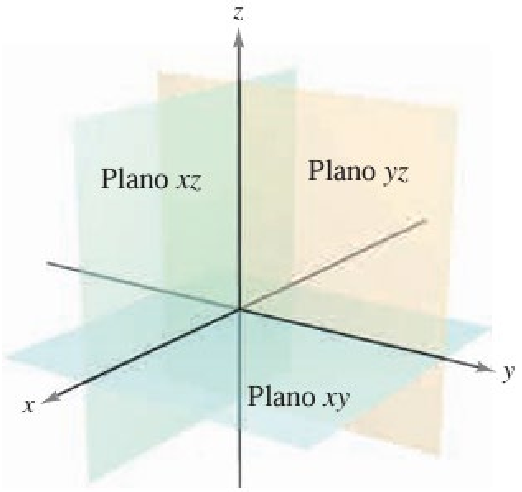
TEMA 8

Vectores en el espacio

Resultado de aprendizaje: *Aplica operaciones con vectores en el plano y en el espacio tridimensional mediante métodos gráficos, analíticos y tecnológicos, para resolver problemas físicos y de ingeniería.*

Representación de vectores en R3

Los vectores también pueden estar representados en tres dimensiones (llamado **espacio R3** o **espacio tridimensional**). Este espacio introduce un eje z perpendicular al plano xy. Tomados por pares, los ejes determinan tres planos coordenados: el plano xy, el plano xz y el plano yz. Estos tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**.

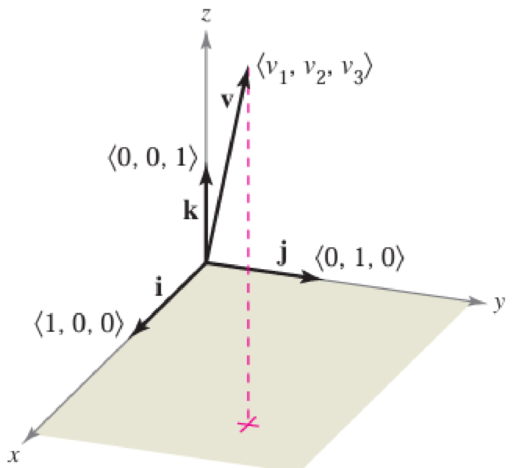


Un vector en R3 se representa mediante sus componentes rectangulares:

$$\vec{A} = (A_x; A_y; A_z)$$

Asimismo, se puede representar mediante sus vectores base, introduciendo un vector unitario $\hat{k}$ que apunte en la dirección del eje $+z$.

$$\vec{A} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})$$



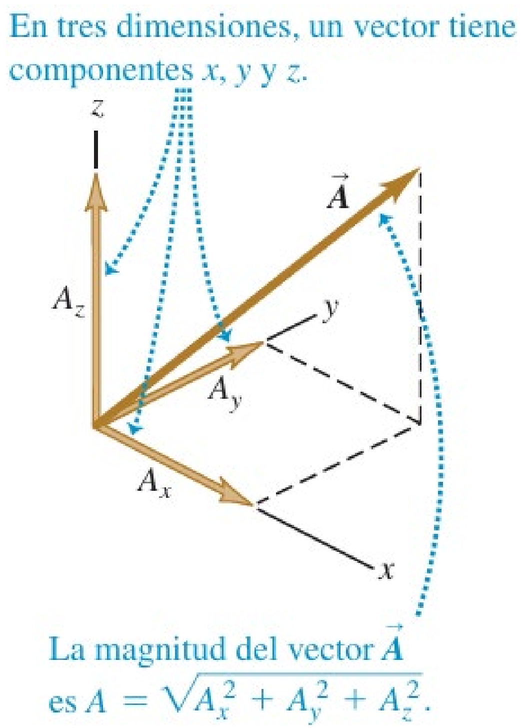
La magnitud de un vector en el espacio está dado por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

En cuanto a la dirección, se toma en consideración los ángulos entre el vector y los tres ejes positivos. En este sentido, se toma en consideración *los cosenos directores*, añadiendo un ángulo gamma (γ) que va dirigido al eje $+z$. De manera que:

