LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS EJEMPLOS Y EJERCICIOS RESUELTOS

OPERACIONES (ÁLGEBRA DE CONJUNTOS) PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

CONMUTATIVA :

Dados dos conjuntos cualesquiera **A** y **B**, siempre se cumple que :

$$\boxed{A \cup B = B \cup A} \quad \boxed{A \cap B = B \cap A}$$

ASOCIATIVA :

Dados tres conjuntos cualesquiera , siempre se cumple que :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

ELEMENTO NEUTRO :

La unión del conjunto vacío con cualquier otro conjunto **A** es igual a dicho conjunto **A**.

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

Donde $\varnothing$ es el elemento neutro de la unión de conjuntos .

ABSORBENTE :

La unión del conjunto universal con cualquier otro conjunto **A** es igual al conjunto universal. como:

$$A \subset U \Rightarrow A \cup U = U \cup A = U$$

IDEMPOTENCIA :

La unión de un conjunto cualquiera , **A** , consigo mismo , es siempre el mismo conjunto, **A**. así :

$$A \cup A = A$$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

CONMUTATIVA :

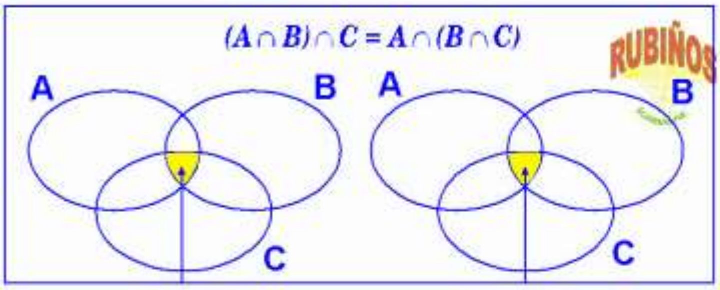
Dados dos conjuntos cualesquiera **A** y **B**, siempre se cumple que : $A \cap B = B \cap A$

ASOCIATIVA :

Dados tres conjuntos cualesquiera **A**, **B** y **C**, siempre se cumple que :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

GRÁFICAMENTE:



$(A \cap B) \cap C$ $\quad$ $A \cap (B \cap C)$

ELEMENTO NEUTRO :

La intersección del conjunto universal con cualquier otro conjunto **A** es igual a dicho conjunto **A** .Como :

$$A \subset U \Rightarrow A \cap U = U \cap A = A$$

U es el elemento neutro de la intersección de conjuntos.

ABSORBENTE :

La intersección del conjunto vacío con cualquier otro conjunto **A** es igual al conjunto vacío.

$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$$

IDEMPOTENCIA :

La intersección de un conjunto cualquiera **A** consigo mismo es siempre el mismo conjunto **A**. $\quad A \cap A = A$

PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

DISTRIBUTIVA :

Dados tres conjuntos cualesquiera **A , B** y **C**, siempre se cumple que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

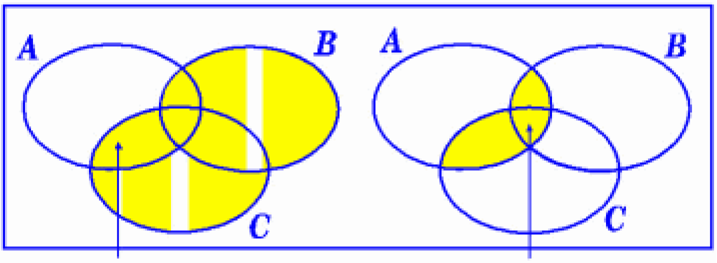
Esta es la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Esta es la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección.

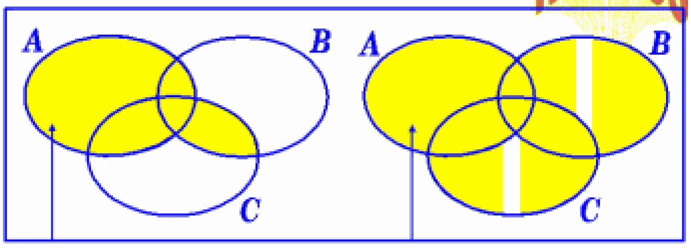
GRAFICAMENTE:

Distributiva de la intersección respecto de la unión.



