

# Productos notables

Se llaman **productos notables** o **productos especiales** a una serie de fórmulas que involucran expresiones algebraicas y que se emplean como una técnica en la simplificación de la resolución de operaciones entre expresiones algebraicas.

# Productos notables

1.	$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Cuadrado de un binomio
2.	$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Diferencia de un binomio
3.	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	binomio con un término común
4.	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	Binomios conjugados
5.	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$	Binomios con término semejantes
6.	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomio al cuadrado
7.	$(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Cubo de un binomio
8.	$(a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Cubo de un binomio
9.	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	Suma de un cubo
10.	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	Diferencia de un cubo
11.	$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$	Producto de dos binomios cualesquiera



# Binomio al cuadrado

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + ba + ab + b^2$$

$$\rightarrow (a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{usando la propiedad conmutativa}$$

$$\rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por tanto, para resolver el problema podemos usar la expresión:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta expresión se denomina **fórmula para calcular el cuadrado de un binomio**.

Un trinomio de la forma  $a^2 + 2ab + b^2$ , se conoce como **trinomio cuadrado perfecto**.

# Binomio al cuadrado

$$(x + 3)^2 =$$

Procedimiento:

Cuadrado del primer término.....  $(x)^2 = x^2$ .

Doble del primer término por el segundo...  $2(x)(3) = 6x$ .

Cuadrado del segundo término.....  $(3)^2 = 9$ .

$$\therefore (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$(4m^2 + 2z)^2 =$$

Procedimiento:

Cuadrado del primero.....  $(4m^2)^2 = 16m^4$ .

Doble del primero por el segundo...  $2(4m^2)(2z) = (8m^2)(2z) = 16m^2z$ .

Cuadrado del segundo.....  $(2z)^2 = 4z^2$ .

$$\therefore (4m^2 + 2z)^2 = 16m^4 + 16m^2z + 4z^2.$$

# Binomio con un término común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ba + ax.$$

Sumamos los términos que tienen un término común que son  $bx$  y  $ax$ :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ba.$$

Y usando la propiedad distributiva en  $bx + ax$  se obtiene:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (b + a)x + ba.$$

Por tanto, el área del rectángulo queda determinada por la ecuación:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (b + a)x + ba$$



# Binomio con un término común

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + 2)(x + 4) &= x^2 + (2 + 4)x + (2)(4) \\ &= x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

$$a = 2 \text{ y } b = 4$$

$$\therefore (x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x - 4)(x + 7) &= x^2 + (-4 + 7)x + (-4)(7) \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$$a = -4 \text{ y } b = 7$$

$$\therefore (x - 4)(x + 7) = x^2 + 3x - 1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (z^2 - 5)(z^2 + 8) &= z^4 + 8z^2 - 5z^2 - 40 \\ &= z^4 + 3z^2 - 40 \end{aligned}$$

$$a = -5 \text{ y } b = 8$$

$$\therefore (z^2 - 5)(z^2 + 8) = z^4 + 3z^2 - 40$$

# Binomios conjugados

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b).$$

Si se efectúa la multiplicación de  $a(a - b)$  y  $b(a - b)$  en el segundo miembro,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Luego, el área del rectángulo es:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



# Binomios conjugados

a)  $(2a + 3b)(2a - 3b)$

Cuadrado del primer término.....  $(2a)^2 = 4a^2$

Cuadrado del segundo término....  $(3b)^2 = 9b^2$

$$\therefore (2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$$

b)  $(4z - 6y)(4z + 6y)$

Cuadrado del primero.....  $(4z)^2 = 16z^2$

Cuadrado del segundo.....  $(6y)^2 = 36y^2$

$$\therefore (4z + 6y)(4z - 6y) = 16z^2 - 36y^2$$

# Binomios con término semejante

$$(b + ax)(cx + d) = ax(cx) + bd + (ax)d + b(cx).$$

Realizando las operaciones y organizando términos obtenemos:

$$(b + ax)(cx + d) = bcx + acx^2 + bd + axd.$$

Sumando los términos semejantes:

$$(b + ax)(cx + d) = (bc + ad)x + acx^2 + bd.$$

Por lo que el área del rectángulo queda expresada por:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd$$



