APLICACIONES DE LA IO EN GRANDES COMPAÑIAS

PAG. 4 LIBRO DE CÁTEDRA IO.

https://www.studocu.com/latam/document/pontificia-universidad-catolica-madre-y-maestra/investigacion-de-operaciones/practicas/estudios-de-casos-investigacion-operaciones/4660221/view

ALGEBRA MATRICIAL

OBJETIVOS

- Proporcionar comprensión de la naturaleza de una matriz y la representación matricial de los datos.

- Proporcionar entendimiento del álgebra matricial.

ALGEBRA MATRICIAL

¿Qué es una matriz?

Siempre que se manejan datos, se debe interesar en organizarlos de manera tal que sean significativos y se puedan identificar con facilidad. Resumir los datos en forma tabular puede ayudar en esta función. Una *matriz* es una forma común para resumir y presentar números o datos.

Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de elementos.

Los elementos de una matriz por lo general son números reales, pero no siempre.

ALGEBRA MATRICIAL

Considere las calificaciones de prueba de cinco estudiantes en tres exámenes. Éstas se presentan en la siguiente matriz:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Prueba} \\
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\text{Estudiante} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matriz contiene el conjunto de calificaciones de prueba encerradas entre los paréntesis grandes. El arreglo tiene forma rectangular con cinco filas (una por cada estudiante) y tres columnas (una por cada prueba). Cada fila contiene las tres calificaciones de prueba para un estudiante particular. Cada columna contiene las cinco calificaciones en una prueba particular.

ALGEBRA MATRICIAL

i= fila

j= columna

Forma generalizada de una matriz

Una matriz A que contiene elementos a_{ij} tiene la forma general

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz generalizada se representa con *m* filas y *n* columnas. Los subíndices en un elemento a_{ij} indican la ubicación del elemento en una matriz. El elemento a_{ij} se localiza en la intersección de la fila *i* y la columna *j* de la matriz. Por ejemplo, a2,1 se localiza en la intersección de la fila 2 y la columna 1. El elemento a3,5 se ubicaría en la fila 3 y la columna 5 de la matriz.

EJERCICIO

Si la matriz de calificación de prueba de los estudiantes recibe el nombre de **S** y los elementos se expresan como *sij*, ¿cuáles son los elementos $s12$, $s32$, $s43$ y $s16$?

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Prueba} \\
 & & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\text{Estudiante} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

EJERCICIO

Si la matriz de calificación de prueba de los estudiantes recibe el nombre de **S** y los elementos se expresan como *sij*, ¿cuáles son los elementos $s12$, $s32$, $s43$ y $s16$?

S12(82)

S32 (70)

S43 (99)

S16 (NO EXISTE)

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Prueba} \\
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\text{Estudiante} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

TIPOS DE MATRICES

VECTORES

Hay una clase especial de matrices que se denomina ***vector***. Un vector es una matriz que sólo tiene una fila o una columna.

Definición: Vector fila

Un *vector fila* (o *vector renglón*) es una matriz que sólo tiene una fila. Un vector fila R con n elementos r_{ij} tiene una dimensión $(1 \times n)$ y la forma general

$$\mathbf{R} = (r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad \cdots \quad r_{1n})$$

TIPOS DE MATRICES

Definición: Vector columna

Un ***vector columna*** es una matriz que sólo tiene una columna. Un vector columna C con m elementos c_{ij} tiene una dimensión $m \times 1$ y la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

MATRICES CUADRADAS

UNA MATRÍZ CUADRADA ES UNA MATRÍZ QUE TIENE EL MISMO NÚMERO DE FILAS Y EL MISMO NÚMERO DE COLUMNAS.

$$\mathbf{A} = (3) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

MATRÍZ IDENTIDAD

ÚNA MATRÍZ IDENTIDAD (I) EN OCASIONES LLAMADA MATRÍZ UNIDAD, ES UNA MATRÍZ CUADRADA PARA LO CUAL TODOS LOS ELEMENTOS A LO LARGO DE LA DIAGONAL PRINCIPAL SON IGUALES A 1 Y TODOS LOS OTROS ELEMENTOS SON IGUALES A 0.