$A \cap (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Distributiva de la unión respecto de la intersección.



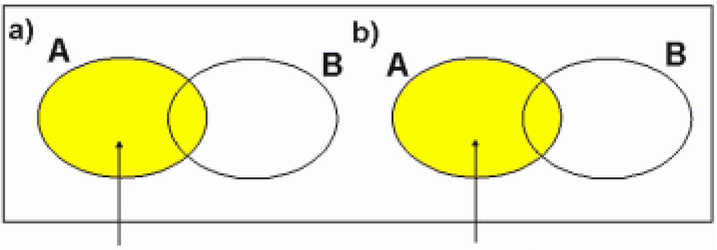
$A \cup (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

SIMPLIFICATIVAS O DE ABSORCIÓN

Dados dos conjuntos cualesquiera **A** y **B**, siempre se cumple que:

I) $(A \cup B) \cap A = A$ $\qquad$ II) $(A \cap B) \cup A = A$

GRAFICAMENTE:



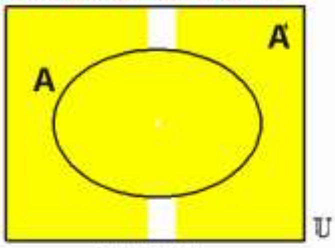
$(A \cup B) \cap A$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup A$

COMPLEMENTARIA :

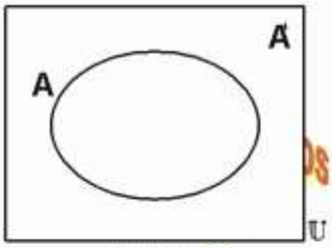
Dado un conjunto cualquiera **A** , siempre se cumple que :

$$A \cup A' = U \qquad\qquad A \cap A' = \varnothing$$

GRAFICAMENTE:



$A \cup A' = U$



$A \cup A' = \varnothing$

LEYES DE MORGAN :

De las propiedades anteriores se pueden deducir las siguientes fórmulas que relacionan la unión , la intersección y la complementación de conjuntos. Estas se llaman leyes de Morgan y son dos:

I) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

II) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

EJEMPLO:

Sea **U={2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20}** el conjunto universal, $A = \{x \in U / x$ es múltiplo de $3\}$ y $B = \{x \in U / x$ es múltiplo de $4\}$. Comprobar las leyes de Morgan con **A** y **B**.

RESOLUCIÓN :

A={6 ; 12 ; 18} y **B = {4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20}**.

A'={2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20}

B={2;6;10;14;18}

$(A \cup B)' = (\{6;12;18;4;8;16;20\})' = \{2 ; 10 ; 14\}$.

$(A \cup B) = \{2 ; 10 ; 14\}$

Por tanto : $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

$(A \cup B)'' = (\{12\})' = \{2 ; 4; 6 ; 8; 10 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20\}$.

$A' \cup B' = \{2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20 ; 6 ; 18\}$

Por tanto : $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

1) **INVOLUTIVA** $(A')'=A$

2) **IDEMPOTENCIA** $A\cup A=A$

$A\cap A=A$

3) **CONMUTATIVA** $A\cup B = B\cup A$

$A\cap B = B\cap A$

4) **ASOCIATIVA**

$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$

5) **DISTRIBUTIVA**

$A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$

$A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$

6) **DE MORGAN** $(A\cup B)' = A'\cap B'$

$(A\cap B)' = A'\cup B'$

7) **DE LA DIFERENCIA** $A-B=A\cap B'$

8) **DEL COMPLEMENTO** $A\cup A'=U$

$A\cap A' = \varnothing$

9) **DE LA UNIDAD**

$A\cup U=U$ $A\cap U=A$

$A\cup \varnothing=A$ $A\cap \varnothing=\varnothing$

10) **ABSORCION**

$A\cup (A\cap B)=A$

$A\cap (A\cup B)=A$

$A\cup (A'\cap B)=A\cup B$

$A\cap (A'\cup B)=A\cap B$

PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Si **"A"** y **"B"** son dos conjuntos finitos se cumple

1	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2	$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
3	Si: $A \cap B = \varnothing$, entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
4	Para tres conjuntos "A", "B" y "C" cualesquiera: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$ $- n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

EJEMPLO 1 :

Reduzca: $E = \{A \cap (A \cup B')\} - B'$

RESOLUCIÓN:

Por Absorción, Resultará:

$$E = A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$$

EJEMPLO 2 :

Si: $n(A)=8$; $n(B)=10$ y $n(A \cup B)=16$.

