a toda la matemática de la época. Sin embargo, Poincaré era fundamentalmente diferente de Gauss en varios sentidos. Gauss había sido un prodigio

[1] Véase Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* (reimpresión; New York; Norton, 1938), pág. 3. Véanse también págs. VII y sigs.

[2] *Collected Mathematical Papers*, ed. por H. F. Baker (Cambridge, Cambridge University Press, 1904-1912, 4 vols.), vol. III, pág. 424.

calculando, que durante toda su vida jamás se echó atrás ante cálculos sumamente complicados, como lo eran los astronómicos, mientras que Poincaré no mostró especialmente pronto su capacidad matemática, y admitía de buena gana que tenía dificultades incluso con cálculos aritméticos sencillos. El caso de Poincaré demuestra de una manera concluyente que para ser un gran matemático no es condición necesaria el distinguirse por la facilidad en el manejo de los números; hay otros aspectos más útiles de la capacidad matemática innata. Por otra parte, mientras que Gauss escribió relativamente poco, puliendo pacientemente sus obras (*pauca sed matura*), Poincaré escribía mucho y, en consecuencia, precipitadamente, publicando más trabajos por año que ningún otro matemático. Además, Poincaré escribió libros populares, de divulgación, con una vena filosófica innata, sobre todo en los últimos años de su vida, cosa que jamás tentó a Gauss. Las semejanzas entre Poincaré y Gauss, sin embargo, también son numerosas y fundamentales. Ambos rebosaban de ideas de tal manera que se veían en dificultades para poner por escrito sus pensamientos; ambos mostraban una fuerte preferencia por los teoremas generales frente a los casos particulares; y ambos, en fin, contribuyeron a una gran variedad de ramas de la ciencia, no estrictamente matemáticas.

Poincaré nació en Nancy[3], ciudad que iba a acoger a un buen número de matemáticos importantes a lo largo del siglo XX. La familia Poincaré contó con varios miembros que destacaron por motivos diversos, tales como el primo de nuestro matemático, Raymond, que fue presidente de Francia durante la Primera Guerra Mundial. Henri era torpemente ambidextro, y su ineptitud para todo tipo de ejercicio físico se hizo legendaria. Siempre tuvo mal la vista y fue sumamente distraído, pero, al igual que Euler y que Gauss, tenía una notable capacidad para hacer mentalmente complicados desarrollos en cualquier aspecto del pensamiento matemático. Después de graduarse en la École Polytechnique en 1875, se graduó en ingeniería de minas en 1879, y permaneció ligado al Departamento de Minas durante el resto de su vida. El mismo año de 1879 obtuvo también su doctorado en ciencias por la Universidad de París, en la que ocupó diversos puestos de profesor de matemáticas y física hasta su muerte en 1912.

La tesis doctoral de Poincaré fue un trabajo sobre ecuaciones diferenciales, pero no sobre métodos de resolución, sino sobre teoremas de existencia, que le llevó a una de sus más famosas contribuciones a la matemática: el estudio de las propiedades de las funciones automorfas. De hecho, él fue prácticamente el fundador de la teoría de funciones automorfas. Una función automorfa $f(z)$ de la variable compleja z es una que es analítica en un dominio D, excepto en los polos correspondientes, y que es invariante bajo un grupo infinito numerable de transformaciones lineales fraccionarias o de Möbius

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

[3] Para una bibliografía de fuentes originales sobre la vida y la obra de Poincaré, véase George Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936), págs. 93-94. El capítulo 28, titulado con acierto «The Last Universalist», del libro de E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York; Simon and Schuster, 1937), consiste en una vivaz exposición de la vida y la obra de Pôincaré.

Tales funciones son una generalización de las funciones trigonométricas, como puede verse tomando $a=d=1$, $c=0$ y b de la forma $2k\pi$, así como de las funciones elípticas. Hermite había estudiado estas transformaciones para el caso particular en que los coeficientes a, b, c y d son enteros y se verifica que $ad-bc=1$, y había descubierto una clase de funciones elípticas modulares invariantes bajo tales transformaciones lineales. Pero las generalizaciones de Poincaré revelaron una categoría de funciones más amplia, conocidas como funciones zeta-fuchsianas, que podían ser utilizadas, como demostró Poincaré, para resolver las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos.

3. Matemática aplicada y topología

Poincaré no se detuvo en ningún campo el tiempo suficiente como para completar su obra; un contemporáneo dijo de él: «Era un conquistador, no un colonizador». En sus cursos de la Sorbona solía tratar de un tema distinto cada curso académico: capilaridad, elasticidad, termodinámica, óptica, electricidad, telegrafía, cosmogonía y otros; la presentación era tal que en muchos casos las lecciones aparecían publicadas poco después de haber sido impartidas. Sólo en astronomía publicó media docena de volúmenes: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 vols., 1892-1899) y las *Leçons de mécanique céleste* (3 vols, 1905-1910), tema en el que se mostró un digno sucesor de Laplace. Son especialmente importantes los métodos que utilizaba Poincaré para atacar el problema de los tres cuerpos y sus generalizaciones. También fue importante para la cosmogonía una memoria de 1885 en la que demostraba que la figura de equilibrio relativo que adopta un fluido homogéneo sujeto a las fuerzas de atracción gravitatoria newtoniana y girando uniformemente alrededor de un eje, puede tener una forma de pera, y la cuestión de una tierra en forma de pera ha seguido interesando a los geodestas hasta nuestros días. Sir George H. Darwin (1845-1912), hijo de Charles Darwin (1809-1882), escribía en 1909 que la mecánica celeste de Poincaré sería una inmensa mina para los investigadores durante medio siglo al menos.

Es interesante hacer notar que Poincaré, como Laplace, también escribió mucho sobre teoría de probabilidades. En algunos aspectos su obra es sólo una continuación natural de la de Laplace y de los analistas del siglo XIX, pero Poincaré era «bifronte» como un Jano matemático y se adelantó en buena medida al interés generalizado por la topología que iba a ser tan característico del siglo XX. La topología tampoco fue la invención de un solo hombre; algunos problemas topológicos se encuentran ya en la obra de Euler, de Möbius y de Cantor, e incluso la palabra misma «topología» había sido utilizada ya en 1847 por J. B. Listing (1808-1882) en el título de su libro *Vorstudien zur Topologie* («Introducción al Estudio de la Topología»), pero si queremos fijar una fecha que señale los comienzos «oficiales» de esta rama de la matemática, ninguna sería más adecuada que la del año 1895, el año en que Poincaré publicó su *Analysis Situs*. En este libro se daba por primera vez un desarrollo sistemático del tema.

La topología es hoy una rama extensa y fundamental dentro de la matemática,

con muchos aspectos parciales, pero que a grandes rasgos se puede subdividir en dos ramas bastante distintas: la topología combinatoria o algebraica y la topología conjuntista. Poincaré mostró poco entusiasmo por la segunda, y en 1908, dirigiéndose al International Mathematical Congress en Roma, se refirió a la *Mengenlehre* de Cantor como una enfermedad de la que las generaciones posteriores se considerarían completamente curadas[4]. La topología combinatoria o «analysis situs», como se denominaba entonces en general, consiste en el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes bajo transformaciones biunívocas y bicontinuas. A veces se oye hablar de ella en términos de divulgación popular como «la geometría de las láminas de goma», ya que las deformaciones posibles de un globo, sin pincharlo ni romperlo, son buenos ejemplos de transformaciones topológicas. Un círculo, por ejemplo, es topológicamente equivalente a la región del plano encerrada por una elipse; la dimensión de un espacio es un invariante topológico, como lo es el número de Descartes-Euler $N_0 - N_1 + N_2$ para un poliedro simple. Entre las contribuciones originales de Poincaré a la topología está una generalización de la fórmula de Descartes-Euler para los poliedros, para espacios de dimensión más alta, haciendo uso de lo que llamó los «números de Betti» en honor de Enrico Betti (1823-1892), que había sido profesor de la Universidad de Pisa y había estudiado algunas de las propiedades de estos invariantes topológicos. Sin embargo, la mayor parte de la topología trabaja con aspectos cualitativos y no cuantitativos de la matemática, y en este sentido representa una nítida ruptura con las corrientes dominantes en el análisis del siglo XIX. Poincaré parece haberse visto conducido al *analysis situs* por sus intentos de integración cualitativa de ecuaciones diferenciales. Poincaré era, como Riemann, especialmente hábil en el manejo de problemas de tipo topológico, tales como el de averiguar las propiedades de una función sin disponer de su representación formal en el sentido clásico, porque ambos reunían una aguda intuición con un sólido razonamiento. Si Poincaré hubiera continuado interesado por la topología, podría haber anticipado otros resultados posteriores en esta rama de la matemática, una de las direcciones de investigación más desarrolladas y más fructíferas a lo largo del siglo XX. Sin embargo, su mente inquieta se encontraba ocupada con todo lo que estaba ocurriendo en física y en matemáticas a la vuelta del siglo, desde las ondas hertzianas y los rayos X a la teoría cuántica y la teoría de la relatividad.

Como ejemplo de lo polifacético de la obra de Poincaré, a él le debemos un conocido y sugestivo modelo de la geometría de Lobachewsky dentro de un marco euclídeo[5]. Supongamos un «mundo» limitado por una superficie esférica de radio R del espacio euclídeo tridimensional, e imaginemos que la temperatura absoluta en un punto interior a esa esfera es $R^2 - r^2$, donde r es la distancia del punto al centro de la esfera; supongamos además que el índice de refracción del medio

[4] Las actas que se han ido publicando de tales congresos internacionales pueden verse en muchas bibliotecas, y pueden consultarse provechosamente para seguir el desarrollo de la matemática durante el siglo XX.

[5] Sobre ésta y otras contribuciones de Poincaré véase el «Éloge Historique d'Henri Poincaré» por Gaston Darboux en las *Oeuvres d'Henri Poincaré* (1916-1956), vol. II (1952), págs. VII-LXXI. Véase también Vito Volterra *et alia*, *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (1914).

diáfano que llena la esfera es inversamente proporcional a la temperatura $R^2 - r^2$. Imaginemos por último que las dimensiones de los objetos cambian con la temperatura de punto a punto, siendo proporcionales a la temperatura del lugar en que se encuentran. Para los habitantes de este «mundo» el universo parecería infinito, y los rayos de luz o «rectas» no serían realmente rectilíneas, sino arcos de circunferencias ortogonales a la superficie esférica límite, arcos que tendrían longitud infinita. Los «planos» serían casquetes de esferas ortogonales a la primera, y dos de estos «planos» no-euclídeos se cortarían, en su caso, según una «recta» no-euclídea. En este «mundo» se verifican todos los axiomas euclídeos excepto el de las paralelas, como se ve fácilmente.

4. Los problemas de Hilbert

Poincaré murió en plena culminación de sus facultades, a los 58 años, después de haber escrito más que ningún otro matemático de nuestro siglo[6]. Klein lo comparó con Cauchy por su versatilidad matemática, y para muchos fue el matemático más importante de la época. Su rival principal en este sentido, David Hilbert (1862-1943), era alemán y de temperamento e ideas muy distintos. He aquí la segunda figura de transición fundamental entre el siglo XIX y el XX, pero mientras Poincaré parece quizá pertenecer más bien al siglo anterior, Hilbert se encuentra ya claramente instalado en este siglo, en vista de la insistencia en la idea de estructura en su obra. Hilbert nació en Königsberg, en la Prusia oriental, lo mismo que Immanuel Kant (1724-1804), pero, a diferencia de Kant, viajó mucho, especialmente para asistir a los congresos internacionales de matemáticos que caracterizan este siglo. El primero de tales congresos, organizado ya oficialmente, se celebró en Zurich en 1893, el segundo en París en 1900, y desde entonces estos congresos se han ido programando más o menos regularmente cada cuatro años, habiéndose celebrado el último Congreso Internacional en 1983 en Varsovia. En el Congreso de París de 1900, Hilbert, que era ya un famoso profesor en Gotinga, presentó una comunicación en la que intentaba, sobre la base de las tendencias que mostraba la investigación matemática de finales del glorioso siglo XIX, predecir la dirección de los progresos futuros. Hizo esto proponiendo 23 importantes problemas que, según él creía, estarían o deberían estar entre los que ocupasen la atención de los matemáticos durante el siglo XX. «Si pudiéramos hacernos una idea del desarrollo probable de los conocimientos matemáticos en el futuro inmediato», decía Hilbert, «entonces deberíamos dejar pasar ante nuestras mentes los problemas sin resolver, para estudiar los problemas que nos propone la ciencia de hoy y cuya solución podamos esperar de un futuro no lejano»[7].

Aunque Hilbert no estaba de acuerdo con la idea de que sólo los conceptos de la aritmética son susceptibles de un tratamiento completamente riguroso, admitía

[6] Véase Ernest Lebon, *Henri Poincaré, bibliographie analytique des écrits* (1909).

[7] Véase la traducción por Mary Winston Newson del «Mathematische Probleme» de Hilbert, en el *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), 8 (1902), págs. 437-479. El original en alemán apareció en el *Göttinger Nachrichten* correspondiente a 1900, págs. 253-297, y en el *Archiv der Mathematik und Physik* (3), 1 (1901), págs. 44-63 y 213-237.

de buen grado que el desarrollo de la aritmetización del continuo por Cauchy, Bolzano, Cantor y otros fue uno de los dos logros más notables del siglo XIX (siendo el otro el descubrimiento de las geometrías no-euclídeas por Gauss, Bolyai y Lobachewsky), y así el primero de los 23 problemas se refería a la estructura del continuo de los números reales. El problema tiene dos partes relacionadas entre sí: 1) ¿hay algún cardinal transfinito entre el cardinal de un conjunto numerable y el cardinal del continuo?; y 2) ¿puede considerarse el continuo numérico como un conjunto bien ordenado? La segunda parte lo que pregunta, en otras palabras, es si la totalidad de los números reales podrá ordenarse totalmente, de otra forma que la usual, de manera que todo subconjunto no vacío tenga un mínimo o primer elemento en el nuevo orden. Esta cuestión está estrechamente relacionada con el «axioma de elección», llamado así por el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1956), que lo formuló en 1904. El axioma de Zermelo afirma que, dado un conjunto cualquiera cuyos elementos sean conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, entonces existe al menos un conjunto que contiene uno y sólo un elemento en común con cada uno de los conjuntos no vacíos, elementos del conjunto dado[8]. Como ejemplo de problema en el que interviene el axioma de Zermelo, considérese el intervalo unidad formado por todos los números reales x tales que $0 \leqslant x \leqslant 1$; llamemos equivalentes a dos de estos números reales cuando su diferencia sea racional. Entonces hay, obviamente, infinitas clases de equivalencia de números reales; si formamos un conjunto S que contenga uno y sólo un elemento de cada una de estas clases de equivalencia, ¿S será numerable o no numerable? El axioma de elección es una herramienta indispensable en todas las ramas de la matemática, y en 1939 demostró Kurt Gödel (1906-1978) que este axioma es consistente con los restantes axiomas de la teoría de conjuntos. En 1963 se clarificó aún más el *status* de este axioma dentro de la teoría de conjuntos, al demostrar Paul Cohen (n. en 1934) que el axioma de elección es independiente de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos usual, demostrando así que tal axioma no podía ser demostrado dentro del sistema[9]. Esto parece excluir una solución definitiva, en el sentido clásico, del primer problema de Hilbert.

5. El teorema de Gödel

El segundo problema de Hilbert, que también venía motivado por la «edad del rigor» de finales del siglo XIX, preguntaba si se podría demostrar que los axiomas de la aritmética son consistentes, es decir, que un número finito de etapas lógicas basadas en ellos no puede conducir nunca a resultados contradictorios. Una década más tarde apareció el primer volumen de los *Principia mathematica* (3 vols., 1910-1913), de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (1861-1947), que constituyó el intento más detallado hasta la fecha de desarrollar las ideas

[8] Véase Herman Rubin y Jean E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice* (Amsterdam; North Holland, 1963).

[9] Véase P. J. Cohen, «The Independence of the Continuum Hypothesis», en los *Proceedings of the National Academy of Science*, 50 (1963), págs. 1143-1148; 51 (1964), págs. 105-110.

fundamentales de la aritmética a partir de un conjunto preciso de axiomas. Esta obra, que se situaba en la línea de la tradición de Leibniz, Boole y Frege, y se basaba en los axiomas de Peano, llevaba a cabo hasta el mínimo detalle un programa destinado a demostrar que podía deducirse toda la matemática pura de un pequeño número de principios lógicos fundamentales. Esto justificaría el punto de vista de Russell, expresado casi diez años antes, de que la matemática es indistinguible de la lógica. Pero lo cierto es que el sistema de Russell y Whitehead, no completamente formalizado por supuesto, parece haber encontrado mayor aprobación entre los lógicos que entre los matemáticos; por otra parte, los *Principia* seguían dejando sin respuesta la segunda pregunta de Hilbert. Los esfuerzos por resolver este problema condujeron en 1931 a una conclusión sorprendente, obtenida por un joven matemático austríaco, Kurt Gödel, que emigró a los Estados Unidos para incorporarse al Institute for Advanced Study en Princeton. Lo que demostró Gödel fue que en un sistema formulado de manera estrictamente lógica tal como el que habían desarrollado Russell y Whitehead para la aritmética de los números naturales, hay siempre proposiciones indecidibles a partir de los axiomas del sistema. Es decir, que existen dentro del sistema ciertas afirmaciones bien definidas, que no pueden ser ni demostradas ni refutadas a partir de los axiomas[10]. También demostró Gödel en 1931 que es imposible demostrar, utilizando los métodos a los que hacía referencia Hilbert, que los axiomas de la aritmética no conducirán a una contradicción. Evidentemente, el teorema de Gödel, que se ha considerado a menudo como el resultado más importante de la lógica matemática, da una respuesta negativa al segundo problema de Hilbert. El descubrimiento de Gödel de la existencia de proposiciones indecidibles es tan inquietante por sus consecuencias como lo fue en su día el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables por Hipaso, ya que parece predestinar al fracaso cualquier esperanza de certeza matemática por medio del uso de los métodos obvios axiomaticodeductivos. Quizá quede condenado también, como consecuencia, el viejo ideal universalista de la ciencia de encontrar un conjunto de axiomas del que pudieran deducirse las leyes de todos los fenómenos del mundo real. No obstante, tanto los matemáticos como los científicos de la naturaleza han encajado el golpe sin mayor dramatismo y han continuado amontonando teorema sobre teorema, a un ritmo cada vez más trepidante. Se podría apostar que ningún matemático actual suscribiría la opinión de Babbage en 1813 de que «la edad de oro de la literatura matemática ha pasado ya, indudablemente».

Los problemas planteados por los teoremas de Gödel, entre otros, se estudian de manera sistemática, y fuera ya de la aritmética misma, en una nueva rama de la lógica matemática conocida como metamatemática, que estudia la estructura y propiedades de las teorías matemáticas, como la aritmética y otras, atendiendo no

[10] Kurt Gödel, «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme», en *onatsheefte der Mathematik und Physik*, **38** (1931), págs. 173-198; véase también su *Consistency of the Axiom of Choise and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axiom of Set Theory* (Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1940, ed. rev. 1951). Se han hecho innumerables intentos de explicar la demostración del teorema de Gödell en un lenguaje accesible a los no especialistas. Véase, por ejemplo, Ernest Nagel y J. R. Newman, «Gödel's Proff», en *The World of Mathematics* (New York, Simon and Schuster, 1956, 4 vols.), vol. II, págs. 1668-1995.

sólo al aspecto simbólico o sintáctico, sino también a la interpretación semántica de los símbolos y reglas. Si la aritmética no puede librarse por sí misma del atolladero de su posible inconsistencia, la metamatemática, desde fuera del marjal aritmético, puede salvar la situación con otros medios más potentes, tales como la inducción transfinita u otros. Algunos matemáticos tienen la esperanza de que al menos se consiga determinar, para toda proposición matemática, si es demostrable de los axiomas, refutable o indecidible. En cualquier caso, y como ocurre casi siempre, incluso la decepcionante respuesta negativa al segundo problema de Hilbert ha estimulado así la creatividad matemática, en vez de frenarla.

6. Los números trascendentes

Los cuatro problemas siguientes en la lista de Hilbert son algo más técnicos y abstrusos que los dos primeros, y los pasaremos por alto, pero las cuestiones siete y ocho se refieren a conceptos que ya nos son familiares. En el problema siete se pregunta si el número α^{β}, donde α es algebraico y distinto de cero y de uno, y β es un irracional algebraico, es necesariamente trascendente. En forma geométrica alternativa, Hilbert expresó esto mismo preguntando si en un triángulo isósceles la razón de la base a uno de los lados iguales es trascendente, si se sabe que la razón del ángulo opuesto a la base al ángulo básico es algebraica e irracional.

Este problema fue resuelto en 1934 por Aleksander Osipovich Gelfond (1906-1968), que demostró que la conjetura de Hilbert, conocida ahora como teorema de Gelfond, era ciertamente correcta: α^{β} es trascendente siempre que α sea algebraico distinto de cero o uno, y β sea algebraico, pero no racional. Sin embargo, en matemáticas la respuesta a una cuestión plantea inmediatamente otros interrogantes, y aún hoy los matemáticos son incapaces de contestar a la pregunta de si α^{β} es necesariamente trascedente si lo son α y β. No se sabe si son o no trascendentes, por ejemplo e^{e}, π^{π}, π^{e} o la constante de Euler γ (de la última se ignora incluso si es o no racional). Se sabe, sin embargo, que e^{π} es trascendente, puesto que $e^{\pi} = \dfrac{1}{e^{-\pi}} = \dfrac{1}{i^{2i}}$ e i^{2i} es trascendente por el teorema de Gelfond[11].

El octavo problema de Hilbert era simplemente el recordatorio de la necesidad, bien conocida a finales del siglo XIX, de demostrar la conjetura de Riemann de que los ceros de la función zeta, exceptuados los valores enteros negativos, tienen todos parte real igual a $\frac{1}{2}$. Una demostración de esta conjetura podría conducir, creía Hilbert, a la demostración de la conocida conjetura de la existencia de infinitas parejas de primos gemelos, entre otras cosas. Sin embargo, la conjetura de Riemann sigue sin ser demostrada, a pesar de que ha pasado ya más de un siglo desde que Riemann se arriesgó a formularla.

[11] Véase Einar Hille, «Gelfond's Solution of Hilbert's Seventh Problem», en el *American Mathematical Monthly*, 49 (1942), págs. 654-661. Cf. A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, trad. por Leo F. Boron (New York: Dover, 1960).

No podemos entrar aquí en los restantes problemas propuestos por Hilbert, problemas de topología, de ecuaciones diferenciales, de cálculo de variaciones y de otros campos de la matemática, y lo único que podemos decir es que más o menos la mitad de ellos siguen sin ser resueltos[12] y que, naturalmente, la matemática se ha desarrollado a lo largo del siglo XX en muchas direcciones que no se podían prever en absoluto en 1900. Deberíamos añadir quizás que el siglo XX se ha parecido a los períodos anteriores de la historia de la matemática en un aspecto al menos, el de que cada viejo problema que se resolvía dejaba en herencia a la posteridad varios otros problemas nuevos. Como decía Hilbert al proponer sus problemas: «Mientras una rama de la ciencia ofrezca problemas en abundancia, esa rama estará viva.» Y terminaba con unas palabras de ánimo ante el crecimiento prácticamente exponencial de la matemática, señalando que, según la materia se va extendiendo, las herramientas se van haciendo más eficaces y los métodos más sencillos, y por lo tanto un matemático puede dominar el campo a pesar de su amplitud creciente.

7. Los fundamentos de la geometría

Hilbert legó a la matemática muchas más cosas que una colección de problemas, desde luego. En 1899, el año anterior al Congreso de París y su famosa comunicación, había publicado un pequeño volumen que se iba a hacer aún más famoso, titulado *Grundlagen der Geometrie* («Fundamentos de Geometría»). Esta obra, que se ha traducido a los idiomas más importantes del mundo[13], ha ejercido una gran influencia en la matemática del siglo XX, y no sólo en la geometría. Mediante la aritmetización del análisis y los axiomas de Peano, la mayor parte de la matemática, excepto precisamente la geometría, se apoyaba ya en una fundamentación extrictamente axiomática. La geometría había florecido durante el siglo XIX como nunca en la historia desde la antigua Grecia, pero fue principalmente en los *Grundlagen* de Hilbert donde se hizo por primera vez un esfuerzo sistemático y global por darle el carácter puramente formal que ya habían adquirido el álgebra y el análisis. Los *Elementos* de Euclides tenían ya una estructura deductiva muy perfecta, desde luego, pero en ellos se utilizaban a menudo implícitamente axiomas no formulados, definiciones sin sentido e incluso razonamientos lógicamente incorrectos. Hilbert era perfectamente consciente de que no todos los términos que se usan en una teoría matemática se pueden definir, y por lo tanto comenzó su tratamiento de la geometría considerando de entrada

[12] Para un balance de la situación de los problemas al cabo de 30 años, véase L. Bieberbach, «Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über "Mathematische Probleme" auf die Entwicklung der Mathematik in den latzten dreissig Jahren», en *Naturwissenschaften*, 18 (1936), págs. 1101-1111. Para una exposición actual del estado de estos problemas, véase *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, en *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. XXVIII, partes 1-2 (American Mathematical Society; Providence, 1976), o bien *Die Hilbertschen Probleme* (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, núm. 252; Akademische Verlagsgesellschaft; Leipzig, 1979).

