

TEMA

4

Análisis Dimensional

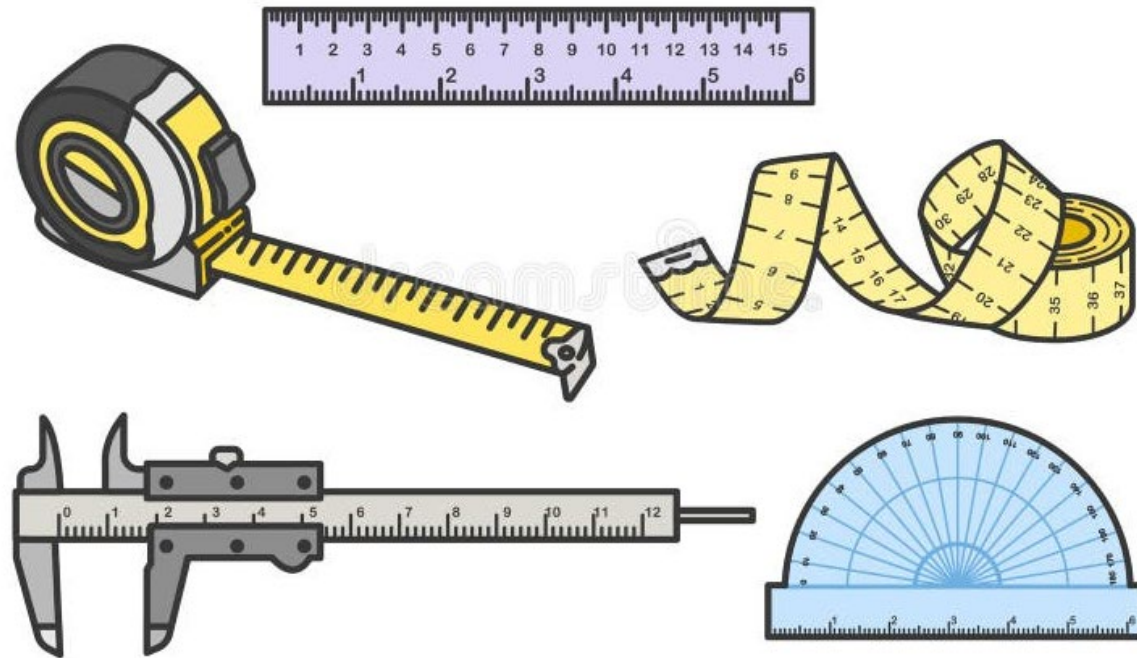


Resultado de aprendizaje: Verifica la homogeneidad dimensional de las ecuaciones físicas en el análisis y resolución de problemas científicos.

Dimensión de una magnitud física

En Física la palabra **dimensión** denota la naturaleza física de una cantidad.

Por ejemplo, ya sea que se mida una distancia en metros, pies, yardas o furlongs, se sigue tratando de una distancia. Todas ellas son diferentes formas de expresar la dimensión de longitud.



Una **ecuación dimensional** es una igualdad que relaciona las siete magnitudes fundamentales, cada una de ellas elevada a un exponente racional.

Las ecuaciones dimensionales son expresiones matemáticas que relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales. Se denota como:

$$[x] = L^a M^b T^c \theta^d I^e J^f N^g$$

Se lee: *Ecuación dimensional de x*. Con frecuencia se usan los corchetes [] para denotar las dimensiones de una cantidad física. Además, a, b, c... son números racionales.

Por ejemplo, en la tabla adjunta se mencionan las dimensiones y unidades de algunas magnitudes derivadas:

Cantidad	Área (A)	Volumen (V)	Rapidez (v)	Aceleración (a)
Unidades SI	m ²	m ³	m/s	m/s ²
Sistema inglés	ft ²	ft ³	ft/s	ft/s ²
Dimensiones	L ²	L ³	L/T = LT ⁻¹	L/T ² = LT ⁻²

Principio de homogeneidad dimensional

En muchas situaciones es posible que deba verificar una ecuación específica, para ver si satisface sus expectativas. El **análisis dimensional** ayuda para esta comprobación porque las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas.

Las ecuaciones que relacionan varias cantidades físicas deben ser **dimensionalmente homogéneas**. Esto quiere decir que ambos lados de una ecuación deben tener la misma dimensión.