Si e_{ij} representa un elemento generalizado en una matriz identidad, entonces

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

Hay veces en que es necesario reordenar los elementos de datos en un matriz. La reordenación simplemente puede tener el objetivo de ver el arreglo de números desde una perspectiva diferente o manipular los datos en una última etapa. Una clase de reordenación consiste en la ***transpuesta*** de una matriz.

Para encontrar la transpuesta de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

primero se determina la dimensión de $\mathbf{A}^T$. Dado que $\mathbf{A}$ es una matriz (3×2), $\mathbf{A}^T$ será una matriz (2×3) con la forma

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \end{pmatrix}$$

Usando la definición anterior, se obtiene

$$\begin{array}{ll} a^t_{11} = a_{11} = 3 & a^t_{21} = a_{12} = 2 \\ a^t_{12} = a_{21} = 4 & a^t_{22} = a_{22} = 0 \\ a^t_{13} = a_{31} = 1 & a^t_{23} = a_{32} = -2 \end{array}$$

o bien

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

ENCONTRAR LA MATRÍZ TRANSPUESTA DE:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B(T)= \left\{ \phantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right.$$

EJERCICIO

ENCONTRAR LA MATRÍZ TRANSPUESTA DE:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B(T) = \left\{ \begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{matrix} \right.$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES

DOS MATRICES SE PUEDEN SUMARO RESTAR SI Y SÓLO SI TIENEN LA MISMA DIMENSIÓN.

Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 3 + 2 \\ 4 + 0 & -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando las mismas matrices,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 - (1) & 2 - (3) \\ 0 - (4) & 4 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

	4	8	1		2	5	0
A	0	5	3	B	1	6	7

PRODUCTO INTERNO DE UNA MATRÍZ

1. El producto interno se define sólo si los vectores fila y columna contienen el mismo número de elementos.
2. El producto interno resulta cuando se multiplica un vector fila por un vector columna y el producto resultante es una cantidad escalar.
3. Se calcula el producto interno al multiplicar los elementos correspondientes en los dos vectores y sumar algebraicamente.

Definición: Producto interno

Suponga que $\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$; entonces el ***producto interno***, expresado como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

PRODUCTO INTERNO DE UNA MATRÍZ

Considere la multiplicación de los siguientes vectores:

$$\mathbf{AB} = (5 \; -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el producto interno se multiplica el primer elemento del vector fila por el primer elemento del vector columna; se suma el producto resultante al producto del elemento 2 del vector fila y el elemento 2 del vector columna. Para los vectores indicados, se calcula el producto interno así: $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, o bien:

$$(5 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (5)(4) + (-2)(6) = 8$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

I *El producto matricial AB está definido si y sólo si el número de columnas de A equivale al número de filas de B, o si $n_A = m_B$.*

II *Si se puede realizar la multiplicación (es decir, $n_A = m_B$), el producto resultante será una matriz que tiene una dimensión $m_A \times n_B$.*

EJERCICIOS

DADA LA SIGUIENTE MATRÍZ, HALLE SU PRODUCTO.

$$\begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{pmatrix} 75(0.3) + 82(0.3) + 86(0.4) \\ 91(0.3) + 95(0.3) + 100(0.4) \\ 65(0.3) + 70(0.3) + 68(0.4) \\ 59(0.3) + 80(0.3) + 99(0.4) \\ 75(0.3) + 76(0.3) + 74(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.5 \\ 95.8 \\ 67.7 \\ 81.3 \\ 74.9 \end{pmatrix}$$

REPRESENTACIÓN DE UNA ECUACIÓN COMO MATRÍZ

Una ecuación se puede representar usando el producto interno. La expresión

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

se puede representar por medio del producto interno

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde el vector fila contiene los coeficientes de cada variable en la expresión y el vector columna contiene las variables. Multiplique los dos vectores para verificar que el producto interno dé como resultado la expresión original.