[13] En 1902 se publicó una traducción al inglés por E. J. Townsend, con el título *The Foundations of Geometry*, por Open Court, La Salle, Ill.

tres tipos de objetos indefinidos: puntos, rectas y planos; y seis relaciones indefinidas: estar sobre, estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo. En lugar de los cinco axiomas (o nociones comunes) y los cinco postulados de Euclides, Hilbert formula para su geometría un conjunto de 21 axiomas, que se conocen desde entonces como los «axiomas de Hilbert» para la geometría euclídea. Ocho de ellos se refieren a las propiedades de incidencia, e incluyen el primer postulado de Euclides, cuatro a las propiedades de orden, cinco a las de congruencia, tres a las de continuidad (hipótesis que Euclides no menciona explícitamente, pero que sí utiliza), y uno que es un postulado del paralelismo esencialmente equivalente al quinto postulado de Euclides[14]. Continuando la labor pionera de Hilbert, otros han propuesto conjuntos de axiomas alternativos, y el carácter deductivo y puramente formal de la geometría, lo mismo que en las demás ramas de la matemática, ha quedado perfectamente establecido desde comienzos del siglo XX.

8. La teoría de espacios abstractos

Hilbert se convirtió, gracias a sus *Grundlagen*, en el principal exponente de la «escuela axiomática» de pensamiento, que tanta influencia ha ejercido dando forma a las diversas actitudes contemporáneas en matemáticas y en la enseñanza de la matemática[15]. Los *Grundlagen* comienzan con una cita tomada de Kant: «Todo conocimiento humano comienza por intuiciones, pasa por los conceptos y termina en ideas», pero lo cierto es que el desarrollo de la geometría de Hilbert estableció una concepción del tema decididamente antikantiana. Hilbert subrayaba que no se debía suponer que los términos indefinidos en geometría tenían ninguna propiedad más que las expresadas por los axiomas; el nivel intuitivo-empírico de las viejas ideas geométricas debía ser eliminado totalmente, y los puntos, rectas y planos debían ser considerados simplemente como elementos de tres conjuntos dados. La teoría de conjuntos, que ya había tomado posesión del álgebra y el análisis, invadía ahora la geometría. Y de manera análoga, las relaciones indefinidas deberían ser tratadas de forma abstracta, como correspondencias o funciones nada más. Por medio de la geometría analítica el tratamiento formal de la geometría había quedado asociado a la axiomatización del álgebra, y la consecuencia final de tal asociación fue, al llegar este momento, un grado de abstracción que superaba todo lo hecho durante el siglo XIX. Peano dio en 1888 esencialmente la definición de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, pero en lo que se ha conocido más tarde como «espacio de Hilbert»[16] se generalizan aún más las ideas de Hamilton, Grassmann y Peano; sus elementos ya

[14] Puede verse una lista de los axiomas en Ralph G. Stanton y Kenneth D. Fryer, *Topics in Modern Mathematics* (Englewood Cliffs, N. J.; Prentice Hall, 1964), págs. 167-170, así como en las diversas ediciones de los *Foundations* de Hilbert.

[15] Véase, por ejemplo, Rolf Nevanlinna, «Reform in Teaching Mathematics», en *The American Mathematical Monthly*, 73 (1966), págs. 451-464.

[16] Véase P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Chelsea, 1951), o bien S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Oxford, 1961).

no son puntos euclídeos, sino sucesiones indefinidas de números complejos x_1, x_2, x_3, ..., tales que la serie $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots$ sea convergente. Se trata de un caso particular de espacio vectorial, de los que posteriormente introducirían formas más generales Stefan Banach (1892-1945) y otros. Un espacio vectorial abstracto es un conjunto de elementos llamados vectores, que obedecen las reglas usuales de las operaciones entre vectores y escalares; se obtienen espacios vectoriales de tipos variados imponiendo condiciones adicionales al conjunto de los vectores o al cuerpo de los escalares o a ambos. En el caso del espacio de Hilbert, por ejemplo, se considera el espacio vectorial cuyos elementos tienen infinitas componentes, sujetas a la condición adicional de que la suma $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots$ sea finita. El espacio de Hilbert, a pesar del extraordinario grado de abstracción que representa, ha encontrado importantes aplicaciones en mecánica cuántica. Los espacios de Banach constituyen un tipo aún más abstracto de espacio vectorial en el que los vectores no necesitan estar definidos en términos de números complejos como el cuerpo básico de los escalares. En términos precisos, un espacio de Banach es un espacio normado completo con la métrica determinada por la norma, y un espacio de Hilbert es un espacio de Banach cuya norma $||x||$ verifica la propiedad del paralelogramo $||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2$. Banach fue quizá la figura más brillante de la gran «Escuela Polaca» de matemáticas que floreció entre las dos Guerras Mundiales en las universidades de Lwow y Varsovia. Banach enseñó en Lwow, mientras que la cabeza del grupo de matemáticos de Varsovia era Wacław Sierpinski (1882-1969), que contribuyó con una gran cantidad de artículos y excelentes textos a la teoría de números, a la topología y a la teoría de conjuntos, siendo además uno de los fundadores en 1920 de los *Fundamenta Mathematicae*, una de las revistas matemáticas más prestigiosas del mundo. Sierpinski fue un gran maestro, y muchos de sus discípulos se hicieron famosos más tarde en la matemática americana, cuando el círculo de matemáticos polacos fue dispersado y Sierpinski fue deportado por los alemanes[17]. Al final de la Guerra Sierpinski regresó a una Varsovia casi completamente destruida y se reanudó la publicación de los *Fundamenta Mathematicae*, pero Banach murió apenas terminada la Guerra[18].

Hilbert se interesó por todos los aspectos de la matemática pura, y su nombre ha quedado asociado también a una curva sencilla del tipo de las que «llenan un espacio», que es más fácil de describir que la curva análoga de Peano. La curva de Hilbert está engendrada repitiendo indefinidamente el proceso cuyos primeros pasos aparecen representados en la figura 27.1. Consideremos un cuadrado dividido en otros cuatro cuadrados, y conectemos ordenadamente por segmentos

[17] Véase Matthew M. Fryde, «Wacław Sierpinski, Mathematician», en *Scripta Mathematica*, 27 (1964), págs. 105-111.

[18] Véase Hugo Steinhaus, «Stefan Banach, 1892-1945», en *Scripta Mathematica*, 26 (1963), págs. 93-100. Steinhaus fue también uno de los miembros más eminentes del grupo de matemáticos polacos. Para algunos detalles más sobre los matemáticos polacos, aunque a menudo incorrectos, véase Sister Mary Grace, «Poland's Contribution to Mathematics», en *The Mathematics Teacher*, 60 (1967), págs. 383-386. Para los que lean polaco, hay una exposición mucho más extensa en el libro de Jadwiga Dianni y Adam Wachulka, *Tysiac Rok Matematyki Poski* («Mil años de matemática polaca») (Varsovia: PZS, 1963). Sobre la primera mitad del siglo XX, véase la excelente y autorizada obra de Kazimerz Kuratowski, *A half century of polish mathematics: Remembrances and Reflections* (Pergamon; Londres, 1980).

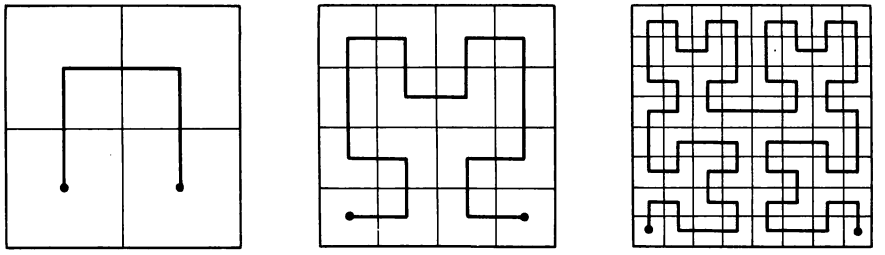


Figura 27.1

los centros de estos cuatro cuadrados, tal como indica la primera figura. Dividamos de nuevo en cuatro cuadrados cada uno de los anteriores, conectando sus centros tal como indica la segunda figura, comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo dentro del cuadrado total y terminando en el cuadrado inferior derecho. Es fácil comprobar que la curva límite de este proceso tiene que pasar por todos los puntos del cuadrado; dicho sea de paso, éste es otro ejemplo de una curva continua que no es diferenciable en ninguno de sus puntos. Durante el siglo XIX se habían observado ya algunos casos patológicos que pueden presentarse en álgebra, en análisis o en geometría, pero fue el siglo XX el que trajo consigo un verdadero tropel de casos patológicos y paradojas. Entre otras rarezas, mencionaremos una curva continua cerrada que propuso en 1904 Helge von Koch (1870-1924) de Estocolmo, definida esencialmente de la forma siguiente[19]: partiendo de un triángulo equilátero de lado 1, dividimos cada lado en tres partes iguales y levantamos un triángulo equilátero de lado $\frac{1}{3}$ sobre cada una de las partes centrales como bases, siempre hacia el exterior del triángulo anterior, de los que suprimimos sus bases (véase la fig. 27.2). El resultado es una poligonal de 12 lados y de longitud total igual a 4. Dividiendo cada uno de estos doce lados en tres partes iguales, levantando los correspondientes 12 triángulos equiláteros sobre las partes centrales como bases y suprimiendo dichas bases, obtenemos otra poligonal de 48

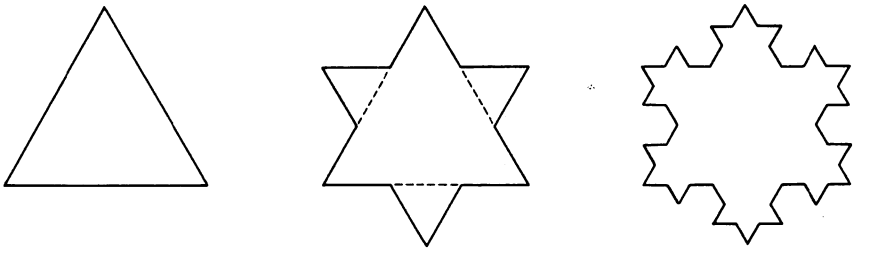


FIG. 27.2

[19] «Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certains questions de la théorie des courbes planes», en *Acta Mathematica*, 30 (1906), págs. 145-174. Aquí hemos modificado un poco la definición de la curva de Von Kock para simplificar la exposición.

lados y de longitud total $\frac{16}{3}$. Repitiendo indefinidamente este proceso, obtenemos una curva límite extremadamente «arrugada», conocida como curva de Von Koch o «cristal de nieve». No sólo no tiene tangente en ninguno de sus puntos, a pesar de ser continua, sino que tiene la sorprendente propiedad de que, dados dos puntos cualesquiera de la curva, la longitud del arco entre ellos es infinita.

9. Los fundamentos de la matemática

Hilbert era un matemático polifacético, como Poincaré, que trabajó en teoría de números, lógica matemática, ecuaciones diferenciales, el problema de los tres cuerpos y otros aspectos de la física matemática. En conexión con su obra sobre los fundamentos de la matemática[20], se vio en el centro de una de las controversias más agudas del siglo, que, en cierto sentido, no era más que una continuación del conflicto anterior entre Cantor y Kronecker. Hilbert admiraba la *Mengenlehre* de Cantor, mientras que Poincaré se mostraba muy crítico con respecto a ella. Las teorías de Cantor, como la de los espacios abstractos de Hilbert, parecen estar muy alejadas de una base intuitiva-empírica tal como preferían Poincaré y algunos de sus contemporáneos. En el Congreso de París de 1900, en el que Hilbert presentó sus problemas, Poincaré leyó una comunicación en la que comparaba los papeles de la lógica y la intuición en la matemática. Los matemáticos de la época y posteriores han venido a agruparse en dos o tres escuelas de pensamiento, según sus puntos de vista con respecto a los fundamentos de la matemática. Los que adoptaron posturas próximas a la de Poincaré formaron un grupo de frontera un tanto difusa, con predilección por la intuición. Hilbert, en cambio, pasó a ser considerado como el líder de una escuela de pensamiento «formalista», que algunos de sus sucesores llevaron a la conclusión extremada (que no es en absoluto debida a Hilbert), de que la matemática no es nada más que un juego combinatorio sin sentido, que se juega con signos desprovistos de significado alguno, de acuerdo con ciertas reglas formales arbitrarias pero convenidas de antemano. Se trata de la postura formalista pura o radical.

No muy alejados del grupo formalista, pero tampoco identificados con él, había otro grupo de matemáticos que dudaban en adherirse al carácter arbitrario de las reglas del juego. Encabezados por Bertrand Russell, estos matemáticos, que suelen llamarse como grupo la escuela «logicista», identificarían la matemática con la lógica, en oposición a C. S. Peirce, pero de acuerdo en cambio con Frege. Por último, L. E. J. Brouwer (1881-1966), de la universidad de Amsterdam, fue quien reunió, de una manera particularmente eficaz, a los adversarios tanto del formalismo de Hilbert como del logicismo de Russell. Brouwer insisitía en que los elementos y los axiomas de la matemática son mucho menos arbitrarios de lo que podría parecer. En su tesis doctoral de 1907 y en posteriores artículos atacó la fundamentación lógica de la aritmética y del análisis, llegando a ser conocido como el fundador de una «escuela intuicionista», que es hoy identificable claramente por

[20] *Grundlagen der Mathematik*, escrita en colaboración con Paul Bernays (Berlín; Springer, 1934-1939, 2 vols.).

la obra de sus discípulos. Según Brouwer, la matemática no presupone en ningún sentido un lenguaje y una lógica, puesto que tiene su fuente en la intuición directa, que hace sus conceptos e inferencias claros de una manera inmediata a nuestra mente[21]. Una afirmación de que existe un objeto que tiene una propiedad dada, significa que hay un método conocido que permite encontrar o construir tal objeto en un número finito de pasos. En particular, sostenía Brouwer, el método de demostración indirecta o por reducción al absurdo, al que tan frecuentemente recurre la matemática transfinita, no es válido. Siempre, desde la época de Aristóteles (y verosímilmente desde mucho antes), las tres leyes básicas de la lógica han sido consideradas sacrosantas: 1) la ley de identidad: *A* es *A*; 2) la ley de contradicción: *A* no puede ser simultáneamente *B* y no *B*; y 3) la ley de tercio excluso (o *tertium non datur*): *A* es o bien *B* o no *B*, sin posible tercer alternativa. Brouwer rechazó la última de estas tres leyes básicas de la lógica y se negó a aceptar los resultados basados en ella. Por ejemplo, planteó a los formalistas la cuestión de si es verdadera o falsa la afirmación: «la sucesión de dígitos 123456789 aparece consecutivamente en algún lugar en la representación decimal de π». Puesto que no existe ningún método conocido (hoy) para decidir tal afirmación en un número finito de pasos, no podemos aplicar aquí la ley del tercio excluso para declarar que la proposición es o bien verdadera o falsa.

10. Intuicionismo, formalismo y logicismo

En 1918 Hermann Weyl (1885-1955) se unió a la causa intuicionista, a pesar del hecho de que había estudiado con Hilbert (a quien la cosa sentó muy mal), sucediéndole en la cátedra de Gotinga en 1930. Weyl afirmaba que, al basar el análisis en el continuo aritmético, los formalistas habían construido una casa que «en una parte esencial está edificada sobre arena»[22]. Hilbert comparó los ataques de Brouwer y de Weyl con la actitud negativa de Konecker casi 50 años antes, pero lo cierto es que no pudo demoler sus argumentos. Weyl fue uno de los muchos matemáticos eminentes que produjo la universidad de Gotinga, y contribuyó al desarrollo de varias ramas de la matemática y de las dos teorías físicas más importantes y revolucionarias de los primeros años de nuestro siglo. Weyl había sido uno de los colegas de Albert Einstein (1879-1955) en Zurich en 1913, y en 1918 Weyl apoyó la teoría de la relatividad en un libro muy famoso titulado *Raum-Zeit-Materie* («Espacio-Tiempo-Materia»). Durante los diez años siguientes escribió una serie de artículos sobre las aplicaciones de la teoría de grupos a la mecánica cuántica, a la que Einstein mismo había hecho también importantes contribuciones. En la cumbre de su carrera, en 1933, Weyl renunció a su cátedra en Gotinga en protesta por las destituciones de sus colegas por los nazis, y el glorioso período de la matemática en esta universidad llegó a un repentino y dramático final. Weyl se

[21] Véase el artículo «Mathematics, Foundations of», por S. C. Kleene, en la *Encyclopaedia Britannica*, XV (1963), 82B-83. Cf. Edith H. Luchins y A. S. Luchins, «Logicism», en *Scripta Mathematica*, 27 (1965), págs. 223-243.

[22] Véase Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, basado en una traducción de Olaf Helmer (Princeton U. P., 1940).

fue a los Estados Unidos y pasó a formar parte del Institute for Advanced Study de Princeton, del que Einstein había sido nombrado ya en 1933 miembro vitalicio. La estrecha relación entre la matemática abstracta y las teorías físicas que representa la obra de Poincaré, de Hilbert, de Weyl y de Einstein, ha sido una de las características del siglo XX, y no se vio alterada en absoluto por las controversias dentro de la matemática misma sobre el grave problema de sus fundamentos.

Los formalistas y los logicistas se vieron especialmente desconcertados por un cierto número de paradojas que aparecieron en la teoría de conjuntos, algunas de las cuales se conocían desde mucho antes bajo formas no matemáticas, tales como la del barbero que ha de afeitar a todos aquellos y sólo a aquellos habitantes del pueblo que no se afeiten a sí mismos; ¿ha de afeitarse el barbero a sí mismo o no? Aquí también parece inaplicable la ley del tercio excluso. Otro ejemplo, esta vez nuevo, es el que se suele conocer como «antinomia o paradoja de Russell». El conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, ¿es o no es elemento de sí mismo? Cualquiera que sea la respuesta, afirmativa o negativa, se deduce una contradicción. Tales paradojas planteaban serias dudas acerca de que un programa como el de Cantor y Frege (y más tarde el de Russell y Whitehead), basado como lo está en el concepto de conjunto, pudiera tener éxito jamás. La paradoja de Russell la descubrió Russell mismo en 1902, y la desmoralización que provocó entre los matemáticos preocupados por los problemas de los fundamentos lógicos de la matemática la expresó clara y dramáticamente Frege en 1903 en un apéndice al segundo volumen de sus *Grundgesetze*:

> Difícilmente puede ocurrirle a un escritor científico algo más desgraciado que el que uno de los fundamentos del edificio que ha construido se tambalee una vez que la obra está terminada. Yo me he visto puesto en esta situación por una carta [que contenía la paradoja] de Mr. Bertrand Russell, justamente cuando la impresión de este [segundo] volumen estaba casi terminada... *Solatium miseris, socios habuisse malorum.* Yo también he tenido este consuelo, si se le puede llamar consuelo, puesto que todo el que haya hecho uso en sus demostraciones de extensiones de conceptos, clases y conjuntos [incluido el sistema de Dedekind] está en la misma situación. No es precisamente cuestión de mi método particular de establecer los fundamentos, sino de si es posible en absoluto una fundamentación lógica de la aritmética[23].

Nuestro breve recorrido por las tres concepciones principales de la naturaleza de la matemática que se concretaron a principios de este siglo, no deben llevar a la conclusión simplificadora de que todo matemático se encuentra adscrito a uno u otro de estos tres campos; nada más lejos de la verdad, e incluso dentro de cada escuela de pensamiento hay gran diversidad de opiniones. Casi se podría sugerir, al contrario, que no hay dos matemáticos actuales que estén totalmente de acuerdo sobre la naturaleza de la matemática. Ciertamente la palabra «matemática» ha significado cosas diferentes para los diferentes pueblos del mundo en las distintas épocas históricas, y por lo tanto no sería realista esperar un amplio acuerdo dentro de un campo que se ha hecho tan vasto. Durante la primera mitad del siglo XX el

[23] Véase Gottlob Frege, *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, traducido por Montgomery Furth (Berkeley, Calif.; Univ. of California Press, 1964), pág. 127.

conflicto entre estas diversas escuelas fue a veces muy agudo, pero desde entonces se ha ido imponiendo la sensación, que nos recuerda el punto de vista de D'Alembert unos doscientos años antes, de que lo que hay que hacer es avanzar en el desarrollo de la matemática, tanto en la dirección de sus fundamentos como en la superestructura de las distintas teorías, sin preocuparse excesivamente por ningún credo particular[24].

11. Integración y teoría de la medida

No todos los matemáticos más importantes de comienzos del siglo XX tomaron parte activa en la controversia entre formalistas e intuicionistas. En particular, Henri Lebesgue (1875-1941), uno de los creadores más originales y productivos, revolucionó un aspecto fundamental del análisis sin adherirse a ninguna de las principales ortodoxias acerca de los fundamentos. En realidad adoptó una posición intermedia, en cierto sentido, entre los intuicionistas y los formalistas, posición que podríamos llamar «empirismo lógico francés». Pero si en las cuestiones filosóficas de los fundamentos Lebesgue adoptó una posición a medio camino, en sus trabajos de investigación escandalizó a los analistas más clásicos, tales como Hermite, por su predilección por los tipos patológicos de funciones. Lebesgue tuvo una formación matemática que era la usual a finales del siglo pasado, aunque se distinguió por mostrar una notable irreverencia por las opiniones establecidas y cuestionar las afirmaciones hechas por sus profesores. Y así su disertación doctoral, aceptada en Nancy en 1902, era extraordinariamente original, reconstruyendo de una manera prácticamente completa el campo de la teoría de integración. Su obra se apartaba tanto de los puntos de vista aceptados generalmente, que Lebesgue, al igual que Cantor treinta años antes, se vio asaltado tanto por las críticas externas como por sus propias dudas, pero el valor de sus ideas fue reconocido con gran rapidez, y en 1910 fue nombrado profesor de la Sorbona. Sin embargo, ni creó lo que podría llamarse una «escuela» ni se concentró en el campo que había abierto. A pesar de que su concepto de la integral era un buen ejemplo de generalización, y de los más sorprendentes, Lebesgue temía que, «reducida a teorías generales, la matemática se convertiría en una bella forma sin contenido y moriría rápidamente»[25]. El desarrollo posterior parece indicar que sus temores acerca de la perniciosa influencia de la generalidad en la matemática no tenían fundamento.

La integral de Riemann había dominado todos los estudios sobre integración hasta que Lebesgue se convirtió en el «Arquímedes del período de extensión», pero durante los últimos años del siglo XIX los estudios sobre series trigonométricas y la *Mengenlehre* de Cantor habían ido haciendo conscientes a los matemáticos, cada vez más claramente, de que la idea esencial que encierra el concepto de función es

[24] Una exposición bastante completa de las distintas tendencias en conflicto puede verse en Max Black, *The Nature of Mathematics* (1933). Véase también Abraham S. Luchins y Edith H. Luchins, *Logical Foundations of Mathematics of Behavioral Scientists* (1965) para una exposición más popular.

[25] Véase Henri Lebesgue, *Measure and the Integral* (1966), pág. 5. Este libro contiene también un «Biographical Sketch» muy bien escrito por K. O. May.

la de una correspondencia puntual o «aplicación» en el sentido nuevo, y no el carácter más o menos «liso» de la variación. Cantor mismo había luchado ya con la idea de conjunto medible, pero con su definición la medida de la unión de dos conjuntos disjuntos podía ser menor que la suma de las medidas de los dos conjuntos. Los defectos de la definición de Cantor fueron eliminados por Emile Borel (1871-1956), el predecesor inmediato de Lebesgue en el desarrollo de la teoría de la medida. Borel nos recuerda a Carnot en que llevó, en cierto sentido, una doble vida, pues de su cátedra en París pasó a desempeñar una activa participación en los asuntos gubernamentales. Desde 1924 a 1936 fue miembro de la Cámara de Diputados, y antes de ser detenido en 1940 por el régimen de Vichy, fue ministro de Marina. El volumen de sus publicaciones matemáticas anteriores a 1924 es muy notable, incluyendo más de media docena de libros. Uno de sus primeros tratados estaba dedicado a un tema insólito: *Leçons sur les séries divergentes* (1901). El autor mostraba aquí cómo se puede definir una «suma» para algunas series divergentes, de tal manera que tenga sentido en las relaciones y operaciones entre tales series. Por ejemplo, si la serie es $\sum u_n$, entonces se puede definir una «suma» como la integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!} \cdot dx$$

si tal integral existe. Durante las primeras décadas de este siglo despertaron un gran interés estas definiciones, pero donde Borel ejerció una influencia más duradera fue en la aplicación de la teoría de conjuntos a la teoría de funciones, donde su nombre se recuerda en el famoso teorema de Heine-Borel:

> Si un conjunto cerrado [y acotado] de puntos de una recta se puede recubrir por un conjunto de intervalos, de tal manera que todo punto del conjunto sea un punto interior de al menos uno de los intervalos, entonces existe un número finito de tales intervalos con la misma propiedad de recubrimiento.