Halle: "$n(A \cap B)$"

RESOLUCIÓN:

Por propiedad:

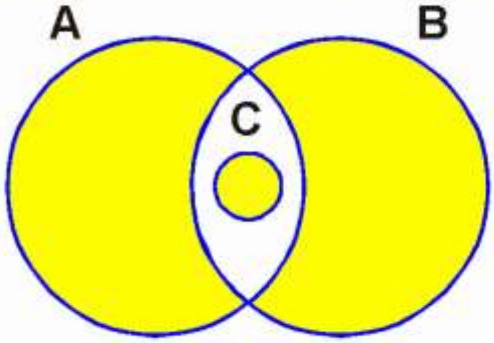
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 16 = 8 + 10 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

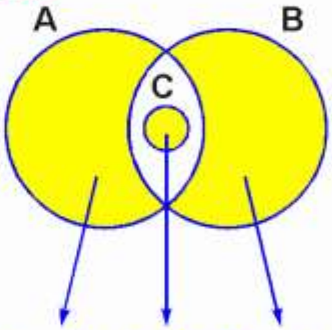
PROBLEMA 1 :

La región sombreada corresponde a:



A) $(A \cap B) \cup C$ B) $(A - B) \cup (B - A)$ C) $(A \cup B) \cap C$
D) $(A \cap B) \cup C$ E) $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cup C$

RESOLUCIÓN:



$$(A - B) \cup C \cup (B - A)$$

$$= (A - B) \cup (B - A) \cup C$$

$$= (A \triangle B) \cup C = [(A \cup B) - (A \cap B)] \cup C$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Simplificar:

$$[(A' \cup B) \cap (B' \cup A)]' \cup (A \cap B)$$

A) A B) B C) A^C D) $A \cup B$ E) $A \cap B$

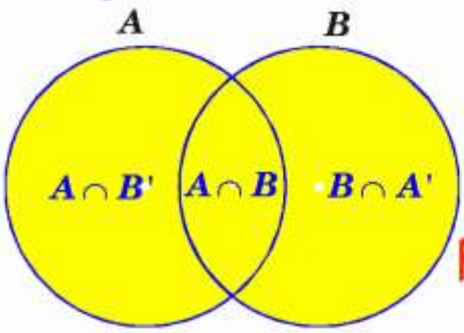
RESOLUCIÓN:

Por Morgan y el complemento.

$$(A' \cup B)' \cup (B' \cup A)' \cup (A \cap B)$$

$$(A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B)$$

Haciendo un gráfico:



Se deduce que:

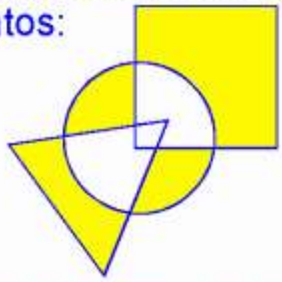
$$(A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B) = A \cup B$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

El conjunto sombreado, mostrado en la figura adjunta, representa una operación entre los conjuntos:

L = cuadrado
M= círculo
N = triángulo



A) $(M - L \cap N) \cup (L - M)$ B) $(M - L \cap N) \cup (N - M)$
C) $(M - L) \cup (M - N)$
D) $(N - M) \cup (L - M) \cup (L \cap M \cap N)$
E) $(L - M) \cup [M - (L \cup N)] \cup (N - M)$

RESOLUCIÓN:

Se observa que la parte sombreada del cuadrado **"L"** es: **(L–M)**; del círculo **"M"** es: **M–(L∪N)**; y del triángulo **"N"** es: **N–M**