Para representar la *ecuación*

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 25$$

se puede igualar el producto interno con una matriz (1×1) que contiene la constante del lado derecho, o sea

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (25)$$

3x+5y-4z=25
2x +5z=21
y+ z=10

3x1+5y-4z=25
4y+4z=40

3x+9y =65

2x+5(10-y)=21
2x+50-5y =21
2x-5y =-29

Z=10-y

3x+9y=65 (2)
2x-5y =-29 (-3)

6x+18y=130
-6x+15y=87

---

0 +33y=217
y=6.58

Z=10-y
Z=10-6.58)
Z=3.42

2x-5y=-29
2x=-29+5(6.58)
2x=-29+32.9
X=3.9/2
X=1.95

6.58+3.42=10

2(1.95)+5(3.42)=21

3(1.95)+5(6.58)-4(3.42)=25

DETERMINANTE DE UNA MATRÍZ

Un concepto importante en el álgebra matricial es el del **determinante**. Si una matriz es cuadrada, los elementos de la matriz se pueden combinar para calcular un número de valor real llamado determinante. El concepto del determinante es de particular utilidad al resolver ecuaciones simultáneas.

DETERMINANTE DE UNA MATRÍZ

El determinante de una matriz de orden (1×1)

El determinante de una matriz de orden (1×1) simplemente es el valor del único elemento contenido en la matriz. Si $\mathbf{A} = (5)$, $\mathbf{\Delta} = 5$. Si $\mathbf{M} = (-10)$, $\mathbf{\Delta} = -10$.

El determinante de una matriz de orden (2×2)

Dada una matriz (2×2) que tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{\Delta} = a_{11}\, a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

El cálculo implica una multiplicación cruzada de los elementos en las dos diagonales, como se indica a continuación:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & \times \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \times & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}$$

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (1)(4) - (3)(-2) \\ &= 4 + 6 = 10 \end{aligned}$$

DETERMINANTE DE MATRIZ 3X3

- a11 a12 a13
- a21 a22 a23 = a11*a22*a33+a12*a23*a31+a21*a32*a13
- a31 a32 a33 -(a31*a22*a13+a32*a23*a11+a21*a12*a33)

- 1 0 2
- 3 2 1 = (1*2*-1)+(0*1*4)+(3*-3*2)-((2*2*4)+(0*3*-1)+(-3*1*1)
- 4 -3 -1 (-2+0-18)-(16+0-3)
  - -20-(13)
  - -33

- 2 4 3
- -2 1 0
- -3 1 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

EJERCICIO:

En una construcción, tres varillas cilíndricas se hallan ubicadas como se muestra en la figura. El Ingeniero a cargo de la obra necesita saber cuál es el diámetro de cada una, si están ubicadas en tal forma que al medirlas se tiene:

A= 1.250 cm ; B= 1.625 cm ; C= 1.875 cm.

Observemos que A representa la suma de los diámetros de la varilla más pequeña con la mediana.