Este teorema había sido formulado ya, en una terminología algo diferente, por Heine en 1872, pero no se le prestó atención hasta 1895 en que fue reformulado por Borel[26]. El nombre de Borel también ha quedado asociado a los «conjuntos borelianos», que se obtienen a partir de los conjuntos abiertos de la recta real por aplicación repetida de las operaciones de unión numerable y complementación (luego también de intersección numerable). Todos los conjuntos borelianos son medibles en el sentido de Borel.

Lebesgue, reflexionando sobre los trabajos de Borel acerca de los conjuntos de números reales, vio que la definición de Riemann de la integral tenía el inconveniente de que sólo se podía aplicar en casos excepcionales, ya que supone que la función tiene sólo «unos pocos» puntos de discontinuidad. Si una función $y=f(x)$ tiene muchos puntos de discontinuidad, entonces aunque el intervalo $x_{i+1}-x_i$ se haga pequeño, los valores de $f(x_{i+1})$ y de $f(x_i)$, o valores intermedios

[26] Véase E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), pág. 452, para más referencias.

de la función, no serán necesariamente próximos. Lebesgue tuvo entonces la idea genial de, en vez de subdividir el dominio de la variable independiente x, subdividir el rango $\bar{f} - \underline{f}$ de la función f en intervalos parciales Δy_i, y seleccionar un valor η_i dentro de cada intervalo parcial. Entonces considera la «medida» $m(E_i)$ del conjunto E_i de todos los puntos del eje de las x para los que los valores de $f(x)$ son «aproximadamente iguales» a η_i (en sentido preciso, caen en el intervalo Δy_i al que pertenece η_i). Tal como le gustaba a Lebesgue expresar esto de una manera informal, la diferencia entre su integral y la de Riemann estaba en que los integradores anteriores sumaban indivisibles, grandes o pequeños, según iban apareciendo en orden de izquierda a derecha, mientras que él prefería agrupar juntos los indivisibles de tamaños parecidos antes de sumarlos[27]. Es decir, que sustituía las sumas de Riemann $S_n = \sum f(x_i) \cdot \Delta x_i$ por las del tipo de Lebesgue $S_n = \sum \eta_i \cdot m(E_i)$ y a continuación hacía tender a cero los intervalos Δy_i.

La integral de Lebesgue, que hemos expuesto aquí tan toscamente, se define, de hecho, de una manera totalmente precisa en términos de cotas superiores e inferiores y de la definición de medida de Lebesgue de un conjunto de la recta real, concepto un tanto abstruso en el que no podemos entrar aquí, pero un ejemplo puede ilustrar cómo funcionan los métodos de Lebesgue. Aceptemos que la medida de Lebesgue del conjunto de los números racionales pertenecientes al intervalo [0, 1] es cero (como lo es la de cualquier conjunto numerable), y que la medida de Lebesgue del conjunto de todos los números irracionales del intervalo [0, 1] es 1; supongamos que se pide la integral de la función $f(x)$ sobre este intervalo, donde f es la función de Dirichlet, es decir, $f(x)$ es cero para todos los valores racionales de x, y uno para todos los valores irracionales de x. Dado que $m(E_i) = 0$ para todos los valores de i salvo para $i = n$, para el que $\eta_n = 1$, tenemos que $S_n = 0 + 0 + 0 + \cdots + \eta_n m(E_n) = 1 \cdot 1 = 1$. Luego

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

considerada la integral en el sentido de Lebesgue. La integral de Riemann de la misma función sobre el mismo intervalo no existe, obviamente.

Nosotros no hemos definido lo que significan «medida de un conjunto» ni «función medible», debido a que no es fácil hacerlo de una manera breve y elemental. Además, la palabra «medida» puede tener significados variados. Cuando Lebesgue presentó su nuevo concepto de la integral, utilizó esta palabra en el sentido concreto que hoy se conoce como la medida de Lebesgue. Esta medida era una extensión de los conceptos clásicos de longitud, área y volumen a conjuntos más generales (más «extraños») que los asociados hasta entonces a las curvas y superficies usuales. Hoy la palabra «medida» se usa en un sentido aún más general:

---

[27] Para una excelente introducción a la integral de Lebesgue véanse las palabras de Lebesgue mismo, en su traducción al inglés, en su obra *Measure and the Integral*, citada en la nota de pie de página núm. 25. Véase, en el original francés, H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Chelsea, New York, 1973).

una medida μ sobre una σ-álgebra de conjuntos R es simplemente una función real no negativa sobre R, que tiene la propiedad de que

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

para toda familia numerable $(A_i)_{i\in N} \subseteq R$, tal que los conjuntos A_i sean disjuntos dos a dos. No sólo el nuevo concepto de integral cubre un conjunto de funciones mucho más amplio que la integral de Riemann, sino que la relación inversa entre diferenciación e integración (en el sentido generalizado de Lebesgue) admite menos excepciones. Por ejemplo, si $g(x)$ es diferenciable en $[a, b]$ y si $g'(x) = f(x)$ es una función acotada, entonces $f(x)$ es integrable en el sentido de Lebesgue y

$$g(x) - g(a) = {}_L\int_a^x f(t)\,dt$$

mientras que con las mismas restricciones sobre $g(x)$ y $g'(x)$ la integral de Riemann

$${}_R\int_a^x f(t)\,dt$$

puede muy bien no existir.

Las ideas básicas de Lebesgue datan de los últimos años del siglo XIX, pero se divulgaron ampliamente a través de sus dos famosos tratados, ya clásicos: *Leçons sur les séries trigonométriques* (1903) y *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904)[28]. Las ideas revolucionarias que contenían estas obras prepararon el terreno para otras generalizaciones aún más avanzadas. Entre ellas están la integral de Denjoy y la integral de Haar, propuestas respectivamente por un francés, Arnaud Denjoy (1884-), y por un húngaro, Alfred Haar (1885-1933). Otra integral bien conocida de este siglo es la de Lebesgue-Stieltjes, en la que se combinan las ideas de Lebesgue y las del analista holandés T. J. Stieltjes (1856-1894). La obra de éstos y otros matemáticos ha alterado de una manera tan profunda el concepto de integral, a través de sucesivas generalizaciones, que se ha llegado a decir que, aunque la integración es tan antigua como la época de Arquímedes, «la *teoría* de la integral ha sido una creación del siglo XX»[29].

---

[28] Hay muchas exposiciones en inglés. Véase J. Burkill, *The Lebesgue Integral* (Cambridge; Cambridge Univ. Press, 1951); J. H. Williamson, *Lebesgue Integration* (New York; Holt-Rinehart, 1962); Stanislaw Hartman y J. Mikusinski, *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*, trad. por Leo F. Boron (Oxford; Pergamon, 1961); L. Cesari, *Surface Area* (Princeton; Princeton University Press, 1956).

[29] E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, pág. 448. Cf. Arnaud Denjoy, *Un demi-siècle* (1907-1956) *de notes communitiquées aux académies* (París; Gauthier-Villars, 1957, 2 vols.), e *Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles* (París; Herman, 1937, 2 vols.). Véase también Leopoldo Nachbin, *The Haar Integral*, trad. por Lulu Bechtolsheim (Princeton; D. van Nostrand, 1965).

12. La topología conjuntista

Las nuevas teorías de integración estuvieron estrechamente relacionadas con otra de las características bien definidas de la matemática del siglo XX: el rápido crecimiento de la topología conjuntista. Maurice Fréchet (1878-1973), de la universidad de París, mostró claramente en su disertación doctoral de 1906 que la teoría de funciones no podía evolucionar ya sin recurrir a una concepción muy general de la teoría de conjuntos. Lo que tenía en la mente Fréchet no eran necesariamente conjuntos de números, sino conjuntos de elementos arbitrarios, tales como curvas o puntos. Sobre tales conjuntos arbitrarios constituyó un «cálculo funcional» en el que una operación funcional quedaba definida sobre un conjunto E cuando a cada elemento A de E le correspondía un valor numérico determinado $U(A)$. Fréchet no estaba interesado en un caso particular de conjunto E, sino en aquellos resultados conjuntistas que son independientes de la naturaleza de los elementos del conjunto.

En este cálculo tan general la idea de límite es mucho más amplia que la de los límites que se habían definido previamente, los cuales quedaban así incluidos en el primero como casos particulares, lo mismo que la integral de Lebesgue incluye las integrales de Riemann y de Cauchy. Probablemente ningún aspecto de la matemática del siglo XX queda tan claramente destacado como el grado de generalidad y de abstracción cada vez mayor. Desde la época de Hilbert y de Fréchet los conceptos de conjunto abstracto y de espacio abstracto han desempeñado un papel fundamental en la investigación.

Es interesante hacer notar que Hilbert y Fréchet llegaron a sus generalizaciones del concepto de espacio desde direcciones bastante diferentes. Hilbert se había interesado, lo mismo que Poincaré, en el estudio de las ecuaciones integrales, especialmente a partir de los trabajos de Ivar Fredholm (1866-1927). En cierto sentido una ecuación integral se puede considerar como una extensión de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas a un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, tema que ya había sido tocado por Von Koch, bajo la forma de determinantes infinitos. En sus trabajos sobre ecuaciones integrales desde 1904 a 1910, Hilbert no se refiere directamente a espacios infinitodimensionales, pero sí desarrolla en cambio el concepto de continuidad de una función de infinitas variables. Hasta qué punto Hilbert construyó formalmente y de manera consciente el «espacio» que más tarde iba a llevar su nombre, puede ser una cuestión discutible, pero lo cierto es que las ideas básicas ya estaban allí, y su impacto sobre el mundo matemático fue grande. Durante los años en que Hilbert se encontraba ocupado con las ecuaciones integrales, Hadamard investigaba en cálculo de variaciones, y su discípulo Fréchet intentaba expresamente generalizar en 1906 los métodos de este campo por medio de lo que llamó el *cálculo funcional.* Mientras el cálculo usual trata de funciones, el cálculo funcional se ocupa de funcionales; una función es una correspondencia entre un conjunto S_1 de números y otro conjunto S_2 también de números, mientras que un funcional es una correspondencia entre una clase C_1 de funciones y otra clase C_2 de números o de funciones. Fréchet formuló definiciones generalizadas correspondientes más o menos a los conceptos de límite, derivada y continuidad en el cálculo usual, pero aplicables ahora a los es-

pacios de funciones que había creado, introduciendo una cantidad considerable de vocabulario nuevo adecuado a la nueva situación[30].

Sobre los orígenes de la topología pueden oírse opiniones sumamente variadas: algunos dicen que comenzó con el *analysis situs* de Poincaré; otros sostienen que surgió de la teoría de conjuntos de Cantor, o quizá del desarrollo de la teoría de espacios abstractos. Otros aún consideran a Brouwer como el verdadero fundador de la topología, especialmente por su teorema de la invariancia topológica de la dimensión, de 1911, y por su fusión de los métodos de Cantor con los del *analysis situs*. En cualquier caso, con Brouwer comenzó el período de evolución y desarrollo intensivo de la topología que ha continuado hasta el día de hoy. Durante esta «edad de oro» de la topología los matemáticos americanos han desempeñado un papel importante. Se ha dicho que «la topología comenzó teniendo mucho de geometría y poco de álgebra, pero que ahora consiste en mucho álgebra y poca geometría»[31]. Mientras que la topología pudo describirse en su día como geometría sin utilización alguna de medida, hoy la topología algebraica amenaza con dominar el campo, cambio que ha tenido lugar en gran parte debido al liderazgo de los matemáticos de los Estados Unidos.

En 1913, Weyl dio un curso sobre superficies de Riemann[32] en Gotinga, donde se le había ofrecido una cátedra a Hilbert por recomendación de Klein, y también él puso el énfasis en la naturaleza abstracta de una superficie, o una «variedad bidimensional», como prefería llamarla. El concepto de «variedad», afirmaba, no debería asociarse necesariamente a un espacio de puntos (en el sentido geométrico usual), sino que se le debería dar un significado mucho más amplio. Comenzamos simplemente por una colección de cosas a las que llamamos convencionalmente «puntos» (aunque pueden ser objetos cualesquiera), e introducimos sobre ellos un concepto de continuidad por medio de definiciones adecuadas. La formulación precisa y clásica de esta idea la dio un año más tarde Felix Hausdorff (1868-1942), el «sumo sacerdote» de la topología conjuntista.

La primera parte del libro de Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* («Principios de la Teoría de Conjuntos»), de 1914, es una exposición sistemática de las características básicas de la teoría de conjuntos, donde la naturaleza de los elementos no tiene importancia, sino que las relaciones entre los elementos son las únicas que son importantes. En la segunda parte del libro nos encontramos con un desarrollo preciso de la teoría de los «espacios topológicos de Hausdorff» a partir de un conjunto de axiomas. El autor entiende por un espacio topológico un conjunto E de elementos x, y ciertos subconjuntos S_x de E llamados entornos de x. El sistema de entornos se supone que satisface los siguientes cuatro «axiomas de Hausdorff:

---

[30] Una exposición clara y detallada de la formación y crecimiento de la teoría de espacios de funciones, gracias a la obra de Hilbert y de Fréchet, puede verse en el artículo de Michael Bernkopf, «The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory», en el *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966), págs. 1-96.

[31] Véase *Recent Soviet Contributions to Mathematics*, ed. por J. P. Lasalle y S. Lefschetz (1962), pág. 13.

[32] Hermann Weyl, *The Concept of a Riemann Surface*, trad. por G. R. Maclane, 3.ª ed. (Reading, Mass.; Addison Wesley, 1955).

1. A cada punto x le corresponde al menos un entorno $U(x)$, y cada entorno $U(x)$ contiene al punto x.
2. Si $U(x)$ y $V(x)$ son dos entornos del mismo punto x, entonces hay otro entorno de x, $W(x)$, contenido en ambos.
3. Si el punto y pertenece al entorno $U(x)$ de x, entonces hay un entorno $U(y)$ de y, contenido en $U(x)$.
4. Para cualquier par de puntos distintos x e y existen sendos entornos $U(x)$ y $U(y)$ que no tienen ningún punto común[33].

Los entornos definidos por estos cuatro axiomas permitieron a Hausdorff introducir el concepto de continuidad, y por medio de otros axiomas adicionales desarrolló las propiedades de diversos espacios más restringidos, tales como el plano euclídeo.

Si puede decirse de un libro que señala el nacimiento de la topología conjuntista como disciplina independiente, ese libro es los *Grundzüge* de Hausdorff. Es interesante observar que, aunque fue la aritmetización del análisis la que comenzó la línea de pensamiento que va de Cantor a Hausdorff, al final el concepto de número desaparece completamente bajo un punto de vista mucho más general. Por otra parte, aunque se use en el nombre la palabra «punto», la topología de «conjuntos de puntos» o topología conjuntista tiene tan poco que ver con los puntos de la geometría ordinaria como con los números de la aritmética. La topología ha surgido a comienzos del siglo XX como una materia que viene a unificar la casi totalidad de la matemática, algo así como la filosofía que pretende coordinar todos los conocimientos humanos. Debido a su carácter tan primario y general, la topología se sitúa en la base misma de una gran parte de la matemática, dándole una unidad y una coherencia inesperadas.

13. La vía de la abstracción creciente en álgebra

El alto nivel de abstracción formal que se introdujo tanto en el análisis como en la geometría y topología a comienzos del siglo XX, no podía por menos que invadir también el álgebra. El resultado fue un tipo de álgebra nuevo, que se denominó a veces de manera poco correcta como «álgebra moderna», y que se desarrolló a lo largo del segundo tercio de este siglo principalmente. Bien es verdad que, como vimos en el capítulo anterior, durante el siglo XIX se desarrolló un proceso gradual de generalización creciente en álgebra, pero en el siglo XX el grado de abstracción adoptó un definitivo giro ascendente[34]. Las letras x e y ya no representaban necesariamente números desconocidos (reales o imaginarios), ni segmentos como en la obra de Descartes; ahora podían representar objetos de cualquier tipo: sustituciones, figuras geométricas, matrices, etc. Cuando se utilizaba la palabra *cosa* para la incógnita durante el siglo XVI, la «cosa» se entendía, evidentemente, como

[33] Véase Paul Alexandroff, *Elementary Concepts of Topology*, trad. por Alexis N. Obolensky (1965), pág. 17, o Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), págs, 126-127.

[34] Véase Oystein Ore, *L'algèbre abstraite* (París; Hermann, 1936).

una magnitud, pero ahora se puede aplicar con más propiedad el significado literal de la palabra italiana o española «cosa», puesto que no se impone restricción alguna sobre la naturaleza de los elementos que maneja el álgebra abstracta, salvo las que aparecen explícitamente formuladas en los axiomas. Puede uno hacerse una idea de la dirección en la que ha evolucionado el álgebra durante la primera mitad del siglo XX, comparando los trabajos sobre álgebra presentados al V Congreso Internacional celebrado en Cambridge, en Inglaterra, en 1912, casi inmediatamente antes de la dramática interrupción producida por la Primera Guerra Mundial, con los que se presentaron al XI Congreso Internacional que tuvo lugar en Cambridge, Massachusetts, en 1950, a continuación de la segunda interrupción de la serie de congresos debida a la Segunda Guerra Mundial. La transición prácticamente completa del álgebra clásica al álgebra abstracta durante el intervalo entre las dos guerras resultará evidente sólo con comparar los títulos de los artículos, como lo será también la evolución de la topología como rival de su madre la geometría. El enorme desarrollo alcanzado a mediados de siglo por la topología se debe en parte al hecho de que es difícil imaginar un aspecto del análisis o de la geometría que no esté basado en cuestiones previas de tipo topológico; y a pesar de la aparente vaguedad que presenta a veces la topología, está estrechamente relacionada con las cuestiones matemáticas más precisas. Si la segunda mitad del siglo continúa en la misma dirección, el álgebra abstracta y la topología se llevarán la parte del león en la investigación matemática.

14. La teoría de probabilidades

Si bien la matemática cambió profundamente de forma entre las dos Guerras Mundiales, también es cierto que buena parte de la matemática que siguió a la Segunda Guerra Mundial consistía en el comienzo de algo radicalmente nuevo que anunciaba una nueva era[35]. La teoría de conjuntos y la teoría de la medida han ido invadiendo a lo largo del siglo XX una parte cada vez más extensa de la matemática, pero pocas de sus ramas se han visto afectadas tan profundamente por esta tendencia como la teoría de probabilidades, a la que Borel había dedicado ya en 1909 sus *Eléments de la théorie des probabilités*. El primer año del nuevo siglo lo anunciaba ya propicio para las aplicaciones de la teoría de probabilidades tanto a la física como a la genética, puesto que en 1901 publicaba Gibbs su obra *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, y el mismo año fue fundada la revista *Biometrika* por Karl Pearson (1857-1936). Francis Galton (1822-1911) fue primo de Charles Darwin, muy precoz, y un estadístico nato que estudió los fenómenos de regresión; en 1900 Pearson, *galton professor*, de Eugenesia en la universidad de Londres popularizó el criterio de la «chi-cuadrado». Uno de los títulos de Poincaré había sido el «profesor de cálculo de probabilidades», lo que indicaba un interés creciente por el tema. En Rusia se inició el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados, especialmente en 1906-1907, por obra de Andrei

[35] Véase Jean Diudonné, «Recent Developments in Mathematics», en *American Mathematical Monthly*, 71 (1964), págs. 239-248.

Andreyevich Markov (o Markoff, 1856-1922), discípulo de Tchebycheff y coeditor de las *Oeuvres* (2 vols., 1899-1904) de su maestro. En la teoría cinética de los gases y en muchos fenómenos sociales y biológicos, la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, y especialmente desde mediados de este siglo las cadenas de Markov de probabilidades eslabonadas se han estudiado muy detalladamente[36]. En su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de probabilidades en expansión, los estadísticos encontraron a mano las herramientas necesarias, y hoy no es posible ya dar una exposición rigurosa de la teoría de probabilidades sin utilizar los conceptos de función medible y de las teorías de integración modernas. En Rusia mismo, por ejemplo, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-) hizo importantes progresos en la teoría de procesos de Markov (1931) y dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía una fundamentación axiomática de la teoría de probabilidades, utilizando la medida de Lebesgue. El análisis clásico se había ocupado principalmente de funciones continuas, mientras que los problemas de probabilidades generalmente se refieren a casos discretos. La teoría de la medida y las sucesivas extensiones del concepto de integral se adaptaban perfectamente a conseguir una asociación más estrecha entre el análisis y la teoría de probabilidades, especialmente a partir de mediados del siglo, cuando Laurent Schwartz (1915-), de la universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones (1950-1951).

La función delta de Dirac utilizada en física atómica había venido a demostrar que las funciones patológicas, de las que se habían ocupado los matemáticos desde hacía más de un siglo, resultaban útiles también en la física. En los casos más difíciles, sin embargo, la diferenciabilidad desaparece, con los problemas consiguientes en la resolución de ecuaciones diferenciales, uno de los principales lazos que conectan la matemática con la física, especialmente donde aparecen soluciones singulares. Para superar esta dificultad introdujo Schwartz un concepto de diferenciabilidad más general, posible gracias al desarrollo de la teoría de espacios vectoriales generales durante la primera mitad del siglo por obra de Fréchet, Banach y otros. Un espacio vectorial es un conjunto L de elementos $a, b, c, \ldots$, que satisfacen ciertas condiciones, entre las que está la exigencia de que si a y b son elementos de L y α y β son números reales (o complejos, en su caso), entonces $\alpha a + \beta b$ es otro elemento de L. Si los elementos de L son funciones, el espacio vectorial se denomina un espacio vectorial funcional, y una aplicación lineal de este espacio en el cuerpo de los números reales o complejos se llama un funcional lineal. Con esta nomenclatura, Schwartz entendía por una «distribución» un funcional lineal continuo sobre el espacio de las funciones que son diferenciables y satisfacen ciertas otras condiciones. La función de Dirac, por ejemplo, es un caso particular de distribución. Schwartz dio entonces una definición adecuada de derivada de una distribución, de tal manera que la derivada de una distribución sea siempre otra

[36] No hay ninguna buena historia de la teoría de probabilidades reciente, pero una exposición elemental de algunos de sus aspectos puede verse en Amy C. King y G. B. Read, *Pathways to Probability* (1963). Véanse también las notas histórico-biográficas al final del libro de E. B. Dynkin, *Markov Processes*, trad. del ruso (New York; Springer, 1965, 2 vols.), vol. II, págs. 240-266.

distribución. Esto proporciona una potente generalización del análisis, con aplicaciones inmediatas a la teoría de probabilidades y a la física. El análisis funcional, que es esencialmente una generalización del cálculo de variaciones, y la teoría de distribuciones, han sido también importantes campos de investigación en la matemática desde mediados del siglo XX[37].

15. La aparición de las computadoras

La teoría de probabilidades y la estadística han estado a lo largo del siglo XX estrechamente unidas, no sólo a la matemática pura, sino a otro campo que constituye una de las características diferenciales más notables de nuestra época, la de la dependencia cada vez mayor de las computadoras electrónicas o de «alta velocidad». El tema de las máquinas calculadoras no era nuevo en absoluto, puesto que Pascal y Leibniz habían conseguido modestos éxitos en este campo casi 300 años antes. Y, de hecho, el profeta de las máquinas calculadoras complejas había sido el matemático inglés del siglo XIX Charles Babbage, personaje excéntrico que sostuvo durante toda su vida una polémica contra los organilleros, mientras intentaba desesperadamente conseguir fondos para completar su ambicioso proyecto de construir una «máquina diferencial». Este invento, concebido en 1833, fue financiado durante algún tiempo por el gobierno británico, pero cuando el ministro de Hacienda cortó las subvenciones en 1842, Babbage lo comparó amargamente con el destructor del bello templo de Efeso. La máquina imaginada por Babbage habría tenido mucha de la flexibilidad de las máquinas modernas, pero no su velocidad, obviamente. Habría podido efectuar todas las operaciones aritméticas, así como almacenar información para uso posterior, todo ello por medio de un complicado diseño de ruedas dentadas, engranajes y palancas. Sin embargo, esta «máquina», una verdadera calculadora digital, no se terminó nunca. La época moderna de la computadora mecánica se puede decir que comenzó hacia 1925 en el Massachusetts Institute of Technology, donde Vannevar Bush (1890-) y sus colegas construyeron una computadora analógica de gran tamaño, movida por motores eléctricos, pero mecánica en todo lo demás. En 1939 la International Business Machines Corporation comenzó a construir el MARK I, que iba a ser un aparato electromecánico completamente automático siguiendo las líneas del proyecto de Babbage, pero antes de estar terminado en 1944 ya se había quedado anticuado frente a los planes para construir el ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator). Esta fue la primera computadora totalmente electrónica, basada en el paso de haces de electrones por tubos de vacío. Los comienzos del proyecto se debieron a presiones militares, y entre los que colaboraron en el proyecto estuvo John von Neumann (1903-1957), que había nacido en Budapest y había enseñado en Berlín y en Hamburgo antes de trasladarse a los Estados Unidos en 1930, donde, junto con Einstein, fue uno de los primeros miembros permanentes del Institute for Advanced Study en 1933. Entre 1944 y 1946 colaboró

[37] Para una exposición breve véase J.-P. Marchand, *Distributions: An Outline* (Amsterdam; North Holland, 1962). Cf. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions* (París; Hermann, 1950-1951, 2 vol.; 2.ª ed. 1957).

en la redacción de un informe para el ejército sobre las posibilidades que ofrecían las computadoras, y en 1949 la primera computadora programable comenzó a funcionar. Dos años más tarde la Sperry Rand Corporation terminaba de construir la UNIVAC I (Universal Automatic Calculator), pero el mundo de las computadoras cambia con tal rapidez que ésta ya es hoy una pieza de museo expuesta en la Smithsonian Institution[38].