Luego el conjunto sombreado total es la r e u n i ó n :
$(L - M) \cup [M - (L \cup N)] \cup (N - M)$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

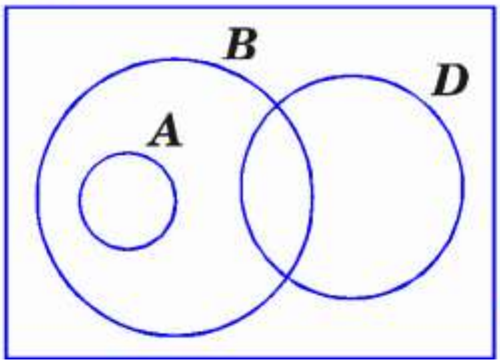
Si: $A \subset B$ y $A \cap D = \varnothing$

Simplificar: $[(A \cap D^C) \cap B^C] \cup [B \cup (A - D)]$

A) $A \cap B$ B) A C) B
D) $\varnothing$ E) $D \cap B$

RESOLUCIÓN:

Gráficamente:



Entonces:

$A \cap D^C = A$ $\qquad\qquad$ $A - D = A$

Luego la expresión pedida resultará:

$$\underbrace{(A \cap B^C)}_{\varnothing} \cup (B \cup A)$$

$$\varnothing \cup (B \cup A) = B$$

Se observa del gráfico

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Si **A** y **B** denotan dos conjuntos cualesquiera.

Al simplificar.

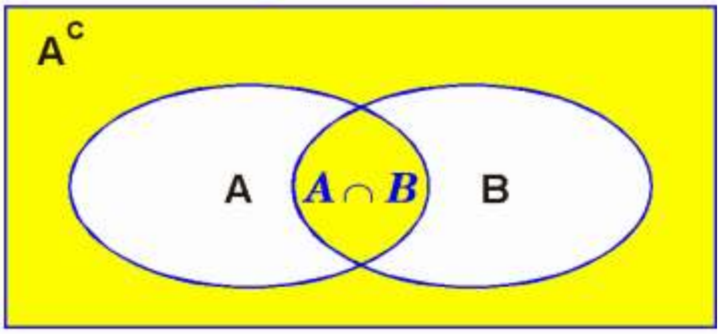
$\{(A \cup B) \cap [(A^C \cap B) \cup (A \cap B)]\} \cup (A^C \cap B^C) \cup A$

Resulta:

A) $\varnothing$ **B)** A **C)** B **D)** $A \cup B$ **E)** $A \cup A^C$

RESOLUCIÓN:

Veamos el diagrama adjunto:



Notemos que:

$(A^C \cap B) \cup (A \cap B) = B$; $(A \cup B) \cap B = B$

$B \cup (A^C \cap B^C) = (B \cup A^C) \cap (B \cup B^C)$

$= B \cup A^C \ldots(I)$

en la expresión se tiene :

$\{(A \cup B) \cap [(A^C \cap B) \cup (A \cap B)]\} \cup (A^C \cap B^C) \cup A$

$= \{(A \cup B) \cap B\} \cup (A^C \cap B^C) \cup A$

$= \{B\} \cup (A^C \cap B^C) \cup A = B \cup A^C \cup A = A^C \cup A$

RPTA : "E"

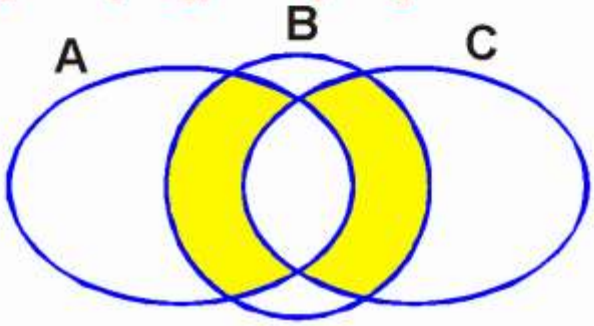
PROBLEMA 6 :

¿Cuál de las siguientes alternativas le corresponde al diagrama mostrado. Si **x'**: es el complemento de **x** en el universo.