# Binomios con término semejante

a)  $(x + 5)(2x + 3)$

Procedimiento:

$$(x + 5)(2x + 3) = 2x^2 + 3x + 10x + 15 = 2x^2 + 13x + 15$$

$$\therefore (x + 5)(2x + 3) = 2x^2 + 13x + 15$$

b)  $(4x - 2)(x + 7)$

Procedimiento:

$$(4x - 2)(x + 7) = 4x^2 + 28x - 2x - 14 = 4x^2 + 26x - 14$$

$$\therefore (4x - 2)(x + 7) = 4x^2 + 26x - 14$$

c)  $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{2}a - \frac{3}{6}\right)$

Procedimiento:

$$\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{2}a - \frac{3}{6}\right) = \frac{2}{6}a^2 - \frac{3}{18}a + \frac{4}{8}a - \frac{6}{24} = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{2}a - \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}$$

# Trinomio al cuadrado

Un trinomio es una expresión algebraica que consta de tres términos. Elevar un trinomio al cuadrado, por ejemplo, el trinomio  $(a + b + c)$  significa algebraicamente:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c).$$

Realizando la operación tenemos que:

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ ab \quad +b^2+bc \\ \hline ac \quad +bc+c^2 \\ \hline a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \end{array}$$
 es decir,  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

# Trinomio al cuadrado

$$\text{a) } (2x + 3z + 3y)^2$$

Procedimiento:

$$\begin{aligned}(2x + 3z + 3y)^2 &= 4x^2 + 9z^2 + 9y^2 + 2(6xz + 6xy + 9zy) \\ &= 4x^2 + 9z^2 + 9y^2 + 12xz + 12xy + 18zy\end{aligned}$$



# Cubo de un binomio

El cubo de un binomio de la forma  $(a + b)$ , se calcula multiplicando tres veces el binomio por sí mismo:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b).$$

Es decir, si se efectúa la multiplicación de los factores  $(a^2 + 2ab + b^2)$  y  $(a + b)$  obtenemos:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

es decir,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

# Cubo de un binomio

El cubo de un binomio de la forma  $(a - b)$  se calcula multiplicando ese binomio por sí mismo tres veces, algebraicamente:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^2(a - b) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b).\end{aligned}$$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{a - b} \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \underline{- a^2b + 2ab^2 - b^3} \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

es decir,

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# Cubo de un binomio

a)  $(a + 2)^3 =$

Procedimiento:

Cubo del primero.....  $a^3$ .

Más el triple del cuadrado del primero por el segundo....  $3(a^2)(2) = 6a^2$ .

Más el triple del primero por el cuadrado del segundo...  $(3a)(2)^2 = (3a)(4) = 12a$ .

Cubo del segundo.....  $(2)^3 = 8$

$$\begin{aligned}\therefore (a + 2)^3 &= a^3 + 3a^2(2) + 3a(2)^2 + (2)^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8\end{aligned}$$

$$\therefore (a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8.$$

b)  $(3x + 4w)^3 =$

Procedimiento:

Cubo del primero.....  $(3x)^3 = 27x^3$ .

Más el triple del cuadrado del primer término por el segundo....  $3(3x)^2(4w) = 3(9x^2)(4w)$

$$= (27x^2)(4w) = 108x^2w.$$

Más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término.....  $3(3x)(4w)^2 = (9x)(16w^2)$

# Cubo de un binomio

a)  $(a - 2)^3 =$

Procedimiento:

Cubo del primero.....  $a^3$ .

Menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo....  $-3(a^2)(2) = -6a^2$ .

Más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término...  $(3a)(2)^2 = (3a)(4) = 12a$ .

Menos el cubo del segundo.....  $-(2)^3 = -8$

$$\begin{aligned}\therefore (a + 2)^3 &= a^3 - 3a^2(2) + 3a(2)^2 - (2)^3 \\ &= a^3 - 6a^2 + 12a - 8\end{aligned}$$

$$\therefore (a - 2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8.$$

$(3x - 4w)^3$

$27x^3$

$3 (9x^2) (4w) = 108 x^2 w$

$3 (3x) (16w^2) = 144 x w^2$

$64 w^3$

**$27x^3 - 108 x^2 w + 144 x w^2 - 64 w^3$**



## Suma y resta de dos términos al cubo

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

# Suma y resta de dos términos al cubo

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(2x)^3 + (5y)^3$$

$$(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$$

$$(2x)^3 - (5y)^3$$

$$(2x-5y)(4x^2-10xy+25y^2)$$

# Multiplicación de dos binomios

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$