La electricidad ha alterado de tal manera las formas tradicionales de la vida del hombre, que se puede decir que vivimos en la era de la electricidad; y ahora los instrumentos electrónicos pueden estar a punto de modificar en parte nuestro desarrollo matemático. Las computadoras han alcanzado tal grado de complejidad que sobrepasan en mucho los sueños de Babbage, que vivió sólo un siglo antes de su época. Problemas que superaban de manera irremediable las posibilidades de cálculo de los matemáticos de épocas anteriores, se han podido resolver recientemente con la ayuda de las computadoras más rápidas. Si, como decía Kepler, la invención de los logaritmos duplicaba la vida de un astrónomo, ¡por cuánto más no han multiplicado las computadoras electrónicas las posibilidades de los matemáticos aplicados y los físicos! Con este poderío creciente se ha producido también una verdadera proliferación de nuevos campos de la matemática aplicada: programación lineal, teoría de juegos, investigación operativa, y muchos otros. Von Neumann, que fue uno de los matemáticos más creativos y multifacéticos de nuestro siglo, fue también un pionero en el nuevo planteamiento de la economía matemática. La econometría hacía ya mucho tiempo que utilizaba el análisis matemático, pero fue sobre todo a través de la *Theory of Games and Economic Behavior* de Von Neumann y Oskar Morgenstern, publicada en 1944, como la llamada matemática finita vino a jugar un papel cada vez más importante en las ciencias sociales. Las interrelaciones entre las diversas ramas del pensamiento científico se fueron haciendo tan complejas que Norbert Wiener (1894-1964), un matemático prodigio y durante muchos años profesor de matemáticas en el Massachusetts Institute of Technology, publicó en 1948 su libro *Cybernetics*, que abría un campo nuevo dedicado al estudio del control y comunicación en animales y máquinas. Tanto Von Neumann como Wiener se interesaron profundamente por la mecánica cuántica, y el primero de los dos fue nombrado en 1955 miembro de la Atomic Energy Commission; sería equivocado pensar, sin embargo, que estos hombres y otros análogos eran simplemente matemáticos aplicados. Los dos contribuyeron tanto o más que a la matemática aplicada a la matemática pura: a la teoría de conjuntos, a la teoría de grupos, al cálculo operacional, a la teoría de probabilidades y a la lógica matemática y los fundamentos de la matemática. De hecho, Von Neumann fue quien, hacia el año 1929, dio su nombre a los espacios de Hilbert, así como la primera axiomatización de este concepto y la forma completamente abstracta que tienen hoy[39]. Por su parte, Wiener desempeñó un

[38] Una exposición del desarrollo de las computadoras, con gran cantidad de información, puede verse en Jeremy Bernstein, *The Analytical Engine: Computers-Past, Present and Future* (1963). Véase también *Babbage's Calculating Machine or Difference Engine*, ed. por Philip Morrison y Emily Morrison (New York, 1961).

[39] Para una exposición muy completa de la obra de Von Neumann, véase la serie de artículos que contiene el número conmemorativo del *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64 (mayo 1958).

importante papel a comienzos de la década de los 1920 en los orígenes de la teoría moderna de los espacios lineales, y en particular en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. El espectacular desarrollo de la matemática aplicada durante el siglo XX no sólo no ha frenado el desarrollo de la matemática pura, sino que en muchos casos lo ha impulsado, y tampoco el nacimiento de ramas nuevas de la matemática ha debilitado el vigor de las más antiguas.

16. El concepto de estructura matemática

Los conceptos fundamentales del álgebra moderna (o abstracta), de la topología y de la teoría de espacios lineales se consolidaron más o menos entre 1920 y 1940, pero la veintena de años siguientes fue testigo de una verdadera efervescencia de los métodos de la topología algebraica, que se transmitieron rápidamente al álgebra y al análisis. El resultado fue una rama nueva conocida como álgebra homológica, de la que el primer libro, por Henri Cartan (1904-) y Samuel Eilenberg (1913-), apareció en 1955, seguido por muchos otros desde entonces. El álgebra homológica es, pues, una rama del álgebra abstracta que se ocupa de resultados válidos para tipos de espacios muy diferentes, es decir, una invasión de la topología algebraica en el dominio del álgebra pura. La gran rapidez con que se ha desarrollado este cruce tan general y tan potente entre el álgebra abstracta y la topología algebraica se pone de manifiesto por el rápido crecimiento en el número de artículos sobre álgebra homológica que se recensionan en el *Mathematical Reviews*. Además, los resultados en este campo tienen unas posibilidades de ser aplicados tan amplias, que las «viejas» ramas del álgebra, del análisis o de la geometría a duras penas se adaptan a los resultados de la investigación reciente. Nunca ha estado la matemática tan profundamente unificada como en nuestros días. La mayor parte del enorme desarrollo que ha experimentado durante los veinte años siguientes a la Segunda Guerra Mundial, ha tenido poco que ver con los problemas de las ciencias de la naturaleza, sino que ha estado estimulado más bien por problemas internos de la propia matemática pura. Y, sin embargo, durante el mismo período las aplicaciones de la matemática a otras ciencias se han multiplicado extraordinariamente. La explicación de esta aparente anomalía parece clara: la abstracción y la identificación de modelos generales han ido jugando papeles cada vez más importantes en el estudio de la naturaleza, justamente lo mismo que ha ido pasando en la matemática. Así, pues, incluso en nuestros días de pensamiento superabstracto, la matemática continúa siendo el lenguaje de la ciencia, lo mismo que lo era hace siglos[40]. El hecho de que hay una conexión íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece completamente confirmado de la manera más inesperada por los descubrimientos recientes de la física, aunque la razón subyacente a este acuerdo siga siendo oscura. «Desde el punto de vista axiomático, la matemática se nos presenta como un almacén de formas abstractas, las estructuras matemáticas; y ocurre, sin que

[40] M. H. Stone, «The Revolution in Mathematics», en *Liberal Education*, 47 (1961), págs. 304-327. Véase especialmente pág. 326.

sepamos por qué, que ciertos aspectos de la realidad empírica se ajustan perfectamente a estas formas, como si hubiera habido un cierto tipo de pre-adaptación»[41].

17. Bourbaki y la «nueva matemática»

Hemos subrayado aquí repetidamente que la matemática del siglo XX ha sido testigo de un énfasis en la abstracción y de un interés creciente en el análisis de esquemas cada vez más amplios y generales. Quizá donde esto se nos muestre con la mayor claridad es en la obra producida a lo largo del segundo tercio del siglo por el matemático «multicéfalo» conocido como Nicolás Bourbaki. Se trata de un francés inexistente con un apellido griego, que aparece en las portadas como autor de todos los volúmenes de una obra monumental, los *Éléments de Mathématique*, en la que se intenta fundamentar y desarrollar las grandes teorías básicas de la matemática. Como ciudad de residencia de Bourbaki se da la ciudad francesa de Nancy, ciudad que ha dado un buen número de matemáticos importantes este siglo; probablemente no sea una simple coincidencia el hecho de que en Nancy haya una estatua del pintoresco, y en su día bien real, general Charles Denis Sauter Bourbaki (1816-1897), a quien se le ofreció en 1862 el trono de Grecia, oferta que rehusó, y que jugó un papel importante en la Guerra Franco-Prusiana. No obstante, Nicolas Bourbaki no es ningún pariente del ilustre general, ni cercano ni lejano. El nombre simplemente se lo apropió un grupo de matemáticos, casi exclusivamente franceses, para designar colectivamente al grupo, que se constituía así en una especie de críptica *société anonyme*[42]. Como referencia institucional académica N. Bourbaki utiliza a veces la universidad también ficticia de Nancago, en humorístico reconocimiento del hecho de que dos de los más dinámicos miembros del grupo estuvieron durante algún tiempo ligados a universidades del área de Chicago: André Weil (1906-) en la universidad de Chicago, y más tarde en el Institute for Advanced Study en Princeton, y Jean Dieudonné (1906-) en la Northwestern University (anteriormente en la universidad de Nancy, y más tarde en la de París). El primer volumen de los *Eléments* de Bourbaki apareció en 1939, y el último, por el momento, en 1983. La obra aún no está completa en lo que llamaron sus autores la parte I: *Les structures fondamentales de l'analyse*. Esta parte contiene los libros siguientes: (1) Teoría de Conjuntos, (2) Algebra, (3) Topología General, (4) Funciones de Variable Real, (5) Espacios Vectoriales Topológicos, (6) Integración, a los que han venido a añadirse en los últimos años diversos fascículos de otros tres libros de un nivel especial, más avanzado: Variedades Diferenciables, Teoría Espectral y Grupos y Algebras de Lie. Estos títulos indican claramente que sólo una pequeña parte de la matemática que contiene este tratado existía un siglo antes, por ejemplo. La presentación de la materia por Bourbaki está caracterizada

---

[41] N. Bourbaki, «The Architecture of Matematics», en *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), págs. 221-232. Esta es una traducción del artículo del mismo título que apareció en *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. por F. le Lionnais (1962). Véase especialmente la pág. 231.

[42] Véase Paul R. Halmos, «Nicolas Bourbaki», en *Scientific American*, 196 (mayo 1957), págs. 88-99.

por una adhesión inflexible al planteamiento axiomático y a una forma general y completamente abstracta de desarrollo que refleje claramente la estructura lógica. Así pues, el enfoque bourbakista de la matemática es algo análogo, en el nivel más alto de la investigación, a los cambios que ha sufrido la matemática en las enseñanzas primaria y media. La esperanza en ambos casos es la de que el énfasis puesto en la estructura general traiga como consecuencia una economía de pensamiento considerable. Por ejemplo, el descubrimiento hecho a comienzos del siglo XIX de que la estructura del sistema de los números complejos era la misma que la de los puntos del plano euclídeo, mostró de golpe que las propiedades de estos últimos, estudiadas durante más de dos milenios, podrían aplicarse a los primeros. El resultado fue, como se sabe, un desarrollo exuberante del análisis complejo. No parece haber ninguna razón para pensar que el interés actual en las semejanzas de estructura no vaya a producir en los próximos años análogos dividendos. La llamada «nueva matemática» en las escuelas primaria y media también comparte con Bourbaki el deseo de sustituir los cálculos por ideas. Los románticos de la matemática temieron durante la primera mitad del siglo que tomara posesión de ella un árido formalismo fomentado por el logicismo. Hacia mediados de siglo la aguda polémica entre formalistas e intuicionistas se había tranquilizado, y Bourbaki no vio la necesidad de tomar partido en la controversia. «Lo que constituye la finalidad esencial del método axiomático», escribe, «es exactamente lo que el formalismo lógico por sí mismo no puede dar, es decir, el carácter profundamente inteligible de la matemática»[43]. En la misma línea, uno de los líderes del grupo, considerado generalmente como uno de los más eminentes matemáticos de mediados de siglo, escribía que «si bien la lógica es la higiene del matemático, no es de ella de lo que se alimenta»[44].

Poincaré comentaba en una ocasión que en la matemática «los profetas de la desgracia..., los pesimistas, siempre han sido obligados a batirse en retirada»; este optimismo sigue presente en la matemática de hoy. Weil, haciéndose eco de la opinión de Hilbert, señalaba la multitud de problemas que se plantean constantemente como un signo seguro de la vitalidad de la matemática; del futuro nos dice lo siguiente: «El gran matemático del futuro, como los del pasado, abandonará los caminos muy trillados. Y será por *rapprochements* inesperados, a los que nuestra imaginación no habría sabido cómo llegar, como resolverá, dándoles otro giro, los grandes problemas que le hayamos legado»[45]. Mirando hacia adelante, Weil está seguro de otra cosa: «En el futuro, como en el pasado, las grandes ideas serán las ideas simplificadoras»[46].

A partir del conocimiento del pasado uno puede anticipar, de una manera muy general, lo que puede deparar el futuro. Pero si hay algo de verdad en el aforismo

---

[43] N. Bourbaki, «The Architecture of Mathematics», en *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), pág. 223.

[44] André Weil, «The Future of Mathematics», en *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), págs. 295-306; véase especialmente pág. 297. Esta es una traducción de un artículo de *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. por F. le Lionnais (1948, nueva ed., 1962).

[45] «L'avenir des mathématiques», en *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. por F. le Lionnais (1962), págs. 307-320; véase la pág. 317.

[46] «The Future of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), pág. 304.

de que «la historia se repite», lo cierto es que la historia de la matemática ha demostrado que las «repeticiones» son tan variadas e inesperadas que hacen imposible ningún pronóstico significativo de lo que ha de venir. Se ha dicho[47] que una gráfica que represente el crecimiento de la ciencia, incluida la matemática, se aproxima mucho a una curva exponencial, y no es disparatado pensar que los futuros progresos de la matemática se ajusten aún más a ese esquema poco tranquilizador. Ciertamente la sabiduría y la locura van tan entrelazadas en la sociedad humana, que nos enfrentamos hoy a una posibilidad perfectamente real de que la matemática hecha por el hombre pueda convertirse algún día en el instrumento de su propia aniquilación.

Bibliografía

Alexandroff, Paul: *Elementary Concepts of Topology*, trad. Alexis N. Obolensky (New York: Frederick Ungar, 1965).

Bell, E. T.: *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940).

Bernkopf, Michael: «The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory», *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966), 1-96.

Bernstein, Jeremy: *The Analytical Engine: Computers—Past, Present and Future* (New York: Random House, 1963).

Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics* (Amsterdam: North Holland, 1959).

Black, Max: *The Nature of Mathematics* (New York: Harcourt, Brace, 1933).

Bochenski, I. M.: *A History of Formal Logic*, trad. Ivo Thomas (Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1961).

Bourbaki, N.: «The Architecture of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 221-232.

——: *Éléments d'histoire des mathématiques* (París: Hermann, 1960).

Delachet, André: *Contemporary Geometry*, trad. H. G. Bergmann (New York: Dover Publications, 1962).

Dieudonné, Jean: «Recent Developments in Mathematics», *The American Mathematical Monthly*, **71** (1964), 239-248.

Enriques, F.: *The Historic Development of Logic*, trad. J. Rosenthal (New York: Holt, Rinehart, 1929).

Hilbert, David: «Mathematical Problems», trad. Mary Winston Newson, en *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), 8 (1902), 437-479.

——: *Foundations of Geometry*, trad. E. J. Townsend, 2.ª ed. (Chicago: Open Court, 1910).

——: *Gesammelte Abhandlungen* (Berlín: Springer, 1932-1935, 3 vols.).

King, Amy, C., y C. B. Read: *Pathways to Probability* (New York: Holt, Rinehart, 1963).

LaSalle, J. P., y S. Lefschetz(eds.): *Recent Soviet Contributions to Mathematics* (New York: Macmillan, 1962).

Lebesgue, Henri: *Lecons sur l'intégration* (París: Gauthier-Villars, 1904).

——: *Measure and the Integral*, ed. K. O. May (San Francisco: Holden-Day, 1966).

Lebon, Ernest: *Henri Poincaré, bibliographie analytique des ecrits* (París: Gauthier-Villars, 1909).

[47] D. J. Price, *Science since Babylon* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1961), cap. 5. Cf. K. O. May, «Quantitative Growth of the Mathematical Literature», *Science*, 154 (1966), págs. 1672-1673.

Le Lionnais, F. (ed.): *Les grands courants de la pensée mathématique*, trad. (París: Albert Blanchard, 1962).
Luchins, Abraham S., y Edith H. Luchins: *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists* (New York: Holt, Rinehart, 1965).
Manheim, Jerome H.: *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Macmillan, 1964).
Nevanlinna, Rolf: «Reform in Teaching Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 73 (1966), 451-464.
Nörlund, N. E.: «Correspondence de Henri Poincaré et de Felix Klein», *Acta Mathematica*, 39 (1923), 94-132.
Picard, Émile: *Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle* (París: Gauthier-Villars, 1917).
Pierpont, James: «Mathematical Rigor, Past and Present», *Bulletin of the American Mathematical Society*, **37** (1928), 23-53.
Poincaré, Henri: *Oeuvres* (París: Gauthier-Villars, 1916-1956, 11 vols.).
Prasad, Ganesh: *Mathematical Research in the Last Twenty Years* (Berlín: Walter de Gruyter, 1923).
Russell, Bertrand: *Principles of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Norton, 1938).
Stone, M. H.: «The Revolution in Mathematics», *Liberal Education*, 47 (1961), 304-327.
Volterra, Vito, *et al.*: *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (París: Alcan, 1914).
Weil, André: «The Future of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 295-306.
Weyl, Hermann: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, basado en una traducción de Olaf Helmer «Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1940).
Wilder, R. L.: «The Origin and Growth of Mathematical Concepts», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 59 (1953), 423-448.
——: «The Role of the Axiomatic Method», *American Mathematical Monthly*, 74 (1967), 115-127.

Ejercicios

1. Dé tres definiciones o descripciones de la matemática, de los siglos XIX y XX, explicando cuál prefiere usted y por qué.
2. Explíquense los puntos de vista de las tres escuelas filosóficas más importantes del siglo XIX relativas a los fundamentos de la matemática, mencionando a uno o dos de los representantes más notable de cada una de ellas.
3. Descríbanse varias paradojas o aparentes anomalías en la matemática del siglo XX, explicando su significado.
4. Explíquese por qué las distinciones tradicionales entre álgebra y geometría han ido desapareciendo a lo largo del siglo XX. ¿Cuál de estas dos ramas se ha desarrollado más rápidamente este siglo y por qué?
5. Los progresos matemáticos ¿han estado más inspirados por la física y la tecnología en el siglo XX que en el XIX o no? Explíquese claramente.
6. Compárese la influencia de los teoremas de Gödel en la actitud de los matemáticos, con la del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.
7. La frecuencia de los descubrimientos matemáticos ¿ha ido aumentando o disminuyendo durante el siglo XX? ¿Cómo explicaría usted esto?
8. Los matemáticos de la antigua Grecia ¿serían considerados hoy como formalistas, intuicionistas o formalistas? Explíquese claramente.

9. Cítense tres eminentes matemáticos extranjeros que llegaran a ser miembros del Institute for Advanced Study en Princeton (conocido también familiarmente como «The Princetitute») y explíquense brevemente sus contribuciones principales a la matemática.
10. Menciónense tres aspectos distintos en los que la ciudad francesa de Nancy tenga relación importante con la matemática del siglo XX.
11. Descríbanse algunas de las contribuciones de Polonia a la matemática durante el intervalo entre las dos Guerras Mundiales.
12. ¿Cuál es la integral de Lebesgue extendida al intervalo [0, 1] de la función $f(x)$, donde $f(x)=1$ si x es racional y $f(x)=0$ si x es irracional? Razónese la respuesta.
13. Demuéstrese que el producto de dos transformaciones lineales fraccionarias de una variable es otra transformación lineal fraccionaria.
14. Si una transformación lineal fraccionaria

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}$$

satisface la condición $ad-bc=1$, demuéstrese que la transformación inversa también satisface esta condición.

15. Si dos transformaciones lineales fraccionarias satisfacen la condición del ejercicio 14, demuéstrese que el producto de las dos transformaciones también satisface dicha condición.
16. ¿De cuáles de los siguientes números

$$\pi^e,\ e^\pi,\ e^e,\ \pi^\pi,\ \sqrt{2}^e,\ \pi^{\sqrt{3}},\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}},\ \ln 1,\ \tan \pi/3,\ i^i$$

se sabe que son trascendentes? Explíquese por qué.

*17. Demuéstrese que $\log_{10} 3$ es irracional, y utilícese este resultado y el teorema de Gelfond para demostrar que $\log_{10} 3$ es además trascendente. ¿Cuántos y cuáles de los logaritmos vulgares de los enteros entre 1 y 10 inclusive son algebraicos?

*18. Las tres primeras etapas de la definición de la curva de Von Kock o «cristal de nieve» son las que muestra la figura 27.2. Cálculese el perímetro y el área de la figura correspondiente a la cuarta etapa.

*19. La longitud de la curva de Von Koch o «cristal de nieve» es infinita, pero el área limitada por ella es obviamente finita. Calcúlese este área.

Bibliografía general

Nota del traductor: Razones obvias han aconsejado no actualizar las bibliografías por capítulos (excelentes y muy bien elegidas, por otra parte), a pesar de que durante los últimos quince o veinte años se han publicado una gran cantidad de libros y artículos muy importantes sobre temas monográficos. Los interesados en consultar la bibliografía reciente sobre algún tema concreto deberán recurrir a alguna de las buenas revistas sobre historia de la matemática, como son, por ejemplo, *Archive for History of Exact Sciences; Historia Mathematica* o *Isis*, así como las grandes bibliografías, entre las que destaca la *Isis Cumulative Bibliography* (véase la referencia completa más abajo).

En cambio, sí hemos considerado conveniente actualizar esta bibliografía general, añadiendo a la original algunos libros interesantes que se han publicado recientemente, que sean, o bien historias generales de la matemática o de períodos extensos o ramas generales de la misma. No se ha pretendido en absoluto que la bibliografía tenga un carácter exhaustivo (probablemente nada hay peor que una bibliografía muy extensa y poco crítica, sobre todo en una obra general o elemental como ésta). Se incluye sin modificaciones la bibliografía original, y para distinguir las referencias que hemos añadido, éstas vendrán marcadas con una estrella (*).

Archibald, R. C.: *Outline of the History of Mathematics* (Buffalo: Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949). Especialmente útil por su extensa bibliografía.

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics* (Londres: Macmillan, 1888). Una de las más populares historias de la matemática; en 1915 apareció su 6.ª edición, y fue reeditada en 1960 por Dover en rústica. Está algo anticuada, pero aún tiene interés.

——: *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times* (Londres: Macmillan, 1892). Muy popular; contiene abundante historia.

*Baron, Margaret E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus* (Londres: Pergamon Press, 1969). Excelente y muy detallada para los predecesores de Newton y Leibniz, desde los griegos.

Bell, E. T.: *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937). Biografías muy legibles; se suponen pocos conocimientos matemáticos.

——: *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940). Excelente exposición, sobre todo en lo referente a la matemática moderna, para lectores con buena preparación matemática. Hay una traducción al español en el Fondo de Cultura Económica (México).

*Benacerraf, Paul, y Putnam, Hilary (eds.): *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*

(Cambridge: Cambridge University Press, 1983). Obra fundamental para el estudio de la filosofía de la matemática del siglo XX.

*Birkhoff, Garret (ed.): *A Source Book in Classical Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1973). Importante y extensa antología del análisis, desde Cauchy a Hilbert, clasificada por temas.

Bochner, Salomon: *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966). No se trata de una narración continua, sino de una colección de ensayos.

Bourbaki, Nicolas: *Éléments d'histoire des mathématiques* (París: Hermann, 1960). No es una historia conexa, sino exposiciones parciales de ciertos aspectos, especialmente de la época moderna. Hay una traducción al español en Alianza Editorial (Madrid, 1968).

*Boyer, Carl B.: *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (New York: Dover, 1959). Obra ya clásica sobre la historia del cálculo infinitesimal, profunda pero clara y poco técnica. Excelente bibliografía.

Braunmühl, Anton von: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig: B. G. Teubner, 1900-1903, 2 vols.). Es aún la obra standard sobre el tema.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1919). Una de las más ambiciosas historias en un solo volumen en inglés. Reeditada por Chelsea (New York).

——: *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 vols.). La obra definitiva sobre el tema.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1892-1908, 4 vols.). La más extensa historia de la matemática publicada hasta hoy. Algunos volúmenes los hay en una 2.ª edición, y la obra completa está disponible reeditada por Kraus Repr. (New York).

Carruccio, Ettore: *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, trad. por Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964). Un panorama general bastante ecléctico. En su bibliografía predominan los autores italianos.

Chasles, Michel: *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 2.ª ed. (París, 1875). Obra clásica, especialmente útil sobre la geometría sintética de comienzos del siglo XIX.