Por ejemplo, la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$, donde x es una longitud, a es la aceleración y t es el tiempo; es dimensionalmente correcta porque:

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 \quad \leftrightarrow \quad L = L$$

Las dimensiones de tiempo se cancelan, como se muestra, lo que deja a la dimensión de longitud en el lado derecho para igualar con la de la izquierda.



El análisis dimensional sigue dos reglas:

La adición o sustracción no se aplican a las magnitudes físicas.

Por ejemplo:

- Si la ecuación $W = X + Y$ es dimensionalmente correcta, entonces $[W] = [X] = [Y]$.
- En la ecuación $A + B = C - D$, se debe cumplir que $[A] = [B] = [C] = [D]$.

Los ángulos, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas y, en general, cualquier número, son *adimensionales*. Del mismo modo, los exponentes también se consideran como números y, por lo tanto, su dimensión es igual a 1.

Por ejemplo:

- La dimensión de $\sen 45^\circ$ es $[\sen 45^\circ] = 1$ puesto que se considera como un número.
- En la ecuación $x = c^{k \cdot a}$, la dimensión del exponente de c es $[k \cdot a] = [k] \cdot [a] = 1$, por lo tanto $[x] = [c]^1$.
- En la ecuación $A = B \cdot \log(C)$, se tiene $[A] = [B \cdot \log(C)] = [A] = [B][\log(C)] = [A] = [B]$.

Ejemplo 4.1

Demuestre que la expresión $v = at$ es dimensionalmente correcta, donde v representa rapidez, a aceleración y t un instante de tiempo.

Ejemplo 4.2

Determinar las dimensiones del calor específico c_e en la ecuación $Q = mc_e\Delta T$; donde Q : calor, m : masa, ΔT : cambio de temperatura.

Ejemplo 4.3

Un gas ideal cumple la siguiente relación: $PV = nRT$, donde P : presión, V : volumen, T : temperatura y n : cantidad de sustancia. Determine $[R]$.

Ejemplo 4.4

Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta: $xy - ztg53^\circ = RV \log(n)$. Hallar $[x]$ y $[z]$, sabiendo que R : área, V : volumen y y : densidad.

Ejemplo 4.5

Si la ecuación siguiente es correcta, hallar [x]:

$$Q = Q \log \left(y^2 + \frac{xa}{b} \right)$$

donde a : aceleración y b : velocidad.

Ejemplo 4.6

Determine $x - 3y$ si la ecuación $P = A^z K^x V^{-y}$, siendo P : presión, A : fuerza, K : longitud y V : volumen.

Actividades en clase

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente correcta? (a) $v_f = v_0 + ax$; ó (b) $y = (2 \text{ m}) \cos(kx)$, donde $k = 2 \text{ m}^{-1}$. **R.: solo (b)**

2. Suponga que la ecuación $x = At^3 + Bt$ describe el movimiento de un objeto en particular, siendo x la dimensión de la longitud y T la dimensión del tiempo. Determine las dimensiones de las constantes A y B . **R.: $[A]=LT^{-3}$; $[B]=LT^{-1}$**

3. La energía cinética K tiene dimensiones se puede escribir en términos de la cantidad de movimiento p y la masa m como $K = p^2/2m$. Determine las unidades adecuadas para la cantidad de movimiento utilizando análisis dimensional. **R.: $\text{kg}\cdot\text{m/s}$**

4. La ecuación de la energía mecánica de un objeto que cuelga de un resorte está dada por $E = Av^2 + Bx^2 + Ch$, donde v : velocidad, h : altura respecto al suelo, x : estiramiento del resorte. Determine las dimensiones de $A\cdot B\cdot C$. **R.: M^3LT^{-4}**

Actividades en clase

5. Determinar las dimensiones de P/a^2 en la siguiente ecuación sabiendo que R : fuerza y c : masa. **R.: LT^{-2}**

$$Q = \frac{Ra^2 + Pa - K}{Pc - Rc^2 + k}$$

6. La energía cinética molecular de los gases monoatómicos está dada por la siguiente ley: $E = \frac{3}{2}KT$. Si E : energía y T : temperatura; determine la dimensión de K (llamada constante de Boltzman). **R.: $ML^2T^{-2}\theta^{-1}$**

7. Determinar las dimensiones de K si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta:

$$(AB^x \tan \alpha)^2 + \frac{Kg}{V} = (ABC^y) \cdot \log^2 N$$

Siendo A : área, g : aceleración de la gravedad, B : volumen, V : velocidad y C : densidad.

R.: L^3T