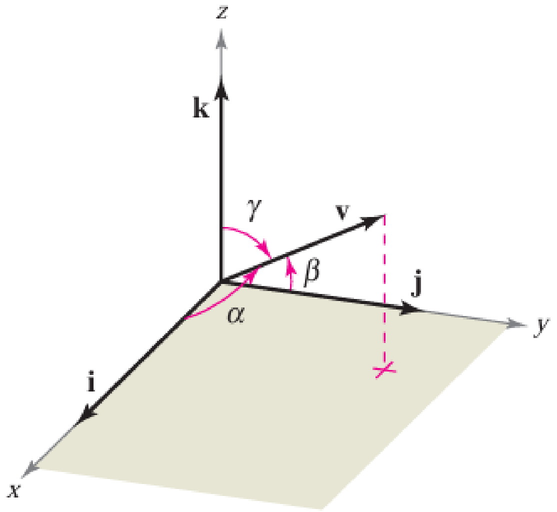
$$\vec{A} = \frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

$$\vec{A} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

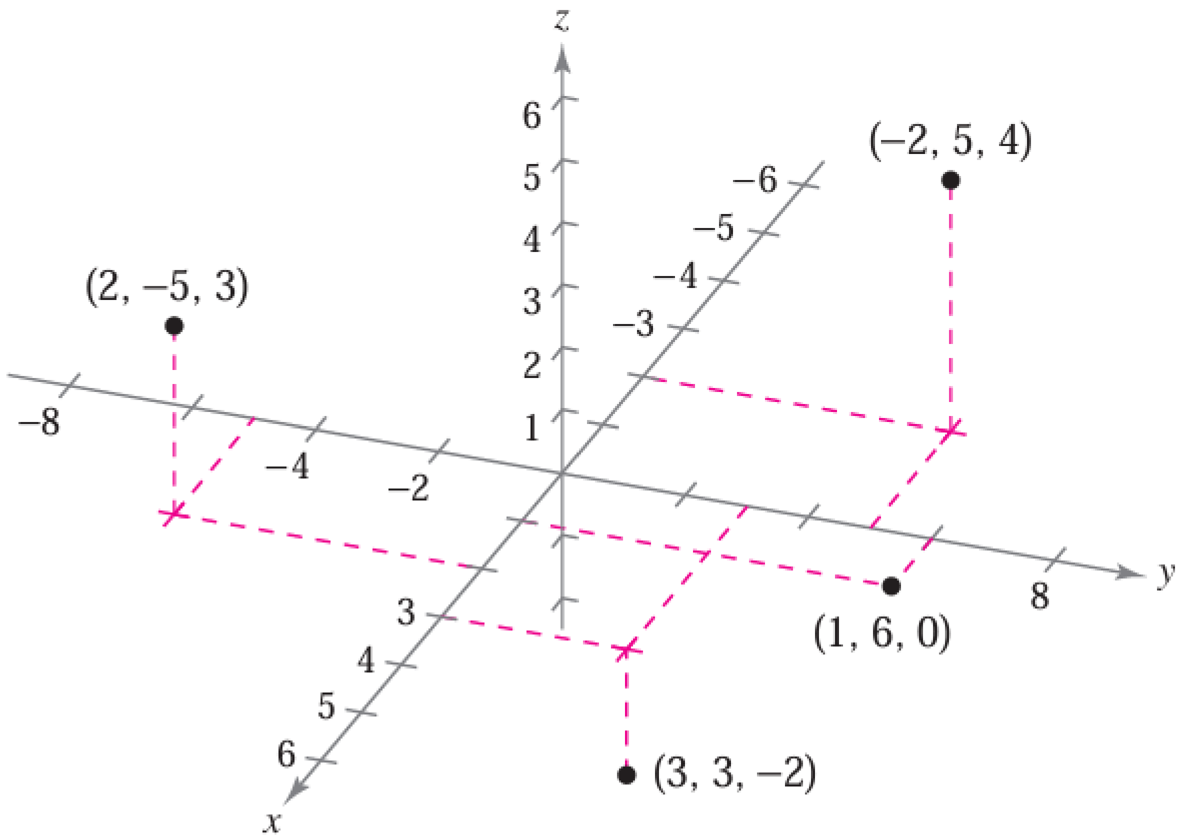


Para la representación gráfica de un vector en R3, se considera:

- x = distancia dirigida que va del plano yz al extremo del vector.
- y = distancia dirigida que va del plano xz al extremo del vector.
- z = distancia dirigida que va del plano xy al extremo del vector.



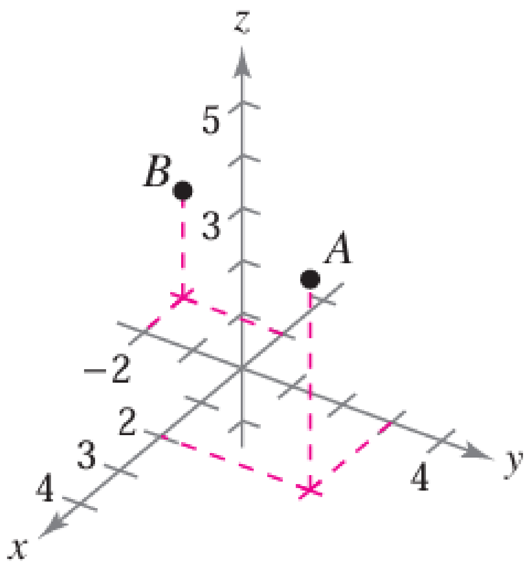
En la figura se ejemplifican varios puntos en el plano R3:



Similar a los vectores en dos dimensiones, se debe asumir que el origen de los vectores es el mismo origen que el sistema de coordenadas, en este caso el punto (0; 0; 0), a menos que se indique lo contrario.