**Científicos griegos*, 2 vols. (F. Vera, ed.) (Madrid: Aguilar, 1970). Extensa antología en la que aparecen las obras de casi todos los matemáticos griegos importantes. Desgraciadamente las notas y el aparato crítico son casi inexistentes.

*Cohen, Morris R., y Drabkin, I. E.: *A Source Book in Greek Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1975). Magnífica antología de la ciencia griega. La selección está ordenada por materias, con abundantes notas críticas.

*Collette, Jean-Paul, *Histoire des Mathématiques*, 2 vols. (Montreal: Ed. Ren. Ped, 1973-1979). Historia general, de estructura muy parecida a la presente. Hay una traducción al español (Madrid, 1985).

Coolidge, J. L.: *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940). Excelente obra, que presupone en el lector una base matemática considerable. Disponible en una edición en rústica de Dover, 1963.

Dickson. L. E.: *History of the Theory of Numbers* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1919-1923). Obra definitiva sobre el tema: 3 vols. Disponible en una reedición de Chelsea (New York).

*Dieudonné, Jean (ed.): *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, 1700-1900, 2 vols. (París: Hermann, 1978). Obra de alto nivel escrita por un equipo de especialistas y ordenada por materias. Requiere del lector una sólida preparación matemática.

*Dumitriu, Anton: *History of Logic*, 4 vols. (Londres: Abacus Press, 1977). Probablemente la más ambiciosa historia de la lógica disponible, en su mayor parte filosófica.

*Edwards, C. H. Jr.: *The Historical Development of the Calculus* (New York: Springer, 1982). Excelente y detallada historia del cálculo infinitesimal elemental desde sus orígenes griegos; buenas bibliografías por capítulos.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées (París, 1904-1914). Esta es esencialmente una traducción parcial de la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (Leipzig: Teubner, 1898-1935), pero la versión francesa contiene muchas referencias históricas adicionales.

Eves, Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, 5.ª ed. (New York: Saunders Coll. Publ., 1983). Excelente texto, con muchos problemas y extensas bibliografías al final de cada capítulo.

*——: *Great Moments in Mathematics, vol. I: Berfore* 1650*; vol. II: After* 1650 (New York: The Mathematical Association of America, 1980-1981). 39 lecciones de historia de la matemática en el magnífico estilo del autor y con ejercicios.

*——: *Mathematical Circles* (5 vols.) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969-1980). Cerca de 1.500 historias y anécdotas breves de todas las épocas de la historia. La belleza interior del libro se corresponde con la belleza de su presentación material.

*Gericke, Hemulth: *Mathematik in Antike und Orient* (Berlín: Springer, 1984). Excelente y actual. Gran cantidad de información en poco espacio. Buenas bibliografías clasificadas.

Gillispie, C. C. (ed.): *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Charles Scribner's Sons, 1981). 16 vols. en 8 tomos. Monumental y definitiva. Cada biografía está escrita por un especialista.

*Goldstine, Herman H.: *A History of Numerical Analysis from the* 16^{th} *through the* 19^{th} *Century* (New York: Springer, 1978). La obra definitiva sobre el tema, hasta el momento; de nivel técnico avanzado.

*Grant, Edward (ed.): *A Source Book in Medieval Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1974). Monumental selección de fragmentos de científicos medievales, muchos de ellos físicos y matemáticos.

*Grattan-Guinness, I. (ed.): *From the Calculus to Set Theory:* 1630-1910 (Londres: Durckworth, 1980). Una buena historia del cálculo infinitesimal, principalmente durante los siglos XVII y XIX; excelente bibliografía. Hay una traducción al español en Alianza Editorial (Madrid, 1984).

Heath, T. L.: *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.). El mejor tratamiento del tema en inglés. Disponible en edición en rústica de Dover (1981), así como el resumen hecho por el mismo autor en un solo volumen: *A Manual of Greek Mathematics* (Dover, 1963).

Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik* (Berlín: Walter de Gruyter, 1953-1957, 3 vols., vol. I, nueva ed., 1963). Estos manejables volúmenes de bolsillo contienen índices biobibliográficos extraordinariamente útiles. Estos índices se omitieron desgraciadamente en la traducción inglesa que apareció en dos volúmenes (New York: Philosophical Library, 1957-1959) con los títulos *The History of Mathematics* y *Classical Mathematics*, lo que hace la traducción de una utilidad muy limitada. [Hay una traducción al español en Uteha (México) en tres volúmenes de bolsillo, incluyendo las valiosas bibliografías del original.]

**Isis Cumulative Bibliography* (1913-1965) (6 vols.) y (1966-1975) (2 vols.) (Londres: Mansell, 1971-1985). Bibliografía general de historia de la ciencia formado por las Bibliografías Críticas núms. 1 a 100 de la revista *Isis*. Referencia documental básica.

Itard, Jean, y Pierre Dedron: *Mathématiques et mathématiciens* (París: Magnard, 1959).

Elemental pero útil; contiene breves fragmentos de las fuentes originales. Hay traducción al inglés en la Open University.

*Iyanaga, Shokichi, y Kawada, Yukiyosi (eds.): *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, 2 vols. (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1977). Traducción inglesa del original japonés. Se trata de un diccionario de matemática superior exclusivamente, con algunos artículos históricos breves.

James, Glenn, y R. C. James: *Mathematics Dictionary*, 2.ª ed. (Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1959). Util, pero no tan completo como Naas y Schmid.

Kaestner, A. G.: *Geschichte der Mathematik* (Göttingen, 1796-1800, 4 vols.). Especialmente útil para la matemática práctica y la ciencia renacentista. Hay disponible una bella reedición en Olms.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert* (Berlín, 1926-1927, 2 vols.). Panorama de alto nivel, que quedó incompleto a la muerte de su autor. Hay disponible una reimpresión en Springer en un solo volumen, y una traducción al inglés del primer volumen con el título *Development of Mathematics in the* 19*th Century*, por Math Sci Press.

Kline, Morris: *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford, 1953). Escrita de manera atractiva y a un nivel popular.

*——: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972). Tratamiento a un nivel relativamente alto, sobre todo de los siglos XVIII, XIX y XX. Abundantes referencias a las fuentes originales.

Klügel, G. S.: *Mathematisches Wörterbuch* (Leipzig, 1803-1836, 7 vols.). Presenta una amplia panorámica del estado de la materia hace casi dos siglos.

*Kneale, William, y Kneale, Martha: *The Development of Logic* (Oxford: Clarendon Press, 1962). Una de las mejores historias de la lógica, con especial atención al desarrollo de la lógica matemática en los siglos XIX y XX. Hay disponible una traducción al español en Tecnos (Madrid).

*Kramer, Edna E.: *The Nature and Growth of Modern Mathematics* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1981). Buena exposición elemental, no en orden cronológico, sino por grandes temas. Carece casi por completo de referencias bibliográficas propiamente históricas.

*Le Lionnais, F.; Bouvier, A., y George, M.: *Dictionnaire des Mathématiques* (París: Presses Universitaires de France, 1980). Escaso contenido histórico, pero en cambio multitud de definiciones de la matemática elemental que resultan útiles cuando se lee historia de la matemática.

Loria, Gino: *Storia delle matematiche* (Turín: Sten, 1929-1933, 3 vols.). Una obra sólida y sustancial. Hay disponible una 2.ª edición en un solo volumen en U. Hoepli (Milán, 1950), reeditada en 1982.

Marie, Maximilien: *Histoire des sciences mathématiques* (París, 1883-1888, 12 vols.). No se trata de una historia sistemática, sino de una serie de biografías ordenadas cronológicamente, con las listas de las obras principales de cada matemático. Reedición en Kraus Repr. en 6 tomos.

*May, Kenneth O.: *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics* (Toronto: University of Toronto Press, 1973). Monumental y útil bibliografía clasificada. Desgraciadamente el sistema de abreviaturas es bastante molesto, pero esto es difícilmente evitable en una obra de este tipo.

Midonick, Henrietta O. (ed.): *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965). Util, pero la selección hecha pone el énfasis en las contribuciones no-europeas, lo cual, en cierto sentido, le da un interés especial, por ser esto poco frecuente.

*Mieli, A.; Papp, D., y Babini, J.: *Panorama General de Historia de la Ciencia*, 12 vols.

(Madrid: Espasa-Calpe, diversas fechas). Importante historia de la ciencia en español, aunque la parte dedicada a la matemática sea relativamente escasa.

Montucla, J. E.: *Histoire des mathématiques* (París, 1799-1802, 4 vols.). Muy útil aún, especialmente en lo que se refiere a las aplicaciones de la matemática a la física y a la astronomía. Hay disponible una reimpresión por A. Blanchard (París, 1960).

Moritz, R. E.: *Memorabilia Mathematica or the Philomanth's Quotation-Book* (New York, 1914). Contiene más de 2.000 citas, ordenadas por temas y con un índice. Disponible en rústica en Dover con el título *On Mathematics and Mathematicians.*

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906-1930, 4 vols. y suplemento). Lo más extenso y completo, con mucho, que puede encontrarse sobre el tema. Hay una reedición en Dover.

Naas, Joseph, y H. L. Schmid: *Mathematisches Wörterbuch* (Berlín: Akademie, 1961, 2 vols.). Un diccionario ejemplar desde todos los puntos de vista. Contiene una cantidad extraordinaria de definiciones y de biografías breves.

*Neugebauer, O.: *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (Berlín: Springer Verlag, 1975), 3 vols. Un tratamiento definitivo y actual del tema, inevitablemente muy técnico.

Newman, James (ed.): *The World of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1956, 4 vols.). Incluye abundante material sobre la historia de la matemática.

Read, C. B.: «Articles on the History of Mathematics: A Bibliography of Articles Appearing in Six Periodicals», *School Science and Mathematics* (1959), 689-717. Especialmente útil para buscar material introductorio.

*Rey Pastor, J., y Babini, J.: *Historia de la Matemática* (Barcelona: Gedisa, 1984), 2 vols. Prácticamente la única historia de la matemática de corte clásico en español durante muchos años; se edita ahora en su 2.ª edición en dos tomos.

Sarton, George: *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution, 1927-1948, 3 vols. en 5 tomos). Obra monumental, no expositiva, y herramienta standard para la investigación en historia de la matemática y de la ciencia en general hasta 1400. El título es extremadamente inadecuado al contenido.

——: *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936; New York: reimpresión en rústica en Dover, 1957). Una guía delgada pero útil. Véase también el libro de Sarton, *Horus: A Guide to the History of Science* (New York: Ronald Press, 1952).

Schaaf, W. L.: *A Bibliography of Mathematical Education* (Forest Hills, N. Y.: Stevinus Press, 1941). Un índice de la literatura periódica desde 1920, que contiene más de 4.000 referencias.

——: *Recreational Mathematics: A Guide to the Literature*, 3.ª ed. (Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1963). Los cuatro volúmenes de esta obra contienen varios miles de referencias de libros y artículos, clasificadas por temas, muchos de ellos históricos.

Scharlau, Winfried, y Opolka, Hans: *From Fermat to Minkowski: Lectures on the Theory of Numbers and its Historical Development* (New York: Spinger, 1985). Excelente exposición a un nivel avanzado.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics* (Londres: Taylor and Francis, 1958). Buena en lo referente a la matemática inglesa, pero no está al día, por ejemplo, en el período prehelénico.

Smith, D. E.: *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols.; Dover, edición en rústica, New York, 1958). Muy útil aún para detalles biográficos, especialmente fechas de nacimientos y muertes, y para todos los aspectos elementales de la matemática. Infinidad de datos de rara erudición.

——: *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; Dover, edición en

rústica, New York, 1959, 2 vols.). Util por su extensión, pero la selección está lejos de ser la ideal.

Struik, D. J.: *A Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover, 1967). Muy breve, pero siempre fiable y escrita en un estilo erudito y ágil, con muchas referencias. [Hay traducción al español publicada en México.]

——: *Source Book in Mathematics* 1200-1800 (Cambridge, Mas.: Harvard University Press, 1969). Excelente. Cubre de una manera muy completa el álgebra, el análisis y la geometría desde 1200 a 1800.

Tannery, Paul: *Mémoires scientifiques* (París: Gauthier-Villars, 1912-1934, 13 vols.). Estos volúmenes contienen gran cantidad de artículos sobre historia de la matemática, especialmente sobre la antigua Grecia y sobre el siglo XVII, por una de las grandes autoridades en este campo.

Taton, René (ed.): *Histoire générale des sciences* (París: Presses Universitaires de France, 1957-1961, 5 vols.). Excelente y autorizado tratado en el que han colaborado varias decenas de especialistas de todo el mundo. Traducción al inglés en Basic Books (New York, 1964-1968). [Hay traducción al español por Destino (Barcelona, 1971-1975).]

Taylor, Eva, G. R.: *The Mathematical Practitioners of... England* (Cambridge: Cambridge University Press, 1954-1966, 2 vols.). Detalles biográficos de matemáticos desde 1485 a 1840.

*Temple, George: 100 *Years of Mathematics* (Londres: Duckworth, 1982). Lo ambicioso del proyecto y lo breve del libro lo hacen excesivamente esquemático para ser una historia propiamente dicha, en el sentido clásico. Util, sin embargo, por la información acumulada; nivel avanzado.

Todhunter, Isaac: *History of the Calculus of Variations During the Nineteenth Century* (Cambridge, 1861). Antigua, pero una de las obras básicas sobre el tema.

——: *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge, 1865). La obra standard sobre el tema; muy completa.

Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2.ª ed. (1921-1924, 7 vols.). Importante y sistemática historia de las ramas elementales de la matemática. Algunos volúmenes aparecieron en una 3.ª edición incompleta. Ha aparecido en 1980 en Walter de Gruyter (Berlín) el primer tomo, *Arithmetik und Algebra* de una 4.ª edición completamente refundida y actualizada.

Van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, trad. por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961). Una buena exposición técnica de la matemática prehelénica y griega, bellamente ilustrada. Hay también una edición en rústica, menos atractiva, en Wiley (ew York, 1963).

*——: *A history of Algebra: From al-Khowarizmi to Emmy Noether* (Berlín: Springer, 1985). Prácticamente el único estudio sistemático disponible de la historia del álgebra moderna.

*——: *Geometry and Algebra in Ancient Çivilizations* (Berlín; Springer, 1983). Obra dedicada en su mayor parte al álgebra griega, china e hindú

*Vera, Francisco: *Historia de la Matemática en España* (cuatro volúmenes) (Madrid: Victoriano Suárez, 1929-1933). Interesante y erudita, si bien no demasiado científica. De los ocho volúmenes planeados sólo se publicaron los cuatro primeros.

*Weil, André: *Number Theory: An Approach Through History: From Hammurapi to Legendre* (Boston: Brikhäuser, 1948). Panorama de alto nivel de la historia de la teoría de números, principalmente desde Fermat a Legendre, por uno de los más importantes especialistas mundiales en el tema.

Wieleitner, Heinrich: *Geschichte der Mathematik*. Parte II, desde Descartes al 1800 aproximadamente, Leipzig, 1911-1921, 2 vols. Obra muy útil, a un nivel matemático

intermedio; no confundirla con la obra más breve del mismo autor, también en 2 vols., en Sammlung Göschen, *Geschichte der Mathematik* (Berlín, 1939).

*Young, Laurence: *Mathematicians and Their Times* (Amsterdam: North Holland, 1981). Interesante narración centrada principalmente en la época moderna y sus protagonistas.

Youschkevitch, A. P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964). Una de las mejores historias de la matemática medieval en Arabia, en China, en la India y en Europa. Hay una traducción al francés del capítulo sobre la matemática árabe en Vrin (París, 1976), con el título: *Les Mathématiques Arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècles)*.

Zeller, Sister Mary Claudia: *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich: University of Michigan, Ph. D. Dissertation, 1944). Lo más parecido que hay en inglés a una historia de la trigonometría.

Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert* (edición alemana, Leipzig: Teubner, 1903). Una exposición sólida y útil.

Apéndice

TABLA CRONOLOGICA

(Las fechas anteriores al −776 son sólo aproximadas)

$-5_2000.000_1000.000$	Origen del Sol.
$-5.000_1000.000$	Origen de la Tierra.
$-600_1000.000$	Comienzos de la Era Paleozoica.
$-225_1000.000$	Comienzos de la Era Mesozoica.
$-60_1000.000$	Comienzos de la Era Cenozoica.
$-2_1000.000$	Origen del hombre.
−50.000	Hombre de Neanderthal.
−25.000	Arte paleolítico. Hombre de Cro-Magnon
−10.000	Agricultura mesolítica.
−5.000	Civilizaciones neolíticas.
−4.000	Utilización de los metales.
−3.500	Orígenes de la escritura. Rueda de alfarero.
−3.000	Invención de los vehículos con ruedas.
−2.800	Construcción de la Gran Pirámide de Cheops.
−2.400	Imperio sumerio-akkadio.
−1.800	Código de Hammurabi.
−1.700	Los hyksos invaden Egipto. Stonehenge en Inglaterra.
−50.000	Primeras evidencias de numeración.
−25.000	Dibujos geométricos primitivos.
−4.241	Origen hipotético del calendario egipcio.
−3.000	Numerales jeroglíficos en Egipto.
−2.773	Probable introducción del calendario egipcio.
−2.400	Notación posicional en Mesopotamia.
−1.850	Papiro de Moscú (Golenischev). Comienzos del cifrado.

−1.600	Los cassitas invaden Mesopotamia. Imperio Nuevo en Egipto.
−1.400	Gran catástrofe en Creta.
−1.350	Alfabeto fenicio. Utilización del hierro, del reloj de sol y de la clepsidra o reloj de agua.
−1.200	Guerra de Troya. Exodo judío de Egipto.
−1.100?	Chou-Pei.
−776	Primera Olimpiada.
−753	Fundación de Roma, según la tradición.
−743	Era de Nabonassar.
−740	Obras de Homero y de Hesiodo (aprox.).
−586	Cautiverio de Babilonia.
−585	Tales de Mileto; geometría deductiva (?).
−540	Aritmética y geometría pitagóricas (aprox.). Numerales de varillas en China (aprox.). Los *Sulvasūtras* indios (aprox.).
−538	Los persas se apoderan de Babilonia.
−480	Batalla de Las Termópilas.
−477	Formación de la Liga de Delos.
−461	Comienzo de la Epoca de Pericles.
−450	Tierra esférica de Parménides (aprox.).
−430	Muerte de Zenón. Obras de Demócrito. Astronomía de Filolao (aprox.). Los *Elementos* de Hipócrates de Chios (aprox.).
−430	Hipócrates de Cos (aprox.). Teoría atómica (aprox.).
−429	Muerte de Pericles; plaga sobre Atenas.
−428	Nacimiento de Arquitas. Muerte de Anaxágoras.
−427	Nacimiento de Platón.
−420	Trisectriz de Hipias (aprox.). Inconmensurables (aprox.).
−404	Fin de la guerra del Peloponeso.
−399	Muerte de Sócrates. *Anábasis* de Jenofonte.
−369	Muerte de Teeteto.

−360 Teorías de proporciones y de exhausción de Eudoxo (aprox.).
−350 Menecmo y las secciones cónicas (aprox.).
Dinostrato y la cuadratriz (aprox.).

−335 Eudemo: *Historia de la Geometría* (aprox.).

−330 Autólico: *Sobre la Esfera en Movimiento* (aprox.).

−320 Aristeo: *Cónicas* (aprox.).

−300 Los *Elementos* de Euclides (aprox.).

−260 Astronomía Heliocéntrica de Aristarco (aprox.).

−230 Criba de Eratóstenes (aprox.).
−225 Las *Cónicas* de Apolonio (aprox.).
−212 Muerte de Arquímedes.

−180 Cisoide de Diocles (aprox.).
Conchoide de Nicomedes (aprox.).
Hypsicles y la división del círculo en 360° (aprox.).

−150 Curvas espíricas de Perseo (aprox.).

−140 Trigonometría de Hiparco (aprox.).

−60 Gémino y el postulado de las paralelas (aprox.).

+75 Obras de Herón de Alejandría (aprox.).

−347 Muerte de Platón.

−332 Fundación de Alejandría.

−323 Muerte de Alejandro.
−322 Muerte de Aristóteles y de Demóstenes.

−311 Comienzo de la época seleúcida en Mesopotamia.
−306 Ptolomeo I Soter reina en Egipto.

−283 El Faro de Alejandría.
−264 Comienza la Primera Guerra Púnica.

−232 Muerte de Asoka, el «Constantino budista».

−210 Comienzo de la Gran Muralla China.

−166 Rebelión de Judas Macabeo.

−146 Destrucción de Cartago y de Corinto.

−121 Asesinato de Cayo Graco.
−75 Cicerón restaura la tumba de Arquímedes.
−60 Lucrecio: *De rerum natura.*
−44 Muerte de Julio César.

+79 Muerte de Plinio el Viejo en el Vesubio.

100 Nicómano: *Aritmética* (aprox.).
Menelao: *Esférica* (aprox.).

125 Teón de Esmirna y la matemática platónica.
150 Ptolomeo: *El Almagesto* (aprox.).

250 Diofanto: *Aritmética* (aprox.).

320 Pappus: *Colección Matemática* (aprox.).

390 Teón de Alejandría (fl.).
415 Muerte de Hypatía.

470 Aproximación de π por Tsu Ch'ung-Chih (aprox.).
476 Nacimiento de Aryabhata.
485 Muerte de Proclo.

520 Antemio de Tralles e Isidoro de Mileto.
524 Muerte de Boecio.

529 Cierre de las escuelas filosóficas de Atenas.

560 Comentario de Eutocio a Arquímedes (aprox.).

628 *Brahma-sphuta Siddhanta.*

662. El obispo Sebokht menciona los numerales hindúes.

735 Muerte de Veda el Venerable.
775 Obras astronómicas hindúes traducidas al árabe.

116 Trajano extiende el Imperio Romano.
122 Comienza la construcción de la Muralla de Adriano en Gran Bretaña.

180 Muerte de Marco Aurelio.

286 División del Imperio Romano por Diocleciano.

324 Fundación de Constantinopla.
378 Batalla de Adrianópolis.

455 Los vándalos saquean Roma.

476 Fecha convencional de la «caída» de Roma.

496 Clodoveo se convierte al cristianismo.

526 Muerte de Teodorico.
529 Fundación del Monasterio de Monte Cassino.
532 Construcción de Hagia Sophia por Justiniano.

590 Gregorio Magno elegido papa.
622 La Hégira de Mahoma.

641 Incendio de la Biblioteca de Alejandría.

732 Batalla de Tours (o Poitiers).

814 Muerte de Carlomagno.

830 Al-Khowarizmi: *Algebra* (aprox.).
901 Muerte de Thabit ibn-Qurra.

998 Muerte de Abu'l-Wefa.

1037 Muerte de Avicena.
1039 Muerte de Alhazen.
1048 Muerte de Al-Biruni.

1114 Nacimiento de Bhaskara.
1123 Muerte de Omar Khayyam.
1142 Adelardo de Bath traduce a Euclides.

1202 Fibonacci: *Liber abaci.*

1260 Trisección del ángulo por Campano (aprox.).
Jordano Nemorario: *Arithmetica* (aprox.).

1270 William de Moerbeke traduce a Arquímedes (aprox.).

1274 Muerte de Nasir Eddin.

1303 Chu Shi-kié y el triángulo de Pascal.
1328 Bradwardine: *Liber de proportionibus.*
1336 Muerte de Richard de Wallingford.

1360 La latitud de las formas de Oresme.

910 Abadía benedictina en Cluny.
987 Ascensión al trono de Hugo Capeto.

999 Gerberto es elegido papa con el nombre de Silvestre II.
1028 Escuela de Chartres.

1066 Batalla de Hastings.
1096 Primera Cruzada.
1100 Coronación de Enrique I de Inglaterra.

1170 Asesinato de Thomas Becket.

1204 Los cruzados saquean Constantinopla.
Muerte de Maimónides.
1215 Carta Magna.

1265 Primer parlamento en Inglaterra.

1271 Viajes de Marco Polo. Relojes mecánicos (aprox.).

1286 Invención de los anteojos (gafas) (aprox.).

1348 La Peste Negra.

1436 Muerte de Al-Kashi.

1464 Muerte de Nicolás de Cusa.
1472 Peuerbach: *Nueva Teoría de los Planetas.*

1476 Muerte de Regiomontano.
1482 Primera edición impresa de los *Elementos* de Euclides.

1484 Chuquet: *Triparty.*

1489 Uso de los signos + y − por Widmann.
1492 Uso del punto decimal por Pellos.
1494 Luca Pacioli: *Summa.*

1525 Rudoff: *Coss.*
1526 Muerte de Scipione dal Ferro.
1527 Apiano publica el triángulo de Pascal.

1543 Tartaglia publica la traducción de Arquímedes de Moerbeke. Copérnico: *De revolutionibus.*
1544 Stifel: *Arithmetica integra.*
1545 Cardano: *Ars magna.*

1557 Recorde: *Whetstone of Witte.*

1564 Nacimiento de Galileo.

1572 Bombelli: *Algebra.*
1579 Viète: *Canon mathematicus.*

1364 Muerte de Petrarca.
1431 Quema de Juana de Arco.

1440 Invención de la imprenta de tipo móviles.
1453 Caída de Constantinopla.

1473 Capilla Sixtina.

1483 Asesinato de los príncipes en la Torre de Londres.

1485 Enrique VII, el primer Tudor.

1492 Descubrimiento de América por Colón.

1498 Ejecución de Savonarola.
1517 Reforma Protestante.
1520 El Campo del Paño de Oro.

1534 Acta de Supremacía.
1543 Vesalius: *De fábrica.*
Ramus: *Refutación de Aristóteles.*

1553 Servet quemado en Ginebra.

1558 Subida al trono de Isabel I de Inglaterra.
1564 Nacimiento de Shakespeare. Muertes de Vesalius y de Miguel Angel.
1572 Noche de San Bartolomé.