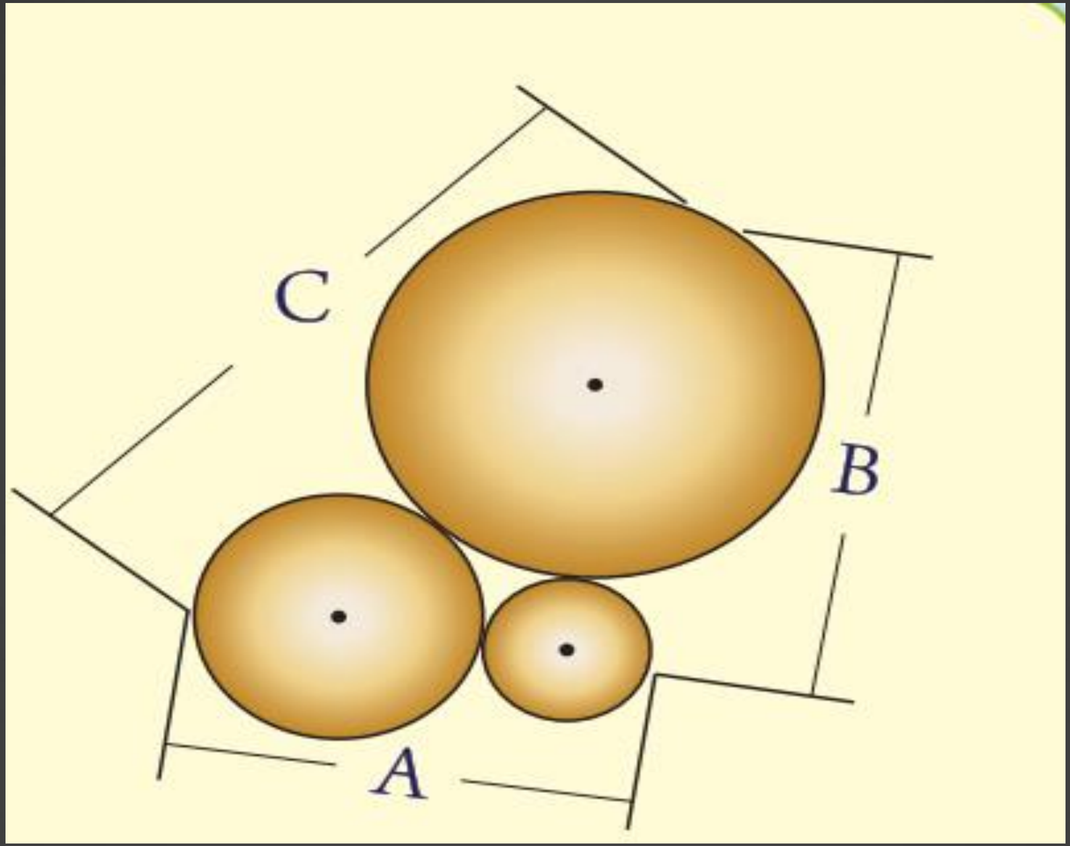
¿Qué representa B?.

¿Qué representa C?

¿Existirá una forma para encontrar el diámetro de cada una?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Figura/Varillas



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Solución:

X= Diámetro de la varilla más pequeña

Y= Diámetro de la varilla mediana

Z= Diámetro de la varilla más grande

A= 1.250 = x+y

B= 1.625 = x+z

C= 1.875 = y+z

$$x + y = 1.250 \quad (Ec\ 1)$$

$$x + z = 1.625 \quad (Ec\ 2)$$

$$y + z = 1.875 \quad (Ec\ 3)$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Solución:

Tomar dos de las tres ecuaciones:

x+y = 1.250 (Ec 1)

-x -z= -1.625 (Ec 2) (-1)

//y-z= -0,375 (Ec 4)

y+z = 1.875 (Ec 3)

y-z = -0,375 (Ec 4)

2y//= 1.500

Y= 0,750 cm

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Solución:

Sustituimos (y), en la Ec. 3

0,750 + z= 1.875

Z= 1.125 cm

Sustituimos (y), en la Ec. 1

x+ 0,750= 1.250

X= 0.500 cm

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Ejercicio:

Resuelva el siguiente sistema de Ecuaciones:

$2x+y+z = 7$ (Ec 1)

$x+y+2z = 18$ (Ec 2)

$x+2y+z = 15$ (Ec 3)

Solución: Tomamos 2 de las 3 ecuaciones (1 y 2).

$2x+y+z = 7$ (Ec 1)

$x+y+2z = 18$ (Ec 2)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Multiplicamos la Ec2 por (-1), se elimina la incógnita ¨y¨.

$2x+y+z\ = 7$

$-x - y-2z = -18$

$x\ //\quad -z\ = -11$ (Ec4)

Ahora eliminamos la misma incógnita para el caso (y) tomando una pareja distinta de ecuaciones. Así obtenemos una nueva pareja de ecuaciones que contienen sólo dos incógnitas.

