

A word cloud in the background of the slide, featuring various terms related to mathematics and economics. The words are in different sizes and colors (primarily yellow and green). Visible words include: 'Mathematical', 'economics', 'topology', 'analysis', 'stochastic', 'theoretical', 'existence', 'optimal', 'micro', 'com', 'century', 'good', 'time', 'economic', 'methods', 'agent', 'market', 'game', 'process', 'computable', 'modeling', 'general', 'prediction', 'experience', 'mathematical', 'optimization', 'microeconomic', 'analysis', 'topology', 'coefficient', 'century', 'good', 'time', 'economic', 'methods', 'agent', 'market', 'stochastic', 'theoretical', 'existence', 'optimal', 'micro', 'com', 'century', 'good', 'time', 'economic', 'methods', 'agent', 'market', 'stochastic', 'theoretical'.

Economía Matemática

Tercer semestre

MATRIZ TRANSPUESTA. CONCEPTO

En álgebra lineal, la transpuesta de una matriz $\mathbf{A}$ es otra matriz, denotada como $\mathbf{A}^T$ o $\mathbf{A}'$, que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de la matriz original. Es decir, si la matriz $\mathbf{A}$ tiene dimensiones $m \times n$ (m filas y n columnas), entonces su transpuesta $\mathbf{A}^T$ tendrá dimensiones $n \times m$. El elemento que se encuentra en la i -ésima fila y la j -ésima columna de $\mathbf{A}$ pasa a ocupar la j -ésima fila y la i -ésima columna de $\mathbf{A}^T$.

Formalmente, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$, donde a_{ij} es el elemento en la i -ésima fila y la j -ésima columna de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$.

MATRIZ TRANSPUESTA. CARACTERÍSTICAS

Características:

- **Dimensión invertida:** Como mencioné, una matriz de $m \times n$ se convierte en una matriz de $n \times m$ al ser transpuesta.
- **Elemento intercambiado:** El elemento en la posición (i, j) de la matriz original se mueve a la posición (j, i) en la matriz transpuesta.
- **Transpuesta de una transpuesta:** La transpuesta de la transpuesta de una matriz es la matriz original: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.
- **Transpuesta de una suma:** La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus transpuestas: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$. (Esto solo es válido si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen las mismas dimensiones).

MATRIZ TRANSPUESTA. CARACTERÍSTICAS

- **Transpuesta de un producto escalar:** La transpuesta del producto de un escalar c por una matriz $\mathbf{A}$ es igual al producto del escalar por la transpuesta de la matriz: $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$.
- **Transpuesta de un producto de matrices:** La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden inverso: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. (Esto solo es válido si el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$).
- **Matrices simétricas:** Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es simétrica si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Esto significa que los elementos simétricamente opuestos con respecto a la diagonal principal son iguales ($a_{ij} = a_{ji}$).
- **Matrices antisimétricas (o hemisimétricas):** Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es antisimétrica si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Esto implica que los elementos simétricamente opuestos con respecto a la diagonal principal son opuestos ($a_{ij} = -a_{ji}$), y los elementos de la diagonal principal son cero ($a_{ii} = 0$).

MATRIZ TRANSPUESTA. APLICACIONES

- Cálculo del producto escalar de vectores: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores columna, su producto escalar se puede calcular como $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.
- Formulación de la función de costo en regresión lineal: En el método de los mínimos cuadrados, la función de costo a minimizar a menudo involucra la transpuesta de la matriz de diseño.
- Cálculo de la matriz de covarianza: Para un conjunto de vectores de datos, la matriz de covarianza se calcula utilizando las transpuestas de los vectores centrados en su media.

MATRIZ TRANSPUESTA. APLICACIONES

- Reducción de dimensionalidad (Análisis de Componentes Principales - PCA): La transpuesta de la matriz de datos juega un papel importante en el cálculo de la matriz de covarianza y los autovectores.
- Implementación de filtros en procesamiento de imágenes: En algunas operaciones de convolución, se puede utilizar la transpuesta del kernel del filtro.

PROPIEDADES DE LAS TRANSPUESTAS

1. **La transpuesta de la transpuesta es la matriz original:**

$$(A^T)^T = A$$

Ejemplo:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La transpuesta de A es:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Y la transpuesta de A^T es:

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

PROPIEDADES DE LAS TRANSPUESTAS

2. La transpuesta de la suma de matrices es igual a la suma de las transpuestas:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. La suma de estas matrices es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

La transpuesta de la suma de matrices es:

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Y la suma de las transpuestas de las matrices es:

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS TRANSPUESTAS

3. **La transpuesta de un producto de matrices es el producto de las transpuestas en orden inverso:**

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. El producto de estas matrices es:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 * 5 + 2 * 7 & 1 * 6 + 2 * 8 \\ 3 * 5 + 4 * 7 & 3 * 6 + 4 * 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

La transpuesta del producto de matrices es:

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

Y el producto de las transpuestas de las matrices en orden inverso es:

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

Investigación, consulta, resumen y ejercicios a estudiantes.