1585 Stevin: *La disme*. Informe de Harriot sobre «Virginia».

1595 Pitiscus: *Trigonometría.*

1603 Muerte de Viète.
1609 Kepler: *Astronomia nova.*
1614 Los logaritmos de Napier.

1620 Los logaritmos de Bürgi.

1629 Método de Fermat para máximos y mínimos.
1631 Harriot: *Artis analyticae praxis.*
Oughtred: *Clavis mathematicae.*
1635 Cavalieri: *Geometria indivisibilibus.*

1637 Descartes: *Discours de la méthode.*
1639 Desargues: *Brouillon projet.*
1640 Pascal: *Essay pour les coniques.*
1642 Nacimiento de Newton y muerte de Galileo.

1647 Muertes de Cavalieri y de Torricelli.

1655 Wallis: *Arithmetica infinitorum.*
1657 Rectificación de la parábola por Neil.
1658 Reloj de péndulo cicloidal de Huygens.

1667 Gregory: *Geometriae pars universalis.*
1668 Mercator: *Logarithmotechnia.*

1584 Asesinato de Guillermo de Orange.

1588 Drake derrota a la Armada Española.

1598 Edicto de Nantes.
1603 Muertes de William Gilbert y de Isabel I.
1609 Telescopio de Galileo.

1616 Muertes de Shakespeare y de Cervantes.
1620 Desembarco de «The Pilgrims» en Norteamérica.
1626 Muertes de Francis Bacon y de Willebrord Snell.
1628 Harvey: *De motu cordis et sanguinis.*

1636 Fundación del Harvard College.

1643 Subida al trono de Luis XIV.
1644 Barómetro de Torricelli.

1649 Carlos I decapitado.
1651 Hobbes: *Leviathan.* Bomba de aire de Von Guericke.

1660 Restauración de la monarquía en Inglaterra.
1662 Fundación de la Royal Society.
1666 Fundación de la Académie des Sciences.

1670 Barrow: *Lectiones geometriae.*
1672 Asesinato de De Witt.
1678 Teorema de Ceva.

1679 Decreto de Habeas Corpus.
1682 Fundación del *Acta eruditorum.*
1683 Asedio de Viena.

1684 Primer artículo de Leibniz sobre el cálculo infinitesimal.

1685 Revocación del Edicto de Nantes.

1687 Newton: *Principia.*

1689 La Gloriosa Revolución.

1690 Rolle: *Traité d'algèbre.*
1696 La braquistócrona de los Bernoulli.
La regla de L'Hospital

1699 Muerte de Racine.
1702 Comienzo de la guerra de la Reina Ana.

1706 Utilización de π por William Jones.

1711 Nacimiento de Hume.

1715 Taylor: *Methodus incrementorum.*
1718 De Moivre: *Doctrine of Chances.*

1718 Termómetro de Fahrenheit.

1722 Cotes: *Harmonia mensuraum.*
1730 Fórmula de Stirling.

1730 Termómetro de Rèaumur.

1731 Clairaut sobre las curvas alabeadas.
1733 Saccheri: *Euclides vindicatus.*
1734 Berkeley: *The Analyst.*

1737 Linnaeus: *Systema naturae.*
1738 Daniel Bernoulli: *Hydrodynamica.*
1740 Subida al trono de Federico el Grande.
1742 Termómetro centígrado.

1742 Maclaurin: *Treatise of Fluxions.*
1743 D'Alembert: *Traité de dynamique.*
1748 Euler: *Introductio.* Agnesi: *Istituzioni.*

1749 Volumen I de la *Historie naturelle* de Buffon.

1750 Regla de Cramer. Elipse de Fagnano.

1751 Volumen I de la *Encyclopédie* de Diderot y d'Alembert.

1752 La cometa de Franklin.

1759 *Die freye perspektive* de Lambert.

1767 Máquina de vapor perfeccionada de Watt.

1770 Trigonometría hiperbólica.

1774 Descubrimiento del oxígeno (Priestley, Scheele, Lavoisier).
1776 Declaración de Independencia Norteamericana.

1777 Problema de la aguja de Buffon.
1779 Teoría de eliminación de Bezout.

1781 Descubrimiento de Urano por Herschel.
1783 Descomposición química del agua (Cavendish, Lavoisier).

1788 Lagrange: *Mécanique analytique.*

1789 Revolución Francesa.
1794 Lavoisier guillotinado.
1795 École Polytechnique. École Normale.
1796 Vacunación (Jenner).

1794 Legendre: *Eléments de géométrie.*
1795 Monge: *Feuilles d'analyse.*
1796 Laplace: *Système du monde.*
1797 Lagrange: *Fonctions analytiques.*
Mascheroni: *Geometria del compasso.*
Wessel: *Essay sur la representation analytique de la direction.*
Carnot: *Métaphysique du calcul.*

1799 Sistema Métrico Decimal.
1800 Pila de Volta.
1801 Descubrimiento del planetoide Ceres.
1803 Teoría atómica de Dalton.
1804 Napoleón coronado emperador.

1801 Gauss: *Disquisitiones arithmeticae.*
1803 Carnot: *Géométrie de position.*

1810 Volumen I de los *Annales* de Gergonne.

1814 Rayas espectroscópicas de Fraunhofer.
1815 Batalla de Waterloo.
1817 Oscilaciones ópticas transversales (Young y Fresnel).
1820 Oersted descubre el electromagnetismo.

1815 Fundación de la «Analytical Society» en Cambridge.
1817 Bolzano: *Rein analytischer Beweis.*

1822 Poncelet: *Traité.* Series de Fourier. Teorema de Feurbach.

1826 Fundación del *Journal de Crelle*. Principio de dualidad (Poncelet, Plücker, Gergonne). Funciones elípticas (Abel, Gauss, Jacobi).
1827 Coordenadas homogéneas (Möbius, Plücker, Feuerbach).
Cauchy: *Cálculo de Residuos*.
1828 Green: *Electricity and Magnetism*.
1829 Geometría de Lobachewsky.
Muerte de Abel a los 26 años.
1830 Peacock: *Algebra*.

1832 Bolyai: *Ciencia Absoluta del Espacio*.
Muerte de Galois a los 20 años.
1834 Steiner profesor en Berlín.
1836 Fundación del *Journal de Liouville*.
1837 *Cambridge* y *Dublin Mathematical Journal*.

1843 Los cuaterniones de Hamilton.
1844 Grassmann: *Ausdehnungslehre*.

1847 Von Staudt: *Geometrie der Lage*.

1852 Chasles: *Traité de géométrie supérieure*.
1854 Riemann: *Habilitationschrift*.
Boole: *Laws of Thought*.
1855 Dirichlet sucede a Gauss en Gotinga.

1863 Cayley profesor en Cambridge.
1864 Weierstrass profesor en Berlín.

1826 Trabajos de Ampère sobre la electrodinámica.

1827 Ley de Ohm.

1828 Síntesis de la urea por Wöhler.
1829 Muerte de Thomas Young.

1830 Lyell: *Principles of Geology*.
Comte: *Cours de philosophie positive*.
1831 Inducción electromagnética de Faraday.
1832 Máquina calculadora analítica de Babbage.

1836 Primer telégrafo.

1842 Ley de Conservación de la Energía (Mayer y Joule).

1846 Descubrimiento de Neptuno (Adams y Leverrier).
Invención de la anestesia.

1848 Marx: *Manifiesto Comunista*.
1850 Dickens: *David Copperfield*.

1858 Cable Atlántico.
1859 Darwin: *Origin of Species*.
Espectroscopía química (Bunsen y Kirchhoff).

1872 Dedekind: *Stetigkeit und Irrationale Zahlen.*
Heine: *Elemente.*
Méray: *Nouveau precis.*
Klein: *Erlanger Program.*
1873 Hermite demuestra que e es trascendente
1874 Cantor: *Mengenlehre.*

1877 Sylvester profesor en John Hopkins.
1881 Gibbs: *Vector Analysis.*
1882 Lindemann demuestra que π es trascendente.
1884 Frege: *Grundlagen der Arithmetik.*

1888 Comienzo de la American Mathematical Society.
1889 Axiomas de Peano.
1895 Poincaré: *Analysis Situs.*
1896 Demostración del teorema de los números primos (Hadamard y De la Vallée-Poussin).

1899 Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.*
1900 Problemas de Hilbert.

1903 Teoría de integración de Lebesgue.

1906 Cálculo funcional (Fréchet).
1907 Brouwer y el intuicionismo.
1910 Publicación del vol. I de los *Principia* de Russell y Whitehead.
1914 Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre.*

1868 Descubrimiento de restos del hombre de Cromagnon.
1869 Apertura del Canal de Suez.
Tabla periódica de Mendeleief.

1873 Maxwell: *Electricity and Magnetism.*

1876 Invención del teléfono por Bell.

1887 Descubrimiento de las ondas hertzianas.
1888 Fundación del Instituto Pasteur.

1895 Descubrimiento de los rayos X (Roentgen).
1896 Descubrimiento de la radiactividad (Becquerel).

1897 Descubrimiento del electrón (J. J. Thomson).
1898 Descubrimiento del radio (Marie Curie).

1900 Freud: *Die Traumdeutung.*
1901 Teoría cuántica de Plank.
1903 Primer vuelo con motor.
1905 Teoría especial de la relatividad (Einstein).

1914 Asesinato del archiduque austriaco en Sarajevo.
1915 Apertura del Canal de Panamá.

1916 Teoría general de la relatividad (Einstein).
1917 Hardy y Ramanujan sobre teoría de números.
1923 Espacios de Banach.

1930 Weyl sucede a Hilbert en Gotinga.
1931 Teoremas de incompletitud de Gödel.
1933 Dimisión de Weyl en Gotinga.
1934 Teorema de Gelfond.
1939 Publicación del vol. I de los *Elements* de Bourbaki.

1955 Algebra homológica (Cartan y Eilenberg).
1963 Paul J. Cohen y la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo.

1966 15.° Congreso Internacional de Matemáticos (Moscú).

1917 Revolución Rusa.

1927 Lindbergh cruza el Atlántico.
1928 Fleming descubre la penicilina.

1933 Hitler nombrado canciller.

1941 Bombardeo de Pearl Harbor.
1945 Bombas atómicas sobre Hiroshima y Nagasaki.
1946 Primera reunión de la ONU.

1963 Asesinato del presidente Kennedy.

1965 Muerte de Sir Winston Churchill.

Indice analítico

Aaboe, Asgor, 231
Abacists, 325, *327f*
Abaco, 261-264
Abd-al-Hamid ibu-Tura, 303, 317
Abel, N. H., 639, 640, 643, 654, 659, 728, 731
— función abeliana, 640
— teorema de Abel-Rufjimi, 639
Aberración, 608
Abraham Ibn Ezra, 326
Abu-al-Hasan, 315n
Abu-Kamil, 298, 269
Abu'l-Welfa, 306, 314
Adam, Charles, 433n, 467
Adelardo de Bath, 324
Agostini, Amedeo, 489
Ahmes, 32, 39, 44, 252
Aiyar, T. V. V., 290
Al-Battani, 308
Albert, Leon Battista, 376
Alberto Magno, 334
Al-Bironi, 247, 272n, 272, 275
Alcuino de York, 322
Alejandro de Afrodisia, 100
Alejandro Magno, 51, 135, 138, 141, 226
Alengry, Franck, 596n, 622
Alexandre de Villedieu, 326
Alexandroff, Paul, 763n, 771
Alfabeto, 71
Algebra abstracta, 709-736
— arábiga, 297-304, 309-312
— babilónica, 54-55, 238, 241, 299
— cartesiana, 427, 438
— china, 258, 267
— egipcia, 37, 55, 62, 67
— europea medieval, 330
— geométrica, 111, 144, 151-156, 235, 427
— griega, 239
— hindú, 284-288
— nombre, 297
— padre de, 235, 238, 297
— renacentista, 354-370
— simbólica, 304, 427
— sincopada, 239, 287, 297, 387
Algorismo, 326, 360
Algoritmo, de Arquímedes, 171
— euclidiano, 157
Alhazeh, 310
— problema de, 310
— *Tesoro de la Optica,* 310
Al-Karkhi, 306, 309, 313
Al-Kashi, 315, 319, 367, 407
Al-Khowarizmi, 297-304, 309, 317, 324, 427
— *Al-jabr,* 296-303
— *De numero indorum,* 296
Allman, G. J., 92, 116
Amir-Moez, A. R., 311n, 316
Ampére, A. M., 654
Análisis, 662, 668
— aritmetización, 685-707
Análisis diofonético, 238, 265, 286-288, 297, 304, 309, 330
Análisis vectorial, 670, 715
Anualitical Society, 669, 710
Anaxágoras de Clamozene, 95, 116, 121
Anderson, Alexander, 407, 484
Angeli, Stefano degli, 484, 547
Angulo, medida de, 60, 211, 280
— medida del radio, 280
Anillo, 731
Antemio de Tralles, 252, 320
— *Sobre los Espejos Ustorios,* 252
Anthonisa, A., 406
Antología griega, 235, 252
Año dorado, de las matemáticas chinas, 266-270
— de la matemática griega, 141-232
— de las matemáticas, 770, 742
Apastamba, 271
Apian, Peter, 360, 379

Apices, 323
«Aplicación de áreas», 112, 152, 174
Apolonio de Perga, 189-208, 215, 226, 230, 235, 243, 248, 252, 304, 335, 349, 350, 390, 408, 436, 453, 579
— *cónicas,* 193-208, 248, 252, 304, 335, 382, 436, 452, 466, 479
— *secciones en una razón dada,* 191
— *Secciones determinadas,* 191
— *Tangencias,* 191, 408
— *Lugares planos,* 190, 437
— *Inclinaciones,* 192
— problemas de, 191, 408
Arago, François, 555, 622
Arato del Sol, 216
Arbin, Emile, 731m
Archibald, R. C., 33n, 41n, 44, 48n, 62n, 162, 774
Area:
— del círculo, 39, 63, 67, 171, 182, 186
— del triángulo, 25, 39, 42, 60, 64
— de la semiesfera, 43
— del cuadrilátero, 39, 64, 67
Area del círculo, 39, 63, 67, 98, 111, 127, 130, 171, 258, 274, 288, 411
— de la circunferencia, 39, 63, 288
— punto-nueve, 657
— osculadores, 204
— cuadratura del, 97, 101, 116, 173, 243, 258, 349, 444, 483
Argand, J. R., 645
Arquímedes de Siracusa, 91, 116, 131, 165-187, 189, 207, 212, 223, 226, 229, 234, 252, 304, 310, 334, 347, 349, 350, 382, 395, 405, 412, 416, 433, 449, 474, 539, 630, 636, 760
— axioma de, 127, 175
— «libro de lemes», 180
— «problema de los bueyes», 181, 286
— «método», 182-186, 214, 227, 377, 450
— «sobre conoides y esferoides», 175, 335
— «sobre el equilibrio de los planos», 167, 183, 186
— «sobre los cuerpos flotantes», 168, 186
— «sobre la medida del círculo», 172, 183, 186, 335, 337
— «sobre la esfera y el cilindro», 177, 183, 186, 252, 335
— «sobre las espirales», 172, 177, 186, 335
— «cuadratura de la parábola», 174, 177, 335, 450
— «El Arenario», 169, 243
— sólidos de, 181, 243
— teorema de la cuerda rota, 182, 211
Arquitas, 95, 97, 103, 52, 82, 116, 119, 121, 125, 135
Aristarco de Samos, 211, 169, 218, 370
Aristeo, 142, 248
Aristóteles, 24, 98, 100, 116, 119-139, 147, 214, 229, 336, 355, 373, 432, 755
Aritmética:
— árabe, 296, 306
— babilónica, 50-54, 227
— china, 260-264
— egipcia, 31-37
— Leyes de, 712, 733, 749
— pitagórica, 82,-91, 237
— hindú, 277-284
— platónica, 123-126, 238
— primitiva, 21
Aryabhata, 270, 273, 283, 310
— «Aryabhatiya», 273, 279
Astronomía, 104, 119, 137, 211-216, 257, 409, 412
— áraba, 305, 314
— china, 257
— de Apolonio, 192, 215, 223
— de Copérnico, 372
— de Eudoxo, 131, 223
— leyes de, 409
— de Hiparco, 215, 223
— de Ptolomeo, 223
— pitagórica, 84
At-Tusi, *véase Nasir Eddin al-Tusi,*
Austin, J. L., 733n
Autólico de Pitania, 137, 142
Averroës, 432
Avicena, 309, 313

Babbage, Charles, 669, 710, 748, 766
Bachet, C. G. de, 444, 446
Bacan, Francis, 385
Bacon, Roger, 319, 334
Baker, H. F., 748n
Ball, W. W. R., 514n, 519, 661n, 710n, 736, 774
Banach, Stefan, 758
— espace, 758, 764
Baravalle, Herman von, 690n
Barraclovgh, June, 596n
Barrett, H. M., 251n
Barrow, Isaac, 487-490, 465, 503, 505, 523
Bartels, J. M., 672
Bayes, Thomas, 618
Bechtalsheim, Lulu, 760n
Becker, O., 131n, 139
Beda el Venerable, 311
Bell, E. T., 230n, 614n, 622, 636, 653n, 674n, 688n, 697n, 698n, 705, 714n, 712n, 721n, 724n, 726n, 730n, 735, 742n, 757n, 770, 773
Beltrami, Eugenio, 675, 679
Berman, W. W., 690n, 694n
Berberian, S. K., 750n
Bergman, H. G., 770

Berkeley, George, 539, 549, 578
Bernays, P., 753n
Bernkopf, Michael, 761n, 770
Bernouilli, Christoph, 531n
Bernoulli, Daniel, 529-533, 553, 559, 571, 574, 596, 685
Bernovlli, Daniel II, 531
Berstein, Jeremy, 766n, 771
Bertrand, J. L. F., 635
Bessel, F. W., 637
Beth, E. W., 771
Betti, Eurico, 745
— números de Betti», 745
Bézout, Etienne, 583, 591, 609
Bhas Kara, 286-289
— «Lilavati», 287
— «Vija-ganita», 287
Bieberbach, L., 750n
Billingsley, H., 348
Binet, J. P. M., 641n
Biot, J. B., 601, 610
Birkhoff, Garret, 731n
Björnbo, A., 101n
Black, Max, 757n, 770
Bobillier, Etienne, 665
Bochenski, I. M., 721n, 737, 771
Bochner, Salomón, 775
Boecio, 250, 236, 253, 319, 321, 327, 333, 336, 355
— aritmética, 238, 250, 322
— geometría, 250
Bolyai, Janos, 674, 693, 747
Bolyai, Wolfgang, 652, 672, 674
Bolzano, Bernhard, 649, 654, 660, 685, 691, 700, 733, 747
Bolzano Weierstrass, teorema, 692
Bombelli, Rafael, 367, 402
— álgebra, 368, 374, 404
Boncompagni, B., 343, 655
Bond, J. D., 373n, 383
Bonda, R., 314n, 549, 582n, 585, 681
Boole, George, 701, 722, 725, 734, 737, 742, 748
— álgebra de Boole, 725
— *Laws of Thought,* 725
Borel, Emile, 758, 764
Borom, L. F., 749
Bortolotti, Ettore, 68n, 374, 383
Bosmans, Henri, 456n, 460
Bosse, Abraham, 454
Bourbaki, Nicolás, 769, 775
Boutroux, Pierre, 461
Bradwardine, Thomas, 338, 343, 352
braquistócrona, 508, 525
Brahe, Tycho, 393, 411
Brahmagupta, 283-287, 293, 297, 299
— «Brahmasphuta Siddhánta», 284
— fórmulas de, 284, 288, 310
Brasch, F. C., 412n, 419
Brassine, E., 461
Braunmühl, Anton von, 231, 419, 775
Brianchon, C. J., 657, 663
— teorema de, 656
Briggs, Henry, 385, 398, 478, 486
Brill, A., 655, 706
Bring, E. S., 543
Broadbent, T. A. A., 725n
Bromwich, T. J., 186
Brouncker, William, 485
Brouwer, L. E. J., 754, 762
Browell, W. R., 605n, 622
Bruins, E. M., 68
Brumbaugh, R. S., 139
Brunelleschi, Filippo, 375
Brunet, Pierre, 569n, 584
Brunschivicg, León, 461
Bubnov, N., 276n, 290
Buffon, G. L. L., Cante de, 573, 584
Buffon-Laplace, «problema de la aguja», 573, 618
Bürgi, Jobst, 385, 400, 404
Burkill, J., 760n
Burlingame, Aune, 622
Busard, H., 343
Bussey, W. H., 458n

Cajori, Florian, 110n, 116, 283n, 316, 328n, 390n, 398n, 419, 458n, 519, 540, 549, 584, 622, 681, 706, 775
Cálculo de variaciones, 530, 598, 615, 761, 766
Cálculos, 497-502, 525, 538, 646
— controversias, 538-539, 604
— diferencial, 439, 488
— descubrimiento de, 495, 499, 502
— funcional, 761
— generalizado, 767
— integral, 176, 183, 416, 441, 479-486
— teorema fundamental de, 444, 485
Cambridge Mathematical Journal, 670
Campano, J., 333, 337, 355
Cantor, Georg, 691, 695, 699,-706, 709, 734, 744, 747, 754, 757, 762
— Cantor-Dedekind, 695
Cantor, Moritz, 332n, 333n, 343, 379n, 489, 588n, 622, 775
Carathéodory, C., 615n
Cardano, Jerónimo, 361-368, 314, 372, 383, 457, 516, 542
— «Ars magna», 361-366
— «De subtilitate», 364
— «Practica arithmetica», 364
Carnot, Lazare, 602-609, 613, 617, 621, 622, 663
— *De la corrélation des figures,* 606

— *Geométrie de position*, 657
— *Reflexions*, 606
Carrus, S., 663n
Carta genealógica de Carnot, 604
Cartan, Henri, 768
Cartografía, 379
Caspar, Max, 419
Casiodoro, 322
Castelnuovo, G., 461, 489
Cataldi, P. A., 486
Catenaria, 414, 477, 525
Cauchy, A. L., 637, 647-654, 662, 698, 720, 733, 761
Cavalieri, Bonaventura, 416-419, 385, 412, 423, 433, 442, 448, 461, 482, 485, 488
— «principio de Cavalieri», 115, 417
— «geometría indivisibilibus», 416, 479
Cayley, Arthur, 711-721, 722, 737
Centro de gravedad, 167, 249, 408, 613
Cera, Giovanni, 546
Cero, concepto de, 39, 277, 285, 287, 356
— nombre, 327
— operaciones sobre, 285, 287
— símbolo, 51, 261, 269, 277, 323, 327
Cesari, L., 760
Ceulen, Ludof van, 407
Chace, A. B., 33n, 44
Chasles, M., 253, 489, 623, 671, 681, 775
Chebichev, P. L., *véase Tchebycheff, P. L.*
Child, J. M., 488n, 489
Chin Chiu-Shao, 267
«Chou Pei», 257
Chuquet, Nicolas, 355, 360, 369, 383
— «Triparty», 355-358
Chu Shih-chiech, 266-269
Cicerón, 115, 179
Cicloide, 448, 459, 473-475, 208, 414, 481
Cifrado, 33, 90, 260, 276
Cipolla, M., 68n
Clagett, Marshall, 92, 121b, 186, 238n, 253, 320n, 331n, 333n, 335n, 339n, 341n, 343, 404n
Clairant, A. C., 570, 578, 652
Clairant le Cadet, 570
Clark, W. E., 274n, 289
Clarke, A. A., 633n, 655
Clarke, F. M., 369n, 383
Clasificación de curvas, 197, 243, 377, 430-433, 485
— definición de, 132, 173, 207, 247
— de doble curvatura, 247
— longitud de las, 249, 411, 433, 450, 460, 481
Clavius, Christoph, 386, 407, 424
Clebsch, Alfred, 669n, 681
Clerke, Agnes M., 389n, 533n
Clifford, W. K., 726
Cohen, J. B., 513
Cohen, M. R., 143n, 162, 187, 231, 235n, 238n, 251n, 253
Cohen, P. J., 747
Colebrooke, H. T., 285n, 290
Collins, John, 500, 501, 503
Colón, C., 225, 277, 358
Color, naturaleza de, 513
Commandino, Federico, 382, 385
Commercium epistolicum, 518
Conant, Levi, 26
Condorcet, M. -J. A.- N. C. de, 590, 592-596, 603, 622
Congresos matemáticos, 746, 754, 763
Congruencia, teoría de, 633
Conoides, 481
Conon de Alejandría, 173
Continuidad, 108, 337, 695, 703, 761
— definición de, 647
— principio de, 409, 452
Convergencia, 484, 523, 545, 547, 548, 561, 614, 687, 698
— convergencia uniforme, 697
Codidge, J. L., 134n, 139, 208, 375n, 376n, 454n, 461, 466n, 469n, 486n, 489, 549, 584, 598n, 659n, 671n, 678n, 681, 775
Coordenadas, 133, 199, 207, 339, 430, 434, 436, 470, 478
— homogéneas, 666, 670
— intrínsecas, 607
— lineal, 666, 678
— polares, 514, 526, 544
Copérnico, N., 370, 372, 84, 212, 224, 306, 314, 355, 380, 401, 673
— teorema de, 372, 466
Cornford, F. M., 125n, 139
Cotes, Roger, 536, 546, 558, 726
Court, N. A., 454n, 658n, 660n
Coxeter, H. S. M., 154n, 208, 329n
Cramer, Gabriel, 532, 584, 540
— paradoja de, 537, 664
— regla de, 540, 583, 641
Crelle, A. L., 645
— *Journal*, 645, 657, 667, 670, 687, 694, 697, 700-701, 715
Cremona, Luigi, 661, 676
Crowe, M. J., 716, 737
Cuadrado mágico, 259, 376
cuadratriz, 102, 136
Cuadratura de las lúnulas, 98, 137, 251
Cuadrilátero, área del, 284, 288
— cíclico, 284, 288, 288, 310
Cuadrilátero completo, 453, 513
Curva logarítmica, 451
Curvatura, 475, 528, 582, 608, 653, 676

— centro de, 204
— radio de, 474, 526

D'Alembert, J. L., 563-574, 577, 582, 590, 595, 605, 646, 651, 674, 684
Dantzig, Tobias, 93, 231
Dautscher, Victor, 706
Darboux, Gaston, 745n
Darwin, Charles, 741, 744, 764
Darwin, G. H., 744
Datta, B., 271n, 290
David, Florence N., 461
Davies, Charles, 622
Davis, H. T., 187
Debeaune, Florimond, 444, 461, 468
Dedekind, J. W. R., 691, 695, 699, 703, 706, 731
— «cortadura», 695, 699
Dedron, P., 310n, 316, 420
Dee, John, 348
Delachet, André, 771
Delambre, J. B. J., 602
Demócrito de Abdera, 38, 95, 114, 116
De Moivre, Abraham, 533-537, 542, 546, 558
De Morgan, Augusto, 328, 458, 711, 722-726, 737
— fórmula de, 726
De Morgan, Sophia, 737
Demostración en matemáticas, 37, 67, 76, 99, 125, 147, 747
Denjoy, Arnaud, 770
«derivada», 614, 646
Desargues, Girard, 423, 451-455, 409, 465
— teorema de, 454
Descartes, René, 202, 207, 247, 312, 382, 408, 423, 441, 444, 448, 451, 453, 461, 465-468, 471, 474, 478, 480, 525, 558, 569, 598, 603, 652, 730, 745, 763
— folium de, 441
— «la geometría», 426-436, 382, 405, 468
— óvalos de, 435
— regla de los signos, 436
De Vries, Hk., 682
De Witt, Jan, 468, 478
Diámetros conjugados, 199, 206
Dianni, Jadwiga, 751n
Dickson, L. E., 159n, 622, 731n, 775
Dicksan, W., 605n, 622
Diderot, Denis, 563, 584
Dieudonné, Jean, 764n, 769, 771
Diferencial, 506, 545, 567, 605, 647
Dijksterhuis, E. J., 167n, 187, 401n, 420
Diller, A., 214n
Dingeldey, F., 208
Dinostrato, 103, 121, 132, 135
Diofanto de Alenadría, 91, 234-242, 247, 249, 252, 297, 304, 309, 330, 386, 404
— aritmética, 235, 238-242, 297, 304, 309, 330, 386, 404
Dionisio Exiguo, 319
Directriz, 207, 249
Dirichlet, test de, 687
Discriminante, del cúbico, 179
— del cuadrado, 299
Distribución, 765
División, babilónica, 53
— egipcia, 36
— de la galera, 282
División harmónica, 201, 453
Dodecaedro, 80, 105, 122, 124, 192
Dodgson, C. L., 726
D'Ooge, M. L., 238n, 254
Drabkin, I. E., 143n, 162, 253, 235, 251n
Drake, Stillman, 415n, 420
Dualidad, 657, 663, 667
Dubbey, J. M., 668n
Dugas, René, 584
Duhamel, J. M. C., 461
Duhem, Pierre, 343
Duillier, N. F. de, 518
Dunningtar, G. W., 631n, 655
Dürer, Albrecht, 374, 376n, 379, 414
Dyukin, E. B., 765n

Easton, Joy B., 369n, 383, 470n
Ebert, E. K., 369n, 383
Ebert, E. R., 369n, 383
Ecfanto, 103
Ecole Normale, 598, 614, 617, 686, 728
Ecole Polytechnique, 598, 602, 614, 617, 621, 642, 645, 657, 662, 671, 681, 690, 696, 728
Ecuación, cuártica, 58, 267, 309, 365
— clasificación de, 56, 431
— cúbica, 57, 179, 241, 330, 358, 361-366, 367, 388, 394, 426, 471
— cuadrática, 55, 81, 144, 152, 159, 191, 240, 284, 297-301, 309, 428
— quíntica, 367
— simultáneas, 258, 241, 259, 267
— Teoría de, 436
Ecuación diferencial, 524, 545, 567-569, 616, 620, 724, 743
— ecuación de Benoulli, 525
— ecuación de Clairaut, 569
— ecuación de Euler, 571
— ecuación de Legendre, 620
— ecuación de Laplace, 620
Ecuante, 224
Edad de plata en la matemática griega, 233-249
Edlestan, J., 549
Edwards, Paul, 725n
Eels, W. C., 22n, 26
Eilenberg, Samuel, 768

Einstein, 755, 766
Eisenstein, 636
Eliminación, 545, 583, 720
La Elipse, 132, 195-208
— área de, 176, 411
El reloj de péndulo, 473-475
Empédocles, 122
Eneström, Gustav, 554n, 584
Engel, Fr., 549, 581n, 584, 674n, 681
Eunques, F., 771
Epiciclo, 193, 223, 314
Eratóstenes de Cirene, 211-215, 225
— «sobre las medidas», 215, 248
— criba de Eratóstenes, 214
Eres, Howard, 59n, 68, 286n, 290, 660n, 706, 776
Erhardt, E. von, 170n
Erhardt, K. von, 170n
Ernst, Wilhelm, 669n, 682
Escritura, cuneiforme, 29
— jeroglífica, 30
— origen de, 23, 29
Escritura cueniforme, 29, 47, 51, 66, 74
Esfera, volumen de la, 177, 184, 273
Espacio vectorial, 752, 761, 765
«Espejo marino de las medidas del círculo», 267
Espiral logarítmica, 433, 487, 525
Estructura matemática, 672, 696, 713, 714, 722, 732, 769
Euclides de Alejandría, 81, 98, 114, 127, 141, 164, 190, 201, 211, 219, 227, 229, 235, 242, 248, 250, 297, 304, 309, 312, 332, 337, 387, 405
—«Datos», 144, 219
— División de figuras, 142, 331, 353
— Elementos, 81, 122, 127, 141-164, 192, 211, 218, 222, 227, 249, 252, 271, 274, 296, 301, 304, 324, 332, 336, 348, 373
— «Optica», 143
— «Porismas», 142, 217, 248
Euclides de Megara, 141
Eudemo de Rodas, 76, 79, 86, 98, 138, 250
Eudoxo de Cnido, 119, 126-132, 138, 156, 192, 211, 230, 558
— axioma de, 127
Euler, Leonhard, 553-568, 569-584, 598, 615, 635, 638, 642, 651, 658n, 675, 694, 743
— *Algebra,* 577
— constante de Euler, 556, 750
— integrales de, 572, 610
— *Introductio,* 558, 580, 598
Eutocio de Ascalon, 135, 179, 183, 196n, 252, 304, 320
Evoluta, 205, 474, 525
Excentricidad, 207
Exponentes, leyes de, 171, 190, 338, 356
— notación, 338, 356, 427
Eymard, P., 630

Fagnano, G. C., 547
Fano, G., 663n, 682
Faulhaber, Johann, 425
Fedel, J., 549
Feldman, R. W., 721n, 737
Fermat, Pierre de, 423, 437-451, 448, 451, 453, 457, 461, 465, 468, 472, 474-476, 479, 488
— último teorema de, 242, 446
— teorema menor, 447, 515
— método de máximos y mínimos, 470
— números de Fermat, 447, 635
Ferrari, Ludovico, 362, 365
Ferro, Scipione del, 363
Feuerbach, K. W., 658
Filolao, 84, 85, 103
Finck, Thomas, 391
Fior, Antonio María, 363
Fladt, K., 208
Fleckenstein, J. O., 531n, 549, 554n
Fluentes, 499, *véase cálculos*
Fluxiones, 669
Foco, 206, 249, 668
Formas, teoría de, 721
Fórmula poliédrica, 162, 426, 652, 745
Fourier, J. B. J., 685, 691, 706, 729
— Serie de Fourier, 686, 692, 698
Fracciones, comunes, 230, 328
— concepto de, 23, 35, 51, 83, 91, 263, 328
— continuas, 486, 616
— Exponente fraccionario, 338, 404, 480
— sexagesimales, 51, 62, 221, 229, 260, 315, 386, 401
— fracciones unitarias, 33, 43, 221, 230, 328
Fraser, A. C., 549
Fraukland, W. B., 162
Fréchet, Maurice, 761
Fredholm, Irar, 761
Freeman, Kathleen, 93, 102n, 116
Frege, F. L. G., 734, 748, 754, 756
Freudenthal, Hans, 458n
Fryde, M. M., 752n
Fryer, K. D., 751n
Función, automorfa, 743
— concepto de, 509, 531, 558, 685, 691
— continua sin tangente, 691
— elíptica, 640, 644, 744
— notaciones, 531, 557
— Teoría de funciones, 637-641, 646, 651, 696
funciones hiperbólicas, 582
funciones simétricas, 388, 516
Furth, Montgomery, 734n, 756n
Fuss, N., 554n, 584

Galileo Galilei, 320, 340, 369, 385, 401, 404, 408, 412, 417, 420, 423, 433, 436, 448-451, 477, 493, 531, 649, 700
Galois, Evariste, 708, 727-730, 736
— teoría de Gelois, 728
Galton, Francis, 763
Gandz, Solomon, 298n, 300n, 316
Ganguli, 272n
Gaultier, L., 664
Gauss, C. F., 627-641, 646, 650-655, 661, 672-676, 681, 693, 699, 715, 729, 733, 742, 747
— «Disquisitiones aritmeticae», 634-636
— curvatura gaussiana, 653
— integrales gaussianos, 732
— plano gaussiano, 688
Gelfond, A. O., 749
Genty, Abbé Louis, 461
Geodesia, 653
Geometría, analítica, 134, 190, 207, 246, 289, 425-441, 469-472, 481
— babilónico, 63, 66, 226
— China, 258, 265
— descriptiva, 592, 597
— diferencial, 651
— egipcia, 29-46, 62, 67, 270
— griega, 129-137, 141-162, 189-208, 242-249
— hindú, 270-275, 283, 288
— europea medieval, 331-341
— moderna, 607, 657-681
— orígenes de, 24, 29, 82, 227
— platónica, 124
— proyectiva, 452-456
— renacentista, 373-382
— sólida analítica, 544, 569
— sólo con compás, 466
geometría hiperbólica, 680
Gerardo de Cremona, 325, 335
Gerberto, 322
Gergonne, J. D., 645, 663-667
— «Annales» de Gergonne, 645, 663
Gerhardt, C. I., 505n, 519
Geroglíficos, 29, 47, 71
Gershenson, 97n
Gibbs, J. W., 714, 763
Gillings, R. J., 36n, 42n, 43n, 44
Gillispie, C. C., 776
Ginsburg, B., 343
Giovanni de Cosali, 339n
Girard, Albert, 385, 388, 394, 405, 516, 565, 631
Glaisher, J. W. L., 360n, 383, 398n, 420, 557n
Gnomon, 85, 301, 308
Gobar de los numerales, 323; *véase numeración árabe*
Gödel, Kurt, 746
— teorema de Gödel, 747
Goldbach, Christian, 566, 576
— conjetura de Goldbach, 576
Goldschmidt, V., 290
Gonometría, 391-395; *véase trigonometría, analítica*
Görland, A., 139
Gow, James, 93, 116
Grandi, Guido, 548
— «rosas de Grandi», 548
Granger, G. G., 595n
Grant, Edward, 336n, 338n, 343
Grassmann, Hermann, 671, 715, 718, 751
Graves, R. P., 713n, 737
Gravitación, ley de, 495, 511, 744
Green, George, 669
— teorema de Green, 669
Greenberg, D. A., 97n
Gregory, David, 484
Gregory de St. Vincent, 443
Gregory, James, 483-487, 490, 493, 499, 506, 508, 517, 539, 577
— la serie de, 484
Gridgeman, N. T., 574n, 619n
Grimsley, Ronald, 564n, 584
Grupo, definición de, 678
— nombre, 728, 730
— teoría de grupos, 616, 678, 728
Gudermenn, Christoph, 697
— gudermenciano, 697
Guggenbuhl, Laura, 44
Guillermo de Moerbeke, 334, 347
Guldin, Paul, 248
— Teorema de, 248

Haar, Alfred, 760
Haas, Karlheinz, 470n, 490
Hadamerd, Jacques, 635, 761
Hall, A. R., 498n, 519
Hall, M. R., 498n, 519
Halley, Edmund, 512, 514, 533
Halmos, P. R., 769n
Hamilton, William Rowen, 693, 709, 713-716, 718, 722, 737, 751
Hankel, Hermann, 693, 696, 716
Harriot, Thomas, 385, 387, 481
Hartman, Stanislaw, 760
Hasicins, C. H., 324
Hansdorff, 762
Heath, T. L., 76n, 77n, 89n, 93, 106n, 117, 127n, 129n, 138n, 139, 146n, 152n, 160n, 162, 168n, 187, 190n, 194n, 202n, 208, 212n, 231, 235n, 241n. 242n, 246n, 248n, 253
Heiberg, J. L., 139, 186, 187
Heidel, W. A., 86n
Heine, H. E., 691, 694-698, 706, 758
— Teorema de Heine-Borel, 758
Helmer, Olaf, 755n, 772

Hemisferio, área del, 43, 177
Henry, Charles, 438n, 461
Hermann, Jacob, 544, 547, 553
Hermann el Dálmata, 325
Hermite, Charles, 655, 690, 705
— teorema de Hermite, 690
Herodoto, 24, 29, 38, 44, 77, 91, 258, 263
Herón de Alejandría, 227-230, 234, 302-303, 331
— *Geométrica*, 228
— fórmula de Heras, 227
— principio de Herás, 229
— *Mecánica*, 229
— *Métrica*, 227
Herschel, John, 710
Heuraet, Heinrich van, 476
Hicetas, 103
Hilbert, David, 746-752, 754, 755, 761, 765, 771
— «Fundamentos de Geometría», 750
— Espacio de Hilbert, 752
— Axiomas de Hilbert, 751
— Curva de Hilbert, 752
— Problemas de Hilbert, 746-750
Hill, G. F., 290, 316, 323n, 343
Hille, Einar, 749n
Hiltebeitel, Adam, 655
Hiparco de Nicea, 203, 215-219, 225, 230
Hipaso de Metapanto, 95, 105-108, 111, 116
Hipias de Ellia, 95, 101, 116, 135, 407
Hipócrates de Chios, 95, 98-101, 129, 137, 145, 155, 211, 215, 251
Hobbes, Thomas, 483
Hobson, E. W., 117, 398n, 691n, 706
Hofmann, J. E., 187, 257n, 265n, 283n, 331n, 349n, 361n, 383, 399n, 420, 519, 527n, 549, 584, 776
Hogben, L., 126n, 230n
Hooke, Robert, 511, 493
Ho Peng-Joke, 265n, 267n, 269n, 290
Hoppe, E., 187
Horner, W. G., 267, 315, 330, 390
Horsley, Samuel, 497n, 519
Hrabanus, Maurus, 322
Hudde, Johann, 469, 486
— «reglas de Hudde», 470
Hughes, Barnabas, 383
Hutsch, F. O., 163, 241n, 254
Huxley, T. H., 741
Huygens, Christiaan, 457, 469, 473-478, 490, 511, 525, 534, 652
— *Horologium oscillatorum*, 475
— Ley de Huygens del movimiento circular, 511
Hypatía, 235, 249, 251
Hyperbola, 135, 179, 195,-208, 244, 311, 409, 438, 470, 477, 486
hiperbeloide, 185, 481
Hypsicles, 161, 216

Ibn-Yunus, 311, 393
icosaedro, 80, 122, 124, 192
Ideal, 731
inconmensurabilidad, 105, 111, 116, 119, 123, 127, 271, 671
Inducción matemática, 457, 734, 747
Infinitesimal, 109, 115, 129, 138, 337, 340, 413, 415, 467, 484, 501, 505, 524, 529, 614, 647, 697
Infinito, 480, 566, 649
— puntos del, 409, 452
— símbolo para, 480, 700
Infinito, cantoriano, 338, 699-706, 747, 754, 757
— procesos infinitos, 52, 109, 115, 138, 407, 409, 481-487, 497, 691
— sucesión infinita, 329, 484
— series infinitas, 341, 467, 470, 485, 493, 503, 507, 524, 528, 535, 548, 559, 650, 685-688, 691
— conjunto infinito, 701-706, 735
Integral, 648, 692
— elíptica, 609, 611, 637, 639
— generalizaciones, 769
— Lebesgue, 757
— Riemann, 687, 691, 759
Interés, compuesto, 54, 275
Interpolación, lineal, 54, 58
— principio de, 480, 483, 496
Intuicionismo, 338, 689, 742, 745, 755, 760
Invariantes, 679, 721, 745, 762
Involuta, 474
Isidoro de Mileto, 162, 252, 320
Isidoro de Sevilla, 322
Isócrono, 473
Isoperimetría, 246
Itard, Jean, 310n, 316, 420, 776
Ivins, W. M., 454n

Jacobi, C. G. J., 640-644, 646, 659, 668, 670, 704, 709, 729
— jacobiano, 643
Jacobo de Cremona, 349
James, Glenn, 777
James, R. C., 777
Jayawardine, S. A., 368n
Jerrard, G. B., 543
Johnson, F. R., 369n
Johnson, R. A., 245n, 284n, 580n
Jones, William, 556
Jordano de Nemore, 331, 387, 404
— «Aritmética», 332
— «De numeris datis», 332, 357
Jourdain, P. E. B., 655, 686n, 701n, 706

Jowett, B., 125n, 139
Juan de Sevilla, 325
Juan Filopón, 320
Jurin, James, 549
Justiniano, 320

Kaestner, A. G., 662, 777
Kagan, V., 673n, 682
Keifer, Albert, 664n
Kakhel, Abdul-Kader, 315n
Kalmus, H., 26
Kargon, Robert, 389n
Karpinski, L. C., 254, 290, 298n, 316, 323n, 331n
Kasir, D. S., 311n, 316
Kaye, G. R., 272n, 290
Keill, John, 518
Kelvin, Lord, 661, 669, 686, 741
Kennedy, E. S., 280n, 309n, 316
Kepler, Johann, 80, 161, 385, 400, 406, 409-412, 416, 420, 452, 493, 662, 666, 767
— leyes de Kepler, 511
Keyser, C. J., 741
King, Amy C., 765n, 771
Kleene, S. C., 754n
Klein, Félix, 589n, 630n, 655, 677-682, 685, 691n, 691, 692n, 706, 728, 737, 746, 762, 772, 777
— «Erlanger Progremm», 680
— «botella de Klein», 680
Kline, Morris, 377n, 778
Klügel, G. S., 662, 777
Knobel, E. B., 231
Knott, C. G., 398n, 420
Kolmogoroff, A. N., 765
Kötter, Ernest, 682
Kowalewski, Gerhard, 562n, 585, 650n
Kronecker, Leopoldo, 704, 706, 731, 742, 754
Kugler, F. X., 68
Kummer, E. E., 731

Lacroix, S. F., 602, 610, 669
Lafon, J. P., 630n
Lagrange, J. L., 590, 592, 598, 601, 610, 613-617, 620, 631, 637, 641, 644, 651, 654, 668, 678, 681, 687, 692, 722, 728, 730, 736
— Multiplicadores de Lagrange, 616
— «Mécanisque», 592, 620
Lahire, Philippe de, 453, 465, 601
Lalouvére, Antoine de, 460
Lambert, J. H., 579, 671, 690
— cuadrilátero de Lambert, 313
Lambo, Charles, 356n, 383
Lamé, Gabriel, 664
Lammert, F., 231
Lanczos, C., 713n
Landau, Edmund, 613n, 688n
Lamder, L. J., 575n
Langer, P. S., 564n, 706
Laplace, P. S., 616-619, 622, 642, 651, 654, 686, 722, 744
— transferencia, 619
— *Mecánica celeste*, 619
«La prueba de los nueve», 283, 309
Larkey, S. V., 369n
La Salle, J. P., 762n, 771
Lasserre, François, 126n, 139
Latham, Marcia L., 429n, 461
Latitud de formas, 339, 413, 436
Lattin, Harriet P., 276n, 290
Latus rectum, 133, 196
Lavoisier, A. L., 592, 595
Lebesgue, Henri, 757-760, 771
Leban, Ernest, 746n, 771
Lee, H. D. P., 110n, 117
Lefrançais, F. L., 602, 603
Lefschetz, Solomon, 762n, 771
Legendre, A. M., 590-594, 598, 610-613, 618, 621, 622, 646, 651, 672, 686, 690
Lehman, Ernest, 466n, 490
Leibniz, G. W., 408, 447, 456, 460, 468, 471, 523, 529, 533, 542, 549, 554, 558, 567, 575, 605, 641, 669, 685, 715, 722, 718
— regla de, 506
— series de, 507
— teorema de, 508
Lejeune, A., 231
Le Lionnais, F., 769n, 770n, 777
Leon, 98
Leonardo da Vinci, 358, 377, 401
Leonardo de Pisa, 326-331, 334
— sucesión de Fibonacci, 329
— «Liber abaci», 328, 355, 357
— «Liber quadratorum», 330
— «Practica geometricae», 331
Leucipo, 115
Levey, Martín, 316
L'Hospital, G. F. A., 528, 543, 545, 569
— regla de, 529
Li Chich, 267
Lie, Sophus, 678
Límite, concepto, 440, 500, 567, 605, 614, 647, 694-696
Lindemann, C. L. F., 690, 694
Líneas normales, 203-205
Liouville, Joseph, 645, 661, 690, 707, 729
— *Journal*, 645, 730
— Teorema de, 689
Listing, J. B., 744
Liu Hui, 265
Lobachewsky, N. I., 671, 676, 693, 709, 727, 747
Loeffler, Eugen, 290

Logaritmos, 54, 171, 311, 395-400, 416, 486
— definición de, 396
— nombre, 398
— de números negativos, 531, 548
— tablas de, 54, 356, 361, 397
Lógica matemática, 510, 734, 742, 748, 754, 770
— Símbolos, 735
Logicismo, 754
Logística, 92, 123, 169, 227
Lohne, J. A., 389n
Loria, Gino, 93, 139, 163, 461, 490, 598n, 682, 690n, 707, 777
Luchins, A. S., 755n, 757n, 772
Luchins, Edith H., 755n, 757n, 772
Luckey, P., 315n, 317

