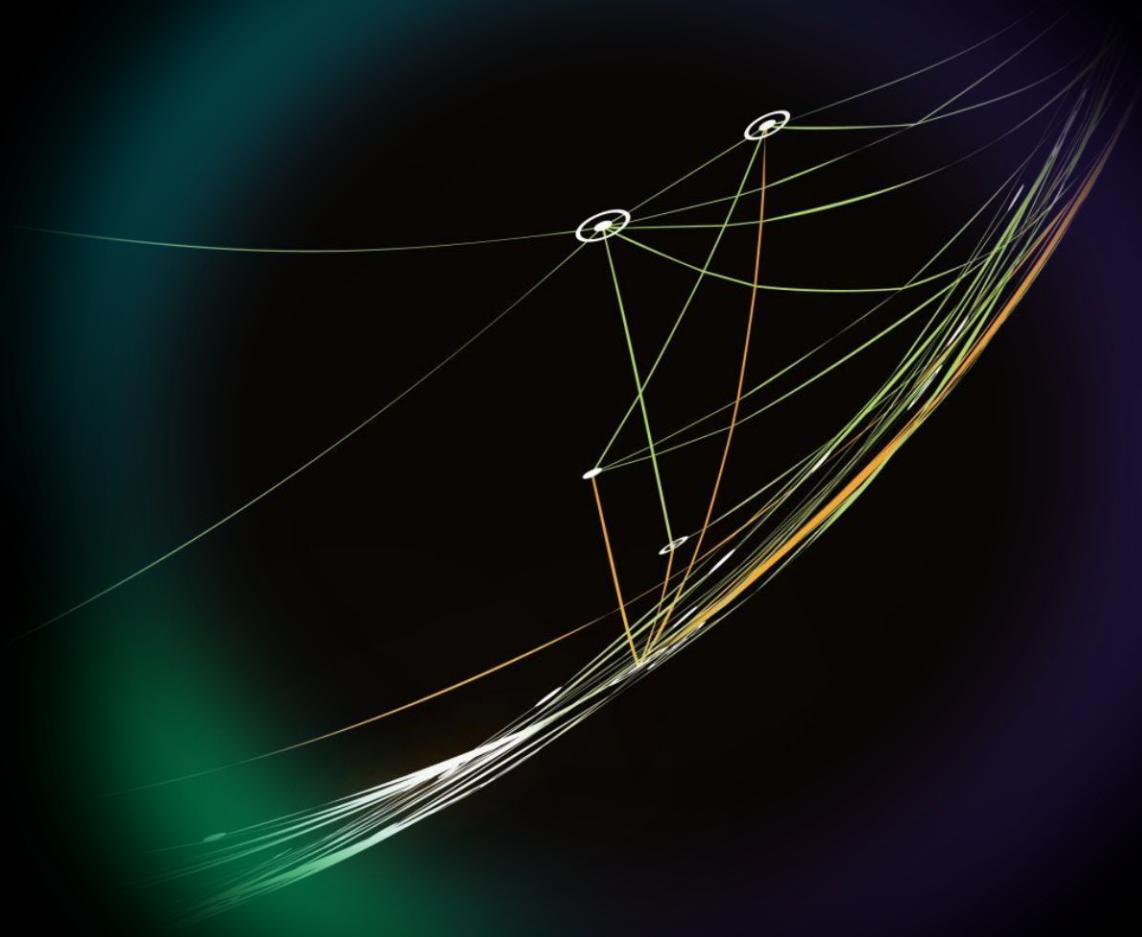


Ecuaciones DE GRADO SUPERIOR



ECUACIONES BICUADRÁTICAS



Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación de cuarto grado que carece de los términos de grado impar se llaman bicuadradas.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a > 0$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0, a > 0$$

Puede realizarse el siguiente cambio $t = x^2$ y obtendremos la siguiente ecuación:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, posteriormente podemos extraer la raíz cuadrada de las soluciones para calcular x .

Ejemplo I

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \longleftarrow \text{Haciendo el siguiente cambio } t = x^2$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \quad \longleftarrow \text{Resolvemos la ecuación de segundo grado}$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} t = 9 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } t = 9, \text{ entonces } t = x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Soluciones de la ecuación

$$\text{Cuando } t = 4, \text{ entonces } t = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo II

$$8x^6 - 63x^3 - 8 = 0 \longleftarrow \text{Haciendo el siguiente cambio } t = x^3$$

$$8t^2 - 63t - 8 = 0 \longleftarrow \text{Resolvemos la ecuación de segundo grado}$$

$$t = \frac{63 \pm \sqrt{(-63)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-8)}}{2 \cdot 8} = \frac{63 \pm \sqrt{4225}}{16} = \frac{63 \pm 65}{16} = \begin{cases} t = 8 \\ t = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Cuando } t = 8, \text{ entonces } t = x^3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Soluciones de la ecuación

$$\text{Cuando } t = -\frac{1}{8}, \text{ entonces } t = x^3 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR



Ecuaciones polinómicas de grado superior (mayor)

Las ecuaciones polinómicas de grado mayor son aquellas que van desde el tercer grado en adelante, que pueden ser expresadas o resueltas con la ecuación polinómica general para un grado cualquiera:

$$a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x^1 + a_0 * x_0 = 0$$

Esta es utilizada porque una ecuación con un grado mayor a dos es el resultado de la factorización de un polinomio; es decir, esta expresada como la multiplicación de polinomios de grado uno o mayor, pero sin raíces reales.

