Tema 1

El sistema de los números reales y los números complejos

1.1. Introducción

A lo largo de la primera parte de este curso estudiaremos las funciones reales de una variable real, es decir funciones con dominio y rango en el conjunto de los números reales, representado a partir de ahora por $\mathbb{R}$. La mayoría de los conceptos y resultados que vamos a ver son conocidos por vosotros, por ello nuestro objetivo es estudiarlos con mayor profundidad y rigor. Comenzaremos por el estudio de las propiedades de los números reales, en su mayor parte familiares para vosotros. Sin duda, sabéis que se pueden sumar y multiplicar y que hay números reales positivos y negativos. También puedes extraer raíces de números reales positivos y elevar un número real positivo a otro número real. Lo que quizás no sepáis es que todo lo que puedes hacer con los números reales es consecuencia de unas pocas propiedades que dichos números tienen que, además, son muy elementales. En este tema estableceremos dichas propiedades. Serán nuestro punto de partida para todo lo que sigue; constituyen los axiomas del Cálculo.

Sabemos que existe un conjunto no vacío $\mathbb{R}$ de elementos, los llamaremos números reales que satisfacen los 10 axiomas que estudiaremos en la siguiente sección. Estos axiomas se agrupan en tres tipos: *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y *axioma de completitud o del supremo*.

Recordemos que el conjunto de los números reales contiene a otros conjuntos de números:

1. El conjunto de los números naturales: $1, 2, \dots, n, \dots$. El conjunto de los números naturales lo representaremos por $\mathbb{N}$.
2. El conjunto de los números enteros: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. El conjunto de los números enteros lo representaremos por $\mathbb{Z}$.
3. El conjunto de los números racionales que son los de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. El conjunto de los números racionales lo representaremos por $\mathbb{Q}$.

Existen números reales que no son racionales, por ejemplo $\sqrt{2}$, π , y que son llamados irracionales y representados por $\mathbb{I}$.

1.2. Los axiomas de cuerpo

Dados dos números reales, x e y , se pueden definir las operaciones suma, $x + y$, y producto, xy , con respecto a las cuales satisfacen los siguientes axiomas, donde x, y, z representan números reales arbitrarios.

Axioma 1. Conmutatividad: $x + y = y + x$, $xy = yx$

Axioma 2. Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$

Axioma 3. Distributividad: $x(y + z) = xy + xz$

Axioma 4. Existencia de elemento neutro: Existen dos números reales distintos, representados por 0 y 1, tales que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$ y $x1 = x$.

Axioma 5. Existencia de elementos simétricos: Para cada número real x existe otro número real, llamado opuesto de x y representado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

Para cada número real $x \neq 0$ existe otro número real, llamado inverso de x y representado por x^{-1} , tal que $xx^{-1} = 1$.

Notación: Escribiremos $x - y$ por $x + (-y)$ y también $\frac{x}{y}$ por $x(y^{-1})$.

Estos axiomas nos dicen que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo. A partir de ellos se pueden deducir las reglas usuales de la Aritmética (ejercicio 2).

1.3. Los axiomas de orden

En el conjunto de los números reales existe una relación que establece una ordenación de los números reales, $<$, y que satisface los siguientes axiomas:

Axioma 6. Tricotomía: Se verifica una y sólo una de las relaciones $x = y$, $x < y$, $x > y$.

Axioma 7. Si $x < y$, entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, es $x + z < y + z$.

Axioma 8. Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.

Axioma 9. Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$.

Notas 1.3.1. 1.- Utilizaremos $x \leq y$ para abreviar $x < y$ o $x = y$.

2.- Diremos que un número real x es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$.

1.4. El axioma de completitud

Antes de enunciar el axioma de completitud necesitamos, para su adecuada comprensión, introducir algunas notaciones y conceptos.

Definición 1.4.1. Sea A un conjunto de números reales. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$, diremos que b es una cota superior del conjunto A y que A está acotado superiormente por b .

Definición 1.4.2. Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real β se denomina supremo de A si es la menor cota superior de A , es decir, si verifica las dos condiciones siguientes:

1. β es una cota superior de A ,
2. si b es una cota superior de A entonces $\beta \leq b$.

En ese caso escribiremos que $\beta = \sup A$.

Ahora ya podemos enunciar el último de los axiomas.

Axioma 9. Axioma de completitud: Todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene un supremo.

Nota 1.4.3. De manera análoga se pueden introducir los conceptos de cota inferior, conjunto acotado inferiormente e ínfimo.

A partir del axioma de completitud y la definición de supremo se pueden deducir los siguientes resultados.

Proposición 1.4.4. *Sea A un conjunto no vacío de números reales con supremo β . Entonces para todo $a < \beta$ existe $x \in A$ tal que*

$$a < x \leq \beta.$$

Proposición 1.4.5. *El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Proposición 1.4.6. *Sea x un número real. Existe un único número entero n tal que $n \leq x < n + 1$.*

A este número n se le llama parte entera de x y se denota por $[x]$.

