

Modos de Vibración

Son las formas en que una estructura puede vibrar o deformarse cuando se ve afectada por una fuerza externa, y los cuales dependen de su rigidez, masa y distribución de la misma.

$$m \cdot \ddot{u} + k u = 0 \quad \text{Vibración libre sin amortiguamiento}$$

Solución propuesta.

$$u = \phi f(t)$$

$$\dot{u} = \dot{\phi} f(t)$$

$$\ddot{u} = \ddot{\phi} f(t)$$

$$m \phi \ddot{f}(t) + k \phi f(t) = 0 \quad \text{Divido para } f(t)$$

$$m \cdot \ddot{\phi} f(t) + k \phi f(t) = 0$$

$$\left[k + m \frac{\ddot{\phi}(t)}{f(t)} \right] \phi = 0$$

$$\text{Donde: } \frac{\ddot{\phi}(t)}{f(t)} = -\lambda$$

$$\bullet (k - \lambda m) \phi = 0 \quad \bullet \ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0$$

$\phi \neq 0$ este valor no puede ser cero, si este valor sería 0 no habría ninguna forma de vibración o movimiento.

$$\det [k - \lambda m] = 0 \quad \lambda = \text{valores propios.}$$

Para que el sistema tenga soluciones en donde $\phi=0$, el determinante debe ser igual a 0

si la matriz de rigidez es de $n \times n$, la matriz de masas es de $n \times n$
 λ será un polinomio de cuarto grado

Ejemplo:
 Un pórtico plano de dos pisos, tiene las siguientes matrices de rigidez y de masas. Encontrar los valores y vectores propios.

$$K = \begin{bmatrix} 12352 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det [K - \lambda M] = 0$$

$$[K - \lambda M] \Rightarrow \begin{bmatrix} 12352 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{bmatrix}$$

$$[K - \lambda M] \Rightarrow \begin{bmatrix} 12352 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.02 \cdot \lambda & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \cdot \lambda \end{bmatrix}$$

$$[K - \lambda M] \Rightarrow \begin{bmatrix} 12352 - 2.02\lambda & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 - 0.97\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [(12352 - 2.02\lambda)(2100.8 - 0.97\lambda) - (-3983.0)^2] = 0$$

$$25944081.6 - 11981.44\lambda - 4243.616\lambda + 1.9594\lambda^2 - 15864289 = 0$$

$$1.9594\lambda^2 - 16225.056\lambda + 10'084'792.6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(-16225.056) - \sqrt{(16225.056)^2 - 4(1.9594)(10'084'792.6)}}{2(1.9594)}$$

$$\lambda_1 = 676.888$$

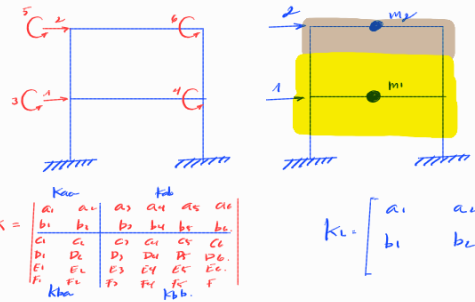
siempre λ_1 es el menor valor.

$$\lambda_2 = \frac{-(-16225.056) + \sqrt{(16225.056)^2 - 4(1.9594)(10'084'792.6)}}{2(1.9594)}$$

$$\lambda_2 = 7603.737$$

Matriz de masas = es una matriz cuadrada diagonal en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

Polinomio de segundo grado debido a que la matriz de rigidez y masa fue 2do grado.



Propiedades Dinámicas

$$\omega_{ni} = \sqrt{\lambda_i}$$

Demostración:

$$m \cdot \ddot{u} + K u = 0$$

vibración libre sin amortiguamiento

$$\frac{m \cdot \ddot{u}}{m} + \frac{K u}{m} = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{K}{m} u = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad \text{por analogía}$$

$$\omega_n^2 = \lambda$$

Continuando con la resolución del ejercicio 6

$$\lambda_1 = 676.8$$

$$\lambda_2 = 7603.737$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\lambda_2}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{676.8}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{7603.737}$$

$$\omega_{n1} = 26.017$$

$$\omega_{n2} = 87.199$$

$$T_{n1} = \frac{2\pi}{\omega_{n1}}$$

$$T_{n2} = \frac{2\pi}{\omega_{n2}}$$

$$T_{n1} = \frac{2\pi}{26.017}$$

$$T_{n2} = \frac{2\pi}{87.199}$$

$$T_{n1} = 0.242 \text{ seg.}$$

$$T_{n2} = 0.072 \text{ seg.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Periodo fundamental.