Solución directa - Factorización

La solución de este tipo de ecuaciones es directa, porque la multiplicación de dos factores será igual a cero si alguno de los factores es nulo (0); por lo tanto, se debe resolver cada una de las ecuaciones polinómicas halladas, igualando cada uno de sus factores a cero.

Ejemplo I

Por ejemplo, se tiene la ecuación de tercer grado (cúbica) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$. Para resolverla se tienen que seguir los siguientes pasos:

- Se agrupan los términos:

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x^3 + x^2) + (4x + 4) = 0.$$

Solución directa - Factorización

- Se descomponen los miembros para sacar el factor común de la incógnita:

$$x^2 (x + 1) + 4 (x + 1) = 0$$

$$(x^2 + 4) \cdot (x + 1) = 0.$$

- De esa forma se obtienen dos factores, que deben ser igualados a cero:

$$(x^2 + 4) = 0$$

$$(x + 1) = 0.$$

- Se puede observar que el factor $(x^2 + 4) = 0$ no va a tener una solución real, mientras que el factor $(x + 1) = 0$ sí. Por lo tanto, la solución es:

$$(x + 1) = 0$$

$$x = -1.$$

Solución directa - Factorización

Ejemplo II

$$(2x^2 + 5)(x - 3)(1 + x) = 0.$$

Solución

En este caso la ecuación está expresada como la multiplicación de polinomios; es decir, se encuentra factorizada. Para resolverla se debe igualar cada factor a cero:

$2x^2 + 5 = 0$, no tiene solución. $\rightarrow$

$$2x^2 = -5$$
$$x^2 = -\frac{5}{2}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{5}{2}}$$

Raíces negativas

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3.$$

$$1 + x = 0$$

$$x = -1.$$

$$S = \{3, -1\}$$

Solución por factorización – Método de Ruffini

Un método elemental

Supondremos que la ecuación a resolver tiene la forma $P(x)=0$, donde P es un polinomio de grado mayor o igual que 3.

Resolveremos la ecuación mediante métodos elementales **factorizando** el polinomio, pero para este fin, el polinomio deberá tener al menos una **raíz entera**.

Calculando la raíz, podremos expresar la ecuación como un producto y utilizar el argumento: “***un producto es cero cuando al menos uno de los factores es cero***”.

Por último, resolveremos dos o mas ecuaciones de menor grado al original.

Ejemplo I

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

Método de Ruffini

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
	0	0	1	2	-1	-2	
1		0	0	1	3	2	
	0	0	1	3	2	0	OK, sin residuo
Ecuación	$0x^5 + 0x^4 + 1x^3 + 2x^2 + -1x + -2$						
Solución	$(0x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 3x^1 + 2)$						
Residuo	$0 / (x - (1))$						
Solución Total	$(0x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 3x^1 + 2) + 0 / (x - (1))$						

Ejemplo I

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

Sabemos que las posibles raíces enteras del polinomio son los divisores de su término independiente, por tanto, son candidatos los valores: ± 1 y ± 2 .

Para $x = 1$ se obtiene $1+2-1-2=0$, por tanto es raíz.

Podemos expresar la ecuación como:

$$(x - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$$

Ahora, basta con resolver la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ para obtener las restantes soluciones.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 1$; $x = -2$; $x = -1$

Ejemplo II

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0$$

Método de Ruffini								
	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		
	0	1	3	-1	-3	0		
1		0	1	4	3	0		
	0	1	4	3	0	0	OK, sin residuo	
Ecuación	$0 x^5 + 1 x^4 + 3 x^3 + -1 x^2 + -3 x + 0$							
Solución	$(0 x^4 + 1 x^3 + 4 x^2 + 3 x^1 + 0)$							
Residuo	$0 / (x - (1))$							
Solución Total	$(0 x^4 + 1 x^3 + 4 x^2 + 3 x^1 + 0) + 0 / (x - (1))$							

Ejemplo II

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0$$

En este caso, podemos sacar factor común x . Por tanto, 0 será una de las soluciones de esta ecuación.

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3)x = 0$$

Ahora, deberemos factorizar el polinomio de grado 3, sabiendo que sus posibles raíces enteras son ± 1 y ± 3 (divisores del término independiente). Para $x = 1$

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0$$

Ahora, queda la ecuación $(x^2 + 4x + 3)(x - 1)x = 0$ para obtener las restantes soluciones, resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$