La siguiente propiedad es conocida como propiedad arquimediana de los números reales:

Proposición 1.4.7. *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, entonces existe un número natural n tal que $nx > y$.*

Como consecuencia tenemos:

Corolario 1.4.8. *Dado cualquier número real $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.*

1.5. Valor absoluto y desigualdad triangular

El valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se define como el número

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Las principales propiedades del valor absoluto quedan recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:*

- (1) $|x| \geq 0$, y la igualdad se da si y sólo si $x = 0$.
- (2) $|x| \leq y$ si y sólo si $-y \leq x \leq y$.
- (3) $|xy| = |x||y|$.
- (4) *Desigualdad triangular:* $|x + y| \leq |x| + |y|$, y la igualdad se da si y sólo si $xy \geq 0$.
- (5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, y la igualdad se da si y sólo si $xy \geq 0$.

1.6. Principio de inducción matemática

Teorema 1.6.1. [Principio de inducción Matemática]. *Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto de números naturales tal que:*

- (a) $1 \in A$,
- (b) *Si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$.*

Entonces $A = \mathbb{N}$

El Principio de Inducción Matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que si un número natural n satisface la propiedad, entonces también el número $n+1$ la satisface. Es decir, comprobamos que si $P(n)$ es cierta, entonces también lo es $P(n+1)$.

1.7. Intervalos. Topología de la recta real

Definición 1.7.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Llamaremos intervalos acotados a los siguientes conjuntos de números reales:

1. Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
2. Intervalo abierto-cerrado: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
3. Intervalo cerrado-abierto: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
4. Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Los intervalos no acotados se definen de la siguiente forma:

1. Intervalo cerrado no acotado superiormente: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
2. Intervalo abierto no acotado superiormente: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
3. Intervalo cerrado no acotado inferiormente: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
4. Intervalo abierto no acotado inferiormente: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Definición 1.7.2. Sea A un conjunto de números reales.

1. Un número real $a \in A$ es un punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset A$.

El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A y se denota por $\text{int}A$.

2. Un número real $a \in A$ es un punto adherente de A si existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto de todos los puntos adherentes de A se llama clausura o cierre de A y se denota por $\bar{A}$.

3. Un número real $a \in A$ es un punto de acumulación de A si existe $r > 0$ tal que $((a - r, a + r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A' .

4. Un número real $a \in A$ es un punto aislado de A si $a \in \bar{A} \setminus A'$.
5. Un número real $a \in A$ es un punto frontera de A si a es un punto adherente de A y de $\mathbb{R} \setminus A$.
6. Se dice que A es un entorno de a si $a \in \text{int}A$.
7. A se dice abierto si $\text{int}A = A$.
8. A es cerrado si su complemento $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto.

1.8. El cuerpo de los números complejos

Como sabemos, los números complejos surgieron de la necesidad de ampliar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ y $x^2 + 2x + 2 = 0$ no tienen solución en $\mathbb{R}$. ¿Son entonces dichas ecuaciones irresolubles?

Cardano en 1545 se planteó el siguiente problema: Dado un segmento de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un área de 40 unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano

operó formalmente: Sea x la longitud de una división y $10 - x$ el de la otra. Entonces,

$$(10 - x)x = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 + \sqrt{-15}, x_2 = 5 - \sqrt{-15}.$$

Además, formalmente verificó la solución:

$$A = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.!!!!$$

Es decir que la solución venía dada por una raíz de un número negativo. Tales soluciones se denominaron imposibles o imaginarias.

Existen múltiples definiciones de número complejo, todas ellas equivalentes. Quizá la más cómoda sea la de Hamilton¹, que utiliza la representación de Wessel, Argand y Gauss de los números complejos como puntos del plano, puntos que en tal caso se llaman los *afijos* de los números complejos correspondientes. Esta es la definición que adoptaremos. Con unas operaciones de suma y producto adecuadas, daremos al conjunto de los números complejos una estructura algebraica de cuerpo, la cual es una extensión de la estructura de cuerpo de los números reales. Recordemos que en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales ya había definidas dos operaciones naturales de suma y producto, que lo dotaban de estructura de cuerpo.

Asimismo, recordemos que un cuerpo es una terna $(X, +, \cdot)$, donde X es un conjunto con al menos dos elementos y $+, \cdot$ son dos operaciones internas en X , de modo que $(X, +)$, $(X \setminus \{0\}, \cdot)$ —donde 0 denota el elemento neutro de $(X, +)$ — son grupos conmutativos y se da la ley distributiva $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Teorema-Definición 1.8.1. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y definamos en él las siguientes operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Con tales operaciones, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un cuerpo, que se denota por $\mathbb{C}$ y se denomina cuerpo de los números complejos.