I) $[(C \cap B) - A] \cup [(A \cap B) - C]$

II) $[C' \cap B] \cup [(A - B) \cup C']$

III) $(C - B)' \cap [(A \cup B) - C]$

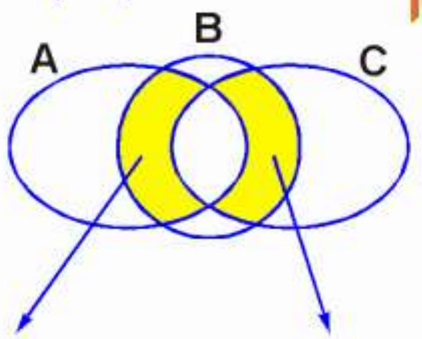


A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III

D) I y III E) Todas.

RESOLUCIÓN:

Analizando por partes:



$$[(A \cap B) - C] \cup [(B \cap C) - A]$$

Analizando **(III)** y **(II)** se verifica que no cumple.

RPTA : "A"

OPERACIONES (ÁLGEBRA DE CONJUNTOS) PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Conmutativa :

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, siempre se cumple que :

Asociativa :

Dados tres conjuntos cualesquiera , siempre se cumple que :

Elemento neutro :

La unión del conjunto vacío con cualquier otro conjunto A es igual a dicho conjunto A. Donde es el elemento neutro de la unión de conjuntos .

Absorbente :

La unión del conjunto universal con cualquier otro conjunto A es igual al conjunto universal. como:

Idempotencia :

La unión de un conjunto cualquiera , A , consigo mismo , es siempre el mismo conjunto, A. así :

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Conmutativa :

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, siempre se cumple que : Asociativa : Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, siempre se cumple que : Gráficamente: Elemento neutro :

La intersección del conjunto universal con cualquier otro conjunto A es igual a dicho conjunto A .

Como : es el elemento neutro de la intersección de conjuntos.

Absorbente :

La intersección del conjunto vacío con cualquier otro conjunto A es igual al conjunto vacío.

Idempotencia :

La intersección de un conjunto cualquiera A consigo mismo es siempre el mismo conjunto A. AA=A

PROPIEDADES DE LA UNIÓN y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS Distributiva : Dados tres conjuntos cualesquiera A , B y C, siempre se cumple que : Esta es la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión.

Esta es la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección. Graficamente: Distributiva de la intersección respecto de la unión. Distributiva de la unión respecto de la intersección. Simplificativas o de Absorción Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, siempre se cumple que: Graficamente: Complementaria : Dado un conjunto cualquiera A , siempre se cumple que : Graficamente:

LEYES DE MORGAN : De las propiedades anteriores se pueden deducir las siguientes fórmulas que relacionan la unión , la intersección y la complementación de conjuntos.

Estas se llaman leyes de Morgan y son dos:

EjEMPLO: Sea U={2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20} el conjunto universal, es múltiplo de 3} y es múltiplo de 4}. Comprobar las leyes de Morgan con A y B. Resolución : A={6 ; 12 ; 18} y B = {4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20}. A'={2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20} B={2;6;10;14;18}

PROBLEMA 6 : ¿Cuál de las siguientes alternativas le corresponde al diagrama mostrado. Si x': es el complemento de x en el universo. PROBLEMA 5 : Si A y B denotan dos conjuntos cualesquiera. Al simplificar. Resulta: Resolución: Veamos el diagrama adjunto: '=({6;12;18;4;8;16; 20})' = {2 ; 10 ; 14}. ={2 ; 10 ; 14} Por tanto : . '=({12})'= { 2 ; 4; 6 ; 8; 10 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20}. ={2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20 ; 6 ; 18} Por tanto : .

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO Si ''A'' y ''B'' son dos conjuntos finitos se cumple Ejemplo 1 : Reduzca: Resolución: Por Absorción, Resultará: Ejemplo 2 : Si: n(A)=8; n(B)=10 y n(AB)=16. Halle: ''n (AB)'' Resolución: Por propiedad: