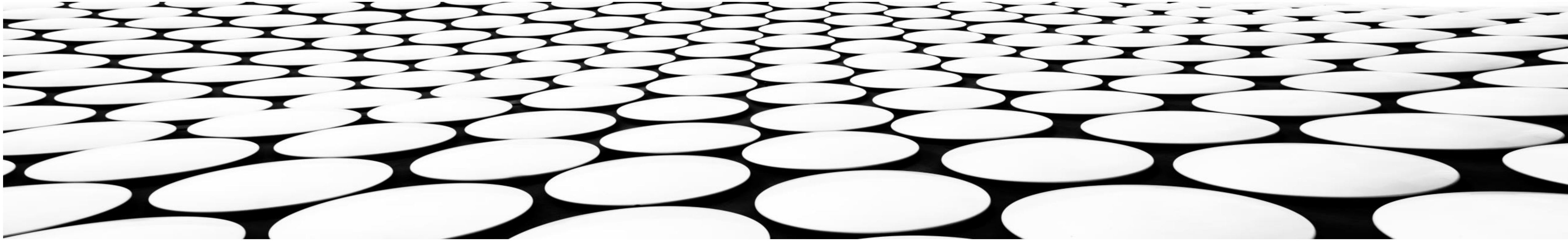
FACTORIZACIÓN

Factorizar o factorar un número o una expresión algebraica significa descomponer dicho número o dicha expresión como producto (multiplicación) de dos o más números o expresiones a los cuales se les llama factores y que al hacer dicha operación nos da como resultado el primero.



FACTOR COMÚN

Se denomina factor común de una expresión algebraica a la expresión que se encuentra como factor en cada término de dicha expresión algebraica.

Por ejemplo, en $bx + by - bz$, b es un **factor común,** ya que es factor de cada término del polinomio.

Este tipo de factorización se emplea cuando todos los términos del polinomio que se quiere factorizar contienen **un término común,** y este término común es precisamente el MCD de dicho polinomio.

FACTOR COMÚN

Ejemplo: factorizar el siguiente polinomio $3xy + 5xz$.

- Se obtiene primero el MCD del polinomio $3\boldsymbol{xy} + 5\boldsymbol{x}z$ que es $\boldsymbol{x}$.
- Se divide el polinomio $3xy + 5xz$ por su MCD, que es x, $\frac{3xy+5xz}{x} = \frac{3xy}{x} + \frac{5xz}{x} = 3y + 5z$.
- Se multiplica el MCD por el resultado del paso anterior y obtenemos lo siguiente:

$$3xy + 5xy = x(3y + 5z).$$

FACTOR COMÚN

En el caso de que la expresión algebraica **tenga más de un factor común**, se considera al mayor factor común que se determina de la manera siguiente: se expresan los siguientes coeficientes numéricos en potencias de primos o el MCD, se toman los factores comunes numéricos y/o literales comunes con menor exponente y se efectúa el producto de dichas potencias. Una vez determinado el mayor factor común, el otro factor de la expresión algebraica es obtenido dividiendo a cada término de la expresión entre dicho mayor factor común.

FACTOR COMÚN

Ejemplo: para factorizar el polinomio $10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 + 30a^4b^3c^2$:

– Se obtiene primero el MCD de los coeficientes numéricos y de las literales del polinomio, entonces tenemos:

$$(2 \times \mathbf{5})\boldsymbol{a^2}b^1\boldsymbol{b^2c^2}c^2 - (3 \times \mathbf{5})a^1\boldsymbol{a^2b^2c^2}c^2 + (2 \times 3 \times \mathbf{5})\boldsymbol{a^2}a^2b^1\boldsymbol{b^2c^2}.$$

– Se toman los factores comunes numéricos y literales comunes, teniendo el factor común o el MCD a $\boldsymbol{5a^2b^2c^2}$.

FACTOR COMÚN

- Se divide el polinomio por su MCD o factor común para obtener el otro factor, se tiene entonces que:

$$\frac{10a^2b^3c^4}{5a^2b^2c^2} - \frac{15a^3b^2c^4}{5a^2b^2c^2} + \frac{30a^4b^3c^2}{5a^2b^2c^2} = 2bc^2 - 3ac^2 + 6a^2b.$$

- Así, tenemos que el polinomio tiene el *factor común* a $5a^2b^2c^2$, entonces:

$$10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 + 30a^4b^3c^2 = (5a^2b^2c^2)(2bc^2 - 3ac^2 + 6a^2b).$$

FACTOR COMÚN

Polinomio	Solución (factor común)
a) $2x^2 - 3xy$	- Se obtiene primero el MCD del polinomio $2x^2 - 3xy$ que es x. - Se divide el polinomio $2x^2 - 3xy$ por su MCD (en este caso es x) $\frac{2x^2-3xy}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{3xy}{x} = 2x - 3y$. - Se multiplica el MCD por el resultado del paso anterior y obtenemos lo siguiente: $x(2x - 3y)$ $\therefore x$ es *factor común.*
b) $ax + bx + ay + by$	- Se obtiene el MCD que son a y b. - Cuando dividimos como corresponde, tenemos $a(x + y) + b(x + y)$. - Vemos que tenemos factor común que es $(x + y)$. - Volvemos a dividir por el factor común para obtener el otro factor, $\frac{a(x+y)}{(x+y)} + \frac{b(x+y)}{(x+y)} = a + b$. Entonces, tenemos que $ax + bx + ay + by = (x + y)(a + b)$.

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – DIFERENCIA DE CUADRADOS

La factorización de la diferencia o resta de cuadrados consiste en obtener la raíz cuadrada de cada término y representar éstas como el producto de binomios conjugados.

Este tipo de factorización se emplea cuando se presenta una diferencia de cuadrados entre dos expresiones algebraicas.

Es decir, cuando se presentan polinomios del tipo: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – DIFERENCIA DE CUADRADOS

Por ejemplo, para factorizar el polinomio $x^2 - 16$:

– Tenemos que representar cada uno de los términos x^2 y 16 como cuadrados, es decir, podemos representar a 16 como 4^2, entonces tenemos que:

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4).$$

Otro ejemplo: factorizar el siguiente polinomio $9x^2 - 36y^2$.

– Tenemos que representar cada uno de los términos $9x^2$ y $36y^2$ como cuadrados, es decir, $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\sqrt{x^2} = (3x)$, de donde $9x^2 = (3x)^2$ y por un procedimiento similar tenemos que $36y^2 = (6y)^2$, entonces:

$$9x^2 - 36y^2 = (3x - 6y)(3x + 6y).$$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Cuando efectuamos los productos $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ y $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, tenemos que $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ es una suma de cubos, de modo que para una suma de cubos se utiliza esta relación:

$$\boxed{x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

Observa la relación de los signos en cada caso.

Y para $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$ que es una diferencia de cubos, se utilizará la relación:

$$\boxed{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Por ejemplo, factoricemos el binomio $x^3 - 8$.

Como $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$, entonces tenemos una diferencia de cubos, de modo que,

$$x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + (x)(2) + 2^2),$$

por tanto:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2).$$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Como $y^3 + 64 = y^3 + 4^3$ es una suma de cubos, tenemos entonces:

$$y^3 + 4^3 = (y + 4)(y^2 - (y)(4) + 4^2).$$

De este modo:

$$y^3 + 64 = (y + 4)(y^2 - (y)(4) + 4^2).$$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Binomios	Solución
a) $8x^6 - 27y^3$	Como $8x^6 - 27y^3 = 2^3(x^2)^3 - 3^3y^3 = (2x^2)^3 - (3y)^3$ es una diferencia de cubos, entonces tenemos: $(2x^2)^3 - (3y)^3 = (2x^2 - 3y)((2x^2)^2 + (2x^2)(3y) + (3y)^2)$. Por lo que $8x^6 - 27y^3 = (2x^2 - 3y)(4x^4 + 6x^2y + 9y^2)$.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS – TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Este tipo de factorización se emplea cuando se presentan expresiones algebraicas del tipo:

$$\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.}$$

Por ejemplo: factoriza el siguiente polinomio $1 + 4y + 4y^2$:

Primero tenemos que representar al polinomio $1 + 4y + 4y^2$ como un trinomio cuadrado perfecto, es decir, de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Si hacemos $a^2 = 1 = (1)^2$, entonces $a = 1$, y haciendo $b^2 = 4y^2 = (2y)^2$, entonces $b = 2y$.

Así, tenemos que $2ab = 2(1)(2y) = 4y$, por tanto:

$$1 + 4y + 4y^2 = (1)^2 + 2(1)(2y) + (2y)^2 = (1 + 2y)^2.$$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS – TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Otro ejemplo: factoriza el siguiente polinomio $9x^4 - 24x^2y + 16y^2$:

Primero tenemos que representar al polinomio $9x^4 - 24x^2y + 16y^2$ como un trinomio cuadrado perfecto, es decir, de la forma $a^2 - 2ab + b^2$.

Si ahora hacemos $a^2 = 9x^4 = (3x^2)^2$, entonces $a = 3x^2$.

Haciendo $b^2 = 16y^2 = (4y)^2$, entonces $b = 4y$.

Así tenemos que $2ab = 2(3x^2)(4y) = 24x^2y$.

Por tanto:

$$9x^4 - 24x^2y + 16y^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(4y) + (4y)^2 = (3x^2 - 4y)^2.$$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS – TRINOMIO CUADRÁTICO

Un trinomio que es el cuadrado de un binomio se llama trinomio cuadrático:

$$(ax^2 + bx + c)$$

donde $a, b, c,$ son reales conocidos y $a \neq 0.$

Se dice que un trinomio es cuadrado perfecto cuando dos de sus términos son positivos y cuadrados perfectos y el tercer término es el doble del producto de las bases de dichos cuadrados, puede ser este término positivo o negativo.

Por ejemplo, para $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ y $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Vemos que el primer término y el último del trinomio constituyen cuadrados perfectos y sus signos son positivos, el término central es el doble producto de las raíces cuadradas de las bases de dichos cuadrados.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS – TRINOMIO CUADRÁTICO

Ahora, podemos decir que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar en términos reales si y sólo si el $b^2 - 4ac$ no es negativo, en caso contrario, el trinomio no se puede factorizar y se dice que es irreducible.

De modo que para obtener los factores se puede proceder de la manera siguiente:

- Se obtiene el número ac.
- Se buscan 2 números m y n tales que $mn = ac$ y $m + n = b$.
- Se expresa el trinomio en términos de m y n, así $ax^2 + bx + c = ax^2 + (m+n)x + mn = ax^2 + mx + nx + mn$ y se factoriza mediante agrupación de términos.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS – TRINOMIO CUADRÁTICO

Veamos un ejemplo: factorizar el trinomio $x^2 + 2x - 15$:

- $ac = (1)(-15)$ y $b = 2$; como $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$ y $64 > 0$, entonces el trinomio se puede factorizar.
- Como $ac = (1)(-15) = -15$, se buscan dos números cuyo producto sea (-15) y su suma sea $b = 2$. Tales números son (-3) y (5) porque $(-3)(5) = -15$ y $-3 + 5 = 2$.
- Vemos que $2x = (-3 + 5)x = -3x + 5x$, se tiene que $x^2 + 2x - 15 = x^2 + 2x - 15 = (x^2 - 3x) + (5x - 15) = x(x - 3) + 5(x - 3) = (x - 3)(x + 5)$.

Por tanto, $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

La *Regla de Ruffini* permite dividir rápidamente cualquier polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$.

Supongamos que queremos dividir al polinomio $3x^3 - x + 11$ por el polinomio $x - 3$. Lo primero que hacemos es reescribir el dividendo añadiendo los términos que faltan, es decir, $3x^3 - x + 11 = 3x^3 + 0x^2 - x + 11$. Aplicando el método se obtiene que:

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

1. Escribir todos los coeficientes del dividendo en orden descendente respecto a las potencias. Para el ejemplo:

$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11}$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & -1 & 11 \end{array}$$

$\boxed{x - 3.}$

2. Escribimos el opuesto del término independiente del divisor, es decir, la constante a, del divisor $x - a$, a la izquierda y un renglón abajo. En el ejemplo:

$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & 11 \\ 3 & & & & \end{array}$$

$\boxed{x - 3.}$

3. Trazamos una línea y bajamos el primer coeficiente:

$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & 11 \\ 3 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

$\boxed{x - 3.}$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

4. Multiplicamos el coeficiente que bajamos por a y lo escribimos bajo el segundo coeficiente. En nuestro caso:

$$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11} \qquad \boxed{x - 3.}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & 11 \\ 3 & & 9 & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

5. Sumar dicho número al segundo coeficiente y escribir el resultado debajo:

$$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & 11 \\ 3 & & 9 & & \\ \hline & 3 & 9 & & \end{array} \qquad \boxed{x - 3.}$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