Notemos que el elemento neutro para la suma es $(0, 0)$. El elemento unidad, o elemento neutro para el producto, es $(1, 0)$. El elemento opuesto de $z = (a, b)$ para la suma es $-z = (-a, -b)$. El elemento simétrico o inverso para el producto es $z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$, si $z \neq 0$. La *diferencia* de dos números complejos z y z' se define como $z - z' = z + (-z')$, y su cociente como $\frac{z}{z'} = z \cdot z'^{-1}$, esto último si $z' \neq 0$.

Podemos identificar a con $(a, 0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Por tanto, podemos considerar $\mathbb{R}$ como un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Definición 1.8.2. Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, su *parte real* es $\operatorname{Re} z := a$, y su *parte imaginaria* es $\operatorname{Im} z := b$. La *unidad imaginaria* es el número $i := (0, 1)$. El número z se dice *imaginario puro* cuando $\operatorname{Re} z = 0$.

Podemos expresar cada complejo $z = (a, b)$, que está escrito en forma *cartesiana*, en la forma *binomial* $z = a + bi$. En efecto, $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$. Notemos que, con esta notación, tanto i como $-i$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Además, ya que $x^2 + 1$ tiene grado 2, teniendo en cuenta la Regla de Ruffini, se deduce que $\pm i$ son las únicas soluciones.

Recordemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, es decir, existe una relación binaria “ $<$ ” sobre $\mathbb{R}$ compatible con las operaciones de suma y producto. Sin embargo, $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado² (ver ejercicio 10).

Una consecuencia importante del resultado anterior es que, en demostraciones que afectan a números complejos, no se puede trabajar con desigualdades, a no ser que nos aseguremos de que las estamos aplicando sólo a números reales.

Recordemos que $\mathbb{C}$ tiene también estructura de *espacio vectorial* bidimensional sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto por escalares, definido este último como: $\lambda \cdot z = (\lambda a, \lambda b)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Por

supuesto, $\mathbb{C}$ también tiene estructura de espacio vectorial sobre sí mismo, y en tal caso tiene dimensión 1.

Introducimos a continuación dos conceptos, ambos de fácil interpretación geométrica y de amplia aplicación.

Definición 1.8.3. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. El *conjugado* de z es $\bar{z} = a - bi$. El *módulo* o *valor absoluto* de z es $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Es evidente que el módulo de z representa su distancia al origen, mientras que $\bar{z}$ representa el punto simétrico de z con respecto al eje real, la recta representativa de $\mathbb{R}$. Por eje imaginario entendemos la recta representativa de los números imaginarios puros. En los dos teoremas siguientes, reunimos algunas propiedades de la conjugación y del módulo.

Teorema 1.8.4. Se verifica $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.8.5. Sean $z, w, z_1, \dots, z_N, w_1, \dots, w_N \in \mathbb{C}$, donde $N \in \mathbb{N}$. Se verifica:

- (a) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
- (b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
- (c) $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$,
- (d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- (e) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$,
- (f) $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$,
- (g) (Desigualdad triangular) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
- (h) (Desigualdad triangular inversa) $|z - w| \geq ||z| - |w||$,
- (i) $\left| \sum_{i=1}^N z_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |z_i|$,
- (j) (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\left| \sum_{i=1}^N z_i \cdot w_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N |w_i|^2 \right).$$

Seguidamente, vamos a establecer el concepto de argumento de un número complejo $z \neq 0$. Geométricamente, el argumento de z es el ángulo orientado, a partir del semieje real positivo, que forma este con el radio-vector que une el origen con el afijo de z . A continuación, daremos formalmente el concepto analítico de argumento.

Definición 1.8.6. Un número $\theta \in \mathbb{R}$ se dice que es un *argumento* del número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, en cuyo caso denotaremos $\arg z = \theta$, cuando $x = |z| \cos \theta$, $y = |z| \operatorname{sen} \theta$.

Es evidente que dos argumentos α, β de un mismo número complejo se diferencian en un múltiplo entero de 2π . Simbolizaremos este hecho mediante $\alpha = \beta \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$. Recíprocamente, si $\beta \in \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$ y α es un argumento de z , entonces β también lo es. En este sentido, se debe pensar en el argumento de un número complejo como un conjunto de números, más que como un único número. Por tanto, conviene destacar uno de tales argumentos para cada z , de entre los infinitos que hay.

Definición 1.8.7. Llamamos *argumento principal* de z , que se denotará por $\arg_p z$, al único argumento de z que está en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

La siguiente definición de exponencial de un número imaginario puro es debida a Euler.