Modos de Vibración

$$(K - \lambda_m) X = 0$$

Valor propio $\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$ Vector propio

• Cálculo del primer modo de vibración

$$[K - \lambda_1 \cdot M] X_1 = 0$$

Sea X_1 de la forma: $X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y $\lambda_1 = 676.88$

→ número de pisos y al número de GDL.

$$\left[\begin{pmatrix} 12352.0 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{pmatrix} - (676.88) \begin{pmatrix} 2.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 12352.0 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1367.314 & 0.00 \\ 0.00 & 656.581 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12352.0 - 1367.314 & -3983.0 - 0.00 \\ -3983.0 & 2100.8 - 656.581 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ① & 10984.686 \cdot a - 3983.0 \cdot b = 0 \\ ② & -3983.0 \cdot a + 1444.219 \cdot b = 0 \end{cases} \quad \text{sistema linealmente dependiente}$$

siempre tenemos que dar valores a una de las variables.

si $a = 1$ en ① $10984.686(1) - 3983.0(b) = 0$

$$b = \frac{10984.686}{3983.0}$$

$$b = 2.758$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.758 \end{bmatrix}$$

Primer modo de vibración

$$\text{si } b=1 \text{ en } (1) \quad 10984.686 \cdot a - 3983.0(1) = 0$$

$$a = \frac{3983.0}{10984.686}$$

$$a = 0.363$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.363 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al existir un infinito número de vectores propios,
se habla de **vectores propios normalizados**

Vectores propios normalizados.

$\bar{X}$ = Vector propio sin normalizar

ϕ = Vector propio normalizado.

Norma para normalizar.

$$\phi^{(i)T} \cdot M \cdot \phi^{(i)} = R$$

$$\text{Si: } \phi^{(i)} = \mathcal{L}^i \cdot X^{(i)}$$

R = Constante de normalización.

$$\mathcal{L}^i X^{(i)T} \cdot M \cdot \mathcal{L}^i X^{(i)} = R$$

$$\mathcal{L}^i = \sqrt{\frac{R}{X^{(i)T} \cdot M \cdot X^{(i)}}}$$

Ejemplo 2:

Calcular los modos de vibración del ejercicio 1, si la constante de normalización es la unidad $R=1$.

$$\mathcal{L}^i = \sqrt{\frac{R}{X^{(i)T} \cdot M \cdot X^{(i)}}}$$

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{\frac{1}{\begin{bmatrix} 1.0 & 2.758 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.758 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{L}_1 = 0.326$$

$$\phi_1 = \mathcal{L}_1 \cdot X_1 = 0.326 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2.758 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.326 \\ 0.899 \end{bmatrix}$$

● Cálculo del segundo modo de vibración X_2 .

$$[K - \lambda_2 \cdot M] \cdot X_2 = 0$$

Sea X_2 de la forma: $X_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y $\lambda_2 = 7603.737$

$$\left[\begin{pmatrix} 12352.0 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{pmatrix} - (7603.737) \cdot \begin{pmatrix} 2.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 12352.0 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15359.549 & 0.00 \\ 0.00 & 7375.625 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3007.549 & -3983.0 \\ -3983.0 & -5274.82 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad -3007.549a - 3983.0b = 0$$

$$(2) \quad -3983.0a - 5274.829b = 0$$

sistema linealmente dependiente.

$$s^* a = 1 \text{ en } (1)$$

$$-3007.549(1) - 3983.b = 0$$

$$b = -\frac{3007.549}{3983}$$

$$b = -0.755$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.755 \end{bmatrix}$$

Normalizado:

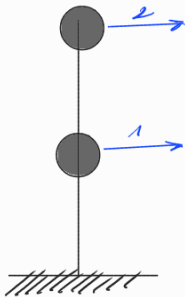
$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{R}{X_2^T \cdot M \cdot X_2}}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & -0.755 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 202 & 0.00 \\ 0.00 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.755 \end{bmatrix}}}$$

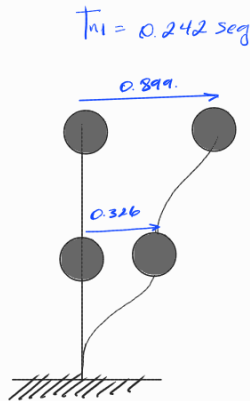
$$\alpha_2 = 0.623$$

$$\phi_2 = \alpha_2 \cdot X_2 = -0.623 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.755 \end{bmatrix}$$

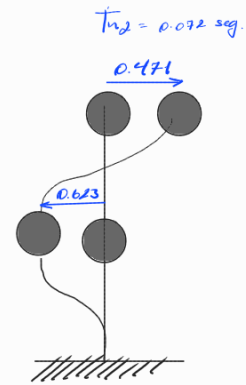
$$\phi_2 = \begin{bmatrix} -0.623 \\ 0.471 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{piso 1} \\ \text{piso 2} \end{matrix}$$



Grados de libertad.



$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.326 \\ 0.899 \end{bmatrix}$$



$$\phi_2 = \begin{bmatrix} -0.623 \\ 0.471 \end{bmatrix}$$

Coordenadas absolutas.