Tomaremos las ecuaciones 2 y 3. Entonces:

$x+y+2z=18$ (Ec 2)

$x+2y+z=15$ (Ec 3)

Multiplicamos entonces la Ec 2 (-2) y se suma a la Ec 3 para eliminar ¨y¨.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Teniendo ahora:

$-2x-2y-4z = -36$

$x+2y+z = 15$

$-x \quad // \quad -3z = -21$ (Ec 5)

Ahora se tiene 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$x - z = -11$ (Ec 4)

$-x \; -3z = -21$ (Ec 5)

$// \quad -4z = -32$

$Z = -32/-4$

$Z = 8.$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Luego Sustituimos el valor de Z en la Ec. 4 Obteniendo:

$(x - z = -11)$

$x - 8 = -11$

$x = -11 + 8$

$X = -3.$

Por último sustituimos los valores de $x=-3$ y $z= 8$ en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar ¨y¨

$2(-3) + y + 8 = 7$ (Ec. 1)

$-6 + y + 8 = 7$

$Y = 5.$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

La solución entonces del Sistema de Ecuaciones planteado es: X= -3 ; Y= 5 ; Z= 8.

Se puede comprobar de la siguiente manera:

INCÓGNITAS	**2x+y+z= 7 (Ec 1)**	**x+y+2z= 18 (Ec. 2)**	**x+2y+z= 15 (Ec 3)**
X= -3	2(-3)+5+8=7	-3+5+2(8)= 18	-3+2(5)+8= 15
Y= 5	-6+5+8=7	-3+5+16=18	-3+10+8= 15
Z= 8	7=7	18=18	15=15

INECUACIONES

SON DESIGUALDADES ENTRE DOS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

DESIGUALDAD $10 > 7$

$8 < 5+4$

UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA PRETENDE ENCONTRAR EL VALOR DE UNA VARIABLE.

UNA INECUACIÓN LINEAL PUEDE SER EXPRESADA DE LAS SIGUIENTES FORMAS:

$5 > 10X$

$3X + 1 <= 12$

UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA PUEDE SER EXPRESADA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$3x^2 + 5X - 3 >= 0$

INECUACIONES

RESOLVER UNA INECUACIÓN ES HALLAR LOS VALORES PARA LOS QUE LA DESIGUALDAD ES VERDADERA. SE PUEDE REPRESENTAR GRAFICAMENTE O POR INTERVALOS.

$X+1> 10$

$X >-1+10$

$X > 9$ (Los números mayores que 9)

$(9, \infty)$

Ejercicios:

$(3x > 9)$; $(-5x> 20)$; $(x-3 <= 5)$; $(3x > 21)$; $(-4x>= 12)$; $(-2x < 16)$.

$x>9/3$; $x>3$ $(3,\infty)$

INECUACIONES

$3x^2$+5X-3= 0

$3\cdot x^2+5x-3 = 0$	| +3
$3\cdot x^2+5x = 3$	| :3
$x^2+1,667x = 1$	| Completa el cuadrado añadiendo $0,833^2$
$x^2+1,667x+0,833^2 = 0,833^2+1$	| Calcula $0,833$ elevado a 2 .
$x^2+1,667x+0,833^2 = 0,694+1$	| multiplica $0,694$ [multiplica x] y [y] 1
$x^2+1,667x+0,833^2 = 1,694$	| Simplifica usando el teorema del binomio.
$(x+0,833)^2 = 1,694$	| Saca la raíz cuadrada en ambos lados.
$x+0,833 = \pm\sqrt{1,694}$	
$x_1+0,833 = \sqrt{1,694}$	
$x_1+0,833 = \sqrt{1,694}$	| Calcula la raíz cuadrada de $1,694$
$x_1+0,833 = 1,302$	| $-0,833$
$x_1 = 0,468$	
$x_2+0,833 = -\sqrt{1,694}$	
$x_2+0,833 = -\sqrt{1,694}$	| Calcula la raíz cuadrada de $1,694$
$x_2+0,833 = -1,302$	| $-0,833$
$x_2 = -2,135$	

Conjunto de soluciones: $\{0,468;-2,135\}$