Definición 1.8.8. Si $t \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial imaginaria* como

$$e^{it} = \exp(it) := \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

Esta definición tiene la ventaja de que se cumple la ley de adición: $e^{i(t+u)} = e^{it}e^{iu}$ ($t, u \in \mathbb{R}$), como es fácil comprobar a partir de las fórmulas de seno y coseno de una suma. Notemos también que $|e^{it}| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De hecho, la expresión $z = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) proporciona una descripción paramétrica de los puntos de la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r = |z|$ y θ es cualquier argumento de z , se tiene

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}.$$

A cualquiera de estas dos expresiones se la llama *forma trigonométrica* del número complejo z . La expresión más compacta $z = re^{i\theta}$, hoy en desuso, se llama *forma polar* de z . Como veremos en el siguiente resultado, de fácil demostración, la forma trigonométrica es muy útil para efectuar las operaciones de multiplicación, división y potenciación. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, denotaremos por $A + B$ el conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$. Recordemos que, salvo que se especifique un valor concreto, $\arg z$ debe entenderse como un conjunto de números reales.

Proposición 1.8.9. Sean $z = Re^{i\alpha}$, $w = re^{i\beta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Se verifica:

- (a) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.
- (b) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.
- (c) $zw = (Rr)e^{i(\alpha+\beta)}$.
- (d) $z/w = (R/r)e^{i(\alpha-\beta)}$.
- (e) (Fórmula de De Moivre) $z^m = R^m e^{im\alpha}$.

Para la potenciación también puede usarse la fórmula del binomio de Newton: si $z = x + iy$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $z^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot y^j \cdot i^j$. Ahora basta tener en cuenta que las únicas potencias distintas de la unidad imaginaria son $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$.

El próximo teorema nos proporciona todas las raíces n -ésimas de un número complejo.

Teorema 1.8.10. Sean $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $N \in \mathbb{N}$. Entonces existen exactamente N raíces n -ésimas de a , es decir, N números complejos z tales que $z^N = a$. En concreto, si θ es un argumento fijo de a , tales raíces son:

$$z_k = |a|^{\frac{1}{N}} e^{i\frac{\theta+2\pi k}{N}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

De la 2π -periodicidad de las funciones seno y coseno y del hecho de que dos argumentos de un número complejo no nulo a difieren en un múltiplo entero de 2π , se deduce que las raíces z_k anteriores no dependen de la elección del argumento para a . Claramente, los afijos de las raíces son los vértices de un polígono regular de N lados de centro el origen y radio $|a|^{\frac{1}{N}}$.

1.9. La exponencial y el logaritmo complejo

Introducimos ahora la exponencial exponencial de un número complejo $z = x + iy$

$$e^z = \exp z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Notemos que, en efecto, la definición anterior es una extensión de la exponencial real, y que es consistente con la definición de Euler de exponencial. Usando la definición de e^z , se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.9.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) *Para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tiene que $|e^z| = e^x$ y $\arg e^z = y + 2\pi\mathbb{Z}$.*
- (b) *(Teorema de la adición) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.*
- (c) *$e^{mz} = (e^z)^m$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $m \in \mathbb{Z}$.*
- (d) *$e^{2k\pi i} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^z = w$ tiene infinitas soluciones, lo que se traduce que el logaritmo de un número complejo sea un conjunto infinito de números

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\log |z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

1.10. Seno, coseno,.. complejo

Introducimos aquí las funciones trigonométricas e hiperbólicas, las cuales van a ser una extensión de las correspondientes funciones de variable real. Recordemos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ para cada $y \in \mathbb{R}$, de donde se deducen las así denominadas Fórmulas de Euler: $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ y $\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$. Recordemos también que, por definición, $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ y $\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ para cada $y \in \mathbb{R}$. Gracias a estas propiedades, no es difícil dar una definición que extienda este tipo de funciones al campo complejo.

Definición 1.10.1. Las *funciones trigonométricas* e *hiperbólicas* se definen de la siguiente forma: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$, y análogamente $\tanh z$, $\operatorname{coth} z$, $\operatorname{sech} z$ y $\operatorname{cosech} z$.

La siguiente proposición es de verificación inmediata a partir de las definiciones y de las propiedades de las correspondientes funciones de variable real.

Proposición 1.10.2. (1) *Las reglas trigonométricas y las hiperbólicas se trasladan idénticamente de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Específicamente, se tiene:*

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1, \quad y$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \quad \text{para cada } z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(2) *Las funciones $\cos$, $\cosh$, $\sec$, sech son pares y el resto impares.*

(3) *Para cada $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$, $\cos(iz) = \cosh z$.*

(4) $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$, $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. (5) $\cosh' = \operatorname{senh}$, $\operatorname{senh}' = \cosh$, $\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$.

(6) *Las funciones seno y coseno son 2π -periódicas. La función tangente es π -periódica. Los ceros de sen y $\tan$ son los múltiplos enteros de π , mientras que*

los de cos son los múltiplos impares de $\pi/2$. Además $\tan z$ es real si y solo si z es real.