Ejemplo 8.1

(a) Aproxime las coordenadas de los puntos de la figura. (b) Represente los vectores en un mismo sistema de coordenadas tridimensional: i. $\vec{M} = (2; 1; 3)\ cm$; ii. $\vec{N} = (-1; 2; 1)\ cm$; iii. $\vec{O} = (3; -2; 5)\ cm$; iv. $\vec{P} = (1; 4; -2)\ cm$.



Ejemplo 8.2

Considere el vector $\vec{C} = \left(-\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right)km$. (a) Represente gráficamente. Luego, determine: (b) el módulo; (c) los ángulos directores.

Operaciones entre vectores en R3

Considere los vectores $\vec{A} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})$ y $\vec{B} = (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k})$.

Suma y diferencia de vectores: Si $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la resultante entre dos vectores, entonces la suma vectorial se define como:

Suma entre vectores

Componentes de $\vec{A}$

$$\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{B_x})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{B_y})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{A_z} + \boldsymbol{B_z})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Componentes de $\vec{B}$

Producto de un escalar por un vector: Si c es una cantidad escalar, entonces:

Producto de un escalar por un vector:

Componentes de $\vec{A}$

$$\boldsymbol{c}\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{A_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A_y}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A_z}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Cantidad escalar

Producto escalar: El producto punto en R3 da como resultado un escalar; añadiendo el producto entre las componente de $\hat{k}$:

Producto punto entre dos vectores

Componentes de $\vec{A}$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A_x B_x} + \boldsymbol{A_y B_y} + \boldsymbol{A_z B_z}$$

Componentes de $\vec{B}$

Producto vectorial: El producto cruz en R3 da como resultado un vector $\vec{C}$. Se representa mediante una matriz o mediante la ecuación:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Producto cruz entre dos vectores

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{A_y B_z} - \boldsymbol{A_z B_y})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{A_z B_x} - \boldsymbol{A_x B_z})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{A_x B_y} - \boldsymbol{A_y B_x})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Componentes de $\vec{A}$: $A_x; A_y; A_z$ Componentes de $\vec{B}$: $B_x; B_y; B_z$

Ejemplo 8.3

Dados los vectores $\vec{A} = (-1; 5; 2)\ m$ y $\vec{B} = (5; 3; -1)m$, determine: (a)$\vec{A} + \vec{B}$; (b) $\vec{B} - 2\vec{A}$; (c) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; (d) la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$; (e) la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$; (f) $\vec{A} \times \vec{B}$; (g) $\vec{B} \times \vec{A}$; (h) el ángulo formado entre los dos vectores.

Ejemplo 8.4

Dados los vectores $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\ cm$ y $\vec{B} = \left(-2\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right)m$, determine: (a)$3\vec{A} - 2\vec{B}$; (b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; (c) el ángulo formado entre los dos vectores; (d) $\vec{A} \times \vec{B}$.

Actividades en clase

1. Dados los vectores:

$$\vec{A} = (2; 5; -1)\ m$$
$$\vec{B} = (3; -2; 4)\ m$$
$$\vec{C} = (-4; 3; 5)\ m$$

(a) Grafique los tres vectores en un mismo plano.

(b) Determine los módulos. **R.: A=5,48 m; B=5,38 m; C=7,07 m**

(c) Los ángulos directores de $\vec{C}$. **R.: $\alpha = 124{,}5°; \beta = 64{,}9°; \gamma = 45{,}0°$**

(d) Hallar $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}$. **R.: $(-3\hat{\imath}+9\hat{\jmath}+13\hat{k})\ m$**

(e) Hallar $2\vec{A} - 3\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{C}$. **R.: $(-7\hat{\imath}+17{,}5\hat{\jmath} - 7{,}5\hat{k})\ m$**

(f) Hallar $\vec{A} \cdot \vec{B}$. **R.: $-8\ m^2$**

(g) Hallar el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{C}$. **R.: 87,1°**

(h) Hallar $\vec{A} \times \vec{C}$ y $\vec{C} \times \vec{A}$. **R.: $(28\hat{\imath}-6\hat{\jmath}+26\hat{k})\ m^2$; $(-28\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-26\hat{k})\ m^2$**

(i) Hallar la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$. **R.: $(-0{,}53\hat{\imath}-1{,}33\hat{\jmath}+0{,}27\hat{k})\ m$**