6. Continuar el procedimiento de multiplicar y sumar hasta llegar al último coeficiente. Para el ejemplo:

$\boxed{3x^3 + 0x^2 - x + 11}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & 11 \\ 3 & & 9 & 27 & 78 \\ \hline & 3 & 9 & 26 & 89 \end{array}$$

$\boxed{x - 3.}$

7. Los números obtenidos 3 9 26 son los coeficientes del polinomio cociente tomados en orden descendente respecto a la potencia y comenzando con un grado menor que el grado del dividendo. El último coeficiente obtenido es el residuo, en este caso, 89. Es decir:

Cociente: $3x^2 + 9x + 26$

Residuo: 89

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

8. Por último, se escribe el resultado en la forma $dividendo = (cociente)(divisor) + residuo$. Para el ejemplo:

$$3x^3 - x + 11 = (3x^2 + 9x + 26)(x - 3) + 89.$$

En resumen, la división sintética es un método corto para dividir polinomios, en donde el divisor es un polinomio de la forma $x - a$. Este método involucra únicamente los coeficientes del dividendo.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

Por ejemplo, para dividir $\frac{2x^3-3x}{x-2}$ se procede como sigue:

	2	0	-3	0	Coeficientes del dividendo
+		4	8	10	
2 ×	2	4	5	10	Resto

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

Entonces, el cociente de la división es $c(x) = 2x^2 + 4x + 5$, y el resto es $r = 10$.

Es así que $2x^3 - 3x = (x - 2)(2x^2 + 4x + 5) + 10$.

En algunos casos es conveniente factorizar los polinomios mediante la regla de Ruffini. Esta regla se aplica en polinomios cuyos factores son de la forma $(x \pm a)$.

Esta regla nos dice que “un polinomio tiene por factor $(x \pm a)$ si al reemplazar el valor x por a en el polinomio, el resultado es cero”. El valor de a de los posibles factores de la expresión es un divisor del término independiente del polinomio.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

Realicemos un ejemplo, de $x^3 - 2x - 1$, como el término independiente es 1 y el único divisor de este número es 1, y además al evaluarlo en el polinomio lo hace cero, $(x-1)$ es un posible factor. Verifiquemos aplicando la regla de la división sintética $\frac{(x^3-2x-1)}{(x+1)}$ como en el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & 0
\end{array}
$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

El cociente de la división es $c(x) = x^2 - x - 1$ y el resto es $r = 0$. En este caso, el dividendo es múltiplo del divisor. También se dice que $(x + 1)$ es un factor de $(x^3 - 2x - 1)$.

Esto es:

$$(x^3 - 2x - 1) = (x + 1)(x^2 - x - 1).$$

Veamos otro ejemplo: encontremos los factores del polinomio $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$. El término independiente 16 tiene por divisor a $1, 2, 3, 4, 8, 16$. Evaluando en el polinomio vemos que sólo con 1 y -4 se hace cero a la expresión, verificamos haciendo la división en forma sintética, entonces:

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16.$$

	1	6	1	-24	16
1		1	7	8	-16
	1	7	8	-16	0
1		1	8	16	
	1	8	16	0	

El cociente de la división es $c(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$ y como el resto es $r = 0$, el dividendo es múltiplo del divisor. Entonces, $(x - 1)$ es dos veces factor de $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

El cociente de la división es $c(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$ y como el resto es $r = 0$, el dividendo es múltiplo del divisor. Entonces, $(x - 1)$ es dos veces factor de $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$.

Ahora probemos con $a = -4$:

	1	8	16
-4		-4	-16
	1	4	0

-4		-4
	1	0

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS – REGLA DE RUFFINI

Verificamos que $(x + 4)$ también es dos veces factor de $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$. De modo que:

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16 = (x - 1)^2\,(x + 4)^2.$$

FACTORIZACIÓN – EJERCICIOS PROPUESTOS

$$(x+1)(3a+1)-2a(x+1)+3(x+1)$$

FACTORIZACIÓN – EJERCICIOS PROPUESTOS

$$\frac{4}{49}a^2b^6 - \frac{1}{16}$$

FACTORIZACIÓN – EJERCICIOS PROPUESTOS

$$25x^2 + 60xy + 36y^2$$

FACTORIZACIÓN – EJERCICIOS PROPUESTOS

$$1 + 12y + 48y^2 + 64y^3$$