



Producto punto y Producto cruz



PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ

UNIVERSIDAD MARIANA

**FACULTAD DE INGENIERIA
INGENIERIA DE PROCESOS
2015**



CONTENIDO

1. INTRODUCCION

2. PRODUCTO VECTORIAL

2.1 Definición

2.2 Modulo de un vector

2.3 Angulo de un vector

3. PRODUCTO CRUZ

3.1 Definición matemática

3.2 Propiedades

4. PRODUCTO PUNTO

4.1 Definición matemática

4.2 Propiedades

5. EJEMPLOS

5.1 Ejemplo 1

5.2 Ejemplo 2

5.3 Ejemplo 3

5. BIBLIOGRAFIA



INTRODUCCION

En la ingeniería y para problemas matemáticos y físicos, los productos vectoriales tales como el producto cruz y el producto punto son muy usados para resolver problemas, debido a su capacidad de obtener un vector perpendicular a los otros dos vectores cuyo sentido varía de acuerdo al ángulo formado entre ellos.

Esta magnitud tiene gran importancia en aplicaciones en rotacional o ecuaciones de Maxwell.



Producto Vectorial

“El producto vectorial es una multiplicación entre vectores que da como resultado otro vector ortogonal a ambos. Dado que el resultado es otro vector, se define su módulo, dirección y sentido.”¹

El producto vectorial se puede calcular de dos formas:

- Producto punto
- Producto cruz

Módulo de un vector

El módulo de un vector es un número siempre positivo y solamente el vector nulo tiene módulo cero.

Para calcular el modulo utilizamos la siguiente formula:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Angulo entre dos vectores

Para hallar el ángulo entre dos vectores utilizamos la siguiente formula:

$$\sin \theta = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}$$

1. ANONIMO, Física práctica, <http://www.fisicapractica.com/producto-vectorial.php>



Producto Cruz

El producto cruz determina la matriz que se genera en los vectores, es decir que como resultado tendremos un vector, este solo puede ser usado para vectores en tercera dimensión (3D)

Definición matemática: “ Si $a = \{x_1; y_1; z_1\}$ y $b = \{x_2; y_2; z_2\}$ utilizamos la siguiente formula”

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \mathbf{j}(x_1 z_2 - z_1 x_2) + \mathbf{k}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \{y_1 z_2 - z_1 y_2; z_1 x_2 - x_1 z_2; x_1 y_2 - y_1 x_2\}$$

Propiedades del producto cruz:

- Producto vectorial de dos vectores que no son nulos a y b equivale a cero sólo cuando los vectores son colineales
- Si el vector c equivale al producto vectorial de los vectores a y b , entonces es perpendicular a estos vectores.
- $a \times b = -b \times a$
- $(k a) \times b = a \times (k b) = k (a \times b)$
- $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$



Producto Punto

Se define como producto punto a la multiplicación de los componentes correspondientes y la suma de sus productos, el resultado no es un vector sino un número real, que se denomina escalar.

Definición matemática

“Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores, entonces el

producto punto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que se anota $\vec{a} \bullet \vec{b}$ es el numero real dado por

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

El producto punto de vectores en dos dimensiones se define en forma semejante

$$\langle a_1, a_2 \rangle \bullet \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Propiedades del producto cruz

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores y α y β son escalares entonces

1. $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$; $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$
3. $\alpha \vec{a} \bullet \vec{b} = \alpha (\vec{a} \bullet \vec{b})$ $\vec{a} \bullet \beta \vec{b} = \beta (\vec{a} \bullet \vec{b})$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$



Ejemplos

Ejemplo 1

- ◆ Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

Ejemplo 2

◆ Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo

que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294} u^2$$

Ejemplo 1: Tomado de ANONIMO, Producto cruz, www.vitutor.com

Ejemplo 2: Tomado de ANONIMO, Producto cruz, www.vitutor.com



Ejemplo 3

$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5) \quad \widehat{uv} = 45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{15}$$



BIBLIOGRAFIA

- ANONIMO, Análisis matemático, funciones en varias variables, Paginas 10
- ANONIMO, Introducción a las funciones de varias variables, paginas 9.
- CARREÑO, Héctor ,Producto punto y producto cruz, Universidad Santiago de Chile, Paginas 1, 2, 3 y 4
- THOMAS, George, Calculo de varias variables, Edición undécima, Editorial Pearson (Addison Wesley), Año 2005 , Paginas 656