Marfarlane, Alexander, 710n, 711n, 713n, 721n, 725n, 728n, 737
Mackay, J. S., 659n
Maclane, G. R., 762n
Maclane, Saunders, 731n
Maclaurin, Colin, 537-542, 549, 555, 578, 584
Maclaurin, series, 527, 538
— *Treatise of Fluxions*, 538
— *Treatise of Algebra*, 540, 577
Magini, G. A., 386
Mahnke, Dietrich, 519
Manheim, J. H., 692n, 707, 763n, 772
Manitius, K., 231
Mansión, Paul, 669n
Manuscrito de Bakshali, 283
Máquinas calculadoras, 456, 765
Marchand, J. P., 766n
Marie, Maximilien, 654n, 777
Markov, A. A., 765
Marre, Aristide, 356n, 383
Mascheroni, Lorenzo, 467, 660
Matemática babilónica, 48-70
Matemáticas:
— Arábiga, 293-316
— babilónica, 47-68, 97, 234
— bizantina, 251, 320
— china, 257-270
— egipcia, 29-45, 66, 97, 234
— griega, 71-253
— hindú, 270-289
— europea medieval, 319-343
— naturaleza de, 67, 76, 92, 97, 138, 146, 273
— orígenes, 19-26
— romana, 234, 250
— definición, 725, 740
Matrices, 259, 720
Maupertuis, P. L. M. de, 512
Maurolico, Francesco, 374, 381, 385, 457
May, K. O., 716n, 771n
McCormack, T. J., 614n
McCoy, N. H., 732
McDuffee, C. C., 714n, 737
Medias, 86, 214
— aritmética, 244
— geométrica, 86, 101, 104, 244
— armónica, 87, 104, 244
Menecmo, 121, 132-138, 142, 311, 426
Menelao de Alejandría, 216, 242
— *Esférica*, 216
— teorema de, 217, 608
Mengoli, Pietro, 467, 470, 486, 489
Menningor, Karl, 26, 290
Méray, H. C. R., 691, 694, 707
Mercator, Gerard, 380
Mercator, Nicolaus, 485, 500, 506
— series de, 486, 506
Méré, Caballero de, 457
Mersenne, Marín, 423, 425, 433, 441, 444, 450, 484
— Grupo de, 447
Merz, J. T., 654, 706
Meschkowski, Herbert, 545n, 549, 700n, 702n, 724n, 736
Metamatemática, 748
Método de exhausción, 128, 175-178
Método de la falsa posición, 37, 258, 265
Metrodoro, 252
Michel, P.-N., 93, 117, 139
Midolo, P., 187
Midonick, Henrrietta, 726n, 734n, 737, 777
Mikami, Yoshio, 259n, 265n, 290
Mikusinski, J., 760
Miller, G. A., 681n
Mitchell, M. G., 690n
Möbius, A. F., 665, 668, 679, 744
Mohr, Georg, 466, 543
Molk, J., 655
Mouge, Gaspard, 596-605, 606, 621, 657, 663, 668, 681, 686
— «esfera de Mange», 601
Montuna, Etienne, 490, 549, 778
More, L. T., 519
Morehead, James, 655
Morgenstern, Oskar, 767
Moritz, R. E., 778
Morley, S. G., 290
Morrisan, Emily, 767n
Morrison, Philip, 767n
Moschopoulos, M., 321
Motte, Andrew, 500n
Muir, Thomas, 509n, 519, 641n, 655, 777
Mullinger, J. B., 390n
Multiplicación:
— babilónica, 53
— egipcia, 36
— *gelosia*, 281

— hindú, 281
— tablas, 53
Murdoch, John, 342n, 343
Música, 86, 104, 236, 250

Nachbin, Leopoldo, 760, 778
Nagel, Ernest, 631n, 682, 748
Napier, John, 385, 395-399, 402, 486
Napoleón, 589, 604, 616, 620, 658, 686
Nasir Eddin Al-Tusi, 313, 352, 547
— Teorema de, 314, 372, 466
Needham, Joseph, 258n, 264n, 268, 290
Neil, William, 476, 481
— parábola de Neil, 476
Nesselmann, G. H. F., 253
Neugebauer, Otto, 20, 30, 34n, 44, 48n, 59n, 63n, 68, 77n, 79n, 82n, 93, 111n, 117, 169n, 187, 189, 193n, 208, 215n, 228n, 279n
Neusis, 181, 192
Nevanlinna, Rolf, 751n, 772
Newman, J. R., 748, 778
Newsan, C. V., 706, 771
Newsan, Mary W., 514n
Newton, Isaac, 192, 201, 408, 425, 430, 460, 468, 471, 482, 483, 506, 533, 558, 617
— *Arithmetica Universalis,* 517
— *De analysi,* 497, 503, 515
— *De quadratura,* 518
— *Método de Fluxiones,* 449, 514, 578
Nicolás de Cusa, 349, 355, 383
Nicómano de Gerasa, 235-238, 254
— «Introductio Aritmeticae», 237, 238, 250, 321
Nielsen, Niels, 588n
Nieuwentijt, Bernard, 543
Noether, Max, 655, 706
Norlund, N. E., 772
Notaciones, algebraicas, 338, 356, 358, 361, 370, 390, 404, 427, 438, 509, 556
«Nueve Capítulos», 264
Numeración, árabe, 296, 304, 326; *véase numerales hindú-arábigo*
— ática, 88
— babilónica, 50
— bizantina, 321
— china, 260
— decimal, 31, 260, 264, 275, 326, 401
— Devanagari, 306
— hierática, 33, 90
— jeroglífica, 31, 33, 50, 90
— hindú, 275, 321, 326
— jónica, 89, 169, 276
— maya, 277
numeración hierática, 33, 51
numeración Indo-arábiga, 234, 306, 321, 326, 330, 354
Numeración maya, 277
numerales a base de varillas, 261
numeración sexagesimal, 49-54, 222, 239, 251, 289
Número, abundante, 88
— algebraico, 688, 701, 731
— amigo, 88, 304
— cardinal, 735
— concepto, 19, 83, 106
— deficiente, 88
— figurados, 84
— imaginarios, 367, 356, 389
— irracionales, 106, 285, 367, 445; *véase incommesurabilidad*
— irregular, 53, 61, 66,
— misticismo, 82, 103, 124
— negativo, 264, 285, 297, 302, 356, 361, 388, 436, 470
— impares, 23, 88, 237
— perfecto, 88, 157, 159, 237
— primo, 88, 158, 214, 446
— real, 691-696, 702

Obolensky, A. N., 763n
Octaedro, 80, 122, 124
Ohni, Martin, 691
Oldenburg, Menry, 495, 500, 503, 511, 543, 559
Omar Khayyam, 310-314, 316, 358, 361, 426
— *Algebra,* 311, 312
Ore, Oysteiz, 383, 457, 461, 575n, 585, 763n
Oresme, Nicole, 338-343, 349, 355, 411, 416, 436, 451, 467, 480
— *Algorismus proportionum,* 338
— *De latitudinibus formarum,* 341
— *De proportionibus propartionum,* 338
— *Tractatus de figuratione potentiarum,* 341
Organizaciones cienfíficas, 423, 454, 478
Organizaciones matemáticas, 644
Origen deductivo, 111
Origen de la numeración, 22
Osiander, Andreas, 372
Ostrogradsky, Michel, 669, 672
Otho, Valentin, 373, 406
Ougthed, William, 385, 389, 427, 477, 493

Pablo de Alejandría, 273
Pachymeres, G., 321
Pacioli, Luca, 358, 361, 369, 377, 383
— *De divina proportione,* 358
— *Summa,* 358
Palanca, ley de, 166
Papiro de Berlín, 41
Papiro de Kahun, 41
Papiro de Moscú, 30, 41

Pappus de Alejandría, 233, 243-250, 254, 304, 335, 373, 387, 390, 430, 453, 467, 680
— La *Colección*, 243-250, 356, 408, 437
— problemas de Pappus, 243, 191, 426, 430, 438, 513
— Teorema de Papus, 245, 248
— «Tesoro del análisis», 248
Parábola, 132, 179, 194-208, 310, 409, 414, 419, 438, 449, 451, 461, 469, 477
— área de, 174, 183, 252, 448
— focos de, 452,
— longitud de, 450
Paraboloide, 168, 176, 185, 477
Paradoja de Petersburgo, 531
Parámetro, concepto de, 312, 387
Parker, R. A., 44
Parkin, T. R., 575n
Parménides de Elea, 108
Pascal, Blaise, 423, 454-461, 447, 465, 471, 476, 481, 503, 505, 569, 657, 660, 663
— Teorema de Pascal, 455, 538, 657
— Triángulo de Pascal; *véase triángulo aritmético*
Pascal, Etienne, 455
Patterson, B. C., 682
Pawlikowski, G. J., 716n
Peacock, George, 716, 720, 733, 737
— *Algebra*, 711, 723, 737
Peano, Giuseppe, 735, 742, 752
— axioma de, 735, 748, 750
Pearson, Karl, 764
Peet, T. E., 32n
Peirce, Benjamín, 718, 726
Peirce, C. S., 718, 726, 734, 754
Pell, John, 286
— equación de Pell, 181, 241, 286
Pellos, V., 358
Pentágono, 80, 106, 107, 222, 378
Pericles, 96
— época de Pericles, 96, 189
período seleúcido, 47, 65
Perseo, 246
Perspectiva, 359, 375-379, 538
Peters, C. H. F., 231
Peuerbach, G., 352
Pi, naturaleza de, 583, 690
Picard, Emile, 690n, 731n, 772
Piero della Francesca, 377
Pierpoint, James, 655, 683, 698n, 705n, 707, 772
Pincherle, Salvatore, 707
pirámides, 31, 40, 76
— tronco de, 41, 63, 265
Pitágoras, 77-93, 103, 106, 115, 122, 125, 138, 236, 270, 327
— teoremas pitagóricos, 149, 217, 222, 258, 266, 270
— generalizaciones del teorema pitagórico, 245, 304, 331
— tema pitagórico, 62, 88, 125, 270, 288, 445
— pitagóricos, 78-92, 95, 119, 155, 404, 652, 672
Pitiscus, Barthdomaeus, 395
Plano inclinado, ley del, 230, 247, 331
Planudes, M., 321
Platón, 95, 102, 103, 116, 119-139, 229, 236, 401, 423, 597
Platón de Tívoli, 325
Plimpton, colección, 59, 61
Plinio, 76
Plotonick, S. M., 329n
Plücker, Julius, 663-669, 677, 681
Plutarco, 76, 96, 312
Poincaré, Henri, 747, 747, 754, 762, 764
Poisson, S.-D., 655, 729
Poliedro regular, 80, 122, 124, 160
Polígonos, área de, 63
— construcción de, 630, 636
Polígonos estrellados, 337
Polo y polar, 453, 466, 607, 663
Poncelet, V.-V., 658, 661, 666, 671, 681
Posidonio, 225
Postulado de los paralelos, 146, 312, 745, 751
Prasad, Ganesh, 699n, 704n, 707, 721n, 737, 772
Price, D. J., de S., 59n, 61n, 771n
Principio posicional, 50, 54, 57, 91, 261, 275-279
Pringsheim, A., 655
Prior, A. N., 737
Probabilidad, 457, 461, 469, 527, 532, 571, 596, 618, 654, 744, 764
Problema de Delos, 97, 101, 105, 116, 132, 179, 243
Problemas Aha, 37, 45
Proclo, 76, 86, 122, 132, 135, 141, 145, 233, 250, 253
— «Sumario de Eudemo», 250
— Teorema de Proclo, 250
Progresiones geométricas, 37, 62, 157, 288
Proporción, 86, 126, 156, 311, 336, 356, 478
Prostaplairesis, 311, 392, 396, 400
Proyección, mapa, 224
Psellos, M. C., 321
Pseudoesfera, 582, 676
Ptolomeo de Alejandría, 218-227, 233, 242, 249, 284, 306, 324, 350, 355, 393
— *Almagesto*, 218-225, 249, 296, 307, 325, 351
— *Analemna*, 225
— *Optica*, 225
— *Geografía*, 224
— *Tetrabilos*, 226, 233, 295
publicaciones matemáticas, 645
Puissant, L. P., 602
Punto decimal, 358, 386

punto, del infinito, 409, 452, 662, 666
— imaginario, 607, 662, 666

Quadrivium, 104, 119, 121, 321
Quaternions, 715
Quibell, J. E., 31n

Radiac, 280
Rajagopal, C. T., 290, 485n
Ramanujan, S., 289
Ramée, Pierre de la, 373
Ravenstein, E. G., 381n
Recorde, Robert, 347, 368, 371, 383, 389
— *The Whetstone of Witte*, 369
Reducción al absurdo, 99, 130, 160, 175
Reflexión, ley de, 229, 310
Refracción, 225, 310
— ley de, 225
Regiomontano, 349-355, 358, 360, 370, 372, 391, 408, 445
— *Epitome del Almagesto de Ptolomeo*, 352
— *De triangulis omnimodis*, 352
«Regla de Merton, 336, 339
«regla de tres», 36, 258, 274
Reichardt, Hans, 634, 655
Reiff, R., 549, 585
Reinhard, Marel, 609n
Reisch, Greorg, 327, 351
Relatividad, teoría de, 676, 688, 713
Representación gráfico, 339
Rhabdas, Nicholas, 321
Rheticus, G. V., 372, 391
Rhind, Henry, 32
— Papiro Rhind, 32-41, 44, 45
Ricati, Jacopo, 547, 570
Riccati, Vincenzo, 570, 581
Ricci, Michelangelo, 484
Riemann, G. F. B., 675, 688, 692, 698, 727, 745, 749, 757
— «geometría riemanniana», 676
— conjetura de Riemann, 688, 749
— superficies de Riemann, 688, 762
Riese, Adam, 360
Rigaud, S. P., 490
Ritter, Fréderic, 394n, 420
Robbins, F. E., 242n
Robert Grosseteste, 334
Roberto de Chester, 325
Roberval, G. P., 423, 448, 449, 450, 460, 465, 472
Robinson, Abraham, 567n, 647n
Roche, Etienne de la, 357, 368
Rodolfo de Brujas, 325
Roever, W. H., 599n
Rolle, Michel, 544
Roomen, A. van, 394
Rootselaar, B. van, 693n
Rosen, Eduard, 382n
Rosenfeld, B. A., 317
Rosenfeld, L., 471n, 490
Rosenthal, A., 520
Rosenthal, J., 771
Rubin, Herman, 747n
Rubin, Jean E., 747n
Rudolff, Christoph, 360
Russell, Bertrand, 689, 696, 723, 734, 741, 747, 754, 756, 772
— «Principia mathematica», 747
— Antinomia de Russell, 756i
Rutten, M., 68

Saccheri, Girolamo, 547, 672, 676
Sachan, E. C., 272n
Sachs, E. C., 48n, 68
Sacrobasco, 326, 351
Saidan, A. S., 315n, 317
Sanchez Pérez, J. A., 241n, 254, 317
Santillana, Giorgio de, 415n, 420
Sarkar, B. K., 271n
Sartan, George, 63n, 163, 225n, 231, 253n, 272n, 290, 317, 325n, 331n, 343, 350n, 383, 402n, 420, 615n, 645n, 655, 729n, 737, 743n, 778
Saunderson, Nicolas, 577
Sayili, Ajdih, 304n, 305n, 317
Schaaf, W. L., 631n, 655, 778
Schepler, H. C., 406n
Schmid, H. L., 778
Schmidt, Franz, 682
Schooten, Franz van, 469, 476, 477, 490, 493, 498n
Schroeder, L. von, 106n
Schwartz, Laurent, 765
Scott, Charlotte A., 665n
Scott, J. F., 9, 290, 483b, 490
Sebokt, Bislop, 277, 301
Sección áurea, 80, 132, 358
Sección cónica, 132, 193-208, 311, 409, 452-457, 469, 478
— nombres de, 182, 196
Seidel, P. L. V., 698
Seidenberg, Abraham, 23n, 25n, 26
Seno, 272, 279, 289, 307, 352, 373
— ley de senos, 211, 284, 308
— origen del nombre, 326
«Seno verso», 326, 415
«seqt», 40, 46
Sergescu, P., 520
Series, 37, 158, 175, 237, 269, 274
Series armónica, 342, 467, 561
Siddhāntas, 272, 279, 284, 295, 352
Sierpinski, Waclaw, 447n, 752
Simón, M., 349n, 383, 682
Simplicio, 98, 137, 252, 320

Simpson, Thomas, 577
Simson, Robert, 577
Singh, A. N., 271n, 272n, 290
Sistema decimal, 21, 31, 33, 49, 92, 260-264, 275, 402, 593
Sistema vigesimal, 22, 277
Sister Mary Grace, 752n
Sluse, R. F., 471, 487, 490
— perla de Sluse, 471
— regla de Sluse, 471
Smeltzer, Donald, 26
Smith, D. E., 9, 26, 187, 227n, 257n, 265n, 277n, 280n, 283n, 290, 314n, 317, 323n, 331n, 344, 361n, 365n, 383, 402n, 406n, 417n, 420, 429n, 461, 480n, 490, 495, 520, 527n, 534n, 535n, 548n, 549n, 556n, 633n, 655, 658n, 670n, 674n, 682, 690n, 691n, 715n, 729n, 737
Smith, J. W., 394n
Sócrates, 121, 141
Solmsem, F., 139
Sommerville, D. M. Y., 682
Soriba, C. V., 444n, 461, 483n, 490
Soroban, 261
Speidell, John, 399
Spencer, D. E., 716n
Spiess, Otto, 530n, 549
Stäckel, Paul, 549, 560n, 582n, 586, 674, 681
Stahl, W. H., 231, 234n, 254
Stama, E., 337n
Stanton, R. G., 751n
Steele, D. A., 649n, 654
Steiner, Jacob, 659, 664, 668, 671, 704
— puntos de Steiner, 660
Steinhaus, Hugo, 752n
Stevin, Simon, 385, 401, 406, 409, 420, 480
Stieltjes, T. J., 760
Stifel, Michael, 360, 369, 386
— *Aritmética íntegra*, 395
Stirling, James, 534, 537
Stokes, G. G., 651, 698
Stolz, Otto, 655
Stone, M. H., 768n, 772
Strain, Mary, 690n
Struik, D. J., 9, 11, 22n, 26, 241n, 259n, 317, 401n, 402n
Struve, W. W., 43n, 44
Suan-pan, 261
Suidas, 218
Suiseth, Richard, 341
Sullivan, J. W. N., 344, 383
Sulvasūtras, 271
Suma de cubos, 237, 62
Sumerios, 47
Superficie cuédrica, 600, 677
Superficie del área, 43, 249
Suter, Heinrich, 316n, 317
Swift, J. D., 241n, 254
Sylvester, J. J., 709, 718, 742
Szabó, A., 112n, 117, 159n, 163

Tablas cueniformes, 53
Tablas logarítmicas, 53, 355, 361, 395, 400
— multiplicación, 237
— desarrollo y raíces, 65
— refracción, 226
— trigonométricas, 215, 219-223, 280, 308, 391, 416
tablillas de Susa, 63
Tales, 71-77, 82, 91, 95, 98, 111
— teorema de, 66, 75, 217, 222
Tamaño de la Tierra, 131, 170, 211, 225
Tangente, a una curva, 200-205, 435, 440, 444, 448, 455, 471, 488, 497, 501, 505
— trigonométrica, 62n, 308, 353, 372, 582
Tanner, R. C. H., 389n
Tannery, Paul, 93, 109n, 117, 212n, 215n, 231, 273, 433n, 461, 779
Tartaglia, Niccolo, 362, 382
Taton, René, 456n, 601n, 779
Taylor, Brook, 531, 538, 569, 659
— series de, 531, 538, 686
Taylor, Charles, 208
Taylor, Eva, 779
Taylor, R. E., 358n, 383
Taylor, T., 84n
Tchebycheff, P. L., 572, 634, 766
Teeteto, 121, 558
«tensadores de la cuerda», 24, 38, 115, 270
Teodoro de Cirene, 121, 123, 132
Teón de Alejandría, 162, 216, 249
Teón de Esmirna, 238
Teorema binomial, 269, 283, 312, 316, 483, 495, 505
Teorema del coseno, 154
Teorema de números primos, 613, 634
Teorema multinominal, 508
Teoría de conjuntos, 701, 724, 734, 751, 756-765
Teoría de números, 157, 238, 444,-448, 458, 561, 612, 616, 633,-636, 652, 688
«Tesoro del análisis», 190
Tetractis, 83, 103, 238
Tetraedro, 80, 122
Thabit Ibn-Qurra, 304-309, 317, 325
— Teorema de, 305
Thomas, Ivor, 76n, 78n, 93, 117, 163, 187, 208, 231, 248n, 254
Thomas-Stanford, C., 163
Thompson, D. W., 246n, 329n
Thompson, William; *véase Kelvin, Lord*
Thomson, J. O., 231
Thureau-Dangin, Fr., 30, 68
Timeo de Locri, 122

Todhunter, Isaac, 461, 533n, 550, 574n, 586, 779
Toeplitz, Otto, 461, 586
Tomás de Aquino, 334, 338
Topología, 744, 762, 768
Torricelli, Evangelista, 423, 433, 448-451, 460, 471, 484, 488, 499, 525
Towsend, E. J., 750, 771
Transformaciones, 679
— algebraicas, 54, 58, 436, 542, 717
— geométricas, 38, 41, 200, 225, 379, 439, 487, 515, 526, 544, 581, 600, 660, 678, 721
Trapezoide, área del, 39
trayectorias ortogonales, 508
Triángulo, área del, 39, 42, 60, 63, 182, 284
Triángulo aritmético, 269, 312, 316, 361, 380, 457, 504
Triángulo armónico, 504
Triángulo característico; *véase triángulo diferencial*
Trigonometría, analítica, 449, 531, 535, 557, 712
— árabe, 307, 311, 314, 325
— babilónica, 59, 211
— egipcia, 40, 211
— griega, 211-231
— hindú, 273, 279, 289, 325
— nombre, 395
— renacentista, 352, 370, 372
Tropfke, Johanes, 187, 420, 779
Truesdell, L., 585
Tschirnlaus, E. W. van, 542
Tsu Cheng-Chih, 265
Tsu Ch'ung-Chih, 265
Tuller, Annita, 680n
Tung-Li Yuan, 258n
Turnbull, H. W., 420, 461, 484n, 490, 498n, 520, 541n, 550
Twedie, Charles, 537n, 541n, 550

Uhler, H. S., 566n

Vallé-Pousin, L. J. de la, 635
Valsan, C. Z., 655
Vandermande, C. A., 642
Van der Waerden, B. L., 34n, 42n, 43n, 45, 48n, 65n, 69, 77n, 78n, 99n, 109n, 117, 209, 231, 254, 277n, 779
Varahamihira, 272
Varignon, Pierre, 545
Vedamurthi, T. V., 485n
Ver Eecke, Paul, 248n, 249n, 254
Viète, François, 385-399, 400, 405, 437, 471, 484, 493, 509, 516, 542, 558, 711
— «Artis analyticae praxis», 387, 407
— «Canon mathematicus», 386, 391
— «Isagoge», 388
Vitruvio, 234
Vogel, Kurt, 34n, 45, 54n, 62n, 64n, 69, 242n, 317
Vogt, Heinrich, 106n, 163
Voltaire, 165, 511, 518, 564, 590, 595
Volterra, Vito, 745, 772
Von Fritz, Kurt, 106n, 117
Van Koch, Helge, 753, 761
Van Neumann, John, 767
Van Standt, K. G. C., 671, 682
Vorob'ev, N. N., 329n
Vucinich, Alexander, 673n, 682

Wachulka, Adam, 752n
Waismann, Friedrich, 707
Walker, Evelyn, 448n, 449n, 461
Walker, Helen, 533n, 550
Wallner, C. R., 461
Wallis, John, 476-483, 460, 461, 467, 487, 490, 393, 495, 497, 523, 556, 571
— «Aritmetica infinitorum», 476, 479-483, 526
— «Cónicas», 478, 669
— fórmulas de Wallis, 482
Walsh, J. J., 334n
Waring, Eduard, 576, 616, 650
Waters, W. G., 383
Watson, S. J., 609n
Wedberg, A., 139
Weierstrass, Karl, 691-700, 705, 707, 733
Weil, André, 772
Weissenborn, H., 550
Werner, Johannes, 374, 377, 382, 393
— fórmulas de Werner, 393
Wessel, Caspar, 631
Weyl, Herman, 755, 762, 772
Wheeler, N. F., 32n, 45
Whewell, William, 488, 490
Whitehead, A. N., 709, 747, 756
Whiteside, D. T., 488n, 498n, 500n, 519
Widman, J., 360
Wieleitner, Heinrich, 341n, 344, 520, 550, 585, 779
Wiener, Norbert, 767
Wilder, R. L., 772
Williamsan, J. H., 760
Wilson, John, 576
— teorema de, 576, 616
Winter, H. I. I., 290, 300n, 317
Witner, J. R., 365n
Woodhouse, Robert, 615n
Wren, Christopher, 481
Wright, Edward, 381, 399

Xenócrates, 138

Yang, Hui, 267
Yeldham, Florence A., 282n, 290

Young, J. W. A., 691n
Young, Thomas, 31
Youschkevitch, A. P., 257, 290, 317, 344, 780

Zassenhaus, Hans, 633n
Zeller, Eduard, 84n, 93
Zeller, María, C., 253n, 373n, 383, 395n, 420, 780
Zenodoro, 246
Zenón de Elea, 95, 108-111, 116, 119, 121, 138
— paradojas de Zenón, 108, 138
Zermelo, Ernst, 747
Zeuthen, H. G., 106n, 134n, 139, 209, 461, 490, 520, 589n, 780
Ziegler, Konrat, 254